



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

### **Usage guidelines**

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

### **About Google Book Search**

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>



## A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

## Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

- + *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.
- + *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.
- + *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.
- + *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

## À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse <http://books.google.com>



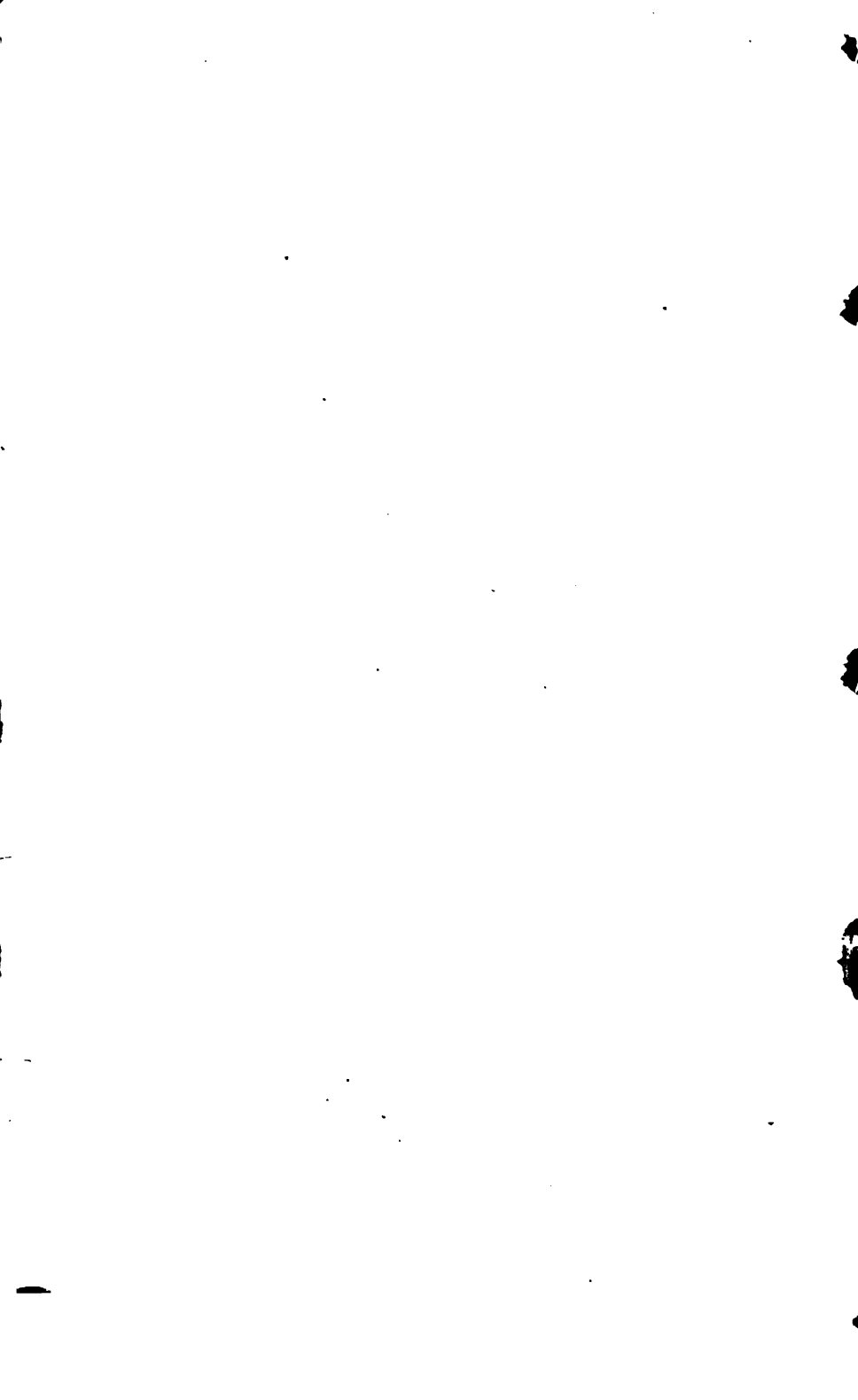
REESE LIBRARY  
OF THE  
UNIVERSITY OF CALIFORNIA.

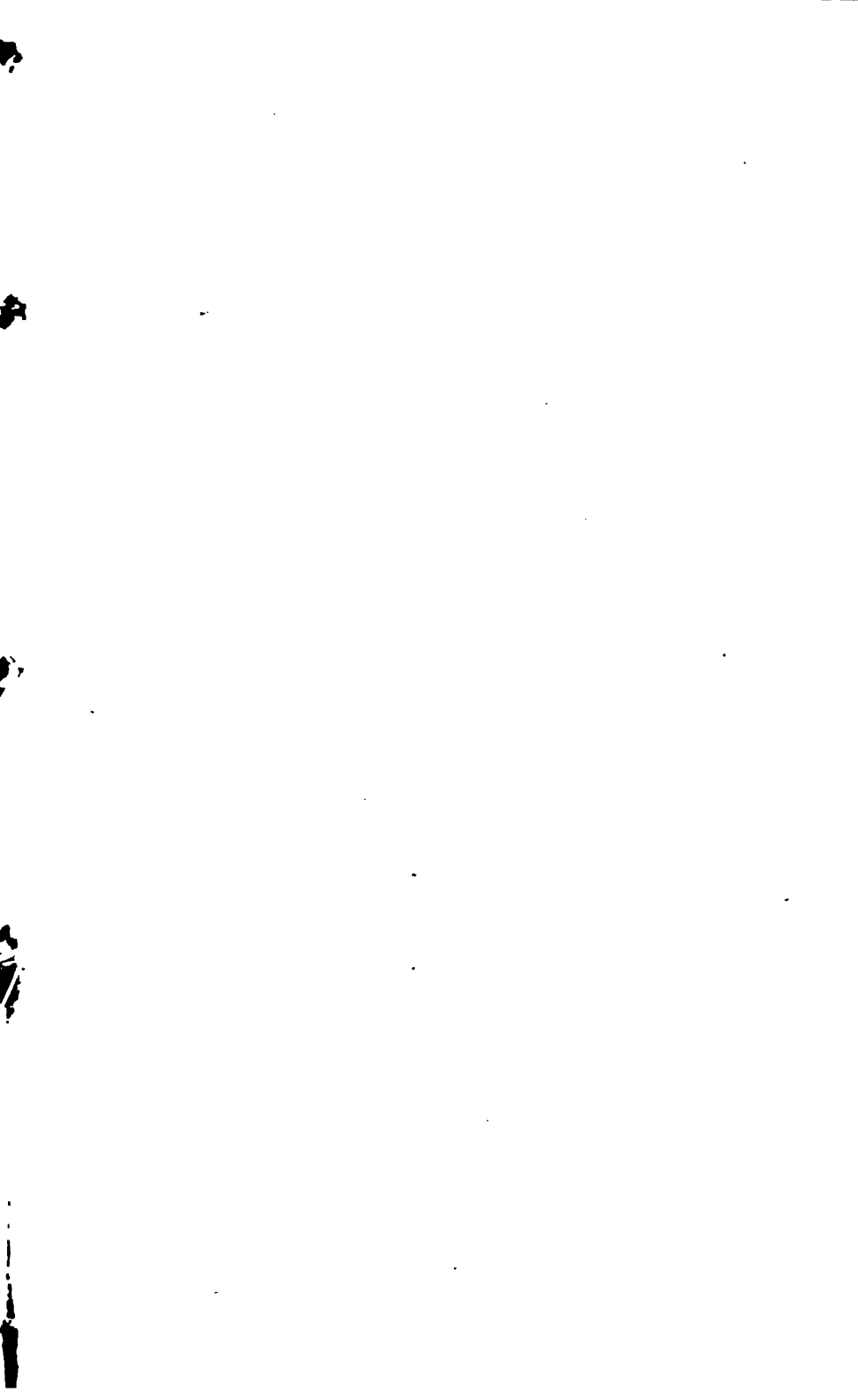
Received October 1881

Accessions No. 15961

Shelf No. 65E









RÉSUMÉ DES LEÇONS

DONNÉES

A L'ÉCOLE DES PONTS ET CHAUSSÉES

SUR

L'APPLICATION DE LA MÉCANIQUE.

---

RÉSISTANCE DES CORPS SOLIDES.

---

FASCICULE I.



RÉSU

A L'ÉCO

L'AFR  
A L'ÉTABLIS

CONTIN  
ET SON C'EST

DE LA

Membre de l'Académie  
et de l'Institut

AVEC

M.  
Imprimeur en chef  
à l'Imprimerie de la  
Maison de la République

---

Paris. — Imprimé par E. TAYMOR ET C<sup>e</sup>, 26, rue Racine.

LIBRAIRIE D

# RÉSUMÉ DES LEÇONS

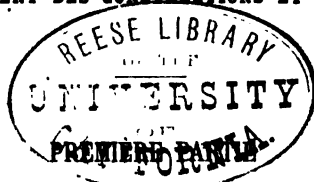
DONNÉES

A L'ÉCOLE DES PONTS ET CHAUSSÉES

SUR

L'APPLICATION DE LA MÉCANIQUE

A L'ÉTABLISSEMENT DES CONSTRUCTIONS ET DES MACHINES.



CONTENANT LES LEÇONS SUR LA RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX  
ET SUR L'ÉTABLISSEMENT DES CONSTRUCTIONS EN TERRE, EN MAÇONNERIE  
ET EN CHARPENTE.

PREMIÈRE SECTION.

## DE LA RÉSISTANCE DES CORPS SOLIDES.

PAR NAVIER,

Membre de l'Institut (Académie des sciences), Inspecteur divisionnaire des Ponts  
et chaussées, professeur d'analyse et de mécanique à l'École polytechnique, etc.

Troisième édition

AVEC DES NOTES ET DES APPENDICES,

PAR

M. BARRÉ DE SAINT-VENANT,

Ingénieur en chef des ponts et chaussées en retraite, ancien professeur adjoint de  
mécanique à l'École des ponts et chaussées, et professeur de génie rural à l'Institut  
agronomique, membre de la Société philomathique de Paris, etc.

TOME I<sup>er</sup>. — FASCICULE I.



PARIS

DUNOD, ÉDITEUR

LIBRAIRE DES CORPS IMPÉRIAUX DES PONTS ET CHAUSSÉES ET DES MINES,  
Quai des Augustins, 49.

1864

TA 350  
N3  
1864  
v. 1:1  
Case B  
7

13961

# TABLE DES MATIÈRES.

	Pages.
Notice biographique sur Navier, par M. de Prony. . .	xxxix
<i>Id.</i> par M. Emmsery. . .	lj
Discours à ses funérailles, par M. Girard. . . . .	liij
Notice sur les ouvrages de Navier (par l'auteur des notes).	xv
Préface de Navier, 1826. . . . .	lxxxiv
Avertissement (de Navier) sur l'édition de 1883. . . .	lxxxviij

**Historique abrégé des Recherches sur la Résistance  
et sur l'élasticité des corps solides (\*).** Page XC

	N <sup>o</sup>
Moyen âge. . . . .	i
Gallois. . . . .	ii
Suite de Galois, Biondel, Marchetti. . . . .	iii
Hooke et Mariotte. Etablissement du principe fondamental. . . . .	iv
Jacques Bernoulli. (Son erreur.) . . . . .	v
Leibnitz. Varignon. Parent. (Rectification.) . . . . .	vi
Coulomb. . . . .	vii
Girard, Barlow, Tredgold. . . . .	viii
Navier (premiers essais et leur rectification). . . . .	ix
Navier (suite). Thomas Young. . . . .	x
Cas où le calcul des résistances doit être précédé de celui des flexions.	
• Résistances inconnues. Moyen de faire cesser toute indétermination. . . .	xi
Courbes élastiques plissées. Bernoulli. . . . .	xii
Classification des courbes élastiques plissées par Euler. . . . .	xiii
Suite. Lagrange. Euler. Pièces de bois; parabole apparente. . . . .	xiv
Suite. Navier. Ses solutions de problèmes imprévus. Sa détermination de la flexion des pièces courbes, etc. . . . .	xv
Flexion oblique ou déviée. . . . .	xvi
Flexion accompagnée d'écartement ou de compression longitudinales.	
Limites de celles-ci, données par M. Foncolet des limites des extensions. . .	xvii

(\*) Le long travail sur la Résistance et l'Élasticité des corps solides que nous publions sous la forme de Notes aux belles Leçons de Navier a été plusieurs fois interrompu dans son impression par des recherches sur des parties que nous avons tâché d'approfondir. Les feuilles 4 à 44 (p. 4 à 224) ont été tirées en 1857, en Feuilles 45 à 24 en 1858, celles de 25 à 24 en 1859, de 25 à 42 en 1860, de 44 à 53 en 1865, les Notes et l'Historique en 1864. D'où la nécessité ou l'utilité de recourir, sur quelques points, à plusieurs endroits de livre, comme nous l'indiquons, dans la Table des matières, là où il y a lieu.

	N <sup>o</sup>
Glissement et force tangentielle. Dubamel du Monceau. Coulomb.	
Young. Vicat. etc. . . . .	XVIII
Torsion (d'un cylindre circulaire d'abord). Coulomb, etc. . . . .	XIX
Courbes élastiques à double courbure, et torsion avec flexion. Lagrange. Binet. Poisson. Wantzel, etc. . . . .	XX
Suite. Mise en compte du troisième Moment. Déplacement angulaire du rayon de courbure. . . . .	XXI
Mécanique moléculaire. Newton. Boscovich. Clairaut. Laplace. Poisson et Navier (pour la plaque élastique d'abord). . . . .	XXII
Fondation de la théorie générale de l'élasticité. Navier. . . . .	XXIII
Suite. Fresnel. . . . .	XXIV
Théorie des pressions dans les solides. Dilatations en divers sens. Cauchy. . . . .	XXV
Suite. Formules générales pour les corps hétérotropes. . . . .	XXVI
Suite. Poisson. . . . .	XXVII
Suite. Poisson et Cauchy pour les sommes non remplaçables par des intégrales. Remarque de M. Clausius. . . . .	XXVIII
Suite. Polémique entre Poisson et Navier. . . . .	XXIX
Suite. MM. Lamé et Clapeyron. . . . .	XXX
Suite. M. Dubamel (prise en considération des températures). . . .	XXXI
Premières applications de cette nouvelle branche de la Mécanique, par MM. Poisson et Cauchy. . . . .	XXXII
Applications par MM. Lamé et Clapeyron. . . . .	XXXIII
Solution ultérieure, par M. Lamé, du problème de la sphère pleine ou creuse sollicitée d'une manière quelconque. Difficultés pour les prismes. Nécessité de se contenter de solutions qui supposent un mode particulier de distribution des forces sur les bases. Impossibilité, le plus souvent, de connaître même le mode qui est censé donné. Méthode inverse. MM. Lamé et Clapeyron. . . . .	XXXIV
Méthode mixte, plus étendue dans ses applications. Torsion. . . . .	XXXV
Torsion présentée élémentairement. . . . .	XXXVII
Suite de la méthode mixte. Flexion inégale ou avec glissement. . . .	XXXVIII
Sur les solutions indirectes en général. Remarque d'Ampère. . . .	XXXIX
Problème le plus général de cette sorte. M. Clebsch. . . . .	XL
Tiges infiniment minces. M. Kirchhoff. . . . .	XLI
Emploi du Potentiel des forces moléculaires, ou de leur travail entre l'état naturel et un état déterminé. Navier. Green. Thomson. M. Clapeyron. . . . .	XLII
Nombre des coefficients des formules. . . . .	XLIII
Manières successivement proposées d'établir les conditions de résistance à la rupture éloignée. Préférence à donner à la limitation des dilatations. Mariotte. M. Poncelet. Flexion et torsion simultanées. . . . .	XLIV
Cas où cette limite n'est pas la même en tous sens. . . . .	XLV
Exceptions apparentes. . . . .	XLVI
Matériau hétérogène : matière qui n'est homogène que cylindriquement ou sphériquement. . . . .	XLVII
Rupture immédiate ou prochaine. M. Hodgkinson. . . . .	XLVIII
Pièces posées et sollicitées de diverses manières. Réactions inconnues. Systèmes de charpente. Serrage et calage. M. Michon. . . . .	XLIX
Vibrations. Résistance vive ou <i>résilience</i> des pièces. Cas où l'on peut négliger leur inertie. Young. M. Poncelet. M. Clapeyron. Module de résilience de Treégold. Proportionnalité au simple volume. . . . .	L

	N <sup>o</sup>
Prise en considération approximative de la masse des pièces heurtées quant au partage de la vitesse. Tredgold, M. Hodgkinson. . . . .	LI
Prise en considération de leur inertie, comme cause que leurs parties n'entrent au mouvement que successivement. Young. . . . .	LII
Calcul du mouvement des diverses parties. Cordes et lames. Taylor, D. Bernoulli, Euler, D'Alembert. . . . .	LIII
Solution complète pour la corde, puis pour les lames. Formules de Lagrange, d'Euler, de Fourier. Solutions de Poisson, de Cauchy. . . .	LIV
Participation des masses heurtantes au mouvement vibratoire. Solution de Navier pour le choc longitudinal. Complément par M. Poncelet. . .	LV
Solution analogue pour le choc transversal. Expériences confirmatives. . . . .	LVI
Résistance vive sans choc. Bielles et balanciers. Tredgold, Charge voyageuse, M. Willis, M. Stokes, M. Phillips. . . . .	LVII
Surfaces élastiques. Sphère et cylindre creux, tuyaux, vases, chaudières et réservoirs. Mariotte, Navier, M. Lamé. . . . .	LVIII
Plaques et membranes. Euler, Jacques Bernoulli (de 1787), Sophie Germain, Lagrange, Poisson (1814.) Rectification presque complète et applications exactes par Navier. . . . .	LIX
Solite des plaques et membranes. Poisson (1828), Cauchy, M. Lamé, M. Kirchhoff, Potentiel moléculaire véritable développé par la flexion d'une plaque mince. Nombre des conditions aux limites. . . . .	LX
Expériences et observations sur la résistance et l'élasticité des corps solides. . . . . (et n <sup>os</sup> suivants) . . . . .	LXI

DE LA RÉSISTANCE DES CORPS SOLIDES.

	Pages.
<b>PRÉLIMINAIRES.</b> . . . . .	1
<b>N<sup>o</sup> 1, 2.</b> Deux sortes de problèmes. Diverses sortes d'efforts auxquels un prisme peut être soumis. . . . .	1 et 2
<b>1<sup>re</sup> note</b> du n <sup>o</sup> 1. La répulsion n'est pas attribuable à la chaleur. . . . .	2
<b>2<sup>e</sup> note</b> du n <sup>o</sup> 1. § 1. Recherches générales (de mécanique moléculaire) dont parle Navier. . . . .	2
(Voyez pour cette nouvelle branche de la mécanique, le 3 <sup>e</sup> Appendice, p. 541-616.)	
<b>2<sup>e</sup> note</b> du n <sup>o</sup> 1. § 2. Hypothèses citées. Possibilité de s'en passer. . . . .	2
<b>§ 3.</b> Principe des actions entre les molécules ou entre les points matériels. . . . .	3
<b>§ 4.</b> Premières conséquences. Élasticité. . . . .	<i>id.</i>
<b>§ 5.</b> Vibrations. Ébranlements. Effets de l'inertie. . . . .	<i>id.</i>
<b>§ 6.</b> Écrouissage. Énervation. Rupture . . . . .	4
<b>Notes</b> du n <sup>o</sup> 2. Glissement. Cisaillement. . . . .	5
(Voir n <sup>os</sup> 152, 153, 154 et leurs notes.)	



	Pages.
<b>ARTICLE I<sup>er</sup></b> (compression). <i>De la résistance des corps à un effort qui tend à produire l'écrasement.</i> . . . . .	5
N <sup>o</sup> 3. <i>Idem.</i> . . . . .	<i>id.</i>
Note du n <sup>o</sup> 3. § 1. Théorie de l'écrasement ou de la rupture des prismes courts par compression. . . . .	<i>id.</i>
§ 2. La compression toute seule n'est pas une cause de désagrégation. Machine à courber les bois de M. Blanchard.	6
3. Essai d'une théorie de l'écrasement, par Coulomb. . . .	<i>id.</i>
4. Cause générale assignable aux ruptures ou aux énerve- tions, à savoir, que les dilatations (sans s'occuper des contractions) viennent à excéder certaines limites qui varient avec les sens. . . . .	8
5. Effets contraires des deux composantes obliques du poids comprimant, et nécessité de renoncer au rai- sonnement de Coulomb. . . . .	<i>id.</i>
6. Dilatations ou contractions transversales qui accompa- gnent les contractions ou dilatations longitudinales.	9
7. Condition théorique de la résistance à la rupture (éloi- gnée) par compression, en supposant connues les ré- sistances à la rupture par extension en tous sens. . .	10
8. Modifications à y apporter. Métaux. Bois. . . . 10 à (Cette théorie est entièrement de M. Poncelet. Voir note du n <sup>o</sup> 156, § 43, p. 381.) ( Voir aussi Appendice complémentaire, p. 822 au bas.)	12
9. Observation des constructions éprouvées. Expériences d'écrasement (immédiat) pour établir des comparai- sons. Distinction de la rupture immédiate ou pro- chaine et de la rupture éloignée. Coefficient R'. . .	12
( Voir aussi note du n <sup>o</sup> 113, §§ 10 à 13, p. 103 à 114.)	
N <sup>o</sup> 4 à 20. On les renvoie plus loin ainsi que la mention des autres résultats d'expériences. . . . .	13
<b>ARTICLE II</b> (extension). <i>De la résistance des corps à un effort dirigé dans le sens de la longueur, qui tend à produire l'extension et la rupture.</i>	14
N <sup>o</sup> 21. Double problème. . . . .	<i>id.</i>
Note. § 1. Résultats généraux des expériences d'extension et de rupture par extension. . . . .	<i>id.</i>

TABLE DES MATIÈRES.

. ix

Pages.

Suite de la note n° 24.

2. Proportionnalité des efforts aux effets très-petits, obtenus également dans deux sens opposés. . . . .	15
Théorème de <i>superposition</i> ou de <i>composition</i> géométrique correspondante des forces et des petits changements qu'elles engendrent. . . . .	<i>id.</i>
3. Démonstration de la proportionnalité des forces de traction aux superficies des bases, ainsi qu'aux dilatations produites. Contractions transversales. . . . .	16
4. Expression de cette loi. . . . .	17
5. Coefficient ou module d'élasticité d'extension E. Rapports $\eta$ et $\eta'$ des contractions latérales aux dilatations longitudinales. . . . .	18
Sous-note. Hauteur du module d'après la définition de Young. . . . .	<i>id.</i>
6. Conditions de la parfaite exactitude de la formule de l'extension. Observation sur le mode d'application et de répartition des actions exercées extérieurement. La formule est suffisamment approchée pour d'autres modes. . . . .	19
(Voir aussi notes du n° 80, p. 40; du n° 150, p. 254; 2 <sup>e</sup> Appendice, p. 520 à 523; Appendice complémentaire, p. 829, 830, 849.)	
7. Cas où la matière n'est pas de même nature dans l'étendue d'une section. Condition pour que les formules s'y appliquent en faisant simplement varier E. . . .	20
(Voir aussi notes n° 80, p. 42; n° 143, p. 115.)	
8. Dilatations qui ne sont pas très-petites. Déformations permanentes. L'élasticité subsiste malgré ces déformations. . . . .	21
9. Caractères de l'écroutissage et de l'énervation. Cause présumable de celle-ci. Rupture finale. . . . .	22
10. Les déformations persistantes n'accompagnent pas toujours les déformations élastiques ou temporaires. Constructions anciennes; rochers, etc. . . . .	23
11. Le calcul est toujours applicable. . . . .	<i>id.</i>
12. Condition de la résistance à la rupture par extension, immédiate ou éloignée. Point qui sépare l'écroutissage de l'énervation. Circonstances accidentelles dont il faut tenir compte. Double effet des vibrations, ou même des simples intermittences d'action. . . . .	24
Limites $\epsilon'$ des dilatations prolongées non dangereuses. Coefficient de cohésion permanente R. = $E\epsilon'$ . . . . .	<i>id.</i>
N° 22 à 75. (Renvoyés). . . . .	26

	Pages.
<b>ARTICLE III (flexion). De la résistance d'un corps prismatique à la flexion produite par un effort dirigé perpendiculairement à la longueur de ce corps. . . . .</b>	<b>27</b>
N <sup>o</sup> 76 à 80. Équilibre d'une pièce fléchie. Moment de flexion. Axe d'équilibre ou ligne des fibres invariables. 27 à	31
Notes des n <sup>o</sup> 76, 77, 79. . . . .	id.
Note du n <sup>o</sup> 80. § 1. Notations et démonstrations plus simples. Moments d'inertie I des sections $\omega$ . Ce qu'on appelle aujourd'hui le <i>moment de flexion</i> M. . . . .	31
§ 2. Hypothèses (inexactes) qui sont tacitement invoquées. Elles ne sont point nécessaires. . . . .	32
3. Démonstration (sans ces hypothèses) des formules de la flexion pour le cas où elle a lieu d'une manière égale ou en arc de cercle. Modifications transversales qu'éprouve la forme des sections. . . . .	34
4. <i>Idem</i> dans le cas général de la flexion inégale ou non circulaire. <i>Glissements</i> qui l'accompagnent nécessairement. Inflexion, en doucine, des sections primitivement planes, et inclinaisons prises par les fibres sur ces sections. . . . .	36
(V. Notes, p. 212, 393, 404, et Appendice complémentaire, § 79, 1 <sup>o</sup> , p. 767.)	
5. Cas plus général où la texture n'est pas la même dans tous les sens transversaux. . . . .	39
6. Observation sur le mode d'application et de distribution des forces qui font fléchir. Ce mode particulier est nécessaire pour la parfaite exactitude des formules. Mais les formules sont suffisamment approchées pour tout autre mode. Faits à l'appui. . . . .	40
(Voir aussi p. 40, 254, 521-523, 829-830.)	
7. Cas où l'élasticité varie dans l'étendue d'une même section. Pièces de métal. Pièces de bois. . . . .	41
(Voir aussi p. 20, 115.)	
8. Les moments des forces peuvent être pris autour de lignes ne passant pas par le centre de gravité des sections. Cas où les forces ont une composante longitudinale totale. . . . .	44
N <sup>o</sup> 81. Section rectangle. . . . .	45
Note. § 1. Démonstration élémentaire des formules de moments d'inertie. Méthode de M. Poncelet. . . . .	id.
2. Autre méthode de démonstration. . . . .	46
3. Recherche élémentaire de la somme des produits des	

suite de la note du n° 81.	
puissances d'une quantité variable par les accroissements successifs qu'elle prend. . . . .	47
§ 4. Théorème donnant le moment d'inertie d'une figure autour d'une droite quand on le connaît autour d'une parallèle passant par son centre de gravité. . . . .	48
N° 82. Section triangulaire isocèle. . . . .	<i>id.</i>
Note § 1. Moment d'inertie d'un triangle autour d'un de ses côtés. . . . .	<i>id.</i>
§ 2 et 3. — D'un trapèze autour d'un de ses quatre côtés. . . . .	49
§ 4, 5, 6. — D'un triangle autour de diverses droites. . . . .	50, 51
7. Application à des figures polygonales quelconques. . . . .	51
N° 83. Section rectangulaire placée obliquement. . . . .	52
Note. (Flexion oblique ou déviée). . . . .	<i>id.</i>
§ 1. Erreur où conduirait la formule du n° 83. Condition pour que le plan de flexion soit le même que le plan de sollicitation à fléchir. . . . .	<i>id.</i>
2. Détermination de la grandeur et de la direction de la flexion lorsque cette condition (du parallélisme du plan de sollicitation à l'un des axes principaux d'inertie des sections) n'est pas remplie. . . . .	53
(Voir aussi note du n° 156, § 54, p. 438, et figures.)	
3. Autre détermination, au moyen de l'ellipse d'inertie. . . . .	54
4. Détermination de la courbe d'axe et de la flèche, pour la flexion oblique ou déviée. . . . .	55
5. Application à une section rectangulaire. Évaluation des erreurs auxquelles donnerait lieu l'usage de la formule du texte du n° 83. . . . .	56
6. Observation sur les pièces droites non prismatiques. Double courbure et torsion qu'elles prennent. . . . .	<i>id.</i>
7. On peut présenter d'une manière très-élémentaire la théorie de la flexion oblique ou déviée. . . . .	57
8. Direction et grandeur de la courbure, déterminées élémentairement. . . . .	59
9. Détermination des axes et des moments d'inertie principaux des figures planes. . . . .	60
10. Théorèmes pour le calcul de $K = \int uv d\omega$ dans toutes les figures en les décomposant en rectangles et en triangles. . . . .	61
N° 84. Section circulaire. . . . .	63
Note. § 1. Détermination analytique plus simple du moment d'inertie du cercle. . . . .	<i>id.</i>
§ 2. Sa détermination élémentaire. . . . .	<i>id.</i>

	Pages.
Suite de la note du n° 84.	
§ 3. Moments d'inertie, moments statiques et aires de portions du cercle. . . . .	64
§ 4. Moments d'inertie d'une ellipse. . . . .	66
N° 85. Moment de flexion d'un tuyau. . . . .	67
Note. § 1. Méthode de quadrature pour le calcul approximatif des moments d'inertie, etc. . . . .	id.
§ 2. Démonstration élémentaire et exacte de la formule de Simpson. . . . .	67
3. Sa forme générale. . . . .	69
4. Deux manières de l'employer (de M. Poncelet et de M. Bélanger) pour les moments d'inertie. . . . .	id.
Formule de quadrature de M. Poncelet. . . . .	71
N° 86. Courbe élastique. Flèche de courbure. . . . .	id.
Note. § 1. Démonstration élémentaire de l'expression de cette flèche. . . . .	72
(Voir aussi 1 <sup>er</sup> Appendice, p. 517.)	
§ 2. La courbe élastique est une parabole du 3 <sup>e</sup> degré avec inflexion au point d'application des forces. . . . .	73
3. Flèche et arcs déterminés plus exactement. Leurs expressions quand la flexion n'est pas très-petite. . . . .	id.
Expression simple du sinus de l'inclinaison de l'extrémité. . . . .	74
(Voir aussi 1 <sup>er</sup> Appendice, p. 512, 513.)	
N° 87. Pièce posée sur deux appuis. . . . .	75
Note. § 1. Calcul d'une valeur plus approchée de sa flèche. . . . .	id.
§ 2. Expression de la plus grande dilatation en fonction de la même flèche. . . . .	77
N° 88, 89. Pièce chargée de poids répartis sur toute sa longueur. . . . .	78, 79
Note. § 1. Observation générale (sur la formule de flexion étendue approximativement à ce mode d'application des forces). . . . .	79
§ 2. Manière plus simple de poser l'équation du n° 89. . . . .	id.
3. Flèche déterminée d'une manière élémentaire. . . . .	id.
4. Expression plus approchée de la flèche $f$ et expression exacte du sinus de l'angle $\alpha$ . . . . .	80
N° 90. Même pièce posée. Rapport 8 à 5 entre les flèches produites par le même poids au milieu et réparti. . . . .	id.
Note. § 1. L'équation de la courbe s'étend à ces deux mo-	

	Pages.
Suite de la note du n° 90.	
tiés quand le poids est réparti, mais non lorsqu'il est suspendu en un seul point. . . . .	84
§ 2. Raccordement à tous les points où il y a discontinuité d'action. Petits angles résultant des glissements à ces points. . . . .	id.
3. Approximation plus grande de la flèche $f$ et de l'angle $\alpha$ pour la pièce chargée uniformément avec un poids additionnel au milieu. . . . .	id.
(Voir l'observation 2 <sup>e</sup> au § 79, App. compl., p. 768.)	
N° 91, 92, 93. Applications. Formules pour la détermination expérimentale du coefficient E. . . . .	82 à 85
Note n° 92. § 1. Généralisation et approximation plus grande.	83
§ 2. Emploi de la flexion circulaire. . . . .	84
Note n° 93. § 1. Observation relative à l'expression <i>élasticité altérée</i> . . . . .	85
§ 2. Approximation plus grande dans la détermination de E.	id.
N° 94 à 111. (Renvoyés). . . . .	id.
Note. Quelques valeurs numériques de E. . . . .	86
<b>ARTICLE IV (rupture par flexion). De la résistance d'un solide prismatique à la rupture produite par un effort dirigé perpendiculairement à la longueur de ce solide. . . . .</b>	
	86
N° 112, 113. Coefficient R. Expression du moment appelé de rupture par Navier. . . . .	86 à 88
Note du 113. § 1. Ce n'est qu'une <i>deuxième expression</i> du moment de flexion. . . . .	88
§ 2. Cette deuxième expression $M = R \frac{l}{v}$ est tout aussi	
exacte et rigoureuse que la première $M = \frac{EI}{\rho}$ dans les mêmes limites. Son établissement direct et simple. .	id.
3. Elle n'est pas applicable au delà de ces limites, si ce n'est en faisant varier, avec la forme et même la position des sections, le coefficient R, qui représente alors autre chose que ce que donnent les expériences de rupture par extension ou compression longitudinale. Cas de sections ou semblables ou ramenables les unes aux autres par augmentation des ordonnées ou des abscisses. . . . .	89



	Pages.
Suite de la note du n° 443.	
(Voir la note du n° 151, p. 173 à 185, où la question est traitée avec étendue.)	
§ 4. Elle donne cependant la résistance à l'énerivation ou à la rupture éloignée. Coefficient $R_0$ de cohésion permanente. Coefficient $R'$ , pour les compressions. . . . .	91
5. Restriction relative à la nécessité de prendre en considération les glissements ou le cisaillement quelquefois. . . . .	92
(Voir la note du n° 154, p. 216 et suiv.)	
6. Équation d'élasticité. Équation de cohésion, ou de stabilité (ou de résistance à la rupture éloignée). Section dangereuse. Point dangereux. . . . .	id.
Formes d'égalité de résistance, où toutes les sections sont également dangereuses. . . . .	93
7. Cas où il faut poser l'équation d'élasticité, ou calculer les déplacements ou les déformations, avant d'établir l'équation de cohésion : 1° modification sensible des bras de levier ; 2° réactions à déterminer ; 3° effets simultanés. . . . .	93, 94
8. Troncatures des sections. Cas dans lesquels, en les opérant, on augmente $\frac{1}{v'}$ ou $\frac{1}{v''}$ qui mesure théoriquement le degré de résistance à la rupture éloignée. Application à des sections triangulaire, carrée, circulaire, et en croix d'équerre. . . . .	94 à 102
9. Moyen commode de poser une équation de cohésion approchée dans certains cas. Observation sur les résultats fautifs que peut donner cette méthode de quelques ingénieurs. . . . .	103
(Voir aussi App. compl., note de la p. 767).	
10. Détermination directe des coefficients $R_0$ et $R'$ , de cohésion permanente, ou des limites $i'$ des dilatations. Sous-note (2). M. Tredgold. M. Hodgkinson. Young. . . . .	id. 104
11. Usage d'expériences de rupture immédiate par traction ou par compression pour des comparaisons relatives aux variétés d'une même matière. . . . .	105
12. Usage, pour les mêmes comparaisons, d'expériences de rupture immédiate par flexion. Cet usage n'implique nullement la supposition fautive d'un rapport constant entre les efforts et les effets jusqu'à la fin. . . . .	107
13. Suite. Détermination du rapport mutuel des coefficients $R'$ , $R_0$ de maximum des pressions et de maximum des tensions longitudinales permanentes non	

Suite de la note du n° 443.

Pages.

dangereuses. Formule rationnelle $\frac{R'_o}{R_o} = \frac{I}{\eta} \frac{E}{E_t} \frac{R_{ot}}{R_o}$ ,	
remplaçable à peu près par $\frac{I}{\eta} \frac{E}{E_t} \frac{R_t}{R}$ . Expériences de	
M. Hodgkinson; de M. Zorès. Valeurs pour la fonte	
et pour le fer. . . . .	108-114
(Voir aussi note du n° 156, p. 469, et Appendice	
complémentaire, p. 823-825).	
§ 14. Examen de la méthode consistant à adopter une même	
limite des dilatations pour les diverses qualités ou va-	
riétés d'une même matière. Elle revient à supposer	
les cohésions proportionnelles aux élasticités. . . . .	114
15. Cas où la contexture varie dans l'étendue des sections.	
Fer. Bois. . . . .	115
Méthode simple (de Cauchy) de compensation mu-	
tuelle des erreurs d'observation. . . . .	117
16. Possibilité de dépasser beaucoup la limite de dilata-	
tion adoptée pour les cas ordinaires, lorsqu'il y a	
simultanément et dans un autre sens de fortes cou-	
tractions. Expérience de MM. Easton et Amos, etc.	118-120
17. Dimensions déterminées en vue de limiter la flexion	
des pièces, et non les proportions des dilatations de	
leurs parties. Formule de M. Tredgold. . . . .	120
N° 114, 115, 116, 117. Moment $R \frac{I}{v}$ pour diverses sec-	
tions . . . . .	121
Note n° 117. § 1. Erreur où peut faire tomber la première	
formule du n° 117 (rupture par flexion oblique). . . . .	122
§ 2. Établissement direct de l'équation de cohésion perma-	
nente pour une sollicitation oblique aux axes prin-	
cipaux des sections. . . . .	id.
3. Application à une section rectangle. Sens de sollicita-	
tion le plus dangereux. Évaluation de l'erreur signalée	
au § 1. . . . .	124
4. Établissement élémentaire de ces formules (de rupture	
par flexion oblique ou déviée). . . . .	125
N° 118, 119, 120. Sections circulaires pleine et évidée.	
Comparaison avec une section rectangulaire . . . . .	126, 127
Note du n° 118. Perte de force des arbres équarris. . . . .	126
Note du n° 119. Construction géométrique, par M. Poncelet.	127
Note du n° 120. Résistances spécifiques à la flexion et à la	

	Pages.
suite de la note du n° 490.	
rupture par flexion pour diverses formes de sections. Valeurs diverses de $I$ et de $\frac{I}{v}$ . . . . .	128
§ 1. Comparaison générale des sections à égale surface ou à égale quantité de matière. . . . .	<i>id.</i>
2. Résistances spécifiques (ou quantités remplaçant $I$ et $\frac{I}{v}$ ) lorsque la sollicitation est oblique aux axes principaux des sections. . . . .	<i>id.</i>
3. Section rectangle. . . . .	129
4. Même section si la sollicitation est oblique. Cause (la possibilité d'une déviation) qui limite l'avantage d'employer des pièces de champ à section haute et mince. . . . .	130
5, 6, 7. Sections carrées, circulaire pleine et évidée. . . . .	132
8. Prise en considération des tronçatures (possibles) qui augmenteraient la valeur de l'expression de la résistance spécifique à la rupture. . . . .	133
(Voir ci-dessus, p. 100).	
9. Cas où les tronçatures auraient effectivement lieu. . . . .	134
10. Section elliptique. Sollicitation pour une obliquité quelconque. . . . .	136
11. Sections comparées ayant des formes ramenables les unes aux autres. . . . .	<i>id.</i>
12. Sections rectangles évidées symétriquement (tuyau rectangulaire, ou double T symétrique). . . . .	137
13. Rapport de la hauteur à la largeur d'une section simplement rectangle qui offrirait même résistance que la section en double T symétrique. Utilité de la forme en T pour s'opposer au déversement. . . . .	138
14. Cas de l'évidement par plusieurs rectangles. . . . .	141
15. Sections en T simple et en U. . . . .	<i>id.</i>
(La simplification indiquée au bas de la page est de M. Poncaet.)	
16. Section en double T non symétrique (formule très-générale, simple et nouvelle). . . . .	142 à 146
17. Comparaisons diverses des sections en double T non symétriques et symétriques d'égale superficie. Faible avantage, ordinairement, de l'inégalité des semelles. . . . .	146 à 152
(Voir aussi Appendice complémentaire, p. 766.)	
18. Application à la section jugée la mieux proportionnée par M. Hodgkinson. . . . .	152

	Pages.
Suite de la note du n° 120.	
Conclusion en ce qui regarde le choix entre l'égalité et l'inégalité des semelles. . . . .	155
(Voir aussi Appendice complémentaire, p. 766.)	
§ 19. Discussion relative aux sections en croix ou à nervures égales dans deux sens rectangulaires. . . . .	156
Simple croix d'équerre. . . . .	157
Carré avec quatre nervures en prolongement des médianes. . . . .	158
Carré avec quatre nervures en prolongement des diagonales. . . . .	160
Noyau circulaire et quatre nervures. . . . .	162
Conclusion. . . . .	163
N° 121 à 129. Rupture par flexion des prismes horizontaux soutenus et chargés de diverses manières. 163 à	168
N° 130 à 141. (Renvoyés). . . . .	<i>id.</i>
N° 142. Situation des fibres invariables à l'instant de la rupture. . . . .	<i>id.</i>
N° 143 à 149. (Renvoyés). . . . .	<i>id.</i>
N° 150. Notions sur les théories proposées par Galilée, par Mariotte et par Leibnitz . . . . .	169
Note du n° 150. Méprise du simple au double, commise par Mariotte et par Jacques Bernoulli. . . . .	170
N° 151. Remarque sur la théorie de la résistance à la rupture. . . . .	172
Note du n° 151. Sur les résistances à la rupture immédiate ou prochaine. . . . .	
§ 1. Proportionnalité de ces résistances aux largeurs et aux carrés des hauteurs des sections semblables, ou seulement transformables les unes dans les autres en réduisant ou amplifiant dans une même proportion leurs ordonnées ou leurs abscisses. . . . .	173
2. Formules nouvelles pour le calcul approximatif des résistances à la rupture immédiate ou prochaine, principalement quand les sections sont rectangles. Elles donnent la même chose que celles de M. Hodgkinson quand on prend un certain exposant $m_1 = 2$ . . . . .	175
3. Particularisation de ces formules. Explication de quelques résultats d'expériences. Les limites supérieure et inférieure sont les résultats des formules de Coulomb et de Galilée. . . . .	179 à 185
1.	b

	Pages.
N° 152. De la rupture d'un solide d'une petite longueur.	185
Note du n° 152. Supplément à l'article IV. <i>Glissement</i> . . .	186
§ 1. De la résistance au glissement relatif des parties d'un solide. Circonstances diverses où elle entre en jeu. ( <i>Détrusion</i> de Young, <i>Force transverse</i> de M. Vicat, etc). . . . .	<i>id.</i>
2. Observation sur l'estimation de la résistance au glissement par Navier aux n° 152 à 155. . . . .	189
3. Définition et mesure du glissement des lignes matérielles les unes devant les autres ou <i>sur ces lignes</i> . Il a toujours lieu simultanément et également dans deux directions rectangulaires. . . . .	<i>id.</i>
4. Glissements divers sur une face, etc. Leur maximum ou le <i>glissement principal</i> . Il est résultant géométrique de deux autres. . . . .	190
5. Efforts tangentiels. Coefficient d'élasticité de glissement. . . . .	192
6. La résistance à un glissement peut être regardée comme une résistance à une dilatation et à une contraction moitié moindres, ayant lieu dans deux directions rectangulaires qui font l'une et l'autre un angle demi-droit avec les lignes glissantes. . . . .	193
(Voir à l'Appendice complémentaire, § 79, 3°, p. 768, une démonstration plus simple.)	
7. Limite des glissements déduite de la limite des extensions dans les solides d'égale contexture en tous sens. Limite des efforts tangentiels. . . . .	195
8. Détermination théorique, pour les matières d'égale contexture, du rapport $\frac{G}{E}$ des coefficients d'élasticité de glissement et d'extension, et du rapport $\eta$ des contractions transversales des prismes aux dilatations longitudinales qui les provoquent. . . . .	197 à 202
(Voir aussi le 3° Appendice, p. 559, note du § 23, p. 565, et le § 25, p. 580; le 5° Appendice, note du § 47, p. 647; et l'Appendice complémentaire, note du § 87, p. 805.)	
9. Rapport $\frac{T_0}{R_0}$ entre les limites des efforts tangentiels et longitudinaux. Comparaison aux expériences de MM. Gouin et C <sup>ie</sup> , etc. . . . .	203
10. Application aux cas exceptionnels où la section de glissement est astreinte à rester plane. . . . .	<i>id.</i>

	Pages.
N° 153. Suite des considérations sur la rupture d'un solide d'une petite longueur. . . . .	205
<b>Note du n° 153. § 1.</b> Les sections transversales (quand elles sont libres de se courber) restent normales, sur leur contour, à la surface du prisme fléchi (ou tordu, V. note du n° 156, p. 244). Ces mêmes sections infléchies restent normales aux arêtes saillantes devenues courbes. . . . .	206 à 207
(Et aussi aux arêtes rentrantes. Appendice complémentaire, § 79, p. 769.)	
<b>§ 2.</b> Loi de variation des glissements aux divers points des sections d'une prisme rectangulaire fléchi de <i>champ</i> . Forme de doucine affectée par les sections primitivement planes. . . . .	207 à 212
(Voir aussi note du n° 156, p. 393; id. sous-note, p. 410-412; 2° Appendice, p. 539; 3° <i>id.</i> , p. 616).	
<b>3.</b> Détermination de la forme courbe en cylindre à base de doucine affectée par la section. . . . .	212
<b>4.</b> Flèche complète de flexion eu égard au glissement. . . . .	214
N° 154. Suite de la rupture d'un solide d'une petite longueur.	
<b>Note.</b> Substitution d'une autre formule à celle de Navier.	
<b>§ 1.</b> Détermination de la dilatation maximum qui se produit dans un sens oblique lorsqu'il y a à la fois un glissement transversal et une extension longitudinale accompagnée de contraction latérale. . . . .	216 à 219
(Voir une démonstration plus simple, de M. Poncelet, à la note du n° 156, p. 374-376 en sous-note.)	
<b>2.</b> Usage de cette détermination. Formule générale de résistance à divers genres d'efforts s'exerçant à la fois, d'abord quand le solide est d'égale texture. . . . .	219
(Voir p. 375-382 pour un solide de texture inégale dans les divers sens.)	
<b>3.</b> Application au cas où la rupture peut être déterminée par un glissement, sur une section libre de s'infléchir. . . . .	221
<b>4.</b> Application quand il y a glissement et extension ou compression longitudinale sans flexion. Formule simple et table numérique usuelle. . . . .	222
<b>5.</b> Résistance d'un rivet ou d'un petit boulon à la fois étendu et cisailé. . . . .	225
<b>6.</b> Application quand il y a à la fois glissement, extension et flexion. Premier cas, où la section reste plane. . . . .	226
<b>7.</b> Observation pour le cas où l'on donne partout à la	



	Pages.
Suite de la note du n° 154.	
pièce une égale épaisseur. <i>Il faut alors qu'elle soit TRÈS-COURTE pour que le glissement ait une influence sensible.</i> . . . . .	229
§ 8. Second cas (de flexion et glissement simultané) où la section peut s'infléchir librement. Alors il suffit de choisir la plus forte des dimensions fournies par un double calcul. . . . .	231
9. Exemples d'applications numériques des formules des §§ 6, 7, 8. . . . .	232
Petite pièce sur deux appuis. . . . .	<i>id.</i>
<i>Idem.</i> avec un profil d'égale résistance. . . . .	233
Boulon de poulie. . . . .	234
Rais de roue de voiture. . . . .	235
N° 155. Suite. Petite pièce appuyée aux deux bouts. . .	237
ARTICLE V. <i>De la résistance d'un corps prismatique à la torsion.</i> . . . . .	237
N° 156. Formule du moment de torsion (exacte seulement pour une section circulaire, ou pour une section astreinte à rester plane). . . . .	237 à 239
Note du n° 156. <i>Théorie nouvelle de la torsion des prismes et de leur rupture par torsion.</i>	
§ 1. Moment d'inertie <i>polaire</i> d'une section. Le moment de torsion ne lui est pas généralement proportionnel. . .	239
2. La cause de la résistance à la torsion n'est pas dans le changement de longueur des fibres devenues des hélices. Remarque de Thomas Young. . . . .	240 à 242
3. Cette cause se trouve dans la résistance au glissement des sections les unes devant les autres ou des fibres les unes contre les autres; ou, ce qui revient au même, dans la résistance à l'allongement et à l'accourcissement des diverses lignes matérielles hélicoïdales inclinées à 45 degrés sur l'axe de torsion. Première conséquence, si la section reste plane. . . . .	242
4. Courbure ou <i>gauchissement</i> que prennent par la torsion les sections transversales lorsqu'elles n'en sont pas empêchées et que leur contour n'est pas circulaire. Conservation de leur normalité à la surface latérale du prisme tordu. (Par suite, normalité des sections, devenues des surfaces courbes, aux arêtes vives devenues des hélices). . . . .	244

Suite de la note du n° 456.

§ 5. Expressions ( $g' = i - \theta v$ , $g'' = j + \theta u$ ) des glissements provenant à la fois de la courbure des fibres en hélices et de la courbure des sections transversales primitivement planes d'un prisme tordu. . . . .	245
6. Condition générale ( $\frac{dg'}{du} + \frac{dg''}{dv} = 0$ , ou $\frac{di}{du} + \frac{dj}{dv} = 0$ ) que doivent remplir, en tous leurs points, les surfaces légèrement courbes dans lesquelles se changent les plans des sections des prismes tordus. Nullité de la somme des courbures de deux coupes à angle droit. Expression par une équation différentielle. . . . .	248
7. Démonstration plus directe de cette propriété. . . . . (Voir aussi au n° XXXVII de l' <i>Historique</i> .)	250
8. Condition ( $g''du - g'dv = 0$ ) particulière aux points des contours des sections. . . . .	252
9. Actions tangentielles sur les sections. Moment de torsion. Détermination générale de la torsion produite, quand on donne ce moment. . . . .	253

**Théorème** comprenant toute la théorie de la torsion des prismes d'égale élasticité dans les sens transversaux : Si, les faces latérales ne supportant aucune action, les éléments  $d\omega$  des bases sont sollicités, dans l'état d'équilibre, suivant les sens transversaux  $u$ ,  $v$ , par des forces tangentielles

$$G \left( \frac{dz}{dv} + \theta u \right) d\omega, \quad G \left( \frac{dz}{du} - \theta v \right) d\omega, \quad z \text{ satisfaisant à } \frac{d^2z}{du^2} + \frac{d^2z}{dv^2} = 0$$

en tous leurs points, et à  $\left( \frac{dz}{dv} + \theta u \right) du - \left( \frac{dz}{du} - \theta v \right) dv = 0$  à ceux de leur contour, le prisme éprouvera d'un bout à l'autre une torsion uniforme  $\theta$  par unité de longueur, et, ses arêtes, de petits chemine-  
ments longitudinaux  $z$ ; et il n'y aura ni dilatation ni contraction lon-  
gitudinale ou transversale.

La même chose a lieu *approximativement* si des forces appliquées et distribuées d'une manière à peu près quelconque aux extrémités ont le

$$\text{même moment } M_1 = G \int_0^\omega \left[ \left( \frac{dz}{dv} + \theta u \right) u - \left( \frac{dz}{du} - \theta v \right) v \right] d\omega \text{ que}$$

les forces dont on vient de parler . . . . . 254

10. Contours de sections, en nombre infini, pour lesquels on obtient immédiatement la forme de la surface courbe dans laquelle la torsion change leur plan, et, par suite, les glissements et la torsion que produisent des forces extérieures ayant un moment donné. . . . .	255
11. Mêmes formules en coordonnées polaires. Glissement résultant ou principal. . . . .	257
12. Contours de sections d'une forme symétrique. . . . .	259

	Pages.
Suite de la note du n° 456.	
§ 13. Réduction à un couple des forces tangentielles sur chaque base ou section. . . . .	261
14. Conservation de la forme des équations quand on change l'origine et les axes des coordonnées transversales. . . . .	262
15. Torsion d'un prisme autour de divers axes intérieurs ou extérieurs parallèles à ses arêtes. Torsion simultanée de deux prismes ou cylindres parallèles et solitaires. . . . .	264
16. Expression générale du moment de torsion des prismes dont les sections ont des contours représentés par l'équation générale du § 10. . . . .	267
17. Plus grands glissements. Points dangereux. Équation de cohésion permanente ou de résistance à la rupture éloignée par torsion. . . . .	268
Double recherche nécessaire des points de maximum absolu, s'il y en a sur les sections, et des points de maximum relatif sur leur contour. . . . .	<i>id.</i>
18. Première particularisation. Section circulaire. Torsion autour de l'axe de figure. . . . .	274
19. Section encoré circulaire; mais torsion du cylindre autour d'un axe excentrique. . . . .	273
20. Observation générale sur les termes du premier degré dans les équations du contour des sections. . . . .	274
21. Section elliptique. . . . .	<i>id.</i>
Les plans des sections de cette forme se courbant en paraboléide hyperbolique. Épures. . . . .	276
22. Moment de torsion et résistance à la rupture éloignée par torsion d'un cylindre elliptique. Position des points dangereux aux endroits du contour <i>les plus rapprochés du centre</i> . Explication des différences avec la théorie ancienne. . . . .	278
23. Prisme à section triangulaire équilatérale. Épure. . .	283
Exemple de recherche des maxima absolus du carré du glissement principal. . . . .	286 à 288
24. Assimilation, à l'ellipse, des sections allongées quelconques, quant à la courbure prise par leurs plans. Formule approchée de Cauchy relative aux prismes rectangles. Exacte pour un prisme très-plat, elle est fautive pour un prisme à base carrée. . . . .	289 à 291
(Voyez aussi 4 <sup>e</sup> Appendice, § 39, note p. 624-626.)	
25. Prisme à base rectangle. Formules transcendentes et exactes de sa torsion. Notations <i>sih</i> , <i>coh</i> , <i>tah</i> des sinus, cosinus et tangentes hyperboliques. . . . .	29

	Pages.
Suite de la note du n° 456.	
§ 26. Conséquences. Moments de torsion. . . . .	295
Vérification expérimentale (en sous-note). . . . .	297
(Voir table numérique, p. 362.)	
27. Suite des conséquences. Forme courbe que la torsion donne aux plans des sections des prismes carrés ou rectangles. Épures. . . . .	297 à 300
28. Plus grands glissements. Points dangereux. Équation de non-rupture des prismes à base carrée et à base rectangle soumis à la torsion. . . . .	304
(Voir table numérique, p. 363.)	
29. Détermination élémentaire et très-approchée de la torsion d'un prisme à base carrée rectiligne, par l'assimilation de ses sections à des carrés curvilignes du quatrième degré quant à la courbure prise par leurs plans. . . . .	302.
30. Sections à contours curvilignes du 4° degré symétriques dans les deux sens. . . . .	305
31. Recherche des plus grands glissements. L'absence de maxima absolus prouve que les points dangereux se trouvent sur le contour. . . . .	308
32. Recherche de ces points sur les contours du 4° degré, et d'abord sur ceux qui sont égaux dans les deux sens $u$ et $v$ . . . . .	310
(Remarque applicable aux maxima et minima des fonctions de deux variables liées entre elles. La méthode analytique ordinaire souvent ne peut les fournir). . .	
33. Suite. Recherche des mêmes points dangereux sur les contours du 4° degré symétriques mais non égaux dans les deux sens. Ils ne peuvent être trouvés, dans beaucoup de cas, que numériquement. . . . .	312 à 317
34. Méthode générale (analogue à celle de fausse position) pour la recherche <i>numérique</i> du maximum ou du minimum d'une fonction d'une variable dont la forme plus ou moins compliquée est donnée explicitement ou implicitement. . . . .	318
35. Calcul du moment de torsion et de sa limite pour divers contours du 4° degré. . . . .	323
1° et 2° Sections carrées curvilignes. . . . .	323, 324
3° et 4° Sections en double spatule analogues à celles des rails de chemins de fer. Exemples de points dangereux qui ne sont pas aux endroits du contour les plus rapprochés du centre. . . . .	325 à 332
36. Observation relative aux sections séparées en deux	

	Pages.
Suite de la note du n° 456.	
orbes. Confirmation du principe du § 15, que le moment de torsion est indépendant de la position de l'axe. . . . .	332
(En sous-note). Section en double triangle isocèle. .	335
§ 37. Torsion d'une pièce à côtes, ailes ou nervures (feathered axis). Section en croix de Malte, ou étoile à quatre pointes, du huitième degré. Épure. Les pièces à côtes doivent être exclues des parties des constructions où les efforts tendent à tordre. . . . .	335 à 343
38. Torsion des prismes à bases quelconques. . . . .	344
39. Inégale contexture dans les divers sens transversaux. Formules d'élasticité et de cohésion lorsque la contexture inégale est symétrique par rapport à trois plans rectangulaires. . . . .	345
(Voir 3 <sup>e</sup> Appendice, p. 609, pour le cas d'un seul plan de symétrie).	
Théorème de réciprocity de Cauchy. L'action à travers une face A estimée perpendiculairement à une face B de même superficie, est égale à l'action à travers B, estimée perpendiculairement à A. . . . .	346
(Voir 3 <sup>e</sup> Appendice, p. 546, et, mieux, Appendice complémentaire, § 79, 5 <sup>e</sup> , p. 769.)	
Section elliptique. Section rectangle. . . . .	351, 352
Condition de non-rupture des prismes dont la contexture est inégale. . . . .	353, 354
(Voir aussi 3 <sup>e</sup> Appendice, p. 611, et Appendice complémentaire, § 79, 6 <sup>e</sup> , p. 770-771.)	
40. Récapitulation des formules de torsion simple, c'est-à-dire non accompagnée de flexion, ni de dilatations ou contractions longitudinales ou transversales, ni de glissements étrangers. . . . .	356
Ellipses, triangles, carrés curvilignes, doubles spatules (comme un rail). . . . .	359-365
Tables et formules simples relatives aux sections rectangulaires. . . . .	362, 363
Tables pour déterminer approximativement la torsion de prismes à bases quelconques. . . . .	366
41. Prismes creux. Courbes de glissement sur une section pleine ou évidée quelconque. . . . .	368
Condition pour que le moment de torsion soit exactement la différence de ceux du prisme plein et du prisme d'évidement. Formule approchée. . . . .	369 à 372
42. Torsion et flexion simultanées, avec (ou sans) une dilatation ou contraction longitudinale, et un cisaillement transversal. Exemples. . . . .	372

Suite de la note du n° 456.

Pages.

§ 43. Condition générale de cohésion permanente ou de résistance à la rupture éloignée, pour ces cas complexes. . . . .	373
Formule qui comprend les conditions de tous les cas particuliers. . . . . (au bas)	379
<i>Idem</i> sous une autre forme. . . . .	382
(Deux sous-notes. Démonstration et explication simple, de M. Poncelet). . . . .	375 et 381
44. Équation de cohésion rendue immédiatement applicable. . . . .	383
Observation sur la recherche des points dangereux; distinction des solutions étrangères. . . . .	388
(Sous-note. Sur des recherches de 1843). . . . .	387
45. Valeurs approchées et quelquefois suffisantes des glissements de cisaillement dus aux forces transversales. Recherches de M. Jouravski. . . . .	389
Raison de leur défaut de rigueur. . . . .	398
46. Valeurs exactes des mêmes glissements de cisaillement, indépendants de la torsion. Identité des limites à imposer aux efforts tangentiels transversaux et longitudinaux. . . . .	399
Épures diverses donnant la topographie des surfaces courbes des sections. . . . .	411
Théorie exacte de la flexion avec glissements. . . . .	399 à 413
(Voir aussi 2° Appendice, § 13, p. 534, et 3°, § 37, p. 613.)	
47. Applications diverses quand on peut négliger les glissements de cisaillement $g_1', g''_1$ . Cylindre à base circulaire à la fois fléchi, tordu et étendu ou comprimé. . . . .	414
48. Même cylindre seulement fléchi et tordu. Tableau des résultats pour diverses valeurs attribuées au rapport $\eta$ , des résistances spécifiques $R_0, R'_0$ . . . . .	416
49. Même cylindre éprouvant, avec la flexion et la torsion, une extension longitudinale. . . . .	417
50. Même cylindre dans le cas plus compliqué où c'est une compression. Choix entre deux positions possibles du point dangereux. . . . .	418
51. Cylindre elliptique sollicité à plat, et en même temps tordu. . . . .	421
52. Même cylindre sollicité de champ. Alors (et à plus forte raison pour une sollicitation oblique) le point dangereux peut se trouver, sur le périmètre des sections, ailleurs qu'à leurs sommets. . . . .	424

	Pages.
Suite de la note du n° 456.	
§ 53. Prisme rectangulaire à la fois fléchi et tordu. Flexions à plat et de champ. Position variable du point dangereux sur le périmètre quand la flexion a lieu de champ. . . . .	430 à 436
54. Même prisme rectangulaire fléchi et tordu, quand le plan de sollicitation à fléchir est oblique par rapport aux côtés de la base. Développement du calcul pour diverses situations de ce plan, et de la ligne, aussi oblique, des fibres invariables, tracée sur la section. . . . .	436 à 441
55. Cas particulier du prisme à base carrée fléchi et tordu. Quelle est la situation ou l'inclinaison du plan de flexion qui exige le plus fort équarrissage. Table détaillée des emplacements de ce point dangereux, pour diverses inclinaisons. Conséquence quand la pièce carrée est tournante. . . . .	441 à 446
56. Pièce d'égal résistance à des forces qui font à la fois fléchir et tordre, etc. . . . .	id.
57. Arbre de transmission de mouvement de rotation sollicité à fléchir et à tordre par deux engrenages ou deux courroies. — Arbre rond. — Arbre carré. . . . .	447
Forme d'égal résistance. . . . .	452
(Voir aussi au § 65, p. 491 et 493.)	
58. Récapitulation des formules propres à faire connaître les dimensions transversales à donner à une pièce droite soumise à une torsion et à une flexion simultanées avec ou sans extension ou compression longitudinale de l'axe. . . . .	453 à 459
59. Pièces tordues encastées aux deux bouts. Valeur à donner au moment de torsion de chaque partie. . . . .	459
60. Rupture immédiate par torsion. Proportionnalité des résistances aux cubes des dimensions homologues de sections semblables. . . . .	461
61. Calcul approximatif des résistances à la rupture immédiate ou prochaine par torsion quand les sections sont : 1° circulaires. . . . .	464
2° rectangles larges et minces. . . . .	466
62. Détermination expérimentale, pour les diverses matières, des coefficients numériques d'élasticité ou de cohésion transversale $G$ , $T$ , $G'$ , $G''$ , $T'$ , $T''$ , et $T$ . . . . .	469
63. Torsion de cylindres dont la matière n'est pas de même contexture dans l'étendue des sections. . . . .	477

Suite de la note du n° 456.

§ 64. Exemples d'application numérique. Torsion seule d'abord. . . . .	480
1 <sup>er</sup> Exemple. Cylindre à base circulaire. . . . .	<i>id.</i>
2 <sup>e</sup> <i>id.</i> Même cylindre supposé encastré aux deux extrémités. . . . .	481
3 <sup>e</sup> Exemple. Cylindre à base elliptique, d'égale contexture transversale. . . . .	482
Gauchissement imperceptible et cependant très-influent. . . . .	484
(Voir aussi note du 2 <sup>e</sup> Appendice, p. 521, 522.)	
4 <sup>e</sup> Exemple. Pièce rectangulaire en bois, d'inégale contexture dans les sens transversaux. . . . .	484
5 <sup>e</sup> Exemple. Pièce en fonte ayant pour base un carré évidé par quatre quarts de cercle, comme exemple de calcul fondé sur l'analogie et l'interpolation. . .	486
§ 65. Suite des exemples d'application numérique. Flexion et torsion simultanées.	
6 <sup>e</sup> Exemple. Détermination de T, d'après une expérience où il y a flexion et torsion. . . . .	489
7 <sup>e</sup> Exemple. Arbre de transmission de mouvement rond et en fonte (de rayon constant et de rayon variable).	491
8 <sup>e</sup> Exemple. Arbre de transmission de mouvement carré et en bois. . . . .	493
66. Suite des exemples. Flexion et torsion avec extension ou compression longitudinale. . . . .	495
9 <sup>e</sup> Exemple. Tirant horizontal auquel est suspendu un poids au bout d'un levier qui y est implanté. . . .	<i>id.</i>
10 <sup>e</sup> Exemple. Même pièce. Son équarrissage, le poids qui la tord étant donné. . . . .	498
11 <sup>e</sup> Exemple. Potceau soumis à une pression verticale et en même temps à une torsion déterminée par une force horizontale agissant à son milieu au bout d'un levier. . . . .	499
N° 157 à 160. Suite de la torsion (numéros rendus inutiles par ce qui précède) . . . . .	501
Note de ces numéros pour en rectifier quelques passages.	504
Note de Navier (1833) où se trouve pour la première fois la relation $\frac{G}{E} = \frac{2}{5}$ . . . . .	502
N° 161 à 163. (Renvoyés).	



	Pages.
ARTICLE VI. <i>De la résistance d'un corps prismatique à la rupture causée par la torsion.</i> . . . . .	505
N <sup>o</sup> 164 à 168. (Rendus inutiles par ce qui précède).	505 à 509
Notes sur ces numéros. . . . .	id.
Note de Navier (1833) où se trouve pour la première fois le rapport $\frac{T}{R} = \frac{4}{5}$ . . . . .	507
N <sup>o</sup> 169 à 172. (Renvoyés).	

## APPENDICES

### AUX NOTES DES ARTICLES I A VI (OU DES N<sup>o</sup> I A 172).

§ 1. Objet et sommaires des cinq Appendices. (V. plus loin l'Appendice complémentaire.) . . . . .	512
1 <sup>o</sup> APPENDICE. <i>Divers points traités par M. Poncelet d'une manière élémentaire.</i> . . . . .	512
2. Expression exacte, obtenue élémentairement, du sinus de l'angle d'inclinaison pris par les divers éléments d'une pièce droite ou circulaire après une flexion de grandeur quelconque. . . . .	id.
3. Tracé de la courbe élastique après une flexion quelconque. — Tracé par petits arcs. Tracé par des quadratures numériques. Cas extrêmes où l'on peut se passer des quadratures. . . . .	515
4. Détermination élémentaire (et plus exacte qu'à la page 72) de la flèche. . . . .	517
5. Cas où l'élastique reçoit une forme déterminée (sur un gabarit, par exemple). . . . .	518
6. Condition des encastremens. Inclinaison générale prise par les pièces sur les parois des enclaves. . .	519
2 <sup>o</sup> APPENDICE. <i>Sur les conditions de l'exactitude mathématique des formules tant anciennes que nouvelles d'extension, de torsion, de flexion avec ou sans glissement. Démonstrations synthétiques.</i> . .	520

	Pages.
§ 7. Rappel de ces conditions, qui se réduisent à un mode particulier d'application et de distribution des forces aux extrémités des pièces. Nécessité de les faire ressortir au lieu de les dissimuler en quelque sorte. . . . .	id.
Sur l'application suffisamment approchée des formules pour d'autres modes. . . . . 520 à	524
(Voir aussi pages 40, 254, 521-523, et 829-830.)	
8. Observation sur la manière de présenter ces démonstrations. . . . .	id.
9. Théorie synthétique exacte de la résistance des solides. Principes, définitions et lemmes. . . . .	525
10. Suite. Extension et contraction. Théorème I. Scolie I. . . . .	528
11. Lemme pour la torsion et la flexion. . . . .	530
12. Torsion. Théorème II et scolie II. . . . .	531
Scolie III. Expression des glissements, et équation des contours en termes entiers. . . . .	534
13. Flexion. Lemme IV sur les déformations transversales qui accompagnent la flexion. . . . .	id.
Théorème III. Sur la flexion en arc de cercle sans glissement. . . . .	535
Théorème IV. Sur la flexion inégale ou avec glissement. . . . .	537
14. Observation sur la méthode suivie, etc. . . . .	540
3 <sup>e</sup> APPENDICE. <i>Formules et équations générales de la théorie de l'élasticité des corps solides.</i> . . . . .	531
§ 15. Avant-propos. Changement des notations. . . . .	540
16. Actions moléculaires. Pressions ou Forces élastiques dans un solide. Théorèmes (Cauchy) des projections des plans de pression et de réciprocité des composantes tangentielles. . . . .	542
(En note. Courbes des deux sortes de forces dont les actions moléculaires sont des différences). . . . .	543
17. Formules des changements de plans de pressions. Composantes sur trois plans nouveaux rectangulaires ou obliques. . . . .	547
<p style="margin-left: 40px;">N. B. Ajouter, aux tableaux de synonymie, les notations</p> <div style="margin-left: 80px;"> <math>X_x \ X_y \ X_z</math>  de M. Kirchhoff <math>Y_x \ Y_y \ Y_z</math>.  <math>Z_x \ Z_y \ Z_z</math> </div>	
18. Dilatations et glissements. Leurs relations en divers sens. . . . .	549

	Pages.
Suite du 3 <sup>e</sup> Appendice.	
§ 19. Formules qui les donnent dans les sens d'axes rectangulaires nouveaux. . . . .	552
(Voir une autre démonstration, Appendice complémentaire, § 82, note, p. 779.)	
En note. Ellipsoïde des dilatations. . . . .	553
(Voir aussi Appendice complémentaire, § 82, 2 <sup>e</sup> note, p. 780.)	
20. Formules (12) des six composantes de pression en fonction des dilatations et glissements. . . . .	554, 556
21. Nombre des coefficients différents, Leur réduction de 36 à 15 par 21 égalités entre eux. . . . .	556
(Voir le 5 <sup>e</sup> Appendice, surtout p. 716, 718.)	
22. Corps homogènes. Homogénéités parallèle, semi-polaire ou cylindrique, polaire ou sphérique, etc. Corps isotropes. Observation sur l'état dit <i>naturel</i> . . . . .	560
(Voir aussi Appendice complémentaire, § 80, p. 771.)	
23. Gas (exceptionnel) où il y avait des pressions antérieurement aux déformations exprimées par les trois dilatations et les trois glissements. . . . .	562
En note. Démonstration des formules relatives à ce cas général. Théorème général de mécanique moléculaire. Autre démonstration de la réduction de 36 coefficients à 15. Formules (de M. Cauchy) relatives à des déplacements très-petits. . . . .	
	565 à 579
(Voir aussi Appendice complémentaire, p. 795.)	
24. Corps où il y a un ou trois plans de symétrie de contexture. Réduction des formules à un moindre nombre de termes pour ces sortes de corps, . . . .	574
(Voir 5 <sup>e</sup> Appendice, p. 759, pour les formules avec moins d'accents, et Appendice complémentaire, p. 805, note.)	
25. Gas où il y a un axe de symétrie ou d'élasticité. . . .	579
(Voir 5 <sup>e</sup> Appendice, p. 759, et Appendice complémentaire, p. 805, note.)	
26. Corps isotropes ou d'égalité d'élasticité en tous sens. Formules à deux coefficients, ou à un seul. . . . .	581
(Voir 5 <sup>e</sup> Appendice.)	
27. Relations des pressions aux points successifs, tant entre elles qu'avec les forces accélératrices. Équations <i>indéfinies</i> de l'équilibre intérieur, à satisfaire en tous les points d'un corps quelconque. . . . .	583
28. Relations entre les pressions intérieures et les pres-	

Suite du 3<sup>e</sup> Appendice.

sions extérieures. Équations d'équilibre <i>définies</i> à satisfaire aux points de la surface-limite de chaque corps ou à la jonction de deux portions successivement considérées d'un même corps. . . . .	585
§ 29. Expressions des dilatations et glissements, et, par suite, des composantes de pression, en fonction des déplacements des divers points. . . . .	587
Déplacements de grandeur quelconque, mais ne donnant lieu dans chaque petite portion d'un corps qu'à des déformations très-petites ou ne changeant que dans de très-faibles proportions les distances entre points très-proches. . . . .	589
Déplacements très-petits $u, v, w$ . . . . .	591
(En note. Mêmes déplacements de grandeur quelconque exprimés en fonctions de déplacements très-petits et de translations et rotations). . . . .	592
30. Équations différentielles contenant les déplacements supposés très-petits, . . . . .	<i>id.</i>
(En note. Cas de pressions antérieures aux déplacements). . . . .	<i>id.</i>
31. Usage général des formules et équations de cet Appendice. Méthode inverse. Méthode mixte. Essais et vérifications. Exemple (torsion). . . . .	595
(Voir même Appendice, § 35, p. 604, Appendice complémentaire, p. 825 et 840.)	
32. Conditions de <i>compatibilité</i> à remplir pour que six fonctions de trois coordonnés représentent des dilatations et des glissements. — L'emploi de ces conditions dispense souvent de chercher les déplacements. . . . .	597
33. Vérifications et généralisations diverses; et, d'abord, contraction de volume d'un corps de forme quelconque sous une pression normale. . . . .	600
34. Suite. Extension longitudinale et contraction latérale d'un prisme de contexture quelconque. . . . .	601
35. Suite. Torsion d'un prisme à un seul plan de symétrie de contexture, et d'un cylindre elliptique de contexture quelconque. Équation de cohésion. . . . .	603
(Voir App. compl., § 70, 6 <sup>e</sup> , p. 770, et § 96, p. 845.)	
36. Suite. Flexion circulaire d'un prisme de contexture quelconque. . . . .	612
37. Suite. Flexion inégale ou avec glissements, d'un prisme à un seul plan de symétrie. . . . .	613

	Pages.
Suite du 3 <sup>e</sup> Appendice.	
Observation sur la nécessité d'opérer d'une manière ou inverse ou mixte. . . . .	616
<b>4<sup>e</sup> APPENDICE.</b> <i>Comparaison de nos formules de torsion à l'expérience. Digression sur les vibra- tions tournantes.</i> . . . . .	617
<b>§ 38.</b> Expériences de M. Wertheim sur la torsion des prismes rectangles, et observations sur la comparaison qu'il établit entre leurs résultats et ceux de la formule de Cauchy. . . . .	<i>id.</i>
<b>39.</b> Examen de cette formule de torsion, trouvée par M. Cauchy en 1829. . . . .	620
(En note. Réduction d'un tiers qu'il faudrait opérer d'après son analyse, à laquelle il a renoncé). . 621 à	627
<b>40.</b> Confirmation par les expériences de Duleau et de Savart, et aussi par celles de Wertheim, de la loi établie par notre formule de torsion des prismes rectangles. 622 à	629
<b>41.</b> Expériences de M. Wertheim sur les cylindres à base d'ellipse. . . . .	629
<b>42.</b> Vibrations tournantes. Leur équation différentielle. .	631
<b>43.</b> Durée ou nombre des vibrations tournantes donnant le son le plus grave. . . . .	635
<b>44.</b> Rapport du nombre des vibrations longitudinales au nombre des vibrations tournantes d'une même tige.	635
<b>45.</b> Application aux tiges rectangulaires. Vérification, par les vibrations, de notre formule de leur torsion. . . .	640
(Voir aussi 5 <sup>e</sup> Appendice, § 63, p. 686.) (En note. Observation sur le résultat qui avait été trouvé par Cauchy). . . . .	641
<b>46.</b> Amplitude des vibrations de toute espèce. C'est cette amplitude qui détermine le danger de rupture. Mais tout calcul dans lequel on ne suppose pas unie à la pièce heurtée la masse étrangère heurtante, est sans utilité. . . . .	643
<b>5<sup>e</sup> APPENDICE.</b> <i>Discussion théorique et expérimentale détaillée, relative aux rapports entre les coefficients des formules de l'élasticité des solides, et à la réductibilité de leur nombre. — Remar- ques sur les corps régulièrement cristallisés.</i> . . .	645
<b>47.</b> Rappel de la réduction du nombre des coefficients :	

Suite du 5<sup>e</sup> Appendice.

Pages.

	1 <sup>o</sup> pour une contexture quelconque, 2 <sup>o</sup> pour des contextures particulières. . . . .	645
§ 48.	Conséquence de cette réduction pour les corps isotropes. Expérience confirmative. Première contestation, élevée par M. Oersted, et qui porterait sur toutes les formules quels que fussent leurs coefficients. . . . .	646
	En note. Démonstration, plus simple qu'à la p. 199, de la relation entre les deux coefficients des formules d'isotropie. Voir aussi p. 570, 580, 805 note, 814 note.). . . . .	647
49.	Remarque de M. Regnault sur le défaut général d'isotropie des solides employés dans les expériences. . . . .	650
50.	Interprétation différente des faits par M. Wertheim. . . . .	651
51.	Remarque sur ce qui peut prêter à confusion à cet égard dans les écrits de Cauchy, et sur sa première manière d'établir les formules de pressions. . . . .	<i>id.</i>
52.	Formules proposées par M. Wertheim. Conséquences diverses (analytiques) des formules d'isotropie à deux coefficients quelconques. . . . .	657
53.	Opinion sceptique à laquelle leur proposition a donné lieu. Nécessité de ne pas s'y retrancher quand on sort de l'analyse pure. L'admission de formules d'isotropie à deux coefficients dont le rapport est variable et même indéterminé est quelquefois sans inconvénient, mais souvent elle peut donner le change et empêcher de reconnaître le défaut d'isotropie et d'employer les vraies formules relatives aux corps dont on s'occupe. . . . .	658
54.	Autre origine de l'opinion signalée. Formules à 36 coefficients données incidemment par Poisson en 1829 (et auxquelles il a renoncé depuis). . . . . (Voyez une autre origine aux §§ 69, 72, p. 708 et 721.)	660
55.	Observation sur le raisonnement de M. Poisson. Il se fonde tacitement sur la loi des actions entre molécules. Une fonction de <i>quantités très-petites</i> n'est pas nécessairement une fonction linéaire. Exemples. . . . .	662
56.	Cas général de linéarité. Vraie raison de la forme linéaire des formules de pression. Une fonction a cette forme quand elle n'est que la <i>différence de deux valeurs d'une autre fonction</i> (supposées continues), et, sa variable, une différence correspondante, sup-	

	Pages.
Suite du 5 <sup>e</sup> Appendice.	
posée très-petite. Réduction inévitable des coefficients à quinze. . . . .	663
§ 57. Accord de la théorie avec les expériences de M. Regnaud sur les piézomètres en cuivre et en laiton. .	665
58. Même accord avec les expériences sur les piézomètres en verre. . . . .	673
59. Expériences de Wertheim et de M. Clapeyron sur le caoutchouc. Observation relative aux matières coagulées plutôt que solidifiées. . . . .	677
(Voir encore Appendice complém., § 73, p. 738.)	
60. Expériences de Wertheim sur l'allongement des cylindres creux. Remarques sur les dispositions à leurs extrémités. Isotropie improbable. . . . .	679
61. Effets d'un défaut d'isotropie. Il explique les faits de plusieurs manières. . . . .	681
(Voir aussi Appendice complém., § 93, p. 820.)	
62. Observation sur la proposition de prendre $\frac{k}{K} = 1$ constant. . . . .	684
63. Expériences sur les vibrations tournantes. . . . .	686
64. Sur un raisonnement présenté par M. Cauchy en 1851, dans un Rapport. Il ne s'applique qu'au cas d'une cristallisation régulière, qui exclut l'isotropie. . .	689
65. Comment la structure cristalline ou <i>périodique</i> pourrait altérer les vingt et une égalités entre les trente-six coefficients. Elle ne les altère pas nécessairement. . . . .	691
66. Autre moyen de se rendre compte de cette altération <i>simplement possible</i> et de ses limites. . . . .	697
Le produit de deux fonctions périodiques, <i>si elles sont de même période</i> , peut avoir une moyenne différente de zéro, quoique chacune ait zéro pour moyenne. .	703
67. L'altération des vingt et une égalités entre les trente-six coefficients, si elle a lieu, doit être insensible. Opinion adoptée finalement par Poisson. . . . .	704
68. Cette altération ne regarde pas, en tous cas, les corps amorphes ou à cristallisation confuse, comme sont toujours ceux qui sont employés comme matériaux. .	705
69. Opinion, sur ce sujet, de divers savants de l'Angleterre et de l'Allemagne. MM. Charles Neumann, Houghton, Clebsch. Première observation sur les travaux de George Green. . . . .	706

	Pages.
Suite du 5 <sup>e</sup> Appendice.	
§ 70. Preuve donnée par MM. Green, Thomson, Kirchhoff, de la nécessité de réduire les coefficients à vingt et un au plus. Les six composantes de pression sont les dérivées partielles d'une même fonction par rapport aux trois dilatations et aux trois glissements. . . . .	712
Les quinze égalités de Green. — Les six égalités complémentaires. . . . .	716 et 718
71. Examen des raisonnements par lesquels divers géomètres étrangers établissent les formules sans s'appuyer en apparence sur la loi des actions entre points matériels. . . . .	id.
72. Examen des motifs censés tirés des faits sur lesquels plusieurs d'entre eux appuient la conservation de vingt et un coefficients pour le cas général de contexture. 1 <sup>o</sup> George Green. . . . .	721
(En note.) Propagation des ondes lumineuses dans un milieu hétérotrope où il y avait des pressions antérieurement aux ébranlements. . . . .	722
(En note.) On peut obtenir l'onde de Fresnel avec des conditions moins nombreuses que celles de Green, et probablement toujours remplies. Polaire réciproque de l'onde la plus générale. . . . .	729
73. Suite. 2 <sup>o</sup> MM. Stokes et Maxwell. Limite de l'application des formules de la théorie de l'élasticité. . . . .	732
74. 3 <sup>o</sup> M. Clausius. Observations sur l' <i>elastische Nachwirkung</i> . . . . .	742
75. Résumé de la discussion du 5 <sup>e</sup> Appendice. — Nécessité d'admettre la loi des actions entre points matériels et ses conséquences. . . . .	746 à 756
76. Conclusion de cet Appendice. . . . .	757
Formules de pressions pour des corps à un et à trois plans de symétrie et à un axe de symétrie. . . . .	759
Relations, données par anticipation (Voir l'Appendice complémentaire, p. 807), entre les coefficients, pour une distribution simple et continue des élasticités en divers sens. . . . .	761

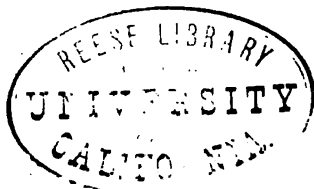
APPENDICE COMPLÉMENTAIRE. *Expériences confirmatrices. — Considérations sur des points précédemment traités. — Ellipsoïdes des pressions et des dilatations. — Usage du Potentiel des actions*



	Pages.
<i>moléculaires. — Distribution des élasticités en divers sens. — Leur distribution ellipsoïdale dans les corps amorphes. — Travaux de M. Clebsch. — Démonstration nouvelle, par M. Kirchhoff, des formules de la torsion et de la flexion.</i> . . . . .	763
§ 77. Objet de cet Appendice. . . . .	<i>id.</i>
78. Expériences récentes (de M. Morin surtout) confirmant les lois invoquées ci-dessus. . . . .	764
(En note.) Formule pratique des ingénieurs anglais. .	767
79. Observations diverses sur ce qui précède : 1° Inclinaison des fibres; 2° Approximation plus grande de la flèche; 3° Un glissement équivaut à une dilatation et une contraction; 4° Sur les arêtes rentrantes; 5° Généralisation et démonstration plus simple du théorème de réciprocité des composantes de pression; 6° Changement des coordonnées transversales quand la texture est à un seul plan de symétrie.	<i>id.</i>
80. Sur l'état dit <i>naturel</i> ou primitif et sur sa condition. Il a lieu quand les forces extérieures sont nulles. . .	771
81. Pressions principales et Ellipsoïdes des pressions. . .	774
(En note.) Formules de M. Clebsch pour en déterminer les directions. . . . .	777
82. Dilatations principales et ellipsoïdes des dilatations. .	779
(En note.) Démonstration, autre que celle du § 49, p. 552, comme conséquence d'un théorème sur les projections, des formules (41), p. 554, de changement des directions suivant lesquelles on prend les dilatations et glissements. . . . .	<i>id.</i>
(En note.) Équation générale de cohésion ou de résistance permanente pour un solide quelconque. . . .	781
83. <i>Potentiel</i> des forces moléculaires ou intérieures, ou travail qu'elles peuvent fournir jusqu'à <i>détente</i> ou retour à l'état naturel; et son emploi. Usage, avec un léger perfectionnement, des méthodes de la Mécanique analytique. . . . .	783
84. L'expression du potentiel, supposée établie, conduit aux équations différentielles indéfinie et définie de l'équilibre. . . . .	789
Formules (212) des composantes de pression, com-	

	Pages.
Suite de l'Appendice complémentaire.	
plètes, c'est-à-dire avec les termes provenant des pressions $p^*$ antérieures aux déplacements. . . . .	795
§ 85. Expression complète du potentiel des actions intérieures en les regardant comme fonctions des distances moléculaires. Modification et généralisation des raisonnements de Navier, de 1821. . . . .	796
86. Formule symbolique donnant les vingt et un (ou quinze) coefficients des équations de l'élasticité pour un système quelconque d'axes coordonnés $x', y', z'$ , connaissant ces coefficients pour un premier système $x, y, z$ . . . . .	800
87. Surface qui donne la distribution des élasticités directes autour d'un point. Cas de trois plans de symétrie. Conditions (probablement toujours remplies dans la nature) pour que ces élasticités n'aient que trois maxima et minima, et varient suivant une loi simple. . . . .	803
(En note.) Démonstrations plus simples qu'aux §§ 24, 25 et 48 (note), p. 575, 580, 647, de la réduction du nombre des coefficients quand il y a des plans ou un axe de symétrie . . . . .	804 et 805
88. Surface donnant la distribution, aussi autour d'un point, des coefficients ou modules d'élasticité $E$ de Young et de Navier. Conditions de leur variation simple et graduelle. . . . .	808
89. Distribution <i>ellipsoïdale</i> des élasticités directes $a_{x_1x_2x_3x_1}$ , et, aussi, des modules $E$ . . . . .	811
90. Ce mode de distribution doit avoir lieu généralement, au moins à très-peu près, pour les solides amorphes ou à cristallisation confuse, comme sont les matériaux de construction. Effet d'une compression permanente inégale d'un solide isotrope. . . . .	812
(En note.) Formule générale (de Cauchy) de réduction de certaines sommes relatives à un système isotrope à un moindre nombre. . . . .	814
91. Corps pour lesquels on pourrait supposer un mode de distribution des élasticités un peu différent. . . . .	816
92. Comparaison aux expériences de M. Hagen sur les modules d'élasticité des bois en divers sens. Formule à substituer à la sienne. . . . .	817
93. Conséquences diverses de la distribution ellipsoïdale	

	Pages.
Suite de l'Appendice complémentaire. et des modifications qu'on peut y admettre. Remarques sur les rapports $\eta$ , $\eta'$ entre les contractions transversales et les dilatations longitudinales correspondantes, et sur le rapport $\eta_1 = \frac{R'_0}{R_0}$ entre les limites des dilatations et des contractions longitudinales non dangereuses. . . . .	820
§ 94. Travaux de M. Clebsch. Problème général de recherche des divers modes de distribution à donner aux forces s'exerçant sur les bases d'un prisme dont les faces latérales sont libres pour que les fibres ou éléments longitudinaux n'agissent les uns sur les autres que dans le sens de leur longueur; et de la détermination des déplacements qui en résultent. Extension, torsion et deux flexions avec glissements. Application suffisamment approximative aux problèmes de la pratique. . . . .	825
95. Travaux de M. Kirchhoff : 1° Expressions que doivent prendre les dérivées des déplacements des points des tiges élastiques par rapport à leur coordonnée longitudinale quand ces tiges ont des dimensions transversales infiniment petites. . . . .	830
96. Suite. 2° Interprétation et conséquences de ces expressions ou équations. Les déformations de la tige infiniment mince se réduisent à des extensions, torsions, flexions. Les formules ci-dessus sont vraies quel que soit le mode d'application des forces aux extrémités d'une tige, quand elle est infiniment mince. Conséquences pratiques. . . . .	840
ERRATA. . . . .	850



## NOTICE BIOGRAPHIQUE SUR NAVIER,

Par M. le baron DE PRONY, inspecteur général des ponts et chaussées.

---

Le système des connaissances qui constituent la science de l'ingénieur (l'architecture y est censée comprise) embrasse, à l'époque actuelle, dans leur presque universalité, et sous les points de vue théorique, expérimental et pratique, les diverses branches des sciences physico-mathématiques. Ce système n'a pas toujours été, à beaucoup près, aussi étendu; mais en comparant entre eux les monuments exécutés à des époques successives, et établissant la comparaison non sur la grandeur matérielle de ces monuments, la quantité de travail qu'ils ont exigée, mais sur le degré d'instruction qui était nécessaire pour en dresser les projets et en diriger l'exécution, on voit une correspondance manifeste entre la marche scientifique de l'esprit humain et celle de l'art des constructions. Les connaissances que Vitruve juge nécessaires à un architecte, et dont il donne l'énumération, n'étaient probablement pas toutes possédées par les constructeurs des pyramides d'Égypte, et cependant ne constitueraient maintenant qu'une instruction médiocre.

A des époques de désastreuse mémoire, la marche de l'esprit humain fut arrêtée, ou, plus exactement, devint rétrograde par suite des grandes catastrophes qui plongèrent plusieurs pays policés dans l'ignorance et la barbarie; mais il est à remarquer qu'une des divisions importantes de l'art de construire se trouva assez fortement établie pour résister aux causes de destruction qui attaquaient les autres branches des connaissances humaines, et continua d'apparaître, après l'extinction des dernières clartés scientifiques, comme le filet lumineux qui se fraye un passage au travers d'une atmosphère ténébreuse. Une des preuves du fait que je cite ici est fournie depuis bien des siècles

par les monuments de cette architecture qu'on appelle *gothique* ; l'examen analytique du système de composition de ces monuments fait reconnaître l'art avec lequel on a su rendre compatibles, en élevant des édifices d'une immense grandeur, l'économie des matériaux, les garanties assurées de stabilité. A ces avantages se réunit, dans l'intérieur des temples, celui d'un caractère éminemment religieux, etc.

On peut regarder le xvi<sup>e</sup> siècle comme fournissant l'époque à laquelle la science de l'ingénieur a commencé à prendre les grands développements qui ont préparé son état actuel de transcendance. Des travaux hydrauliques importants, de différents genres, ont été exécutés pendant les xvi<sup>e</sup> et xvii<sup>e</sup> siècles, en Italie, d'où il me semble que sont sortis les premiers traités sur le mouvement des eaux.

Pendant la première moitié du xvii<sup>e</sup> siècle, la France s'est acquis des droits impérissables à la reconnaissance des nations civilisées par la construction du premier canal à *point* ou *bassin* de partage, celui qui, en partant de Briare, établit la communication entre le bassin de la Loire et celui de la Seine.

Le xviii<sup>e</sup> siècle a vu s'élever, dans cette même France, des ponts en pierre, dont la hardiesse et la beauté n'avaient pas encore d'exemples, et dont les moyens de construction rendent manifeste la supériorité de l'art moderne sur l'art ancien.

Enfin est arrivée l'époque ci-dessus mentionnée, à laquelle le système, presque entier, des sciences physico-mathématiques s'est allié à la science des constructions considérée dans toute sa généralité. On peut citer parmi les résultats récents de cette heureuse alliance, l'immense perfectionnement des moyens de communication et de transport, tant par eau que par terre ; les procédés de substitution du fer à la pierre, les traversées qu'on pourrait appeler *aériennes* des plus grands fleuves ; les nouvelles et puissantes ressources tirées de l'action du feu comme force applicable à la locomotion, etc., etc., et il est juste d'ajouter que nous avons, pour cette marche progressive de la science, de grandes obligations à l'Angleterre. Si l'on veut se faire une idée de la vaste étendue des études auxquelles les jeunes ingénieurs sont maintenant obligés de se livrer, il faut prendre connaissance des programmes d'enseignement, tant de la célèbre École

polytechnique que des écoles d'application, où les élèves vont puiser le complément d'instruction nécessaire pour les services publics.

Un des hommes bien distingués de cette dernière époque, est l'ingénieur et académicien, dont la perte récente et prématurée excite nos vifs regrets; ayant été à portée de bien connaître et apprécier, dès son début dans la carrière scientifique, et ses excellentes qualités et le mérite de ses travaux, j'ai cru devoir payer à sa mémoire un tribut d'estime et d'amitié que j'aurais vraisemblablement reçu de lui, si l'ordre naturel des survivances n'eût pas été interverti entre nous deux.

Louis-Marie-Henri Navier, officier de la Légion d'honneur, membre de l'Institut royal de France (Académie des sciences), et inspecteur divisionnaire du corps royal des ponts et chaussées, naquit à Dijon, le 15 février 1785. Son père était un avocat jouissant d'une grande considération, et qui, après avoir été membre de l'Assemblée des notables et de l'Assemblée législative, mourut dans un âge peu avancé, par suites des chagrins que lui causèrent les excès révolutionnaires.

Louis Navier, resté orphelin à l'âge de quatorze ans, eut le bonheur de trouver un second père dans un oncle, compté avec raison parmi les notabilités du corps des ponts et chaussées, M. Gauthey, qui, d'abord ingénieur des états de Bourgogne, devint inspecteur général des ponts et chaussées, par suite de l'organisation départementale de la France; il est mort le 14 juillet 1807, après avoir projeté et fait exécuter des travaux de la plus haute importance, et composé des ouvrages remarquables, dont il sera fait mention dans la suite de cette notice.

L'éducation de Navier, dirigée par Gauthey, devait nécessairement avoir pour objet principal la culture des sciences qu'un ingénieur doit se rendre familière; les progrès du jeune élève furent tels qu'il se trouva, en 1802, en état de subir l'examen d'admission à l'École polytechnique, et d'être un des premiers reçus à cette école par ordre de mérite; après de brillantes études, il entra à l'École des ponts et chaussées en 1804, et obtint en 1808 le grade d'ingénieur ordinaire.

Gauthey, pendant les quatre ou cinq dernières années de sa vie, mettait à profit le peu d'instantants de loisir dont pouvait dis-

poser son neveu, en suivant les cours des Écoles polytechnique et des ponts et chaussées, pour l'occuper à la partie de ses travaux personnels, à laquelle les études du jeune élève pouvaient être applicables. Le résultat de cette association a été l'habitude, la grande facilité acquise de bonne heure par Navier, de traiter les questions théorico-pratiques, facilité qui a eu une heureuse influence sur le mérite de ses travaux postérieurs. Avec de tels antécédents il se trouva en état de produire de son propre fonds, à une époque de la vie où la plupart des hommes voués aux sciences ont encore besoin d'un complément d'instruction. Ses premières grandes publications (je ne parle pas de quelques notes et opuscules isolés) furent des tributs de reconnaissance payés au digne parent qui l'avait lancé dans la carrière scientifique. Gauthey avait rédigé en presque totalité, mais non achevé, et laissé même incomplets à d'autres égards, des traités fort étendus sur les ponts et les canaux ; Navier, qui n'était pas l'héritier de son oncle, fit, eu égard à sa médiocre fortune, de grands sacrifices pour acquérir la propriété de ces manuscrits, afin de les publier après les avoir complétés.

Le *Traité des ponts* a paru en 1813, et se compose de deux forts volumes in-4°. Le premier volume a été réimprimé en 1832, avec des augmentations et améliorations considérables. Ce traité, le plus complet de tous ceux qui ont été publiés sur la même matière, doit surtout son utilité et l'avantage d'être mis au niveau des connaissances actuelles, à la grande quantité de notes que Navier y a insérées, et dont la réunion pourrait fournir un ouvrage séparé fort instructif.

Le premier volume contient des détails historiques et descriptifs sur les ponts anciens et modernes, qui sont lus avec beaucoup d'intérêt, non-seulement par les ingénieurs, mais encore par ceux qui, étrangers aux connaissances physico-mathématiques concernant les ponts, sont simplement curieux de connaître l'histoire de l'art. Navier a placé en tête de ce volume une notice biographique sur son oncle.

J'ai dit que ce *Traité des ponts* avait d'abord paru en 1813 ; il aurait probablement paru plus tôt, si la rédaction de Navier n'eût été interrompue par une mission dont M. le comte Molé, directeur général des ponts et chaussées, le chargea pour aller

à Rome s'occuper de projets très-importants ; savoir, la reconstruction du pont d'Horatius Coclès, plusieurs quais dans la traversée de Rome, et les moyens de préserver la ville éternelle des inondations du Tibre.

J'ai eu la satisfaction de me trouver à Rome lorsque Navier travaillait à ces projets importants, qui sont restés en portefeuille par suite d'événements politiques bien connus.

Un troisième volume des œuvres laissées en manuscrit par Gauthey, et publiées par Navier, traite des canaux de navigation ; ce volume, mis au jour en 1816, offre une collection de sept mémoires contenant, indépendamment des considérations générales sur l'établissement des canaux, des notes fort détaillées sur les principaux canaux de France, tant exécutés que projetés, et particulièrement sur le canal du Charolais, qui a pris ensuite le nom plus caractéristique de canal du Centre, et dont Gauthey a rédigé les projets et dirigé l'exécution.

Navier, en publiant les manuscrits de son oncle, avait satisfait un besoin de son cœur ; l'amour seul de la science lui fit entreprendre et exécuter la réimpression de deux ouvrages recommandables, rédigés et mis au jour, par leur auteur, pendant la première moitié du siècle dernier (1729, 1737), savoir : la *Science de l'ingénieur*, et le premier volume de l'*Architecture hydraulique de Bélidor*. L'édition Navier, de la *Science de l'ingénieur*, porte la date de 1813, et parmi les notes et additions dont elle est enrichie, on distingue celles qui concernent la poussée des terres, la forme et les dimensions des murs de revêtement, la théorie des voûtes.

Le premier volume de l'*Architecture hydraulique de Bélidor* est un traité de mécanique, dans lequel les théories de l'équilibre et du mouvement des corps solides et fluides, sont présentées avec leurs applications au cas de pratique dont les ingénieurs ont à s'occuper. Cet ouvrage a joui d'une réputation justement méritée, et à l'époque où il a paru il remplissait complètement son objet ; mais cette condition ne se trouvait plus satisfaite après un laps de temps de plus de trois quarts de siècle, d'après la marche progressive des connaissances. Navier a entrepris de suppléer, par des additions et des notes, à l'insuffisance de l'ancien texte, et s'est acquis en remplissant cette tâche des droits



à la reconnaissance des amis des sciences et des arts; ses additions et notes, qui en somme doublent à peu près le volume primitif, renferment une masse d'instructions on ne peut pas plus profitables.

Livré à des *travaux scientifiques* aussi importants, et que l'on verra suivis bientôt de missions et de publications non moins remarquables, Navier a pu encore s'occuper de *travaux pratiques* du genre de ceux dont l'utilité fait le principal mérite (on voit qu'il ne s'agit pas ici du pont des invalides dont il sera bientôt parlé). Je citerai parmi ces travaux :

1° Le pont de Choisy, construit en 1810 sur la Seine;

2° La passerelle de la cité de Paris, reconstruction nécessitée par des combinaisons malheureusement hasardées et qu'il est utile de mentionner comme leçons d'expérience dans l'histoire de l'art ;

3° Le pont d'Asnières sur la Seine;

4° Le pont d'Argenteuil, encore sur le même fleuve.

Les trois ponts de Choisy, d'Asnières et d'Argenteuil sont construits avec piles en pierre, et avec travées courbées en arc de cercle.

Mais c'est surtout par ses missions en Angleterre que Navier était appelé à rendre de nouveaux et d'importants services.

La grande utilité des ponts suspendus et des chemins de fer ayant été appréciée par le gouvernement, la direction générale des ponts et chaussées a voulu mettre les ingénieurs français en état de compléter les parties de leurs études liées à ces nouveaux genres de construction, et Navier a été envoyé plusieurs fois en Angleterre et en Écosse, chargé de recueillir les données et les documents nécessaires pour atteindre ce but.

Le mémoire que rédigea Navier sur les ponts suspendus, et qu'il publia en 1823 après ses deux premiers voyages, a été jugé un traité aussi nouveau que complet sur la matière; l'approbation formelle de l'Académie des sciences en constata le mérite d'après un rapport présenté par MM. de Prony, Fourier, Fresnel, Molard et Charles Dupin; l'auteur y avait donné de nouvelles preuves de ses profondes connaissances en mécanique théorique et pratique, de même qu'il y avait enregistré les précieuses et

nombreuses observations qu'il avait recueillies sur les ponts suspendus jusque-là exécutés.

Dès ce moment Navier fut appelé, et sa correspondance le constate, à donner des avis, des conseils sur les constructions importantes de cette nature projetées en France et à l'étranger.

Peu après, Navier fut nommé membre de l'Académie des sciences, et cette récompense mit le comble aux vœux que, jeune encore, il lui était possible de former.

Malheureusement il était dans la destinée de ce savant ingénieur de fournir un nouvel exemple de ces vicissitudes qui ont troublé les vies les plus brillantes d'avenir, et qui semblent réservées aux artistes mêmes, à qui une juste confiance dans leurs méditations donne l'assurance nécessaire pour tenter des essais nouveaux ; Navier devait, parvenu à cet apogée de sa carrière, se voir injustement et cruellement blessé dans sa réputation d'ingénieur ; on devine que je vais parler du pont des Invalides.

Ce pont, de 155 mètres d'ouverture, était presque égal au plus grand passage jusqu'alors franchi par M. Telford au détroit de Menai.

Pour apprécier le mérite des recherches théoriques et expérimentales qu'a exigées l'évaluation des forces agissant sur les diverses parties du pont des Invalides, il suffit de rappeler que les chaînes de ce pont étaient exposées à recevoir un effort quatre fois et demie plus considérable que le pont construit en 1820 sur la Tweed, par le capitaine Brown, pont qui était alors cependant le plus grand modèle que l'on eût à consulter.

Paris a pu juger de l'effet monumental de cette arche colossale reposant sur quatre colonnes égyptiennes ; les ingénieurs se sont alors aussi empressés d'étudier, et les dispositions neuves comme armatures des points d'appui ou d'attache de cette grande construction, et l'appareil ingénieux inventé par Navier pour soumettre à un effort de 67,000 kilogrammes (poids presque d'un millier d'hommes), avec quatre ouvriers seulement, les cinq mille pièces composant le système de suspension.

Le pont était terminé lorsqu'un léger mouvement se manifesta dans les puits et contre-forts de retenue ; ce mouvement fut aggravé du côté des Champs-Élysées par la rupture, dans la nuit du 6 au 7 septembre 1826, d'une conduite maitresse des eaux

de la ville de Paris de 0<sup>m</sup>,32 de diamètre; l'irruption torrentielle de ces eaux sous une charge de près de 30 mètres des réservoirs alimentaires de Chaillot (irruption que la nuit prolongea nécessairement), forma un lac au droit des fouilles non comblées, et s'étendit au loin par infiltration dans les remblais déjà effectués.

Il fallut dès lors remettre la construction sur ses échafaudages; la saison était avancée, on craignit que les ponts de services ne pussent être démontés avant les hautes hautes eaux et les glaces de l'hiver; une misérable question d'argent empêcha d'ailleurs de commencer immédiatement les travaux additionnels nécessaires pour consolider les points d'attache de la suspension, et l'on décida d'ajourner ces réparations à la campagne suivante, et de démonter le plancher et les chaînes.

Malheureusement, et pour la science et pour les moyens de justification de l'ingénieur, je dirai même pour l'honneur national, solidairement lié à celui des hommes que chaque pays présente avec orgueil comme donnant la mesure de l'avancement des diverses branches de connaissances, les travaux du pont des Invalides n'ont point été repris, et au contraire on a vu démolir les ouvrages exécutés, et effacer jusqu'aux traces de cette grande et belle entreprise.

Navier vit ainsi s'anéantir subitement un des plus beaux titres qu'il pût avoir à l'estime des hommes instruits, la plus noble récompense de ses honorables travaux.

D'autres considérations ont dû aggraver ses douloureux regrets. Lorsqu'un grand monument, qui excite vivement l'intérêt général, vient ainsi à disparaître tout à coup, au moment où il est prêt à remplir sa très-utile destination, comme le nombre de ceux qui peuvent connaître et apprécier les véritables causes de cette disparition est toujours infiniment petit par rapport au nombre de ceux dont les croyances, quoique fondées sur des apparences trompeuses n'en constituent pas moins ce qu'on appelle l'*opinion publique*, il en résulte nécessairement, dans cette opinion, une défaveur qui, accréditée par des causes que je me dispenserai de signaler, exerce une bien fatale influence sur l'état moral et même physique de celui qui en est l'objet.

C'est aux hommes spéciaux et consciencieux qu'il appartient

de réformer, autant qu'il est en eux, ces grandes et affligeantes injustices.

Je remplis donc un devoir sacré en déclarant à cette occasion :

Que l'événement du pont des Invalides devait être considéré seulement comme un de ces accidents plus ou moins graves que les ingénieurs rencontrent souvent dans les grands travaux ;

Que le remède était aussi facile que peu dispendieux, puisqu'il s'agissait seulement d'augmenter la résistance des contreforts ;

Qu'il est infiniment à regretter que, par l'exécution de ces travaux complémentaires et par l'achèvement du pont, on n'ait point donné au public la preuve évidente des deux précédentes propositions, et acquis à la France une nouvelle manifestation monumentale de ce que pouvaient la science et le talent de l'ingénieur qui avait le premier, et avec tant de sagacité et de profondeur, raisonné les importantes questions que soulève la construction des ponts suspendus (1).

Dès son premier voyage en Angleterre, Navier fixa aussi son attention sur les routes excellentes de ce pays, et remit à ce sujet à l'administration, en 1822, la première note qui ait été rédigée sur les procédés de Mac-Adam, et qui est publiée dans les *Annales des ponts et chaussées* (1<sup>er</sup> semestre 1832).

Cette notice constatait moins un procédé nouveau pour la construction des chaussées que les résultats remarquables à attendre :

(1) La démolition du pont des Invalides a eu pour motifs exclusifs :

1<sup>o</sup> L'opposition de la ville de Paris à l'établissement d'une route à travers les Champs-Élysées pour arriver à ce pont ;

2<sup>o</sup> Les contestations entre la compagnie et l'administration, au sujet du paiement des travaux de consolidation des contreforts ;

3<sup>o</sup> La transaction survenue sur ces difficultés, et par laquelle la compagnie s'est obligée à renoncer au pont des Invalides, moyennant la concession qui lui a été faite de trois ponts sur la Seine, à l'allée d'Antin, à la place de Grève, et près de l'Archevêché.

Tous ces détails sur le pont des Invalides, dont nous garantissons l'exactitude, ont été publiés dans le temps par ordre de l'administration (*Moniteur*, 29 février 1828), et reproduits avec des développements d'un grand intérêt par Navier, dans l'édition de 1830, de son mémoire sur les ponts suspendus, sous le titre de *Notice sur le pont des Invalides*.

1° D'un soin éclairé de tous les jours pour l'entretien des empièvements, pour le parfait écoulement des eaux, pour l'enlèvement des boues et de la poussière;

2° De la suppression radicale des accotements de terre, qui sont en France une cause si funeste de la malpropreté et du mauvais état des routes.

Plus tard, les relations de Navier avec les ingénieurs anglais les plus marquants, et ses recherches multipliées sur ce qui avait rapport aux routes anglaises, aux usages et à la législation qui régissait ces communications, lui permirent de publier son mémoire *sur la police du roulage*. Les opinions qui y sont émises peuvent être controversées, mais l'amour du bien public et le désintéressement qui ont dicté cet ouvrage, comme le mérite de la discussion et des faits qui y sont présentés, seront toujours pour Navier un titre de plus à l'estime des ingénieurs.

Un nouvel hommage fut rendu aux études spéciales de Navier sur toutes ces questions; une commission avait été nommée par M. le directeur général des ponts et chaussées, avec mission de se livrer à tous les travaux et expériences préparatoires pour les nouvelles dispositions réglementaires à adopter comme police de roulage. Navier fut appelé par l'administration à faire partie de cette commission, et fut élu à l'unanimité, par ses collègues, le secrétaire rapporteur des travaux considérables que cette commission a eu pendant plusieurs années à élaborer.

Navier fut aussi du nombre des ingénieurs envoyés en Angleterre pour étudier les chemins de fer, et c'est à ses connaissances pratiques, comme aussi à ses recherches théoriques sur cette nouvelle branche d'explorations scientifiques, que les ingénieurs doivent les articles remarquables insérés dans les *Annales des ponts et chaussées*, et que l'administration a été redevable des rapports nombreux, lumineux, qui ont signalés, et les études qu'il avait personnellement faites de la grande ligne de Paris à Strasbourg, et sa courte apparition comme inspecteur divisionnaire au conseil général des ponts et chaussées.

Lorsque Navier entra au conseil, il venait de recevoir, quelques mois auparavant, comme récompense de ses infatigables services, la croix d'officier de la Légion d'honneur.

Et cependant Navier pouvait faire marcher de front, avec ces

services si étendus, comme ingénieur, des travaux non moins remarquables, comme professeur, comme académicien.

Nommé, en 1819, professeur suppléant de mécanique appliquée à l'École royale des ponts et chaussées, et professeur titulaire en 1831, il a exercé cette fonction avec beaucoup de profit, et pour les élèves et pour la science ; ses leçons, tant lithographiées qu'imprimées, distribuées aux élèves qui ont suivi ses cours, et, en général, répandues parmi les ingénieurs, offrent des corps de doctrine qui deviennent de plus en plus nécessaires à mesure que l'application de la théorie à la pratique des constructions exige une étude plus approfondie des sciences physico-mathématiques.

Une des places de professeur d'analyse et de mécanique à l'École royale polytechnique, étant devenue vacante à la fin de 1830, Navier fut nommé pour la remplir, et en a exercé les fonctions pendant les six dernières années de sa vie ; il s'est fait remarquer, dans cette célèbre école, par la méthode et la clarté de son enseignement, et a rendu un grand service à l'instruction en faisant lithographier ses leçons, dont la collection forme quatre cahiers ; savoir, deux pour la première année, et deux pour la seconde ; un des cahiers de chaque couple contenant l'analyse, et l'autre la mécanique.

Navier, avant d'être reçu à l'Académie royale des sciences, s'était fait connaître avantageusement de cette compagnie savante, par plusieurs mémoires et ouvrages importants ; ses additions au premier volume de l'*Architecture hydraulique* de Bélidor, ci-dessus mentionnées, ont été approuvées par l'Académie, sur le rapport de MM. Poisson, Girard, Fourier et de Prony, rapporteur ; j'ai dit, plus haut, que son *Traité des ponts suspendus* avait obtenu la même distinction. Parmi les mémoires présentés et lus en séances académiques, je citerai : 1° *Mémoire sur les roues à élever l'eau*, jugé digne d'être imprimé dans les *Savants étrangers*, sur le rapport de MM. de Prony, Fourier et Dupin, rapporteur, du 2 novembre 1818 ; 2° *Mémoire sur la flexion des lames élastiques*, jugé comme le premier, digne d'être imprimé, sur le rapport de MM. Poinsot, Dupin et de Prony, rapporteur, du 4 septembre 1820 ; 3° *Mémoire sur la flexion des*

*plans élastiques*, lu le 14 août 1820; 4° *Mémoire sur les lois de l'équilibre et du mouvement des corps élastiques*, lu le 14 mai 1821; 5° *Mémoire sur les lois du mouvement des fluides, en ayant égard à l'adhésion des molécules*, lu le 18 mars 1822; 6° *Continuation des recherches sur les lois du mouvement des fluides, en ayant égard à l'adhésion des molécules*, lu le 16 décembre 1822.

Nommé, comme je l'ai déjà dit, membre de l'Académie royale des sciences, le 26 janvier 1824, Navier a contribué fort utilement aux travaux intérieurs de cette compagnie savante, par les nombreux rapports qu'il lui a faits sur des mémoires et ouvrages soumis à son jugement, et dont l'énumération serait trop longue pour être placée dans la présente notice. Les mémoires de sa composition, imprimés dans les recueils de l'Académie, sont :

1° *Dans le tome 6, Mémoire sur les lois du mouvement des fluides*; 2° *dans le tome 7, Mémoire sur les lois de l'équilibre et du mouvement des corps solides élastiques*; 3° *dans le tome 9, Mémoire sur les lois du mouvement des fluides élastiques*.

Les théories exposées dans ces derniers mémoires sont fondées sur ce qu'on pourrait appeler la *mécanique moléculaire*, celle qui fait entrer en considération la composition intime des corps, les actions réciproques des molécules qui les composent. La science de l'équilibre et du mouvement a pris ainsi une extension qui dépasse les limites posées par les Euler, d'Alembert, Lagrange, et prépare l'époque à laquelle diverses branches importantes des sciences naturelles seront ramenées à n'être plus que les divisions d'un même système, bien liées entre elles, et régies par l'analyse mathématique. On a, relativement à ces nouvelles théories et à leurs applications, de bien grandes obligations à notre célèbre géomètre, M. Poisson, qui a fait paraître et continue à publier des ouvrages, lesquels feront époque dans les annales scientifiques.

Ce fut le 23 août 1836 qu'une mort fatale et inattendue enleva Navier aux sciences et à ses nombreux amis; je dis ses nombreux amis, car il pouvait compter comme tels, tous ceux avec qui il avait des relations habituelles; quoique d'un caractère naturellement un peu flegmatique, il n'en était pas moins susceptible d'un attachement aussi durable que sincère, et cette disposition com-

porte d'autres qualités dont il était éminemment doué; les détails de sa vie privée feraient autant d'honneur à son caractère que ceux de sa vie publique en ont fait à sa science et à son talent.

Un cortège d'ingénieurs et d'élèves accompagnait le convoi de Navier : trois des ingénieurs, MM. Emmery, Coriolis et Raucourt ont pris la parole au moment de l'inhumation; et leurs discours brefs, mais pleins de sensibilité, ont été écoutés avec un vif intérêt.

(*Annales des Ponts et Chaussées*, 1837, 4<sup>o</sup> semestre, p. 4.)

---

## NAVIER,

Par M. EMMÉRY, Ingénieur en chef directeur.

---

Au moment où une si honorable couronne est décernée à la mémoire de Navier dans ces *Annales* qu'il appelait un besoin de notre époque, et qu'il avait déjà enrichies de ses travaux, qu'il nous soit permis d'y enregistrer un dernier adieu : hélas ! les tombes se refroidissent si vite.

Les hommes de cœur ne sauraient assez redire que Navier a succombé avant le temps; parce qu'il a refusé de consulter ses forces, parce qu'il s'est plu en quelque sorte à jouer sa santé, sa vie, contre cette tâche presque sans exemple, de se distinguer à la fois au plus haut degré comme ingénieur, comme professeur, comme savant.

L'École polytechnique, si bien représentée par ces deux cents braves jeunes gens qui, au plus fort de leurs examens, surent tout quitter pour accompagner et porter la dépouille de Navier à sa dernière demeure, cette École se rappellera toujours le culte de dévouement que lui portait notre ami, lorsqu'à l'instar



de l'immortel Monge, il mettait son titre de professeur au-dessus de tous les honneurs auxquels il pût aspirer.

Les ingénieurs n'oublieront jamais ni cet esprit juste et positif qui constituait le caractère distinctif des ouvrages de Navier, et qui lui faisait faire de la théorie presque exclusivement au profit de la pratique, ni ce double don de dessiner et d'écrire avec une merveilleuse facilité, avantage qui lui permettait de mettre, presque sans effort, en circulation, les notions avancées qu'il puisait pour lui-même dans ses infatigables travaux. Car la réunion si rare de tant de qualités avait fait de Navier un ingénieur, un savant à part, qui avait sa voie à lui personnelle toute tracée, et qui était appelé, par ses études en économie politique, par ses voyages, à jeter de vives lumières sur les plus importantes questions.

Nous nous répèterons souvent encore qu'il n'était pas d'homme chez lequel les témoignages d'amitié, les souvenirs de reconnaissance laissassent de plus profondes traces; que lorsqu'on était malheureux surtout, on voyait venir Navier, si froid dans ses rapports officiels, vous serrer la main avec cette expression que connaissaient ses amis, et vous prodiguer alors et son temps et toutes les consolations que peut seule dicter une âme qui sent fortement.

Aussi Navier fut l'ami de Fourier; il mérita d'être le digne successeur de Gauthey; il était un des ingénieurs qu'estimait le plus M. Bruyère.

Ces trois noms diront plus haut que notre voix, qui n'a pour elle que l'accent de la conviction, tout ce que Navier avait de générosité et de probité dans le cœur, de vues élevées dans l'esprit, de hautes capacités et de zèle pour servir son pays.

(*Annales des Ponts et Chaussées*, 1837, 2<sup>e</sup> semestre, p. 272.)

---

## DISCOURS

### PRONONCÉ AUX FUNÉRAILLES DE NAVIER,

au nom de l'Institut, par M. GIRARD, ingénieur en chef,  
membre de l'Académie des sciences.

---

Une perte douloureuse, à laquelle nous étions loin de nous attendre, nous réunit encore aujourd'hui pour remplir un triste et pénible devoir. Celui de nos confrères auquel nous venons de dire le dernier adieu, semblait être appelé, par les lois ordinaires de la nature, à parcourir une plus longue carrière; mais la mort exerce sur nous un despotisme sans pitié, et ne tient compte ni de l'âge, ni du savoir, ni des vertus de ceux qu'elle moissonne.

Louis-Marie-Henri Navier naquit à Dijon, le 13 février 1785. Il n'était pas encore sorti de l'enfance quand il eut le malheur de perdre son père. M. Gauthey, son grand-oncle, l'un des plus célèbres ingénieurs dont la France puisse s'honorer, l'adopta pour fils, et se chargea du soin de son éducation. Laborieux, infatigable, persévérant à toute épreuve, il donna de bonne heure à son jeune pupille l'habitude et le goût du travail; les dispositions de celui-ci pour les études sérieuses et positives se fortifièrent par les exemples journaliers qu'il recevait de son bienfaiteur, dont la maison était devenue pour lui la maison paternelle. Bientôt, l'âge arriva d'entrer à l'École polytechnique, Navier y fut admis, et en sortit avec distinction; il justifia, à celle des Ponts et chaussées, les espérances qu'on avait conçues de sa capacité et de ses talents; enfin, il obtint en 1808 le grade d'ingénieur, qui avait été, jusqu'alors, l'objet de son ambition.

Il s'occupa, aussitôt après, de rassembler, pour être livrés à l'impression, les nombreux mémoires où M. Gauthey avait déposé les résultats de sa longue expérience. Ainsi, la première publication de Navier fut un hommage de reconnaissance et, j'oserais dire, de piété filiale, qu'il rendit à la mémoire de celui auquel il devait le bienfait de son éducation.

Il entreprit ensuite de commenter l'*Architecture hydraulique* de Bélidor ; travail de longue haleine, et non moins utile que le *Traité des ponts et des canaux*. Cependant sa réputation de géomètre et de mécanicien s'étendait de plus en plus. Avantageusement connu de l'Académie des sciences, il fut élu par elle, au mois de janvier 1824, en remplacement de M. Breguet.

Cet honneur, qu'il avait vivement désiré, lui imposa de nouvelles obligations : nous savons tous qu'il les a constamment remplies avec le zèle le plus consciencieux, soit en rendant compte des mémoires renvoyés à son examen, soit en enrichissant les nôtres de ses propres travaux.

Je ne m'arrêterai pas, messieurs, à les énumérer ; cette honorable tâche est réservée à l'un de nos collègues qui saura la remplir en meilleur lieu et en temps plus opportun. Je me bornerai à rappeler que, depuis son admission à l'Académie, Navier fit marcher de front ses études scientifiques, et la pratique de l'art qu'il exerçait ; enfin, ce qui était peut-être plus difficile, il sut trouver le temps et les moyens de rendre profitables les leçons qu'il a données, comme professeur, à l'École des ponts et chaussées, et plus tard à l'École polytechnique.

Le peu de mots que je viens de prononcer suffira pour vous faire apprécier l'excellent confrère dont nous avons à déplorer la perte prématurée. Ajoutons cependant que, si la vie se mesure par le nombre et l'importance des travaux dont elle a été remplie, Navier devra toujours être compté parmi les hommes qui auront le plus longtemps vécu. Dévoué sans réserve à ceux dont il avait reçu des témoignages d'estime et d'amitié, personne ne fut plus sensible que lui à ces généreuses affections, ni plus digne de les inspirer.

Que le souvenir de cet homme de bien soit donc à jamais conservé dans l'Académie, comme il se perpétuera dans sa propre famille ! Les tendres soins dont elle l'a entouré, malheureusement impuissants pour le sauver, ont contribué, du moins, à adoucir les derniers moments d'une vie que le travail avait épuisée.

---

# NOTICE

## SUR LES OUVRAGES DE NAVIER.

---

1809. *Œuvres de Gauthey*, inspecteur général des ponts et chaussées, publiées par M. Navier, ingénieur ordinaire <sup>(1)</sup>.

*Traité de la construction des Ponts*, t. I. Principes, Ponts en pierre.

1813. *Mêmes œuvres*, tome II. Cintres, Ponts en bois et en fer, Ponts mobiles, Détails de construction, Estimation des prix.

1816. *Mêmes œuvres*, t. III, Des canaux de navigation, Canal du Centre.

(1832.) Seconde édition du tome I.

Les notes mises par Navier au tome I sont relatives à la résistance des pierres, à la théorie des voûtes, à celle de la poussée des terres et des murs de revêtement, et à celle du mouvement des eaux, envisagée quant à la détermination de la largeur du débouché des ponts.

Les notes du tome II ont rapport surtout à la résistance des pièces de bois et à celle des constructions en charpente. Il y eût fait de profondes modifications si ce tome avait été réédité,

---

(1) Aspirant le 4 novembre 1806, — ingénieur ordinaire en 1808, à Paris, (sans destination), — 1810 à 1817, attaché au pont de Choisy, — 1819, professeur suppléant de mécanique appliquée à l'École des Ponts et Chaussées, — 1820, ingénieur de première classe. — 1822, professeur titulaire, — 1823, ingénieur en chef, — 1824, membre de l'Institut, — 1830, professeur d'analyse et de mécanique à l'École polytechnique, — 1831, inspecteur divisionnaire,

comme on peut voir à son cours de 1824 (Voir ci-après, n° 76, p. 28, et notre *Historique*, n° IX et X) (1).

Nul doute que le texte lui-même, dans sa partie mathématique, ne soit de Navier, comme on voit aux p. 92 et suivantes du tome II, et, aussi aux changements qu'il a apportés en 1832 au tome I.

1841. *Projet d'une gare le long de la Seine à Choisy. In-4° avec 4 belles planches.*

(1) Il eût sans doute changé aussi une note de la page 94, où il pensait prouver que malgré la perte annuelle que la pourriture fait éprouver aux dimensions résistantes des bois des ponts, on ne doit leur donner qu'un équarrissage extrêmement peu au-dessus de celui qui convient actuellement à l'équilibre; car cette note est affectée d'une erreur de calcul. En appelant  $a$  leur équarrissage d'équilibre initial,  $k$  l'épaisseur qui pourrit annuellement,  $n$  le nombre d'années de durée qu'on veut leur assigner, il faudra porter leur équarrissage à  $a + nk$ ; d'où, annuellement, une dépense proportionnelle à  $\frac{(a + nk)^2}{n}$ . En différentiant par rapport à  $n$  et égalant à zéro pour rendre cette dépense un minimum, on trouve, non pas  $n = 0$  comme le dit la Note, mais  $n = \frac{a}{k}$ , ce qui n'a rien d'absurde, et ce qui porterait à doubler l'équarrissage de juste équilibre primitif quelle que fût la proportion peu connue  $k : a$  de l'usé annuel.

On corrige l'exagération qu'offre ce résultat en tenant compte de l'intérêt de l'argent. Soit  $r$  son taux annuel. La somme à placer pour construire le pont et le renouveler tous les  $n$  ans, ou la quantité à rendre un minimum, est proportionnelle à

$$(a + nk)^2 \frac{(1 + r)^n}{(1 + r)^n - 1}$$

dont la différentielle par rapport à  $n$ , égale à zéro, donne pour déterminer cette variable, l'équation

$$\frac{2 \cdot \log \text{hyp} (1 + r)}{2[(1 + r)^n - 1] - n \log \text{hyp} (1 + r)} = \frac{k}{a}$$

qui est satisfaite par  $n = \frac{a}{k}$  pour  $r = 0$ , et qui, si l'on prend  $r = 0,05$ , donne

Durée en années  $n = 54,9; 54,0; 46,2; 39,5; 29,3; 20,6; 16,6; 14,0; 12,3;$   
 si l'on a pour l'usé  $\frac{k}{a} = 0,002; 0,0025; 0,00333; 0,005; 0,01; 0,02; 0,03; 0,04; 0,05;$   
 d'où augmentation  $n \frac{k}{a} = 0,440; 0,428; 0,454; 0,497; 0,293; 0,443; 0,497; 0,560; 0,645.$

1813. *La Science des ingénieurs*, de Belidor. Nouv. édit. avec des notes par M. Navier.

Ces notes sont relatives principalement à la poussée des terres, à la résistance de leurs murs de soutènement, aux voûtes, aux calculs de terrasse, et à la résistance des pièces de bois, que Navier présente de la même manière qu'au tome II de Gauthey (Historique ci-après, n<sup>o</sup> IX et X), enfin sur les principes de Durand relatifs au beau en architecture.

1813. *Sur la manière d'exprimer le moment d'élasticité des corps*; mémoire (inédit) présenté à l'Académie le 25 janvier; contenait probablement les considérations reproduites par Navier dans les notes sur Gauthey, et auxquelles il a renoncé en 1819 et 1826.

1813. *Sur les constructions en pierre perdue*, Mémoire présenté. Ce même sujet se trouve au tome II de Gauthey, p. 272.

1816. *Note sur la vis d'Archimède* (Correspondance de l'École polytechnique, t. III, p. 45).

1816. *Sur les cas où l'équation déduite du principe des vitesses virtuelles a lieu entre des espaces finis* (*Id.* t. III, p. 49).

1818. *Détails historiques sur l'emploi du principe des forces vives pour les machines, etc.* (Annales de chimie et de physique, t. IX, p. 146).

Petit venait, aux mêmes Annales (septembre 1818), de faire revivre en quelque sorte cet emploi; Navier, en le citant, rappelle que le principe des forces vives, découvert par Huygens, généralisé par Jean Bernouilli (Ouvres, t. III, p. 36), et si habilement appliqué à l'écoulement de l'eau par Daniel Bernouilli, avait été, depuis l'*Hydrodynamica*, entièrement négligé par les auteurs d'ouvrages de mécanique pratique, et même longtemps par les savants eux-mêmes. On sait en effet que d'Alembert reprochait à D. Bernouilli d'en avoir fait usage, le regardant comme *peu exact*; qu'Euler ne l'a pas employé, ce qui rend très-complicés ses calculs sur les roues à réaction; et que Lagrange, dans sa Mécanique analytique, ne lui a donné qu'un

énoncé restrictif et peu propre à en faire tirer parti, bien que Jean Bernoulli (t. III, 239) eût entendu dans un sens plus large la *conservation des forces vives* puisqu'il ajoutait constamment, à celles qui sont actuellement possédées, celles qui sont en quelque sorte en puissance et qui s'évaluent (par exemple pour un ressort tendu) par des sommes de produits de forces et d'espaces susceptibles d'être parcourus suivant leurs directions jusqu'à ce que ces forces s'annulent (1).

Navier montre le haut degré de simplicité et de clarté que l'emploi du principe des forces vives apporte au contraire aux solutions du plus grand nombre des problèmes de mécanique; et comment on évalue, avec Borda, la force vive employée à produire ce *mouvement intestin* signalé par D. Bernoulli et qui est *perdue* pour le mouvement progressif lorsque la vitesse d'un fluide diminue brusquement; évaluation confirmée par des expériences, et adoptée par Coulomb, Carnot, Lagrange, au lieu de celle de D. Bernoulli et de Bossut.

Et il a, l'année suivante (voy. ci-après), rendu tout à fait usuel l'emploi de ce principe en transformant son énoncé, au moyen de l'introduction de la *quantité d'action*, expression de Coulomb à laquelle Coriolis a substitué celle de *travail*.

Grâce à cet éminent service, et à ce qu'on met aujourd'hui les actions moléculaires au nombre de celles dont on fait entrer le travail en considération, le principe des forces vives ou de la transmission du travail s'énonce clairement, sans restrictions relatives aux liaisons, etc.; et s'enseigne aujourd'hui dans toutes les écoles industrielles.

1818. *Sur les roues à élever l'eau*, Mémoire présenté le 2 novembre et resté inédit, bien qu'un rapport de M. Girard (Institut, partie historique) en ait fait voter l'insertion aux *Savants étrangers*. Ses diverses parties ont été reproduites dans les notes sur l'architecture hydraulique de Belidor, et dans le 3<sup>e</sup> partie du Cours fait à l'École des ponts et chaussées.

---

(1) Voyez Appendice complémentaire ci-après, p. 786.

1818. *Note sur l'action mécanique des combustibles* (Ann. de ch. et de ph., t. XVII, 1821, p. 357). Considérations reproduites à la 3<sup>e</sup> partie du Cours.

1819. *Examen de la tontine perpétuelle* autorisée le 10 mai 1819 (brochure in-8° de 40 pages).

Navier prouve avec beaucoup de clarté que cet établissement serait sujet aux inconvénients les plus graves. Ses avantages pour les actionnaires sont illusoire d'ailleurs comme le démontre un calcul fondé sur les méthodes de la théorie analytique des probabilités pour l'évaluation des fonctions composées de produits dont les facteurs sont de très-grands nombres,

1819. *Architecture hydraulique de Belidor*; nouvelle édition avec des notes et additions.

On a reproché à Navier cette publication d'un véritable traité de mécanique, sous la forme de notes et corrections à un ouvrage ancien et volumineux.

Mais, ainsi que l'exprime le rapport fait à l'Académie par Poisson, Girard, Fourier et de Prony, Belidor, estimé et recherché par les ingénieurs, devait être réimprimé, et rien ne sent moins l'esprit de spéculation que ces notes si parfaites et si consciencieuses qui, partout, révèlent un ardent désir d'être utile à la science et à l'art.

Plusieurs de ces notes sont des chefs-d'œuvre, et leur publication a signalé l'apparition d'une ère nouvelle où la mécanique pratique se fonde désormais sur des principes certains. Et cette heureuse révolution devait être prompte, car, avec Navier, elle a pour promoteurs Coriolis et M. Poncelet.

Citons surtout l'Addition (liv. I, p. 376) *Sur les principes du calcul et de l'établissement des machines et sur les moteurs*. C'est là qu'après avoir fait voir que leur travail peut toujours être évalué en  $k \times m^2$ , ou en produits d'un poids par une hauteur, sorte de *monnaie mécanique*, Navier remarque que les produits de ce genre ne sont autre chose que ceux qu'il a introduits (p. 106) sous le nom de *quantité d'action* dans l'énoncé du principe des forces vives (voy. ci-dessus); et ce principe est ainsi rendu, d'une manière incomparablement plus claire qu'on



n'avait encore fait, le véritable instrument des calculs relatifs aux machines. La masse de celles-ci est sans influence quand leur mouvement se règle par l'uniformité, mais non pas quand il se règle par la périodicité; d'où l'emploi des volants, dont Navier apprend pour la première fois à calculer les dimensions, et qui, comme il le remarque, ne dispensent pas d'employer, dans certains cas, des régulateurs ou modérateurs dont il donne aussi la théorie.

Un peu plus loin, une discussion judicieuse lui fournit, pour les moteurs animés, une table des quantités moyennes d'action ou de travail, que tous les auteurs reproduisent encore aujourd'hui.

Puis il donne, du calcul des roues hydrauliques et des machines à moudre, à forer, à scier, à épuiser ou élever l'eau, de nombreux exemples qui ont servi de modèles. Il y fait aussi la première distinction nette des orifices évasés et non évasés quant à la dépense de l'eau.

On y trouve aussi (note de la page 76) la première théorie à peu près exacte du choc, fondée sur ce que les corps se composent (comme il dit dès l'avertissement, p. xi) de parties qui ne se touchent pas, etc., bien que, dans toutes ses autres notes, la mécanique soit présentée dans l'esprit ancien qui substituait des abstractions aux réalités physiques.

1819. *Sur la flexion des lames élastiques*; mémoire présenté le 29 novembre, et inédit, bien qu'approuvé pour être inséré aux *Savants étrangers*, sur le rapport de Prony (Ann. de ch. et de ph., 1820, et partie historique du tome IV de l'Institut).

Dans ce mémoire, Navier part de l'hypothèse, depuis confirmée, de Jacques Bernouilli, consistant à faire le moment de la résistance à la flexion proportionnel à l'inverse du rayon de la courbure supposée très-petite prise par la lame.

Voyez le n° X de notre historique ci-après.

1819-1820. Sommaire (lithographié) des premières *Leçons de mécanique appliquée* données à l'École des ponts et chaussées.

1<sup>re</sup> partie. Applications qui dépendent de la considération

des corps dans l'état d'équilibre. Résistance des solides. Massifs. Revêtements. Voûtes. Charpentes.

Objets accessoires. De l'usage des instruments géodésiques et autres, considérés sous le rapport de la précision des résultats. Expression de la probabilité d'une erreur sur le résultat moyen. De la meilleure méthode pour le corriger.

2<sup>e</sup> partie. Applications qui dépendent de la considération des corps dans l'état de mouvement. Hydrodynamique. Vases. Tuyaux. Canaux. Choc des solides. Résistance des fluides.

Sur la théorie de la chaleur.

3<sup>e</sup> partie. Des machines.

Déjà il disait : leur théorie emprunte ses éléments, 1<sup>o</sup> à la Géométrie; 2<sup>o</sup> à la Physique; 3<sup>o</sup> à la Mécanique. Ainsi il sépare déjà ce que, depuis, Ampère a appelé la *cinématique*.

Sous le titre : De la manière de disposer les roues, pignons, cames, etc., pour que les axes supportent les moindres efforts qu'il est possible, il donne des conseils nouveaux dont l'observation peut avoir une grande influence sur le succès des mécanismes.

Objets accessoires. De l'éclairage, appliqué aux phares surtout.

1820. *Sur la variation de la température* qui accompagne les changements de volume des gaz (Bulletin de la Société philomathique, 1820, p. 97).

1820. *Mémoire sur la flexion des plans élastiques*, présenté à l'Académie le 14 août, et note explicative remise quelques mois après aux commissaires MM. de Prony, Poisson, Fourier, Cauchy. Il en a été tiré quelques copies lithographiées.

1823. *Extrait des recherches sur la flexion des plans élastiques* (Soc. philom., juin et juillet 1823, p. 92). — Observations à l'occasion d'un mémoire de M. Cauchy (Soc. philom., juin et juillet 1823, p. 36).

Ce mémoire du 14 août 1820, connu seulement par l'extrait de 1823, intéresse fortement l'histoire de la théorie générale de l'élasticité des solides, parce qu'il a été l'occasion des impor-

tâchés travaux par lesquels Navier et Cauchy en ont posé les bases; et il contient, à la fin, des résultats pratiques importants.

(Voir notre *Historique* ci-après, n° XXII, XXIX et LIX.)

1821. *Note sur le nivellement barométrique* (Ann. de ch. et de ph., t. XIX, p. 60). Navier observe que lorsque la valeur d'un résultat se déduit d'une expression U contenant plusieurs éléments  $x, y, \dots$  fournis par l'observation avec des erreurs  $\Delta x, \Delta y, \dots$ , son erreur relative totale est

$$\frac{1}{U} \left( \frac{dU}{dx} \Delta x + \frac{dU}{dy} \Delta y + \dots \right).$$

Il en déduit plusieurs conséquences en considérant la température, l'observation du baromètre, etc.

1821. *Mémoire* (du 14 mai) *sur les lois de l'équilibre et du mouvement des corps solides élastiques.*

Renvoyé à MM. de Prony, Poisson et Fourier, il n'a pas été l'objet d'un rapport. Mais, après l'admission de Navier à l'Académie (1824), il a été imprimé au t. VII des Mémoires de l'Institut.

Un extrait avait paru aux *Annales de chimie et de physique*; un autre extrait, plus étendu, au *Bulletin de la Société philomathique*, 1823, p. 177.

Ce beau mémoire fait époque, car il a fondé la mécanique moléculaire ou la théorie générale de l'élasticité, développée presque immédiatement après par Cauchy, Poisson et MM. Lamé et Clapeyron.

Voyez l'*Historique* ci-après, n° XXIII.

1822. *Mémoire* (du 16 décembre) *sur le mouvement des fluides en ayant égard à l'adhésion des molécules*: Imprimé au t. VI (1826) des Mémoires de l'Institut.

Un extrait en avait paru aux *Ann. de ch. et de ph.*, t. XIX, 1821, p. 244, et deux autres, plus étendus, au *Bulletin de la Soc. philom.*, 1822, p. 75, et 1825, p. 49, et un autre au *Bulletin Ferussac*, t. V, n° 214.

Déjà, le 18 mars 1821, ou avant la présentation du mémoire sur les solides élastiques, Navier avait fait à l'Académie une communication sur ce sujet. Il y donnait les trois équations

d'équilibre *indéfinies* ou applicables à tous les points de la masse fluide; les cinq termes différentiels du second ordre qui sont affectés de la constante qu'on peut appeler le coefficient du frottement du fluide, sont exactement les mêmes que les termes du même ordre entrant dans les équations de l'équilibre des solides, sauf les trois projections des vitesses des points du fluide au lieu des trois projections des déplacements des points du solide sur les axes coordonnés; mais l'équation de *continuité*, exprimant la permanence du volume de chaque élément du liquide, réduit ces cinq termes à trois.

Le beau mémoire de l'année suivante (16 décembre 1822) ne fait qu'ajouter, avec diverses applications autrement traitées, l'établissement, par la méthode de la Mécanique analytique de Lagrange, des trois équations *définies* ou à la paroi. Les valeurs des *pressions* non normales qui en ressortent sont aussi de même forme que celles qui sont relatives aux solides, sauf les vitesses au lieu des petits déplacements.

Navier base en effet l'établissement de ces diverses équations sur une supposition analogue à celle qu'il a faite pour les solides, et consistant en ce que les répulsions et attractions qui s'exercent à des distances insensibles soit entre les molécules du fluide soit avec celles des parois solides qui les contiennent, sont augmentées, dans l'état de mouvement, de quantités proportionnelles aux vitesses relatives avec lesquelles elles s'approchent ou s'éloignent les unes des autres; car, dit-il, deux molécules voisines sont dans le même cas que s'il existait entre elles un ressort tendu; si elles se rapprochent ou s'éloignent, le ressort se contracte davantage dans le premier cas et moins dans le second; et, comme les molécules très-voisines n'auront jamais que des vitesses extrêmement petites relativement l'une à l'autre, on peut, quelle que soit la fonction, la supposer proportionnelle à cette vitesse.

Poisson (Journal de l'École polytechnique, 20<sup>e</sup> cahier, p. 152), Cauchy (Exercices 3<sup>e</sup> année, mouvement intérieur des corps dénués d'élasticité) et M. Stokes (Voy. ci-après 5<sup>e</sup> appendice, p. 733) sont arrivés, depuis, aux mêmes équations par des considérations qui ne diffèrent pas quant au fond de celles de Navier.

Et, probablement, toute théorie qui supposera des mouvements variant graduellement et régulièrement d'un point à l'autre d'un fluide, conduira aux mêmes équations [voyez note (6) p. 734, même § 73 du 5<sup>e</sup> Appendice].

Elles ne supposent, au reste, aucune *adhésion entre les molécules* du fluide, ou aucune *viscosité*. Les gaz ont un frottement tout aussi fort que celui des liquides.

De l'hypothèse qui y conduit, il doit en effet résulter nécessairement un frottement des couches fluides soit contre d'autres couches, soit contre les parois, proportionnel à la première puissance de leurs vitesses relatives, ainsi que l'avait supposé Newton pour le fluide des tourbillons (Principes, livre 2<sup>e</sup>, section 9<sup>e</sup> et dernière, hypothèse et proposition Ll). C'est en effet ce qui a lieu dans des mouvements très-lents, comme l'a reconnu Coulomb (t. VI des Mém. de l'Ac. des sc. de l'Institut), et dans des écoulements très-réguliers et *linéaires* comme a dit Girard, c'est-à-dire où les molécules voisines décrivent des lignes sensiblement parallèles entre elles, ainsi qu'elles font dans ses expériences sur l'écoulement des liquides à travers des tubes capillaires à paroi très-polie, dont l'entrée était convenablement évasée.

Il n'en est plus de même dès que les parois offrent des rugosités, ou seulement dès qu'il y a, à l'entrée des tubes, une contraction produisant des tourbillonnements qui se propagent d'un bout à l'autre comme l'a remarqué le même expérimentateur. Aussi Navier reconnaît que ses équations, qui font si bien ressortir l'existence nécessaire d'un frottement et de pressions inégales en divers sens quand le fluide se meut, ne sont point applicables aux mouvements, le plus souvent considérés, de l'eau dans les tuyaux non capillaires ou dans les canaux naturels ou artificiels, où se forment une foule de mouvements obliques ou de tournoiemens, etc., produisant des *pertes de force vive translatoire* et dont on ne peut tenir compte que par des termes proportionnels aux carrés des vitesses, évalués empiriquement jusqu'ici, et dont les coefficients croissent avec les rugosités comme le prouvent les expériences récentes de Darcy et de M. Bazin.

1822. *Deuxième partie* (hydraulique) *des leçons faites à l'École des ponts et chaussées.* — Autographiée.

1830. *Même partie*, corrigée et augmentée.

(Voir 1838, son impression posthume avec la troisième partie.)

1823. *Notes sur les effets des secousses imprimées à un poids suspendu à des fils ou à des verges élastiques* (Bulletin de la Société philomatique, mai 1823, p. 73).

Il suppose négligeable, dans cette note, la masse du fil ou de la verge, dont il tient très-bien compte à l'ouvrage suivant.

1823. *Rapport* (18 septembre) *et Mémoire sur les ponts suspendus.* In-4°. Imprimerie royale.

1827. De l'entreprise du pont des Invalides. In-8°, 28 pages.

1830. *Rapport et Mémoire, etc.*, 2<sup>e</sup> édition; augmenté de cet opuscule De l'entreprise, etc., de 1827; d'une Notice sur le pont des Invalides, et du détail des épreuves de simple traction, et aussi de percussion longitudinale auxquelles les fers ont été soumis.

L'ouvrage dont nous parlons, composé à la suite d'une mission en Angleterre donnée en 1821 par M. Becquey, directeur général des ponts et chaussées, était peut-être, de tous ceux de Navier, le plus capable de lui faire honneur. Mais il en a recueilli d'amers chagrins qui, sans doute, ont abrégé sa vie.

Il était impossible de traiter plus complètement un sujet difficile, de mettre avec plus de sagacité, de dévouement, de bon esprit, la plus haute science et des notions plus saines et plus complètes au service de la pratique et de l'utilité générale. « Grâces aux recherches de M. Navier » (dit M. Ch. Dupin à la fin du rapport fait à l'Académie le 29 septembre 1823), « la France, « entrée la dernière dans un nouveau genre de construction, se « placera tout à coup au premier rang. »

Mais, au lieu de se borner à conseiller les autres, à leur dicter des règles rationnelles et des principes certains qu'ils n'eussent plus qu'à appliquer en les combinant au besoin avec quelques

éléments nouveaux que les cas particuliers révélaient, et que le sentiment évalué à défaut du calcul, Navier voulut joindre l'exemple au précepte et offrir un spécimen des plus apparents, dont le succès eût forcé toutes les convictions, et eût été pour lui ou plutôt pour les études théorico-pratiques auxquelles il s'était voué, le plus beau des triomphes.

Il choisit pour théâtre une localité où les considérations administratives, les convenances étrangères à l'art, l'opinion capricieuse, les influences diverses, disputent inévitablement à l'utilité publique la décision des mesures, et où une administration éclairée et bien intentionnée a toutes les peines du monde à faire prévaloir ce qu'il y a de mieux.

Le beau projet du pont des Invalides, à Paris, avait été approuvé, malgré les oppositions suscitées par le choix de son emplacement. Le système d'exécution par compagnie d'actionnaires, nouvellement préconisé en principe, avait été adopté malgré les raisons exceptionnelles qui eussent milité pour l'exécution par l'État. Tout, dans les diverses parties de ce projet, avait été prévu, pesé, rigoureusement calculé, tout..... excepté (disons-le) un seul point peut-être, la résistance, dans le sens horizontal, des massifs sur lesquels les chaînes de retenue, après avoir passé sur les colonnes, venaient s'appuyer et se courber circulairement pour changer une seconde fois de direction et se plonger verticalement dans des puits, au fond desquels elles étaient solidement amarrées.

Il suffit en effet de jeter les yeux sur les figures 1, planche XII (pont des Invalides), et 2, planche XI, pour soupçonner un oubli, celui de l'influence du *frottement* des chaînes sur la *direction que doit prendre la résultante* de leurs deux tensions avant et après ce changement de direction; car il semble que Navier supposait que cette résultante diviserait en deux parties égales l'angle des deux directions antérieure et finale comme si ces tensions eussent été d'égale intensité. Or elles devaient différer entre elles de tout le frottement qui a lieu sur les pièces cylindriques de fonte le long desquelles la chaîne s'applique avant de se terminer verticalement.

C'est ce que Navier avait très-bien remarqué à l'article 161, qui renvoie à l'article 130 de son même Mémoire pour le calcul

du frottement, exprimé, comme on sait, par une exponentielle, et d'une intensité considérable pour toute chaîne ou corde plus ou moins enroulée sur un corps immobile. Il conseille sagement et prudemment *de ne pas compter* sur ce frottement pour diminuer la force de l'amarre finale. Mais la même prudence devait engager à *le compter* au contraire, et *au maximum*, pour déterminer la direction de la résultante, car il la rapproche de l'horizontale, et c'était, ainsi, dans une direction peu inclinée sur l'horizon qu'il fallait faire opposer par le massif une grande résistance.

Ce point trop faible fléchit donc, et un léger mouvement s'y manifesta au moment où l'on démolit le pont de service et l'échafaudage.

L'histoire des constructions offre une foule d'exemples de pareils accidents, car, sans parler du dôme de Saint-Pierre de Rome, des supports de Sainte-Geneviève à Paris, de la digue de Cherbourg, etc., il y en a mille dont on entend à peine parler et qui (comme dit Navier dans sa brochure de 1827), loin d'entraîner la renonciation au projet, sont aussitôt réparés qu'aperçus. Celui des massifs du pont des Invalides était des plus facilement réparables; il suffisait de cent ou deux cents mètres cubes de maçonnerie de moellons, c'est-à-dire d'une augmentation d'un à deux pour cent sur la dépense totale, pour faire cesser tout mouvement.

Mais on était à Paris dans le quartier de prédilection des curieux. Un apitoiement indiscret sur l'anxiété de Navier avait été exprimé, le jour même, dans les conversations de l'Institut par un imprudent ami. Les intérêts d'une compagnie financière se trouvaient en jeu. La saison avançait et il fallait débarrasser la rivière de tout échafaudage, ce qui entraînait le démontage complet du pont que l'échafaudage soutenait. L'administration municipale de Paris n'avait accepté que comme contrainte un emplacement qu'elle avait toujours désapprouvé.

On renonça donc à cet emplacement ainsi qu'au projet-spécimen et grandiose d'une seule travée de 160 mètres. Navier, par un sentiment de délicatesse, ne le défendit que tardivement, de peur de déterminer une décision trop contraire aux intérêts de la compagnie, à qui l'on voulait refuser d'abord tout dédom-



agement, et qu'il avait été question de rendre responsable de l'incident, et du retard d'une année qui en était la suite. Il fut donc décidé, malgré sa réclamation, que le pont serait reporté à 200 mètres plus en aval, au débouché de l'allée d'Antin; qu'au lieu d'avoir un caractère monumental, il se composerait de trois travées, suivant le projet d'autres ingénieurs; que la compagnie, en indemnité de ses maçonneries perdues, etc., aurait aussi, avec une somme en argent, la concession de deux autres ponts sans concurrence ni rabais (ceux de la Grève et de l'Archevêché).

A cette époque surgissait déjà l'esprit de dénigrement, non pas seulement des savants, mais de la science, flétrie sous le nom de pure *théorie* opposée à la *pratique* dès lors exclusivement exaltée dans ce qu'elle a de plus matériel, et à laquelle on prétendait que les hautes mathématiques ne pouvaient servir en rien, comme si, en fait de résultats de calculs, il y avait lieu de faire une distinction entre les procédés plus ou moins élémentaires ou transcendants qui y ont conduit d'une manière également logique. Des savants se faisaient les complices ou les échos de ces critiques de l'ignorance. Navier, académicien des plus éminents et des plus utiles, sans cesse mis à contribution, et auteur de nombreux rapports frappés au coin de la sagacité et du bon sens, fut néanmoins, dès lors, à peine compris de la plupart de ses confrères. Il en fut, heureusement, dédommagé et distrait, en 1830, par la chaire d'Analyse et de Mécanique de l'École polytechnique, qui l'occupa beaucoup, et dont les élèves l'apprécièrent et l'admirent avec une sorte de passion.

Dans sa défense (brochure de 1827), il prononça ces nobles paroles : « On me dira sans doute : puisque vous ne pouviez apprécier avec une certitude absolue la résistance d'une certaine partie de votre construction, vous auriez dû en augmenter la masse de manière à vous mettre à l'abri de toute crainte. — Je répons qu'en agir ainsi c'eût été suivre un système d'après lequel l'artiste, sacrifiant toute idée d'économie à sa réputation, outre aveuglément toutes les dimensions de son ouvrage. Ce système peut avoir des avantages, surtout pour ceux qui l'emploient, mais il a donné lieu souvent à bien des dépenses excessives et inutiles, il a excité les plaintes et les réclamations du pu-

blic, et un véritable ingénieur n'en fera jamais la règle de sa conduite..... Il pourra errer..... ; mais, en général, il en coûtera moins pour réparer son erreur que pour procurer à tout l'ouvrage une force superflue. »

Le mémoire de Navier sur les ponts suspendus n'en demeure pas moins, sauf l'omission signalée portant sur un point délicat, mais essentiel, un *Traité* complet et classique pour son époque, et qui, devant même l'avenir par la profondeur des recherches, sera probablement toujours consulté.

Pour ne parler que de ce qui se rattache le plus à notre sujet, le calcul des oscillations imprimées par la chute d'un corps pesant, soit à une tige verticale frappée à son extrémité inférieure, soit à une chaîne dont cette secousse déforme la courbe et change en même temps la longueur par une extension qui se propage d'un bout à l'autre, seront toujours cités comme des modèles de l'application de la haute analyse à une branche importante et encore peu étudiée de la résistance des constructions, considérées presque exclusivement jusqu'à nos jours dans l'état statique.

(Voyez notre *Historique* ci-après, n° LV.)

1824. *Troisième partie (Machines)* des leçons faites à l'École des ponts et chaussées. Autographiée.

1830. Même partie, refondue et augmentée. (Voy. 1838, son impression posthume avec la deuxième partie.)

1825. *Note sur les questions de statique dans lesquelles on considère un corps supporté par un nombre de points d'appui dépassant trois* (Société philomatique 1825, p. 35, et *Bulletin Férussac*, t. V, n° 100). — Pour la première fois (voir l'*Historique*, fin du n° XI) Navier a donné la vraie solution de ces sortes de problèmes, dont l'indétermination apparente, qui en faisait des énigmes sans mot, tient aux principes de la statique des corps supposés rigides, et cesse en remarquant que, dans la réalité, ces corps, et même leurs appuis, sont élastiques.

1825. *Sur le calcul des conditions d'inégalité.* (Même *Bulletin*, p. 66 et 81.) Navier développe les principes de ce genre de cal-

cul, dû à Fourier, et dont l'emploi, par son illustre inventeur, au problème dont nous venons de parler (d'un corps porté par plus de trois appuis), a constitué la dernière tentative des géomètres pour en donner une solution sans sortir de la statique élémentaire qui raisonne sur des abstractions. Cette solution fournit le plus grand poids dont on puisse charger le corps rigide, en un point donné, sans qu'aucun des appuis supporte une charge plus grande que celle sous laquelle chacun romprait, et qui est supposée connue. Navier montre qu'elle ne donne qu'un *maximum* qu'on ne doit point dépasser.

1825. *Flexion des verges courbes.* (*Idem*, p. 98 et 114; et Bulletin Férussac, t. V n° 24.) Cet article en deux parties est extrait du Mémoire sur les lames élastiques, présenté le 29 novembre 1819.

1825. *Solution de diverses questions relatives au mouvement de vibration des corps solides* (Société philom. 1825, p. 178).  
 1° Mouvement de deux corps unis par une verge élastique sans masse. 2° Choc, contre un point fixe, d'une verge élastique qui se meut longitudinalement, et dont on connaît la masse. 3° Vibrations de cette verge rectiligne pour un état initial donné. 4° *Idem* si la longueur de la verge est infinie. Application au cas où il n'y a de déplacement initial que sur une étendue très-petite.

Les trois dernières solutions, où l'inertie de la verge est prise en considération ainsi que la succession de l'entrée en mouvement de ses diverses tranches, sont d'accord avec ce qu'on trouve à la 2<sup>e</sup> édition de la Mécanique de Poisson, éditée seulement en 1833 <sup>(1)</sup>.

1825. *Appareil pour essayer la force des chaînes* du pont des

---

(1) On trouve au *Bulletin de la Société philomatique* de 1826, page 180, une note de Cauchy, du 19 février 1827, sur le choc longitudinal de deux barres élastiques, ayant des longueurs inégales, et où ce Géomètre énonce, sans indiquer son mode de calcul, des résultats remarquables, qui ont été cités par Coriolis à son ouvrage *Du Calcul des effets des machines*, mais qui paraissent avoir besoin d'être confirmés.

Invalides (*idem*, p. 163, avec planche). Cet appareil est un levier horizontal. Pour éviter l'inclinaison qu'il prendrait par suite de l'allongement du chaînon en essai, et le frottement qui serait considérable sur un axe de rotation fixe, Navier donne à ce levier de deuxième espèce un point d'appui mobile, portant de bas en haut, par l'intermédiaire d'une courte tige verticale, sur un second levier, qui est de troisième espèce, et qu'on maintient à peu près horizontal au moyen d'une charge suffisante placée à l'extrémité opposée.

1826. *Résumé des leçons données à l'École royale des ponts et chaussées* sur l'application de la mécanique à l'établissement des constructions et des machines. PREMIÈRE PARTIE, SUR LA RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX ET SUR L'ÉTABLISSEMENT DES CONSTRUCTIONS EN TERRE, EN MAÇONNERIE ET EN CHARPENTE.

1833. Deuxième édition. (Elle a été traduite en italien par M. d'Andrea, professeur à l'École militaire de Naples, avec diverses additions.)

C'est l'ouvrage dont nous rééditons la première section.

Il s'y trouvait, à l'époque où il a paru (1824 pour la distribution en feuilles aux élèves, et 1826 pour la mise en vente), un grand nombre de choses dues à Navier. Nous mentionnons, aux nos X, XI, XV et XVII de notre *Historique* ci-après, celles qui sont relatives aux pièces solides et à leurs assemblages.

On y trouve aussi, avec la citation de toutes les expériences connues, un choix judicieux (article VII, intitulé : *Des plus grands efforts*, etc.) des coefficients numériques de cohésion permanente, auxquels les professeurs et les auteurs de traités n'ont presque rien changé depuis. — D'importants perfectionnements à la théorie des voûtes. — La détermination de la stabilité des murs de soutènement et des pieds-droits des voûtes, en ayant égard à la possibilité, non encore remarquée, de disjonctions dans ces massifs de maçonnerie, qu'on regardait auparavant comme des corps d'une seule pièce. — La prise en considération de la possibilité de leur écrasement, quand la résultante des efforts, sans tendre au renversement, passe trop près de l'axe de rotation. — Celle de l'inégale répartition des efforts sur

la surface des joints. — Quelques considérations dignes d'attention, mais sujettes à discussion, sur la résistance des vases.

Aussi ces Leçons constituaient un progrès considérable.

1826. *De l'établissement d'un chemin de fer de Paris au Havre* (lu à l'Acad. 5 mai, br. in-8° de 56 pages). — Navier proposait l'emploi de chevaux pour la traction dans les diverses parties tracées sur les plateaux en pente de moins de 0,005, et réunis par des plans inclinés; et il prouvait que le commerce préférerait ce chemin de fer à la rivière, et même au grand canal maritime alors à l'étude.

1826. *Recherches expérimentales sur la résistance que diverses substances opposent à la rupture déterminée par un effort de traction.* (Lu le 21 août 1826. Ann. de ch. et de ph., t. XXXIII, p. 240. Société philom., 1826, p. 151.) Ces expériences avaient pour objet principal de calculer la résistance des tuyaux et des vases où se trouve un fluide soumis à de fortes pressions. Les matières essayées étaient la tôle de fer, le cuivre et le plomb laminés, les tubes et les tiges de verre. Navier a rompu comparativement une sphère en tôle, et s'est assuré que l'existence simultanée de tensions en divers sens n'affaiblissait pas la matière.

1827. *Sur le mouvement d'un fluide élastique qui s'écoule hors d'un réservoir ou d'un gazomètre.* (Ann. de ch. et de ph., février et avril 1827, t. 34, p. 400. Journal du génie civil, 1827. Bulletin Férussac t. VIII, n° 151.)

1829. *Mémoire sur l'écoulement des fluides élastiques dans les vases et dans les tuyaux de conduite; lu à l'Académie le 1<sup>er</sup> juin.* (Mémoires de l'Institut, t. IX, 1830. Journal du génie civil, 1829. Extrait au Bulletin Férussac, t. XIII, n° 47.)

Daniel Bernoulli avait calculé cet écoulement en supposant que l'air traverse l'orifice avec la *densité* qu'il possède dans l'espace d'amont, c'est-à-dire dans le vase d'où il sort, quoique avec la *pression* de l'espace d'aval où il se rend. Navier, en supposant comme Bernoulli le mouvement par tranches parallèles, tient compte de la détente, ou d'une diminution progressive de

la pression, et suppose une diminution proportionnelle de la densité de l'amont à l'aval. Il obtient ainsi, pour la quantité écoulée par seconde, une formule contenant sous un radical le logarithme népérien du rapport des pressions d'amont et d'aval, et qui ne se réduit à celle de Bernoulli que lorsque, ces deux pressions étant très-peu différentes, on peut remplacer le logarithme par le premier terme de son développement <sup>(1)</sup>. Navier ajoute, à l'équation, un terme pour tenir compte de ce que l'orifice peut n'être pas très-petit par rapport à la section du vase d'amont, et d'autres termes pour tenir compte des pertes de force vive aux augmentations brusques de la section, etc.; et, quand le fluide traverse un tuyau avant d'arriver en aval, il ajoute un travail retardateur dû à un frottement proportionnel au carré de la vitesse. Comme celle-ci est croissante, on peut supposer approximativement que son carré varie uniformément d'un bout à l'autre (ce qui est plus simple que de supposer avec l'auteur que c'est le carré de la pression qui varie ainsi) <sup>(2)</sup>.

Mais en attribuant, comme fait Navier, la densité d'aval à la veine qui traverse l'orifice séparant les deux espaces, la formule donne, passé un certain rapport entre les deux pressions, un écoulement *d'autant moindre que la pression d'aval est plus petite*, celle d'amont restant la même, et, finalement, un *écoulement nul dans le vide*, ce qui ne saurait être.

Le paradoxe disparaît en attribuant à la veine d'écoulement une densité intermédiaire entre celles d'amont et d'aval. Et, faute d'en connaître la grandeur, on peut, comme diverses expériences le prouvent, se servir empiriquement, au moins quand il n'y a pas une différence considérable entre les deux

(1) On peut tenir compte de l'abaissement de température qui accompagne la dilatation en faisant la pression proportionnelle à une puissance de la densité un peu au-dessus de 4, comme on a fait au n° 4 d'un *Mémoire sur l'écoulement de l'air* présenté le 25 février 1839 et inséré au 27<sup>e</sup> cahier du Journal de l'école polytechnique (et par extrait aux Comptes rendus, t. VIII, p. 295); et, aussi, à une Note lue à la Soc. philom. le 30 août 1845 (n° 614 du Journal l'*Institut*). C'est ce qu'a fait aussi, récemment, M. Beau de Rochas dans une note du 30 novembre 1863 (Comptes rendus, t. LVII, p. 910) où il calcule les effets des ajutages divergents en y supposant possible une détente tranquille sans tourbillonnements.

(2) Note citée du 30 août 1845 (Soc. phil., et n° 614 de l'*Institut*).

pressions, d'une formule basée sur la supposition que la densité est celle d'amont et la pression celle d'aval comme pour un liquide ou comme dans la formule de Bernoulli, en corrigeant les résultats par un coefficient un peu variable.

1828: *Rapport* (du 29 septembre) sur un mémoire de MM. Lamé et Clapeyron concernant l'équilibre intérieur des solides homogènes. (Journal de mathématiques de Crelle, t. VII, p. 143. Voir l'*Historique*, n° XXX.)

1829. *Rapport verbal à l'Académie sur les études relatives à l'art des constructions* de M. l'inspecteur général Bruyère. (Journal du génie civil, t. III, p. 602.)

Ce rapport, élégamment écrit, et où Navier faisait ressortir l'éminent mérite des œuvres de l'ingénieur pour lequel il avait le plus d'admiration, contient ce passage dont peuvent profiter tous ceux qui s'occupent de constructions :

« Combiner la disposition d'un édifice, ne fut-ce que la maison d'un simple particulier est une occupation intéressante. Les recherches qu'elle exige ne comportent point les déductions rigoureuses qui appartiennent peut-être exclusivement aux sciences mathématiques et dans lesquelles il s'agit toujours de parvenir à une vérité unique et subsistante quoique inconnue. La multiplicité des solutions, les nombreux essais auxquels il faut se livrer pour remplir de mieux en mieux des conditions reconnues et fixées d'avance forment une sorte de jeu piquant qui éveille et soutient l'attention. L'architecte procède toujours par une méthode à laquelle on est également obligé de recourir quelquefois dans les sciences exactes, LA MÉTHODE DE FAUSSE POSITION<sup>(1)</sup>. Il essaie successivement diverses combinaisons et ne se lasse point jusqu'à ce qu'il arrive au terme où l'esprit et le goût sont satisfaits, et ils le seront presque toujours en même temps s'il est vrai que la beauté dans son art consiste surtout dans l'exact accomplissement des convenances de toute espèce. »

---

(1) Voyez ci-après § 34 de la note du n° 156, p. 316-322.

1829. *Rapport sur un nouveau système de barrage, présenté par M. Sartoris pour faciliter la navigation des rivières.* (Journal du génie civil, t. II, p. 147.) Ce système consiste en un bateau servant de vanne et s'appuyant au moyen de roulettes contre les bajoyers. Plus l'eau s'élève en amont plus le bateau est soulevé et l'orifice est agrandi.

Ce rapport est très-lumineux comme tous ceux de Navier, et les conclusions en sont sages.

1829. *Rapport sur la pompe à comprimer l'air, de M. Thilrier, fait à l'Académie au nom d'une commission chargée de décerner le prix Monthyon.* (Journal du génie civil, t. IV, p. 424.) — L'air, à mesure qu'il se comprime, passe successivement sous trois pistons dont les diamètres décroissent progressivement, ce qui diminue les mouvements inutiles ou sans travail opéré. Lorsque des travaux sont opérés par l'homme ou les animaux, c'est (dit judicieusement le rapport) à proprement parler leur temps et surtout leur fatigue qu'il faut payer, et il est aujourd'hui bien démontré, contrairement à une hypothèse ingénieuse de D. Bernoulli, que la production d'une même quantité d'action peut causer des degrés de fatigue très-différents : on le concevra sur le champ en se représentant un homme qui emploierait sa journée à agiter ses bras, etc.

On sait que des réflexions semblables ont conduit, quelques années après, M. l'inspecteur général Favier à une méthode à peu près rationnelle d'opérer le tracé des routes.

1829. *Rapport verbal fait le 2 février, à l'Académie, sur l'ouvrage de MM. Tourasse et Mellet, intitulé : « Essai sur les bateaux à vapeur, ... sur les bateaux aquamoteurs, etc. »* (Journal du génie civil, t. II, p. 571.)

1829. *Rapport sur l'ouvrage DU CALCUL DE L'EFFET DES MACHINES de Coriolis.* (Journal du génie civil, t. IV, p. 564; et, aussi, en tête de l'ouvrage lui-même.) Toujours prêt à laisser aux autres une large part de mérite, Navier reconnaît que Coriolis avait rédigé déjà en grande partie son ouvrage dix ans avant sa publication, c'est-à-dire dans le temps où il écrivait lui-même les



*Notes sur Belidor* qui ont appris à faire usage de la même manière du principe des forces vives et du travail.

1829. *Note relative à l'emploi du fer dans les constructions en maçonnerie.* (Journal du Génie civil, t. III.) Navier prouve clairement que les dilatations de ce métal par la chaleur sont sans danger, vu la faculté qu'il possède de s'étendre et de se contracter par la traction et la pression.

1829. *Considérations sur les travaux des routes en Angleterre et les procédés de Mac-Adam.* (Ann. des Ponts et Chaussées, 1831, 2<sup>e</sup> semestre, p. 132; Journal du Génie civil, 1829, t. II, p. 1.) Cet écrit avait été présenté à M. le Directeur général des Ponts et Chaussées en 1822. Navier, après avoir montré la supériorité de nos routes au point de vue de l'intelligence et de l'exactitude du tracé et de la régularité de la construction, fait ressortir celle des routes anglaises sous le rapport de l'entretien, et l'efficacité des procédés auxquels Mac-Adam a attaché son nom, et dont aucune publication française n'avait encore parlé alors.

Dans sa conclusion il propose, pour les routes de France, les mesures qui ont été adoptées généralement quinze ans plus tard.

1829. *De l'exécution des travaux publics et particulièrement des concessions.* (Journal du Génie civil, t. VIII. 1830, p. 327; Annales des Ponts et Chaussées, 1832, 1<sup>er</sup> semestre, p. 1.)

Dans cet écrit remarquable, Navier, loin de se laisser entraîner par l'opinion alors régnante, ne craint pas d'exprimer que les péages (hors ceux d'entretien) sont bien plus injustes que ne pouvait l'être l'ancienne corvée; qu'ils entravent le développement de la richesse publique, en restreignant singulièrement l'étendue du marché, c'est-à-dire l'espace dans lequel chaque producteur peut acheter les matières brutes et vendre les produits fabriqués, et qu'ils rendent ainsi *les canaux à peu près inutiles*, en faisant préférer souvent le roulage, en sorte que leur construction a été une sorte de cercle vicieux. Il se résume ainsi : 1<sup>o</sup> l'utilité consiste surtout à diminuer la partie des frais de transport à la charge du commerce. 2<sup>o</sup> Il serait à désirer que la dépense fût imputée sur les impôts publics. 3<sup>o</sup> Les concessions ne doi-

vent cependant pas être exclues ; mais, en les accordant, le gouvernement doit vérifier l'utilité, le taux des péages ; on ne peut y satisfaire que par des projets détaillés et une discussion approfondie ; on n'y satisfait nullement en mettant les entreprises au rabais par une adjudication publique. .

Navier était trop en avance sur les autres pour avoir la satisfaction de voir ses vues adoptées de son vivant.

1830. *Considérations sur les principes de la police du roulage* (br. in-8°, et Journal du Génie civil, t. IX.) Rédigé rapidement à la demande de M. J. Baude, commissaire du gouvernement provisoire près l'Administration. — Il conclut que le tirage, ainsi que la dégradation de routes, augmente dans un bien plus grand rapport que la charge.

1835. *Considérations sur idem et sur les travaux d'entretien des routes* ; suivies d'un Appendice contenant un extrait d'enquêtes anglaises.

Cet écrit reproduit, avec des développements, un Rapport fait en 1832 par Navier, au nom d'une commission nommée le 31 juillet. De nouveaux éléments acquis depuis, et fondés sur des expériences importantes, ont porté, en 1841, une nouvelle commission à proposer des mesures moins restrictives ; et le perfectionnement du mode d'entretien des routes a permis d'aller encore plus loin.

1830. *Rapport sur la Caissé d'épargne et de prévoyance* fondée par ordonnance royale du 25 juillet 1818 ; lu à la séance publique annuelle des quatre Académies, le 24 avril 1830. (Journal du Génie civil, t. VIII, p. 257.) — Ce rapport, très-remarquable pour le style comme pour le fond, donne l'histoire de cette institution en France, et aussi en Angleterre, où elle a contribué avec les associations de secours mutuels (connues chez nous depuis longtemps) également à arrêter l'effrayant progrès annuel de la *taxe des pauvres*, dans laquelle s'est transformée par la force des choses la loi de travail d'Élisabeth, et qui, chez nos voisins, « détruit entièrement, par une contribution forcée, le sentiment de la pitié chez les uns, celui de la

gratitude chez les autres, et rompt ainsi les seuls liens qui puissent unir les classes extrêmes de la société.» Après une foule de considérations aussi sages qu'élevées, on s'étonne de trouver, vers la fin, quelques phrases concédées à l'esprit de l'époque, et hors du sujet à traiter.

1831. *Note sur la flexion d'une pièce courbe dont la figure naturelle est circulaire.* (Annales des Ponts et Chaussées, 1831, 1<sup>er</sup> semestre, p. 428.) Cette solution, donnant d'une manière exacte des résultats un peu différents de ceux qui avaient été obtenus en supposant la figure parabolique, est reproduite à la 2<sup>e</sup> édition (1833) des Leçons, n<sup>o</sup> 468 à 482.

1831. *Analyse des Mémoires de M. Girard sur le canal de l'Ourcq, la distribution de ses eaux, et l'assainissement de Paris.* (Annales des Ponts et Chaussées, 1831, 2<sup>e</sup> semestre, p. 67.)

1831. *Note relative au projet d'un mur de revêtement de l'avant-port de Dieppe.* (*Idem*, 2<sup>e</sup> semestre p. 349.)

1831. *Note sur le calcul d'une machine à vapeur.* (*Idem* p. 420.)

1832. *Rapport fait à l'Académie sur un mémoire de M. Raucourt (de Charleville) relatif à la mesure de la vitesse des eaux de la Neva.* (Annales des Ponts et Chaussées, 1832, 2<sup>e</sup> semestre, p. 1; et Journal du Génie civil, t. X, p. 254.)

Dans ce rapport approbatif, Navier fait ressortir l'utilité de la mesure des vitesses en différents points des sections d'eau. Il montre que le résultat des mesurages faits dans la Neva, soit quand sa surface est couverte d'une couche de glace, soit quand elle est découverte et soumise à l'action du vent, soufflant tantôt dans la direction du courant, tantôt dans une direction contraire, sont d'accord avec la théorie, et mettent en évidence l'existence d'une sorte de *frottement* des filets fluides les uns sur les autres, et, aussi, de la part de l'air, d'un frottement considérable, tantôt retardateur, tantôt accélérateur du courant; et il conclut qu'on ne peut se dispenser de tenir compte de la direction et de la vitesse du vent dans un calcul de débit d'un canal à eau courante.

1832. *Rapport sur un mémoire concernant de nouvelles expériences sur le frottement*, présenté à l'Académie le 12 dé-

cembre 1831 par M. Morin. (Annales des Ponts et Chaussées, 1832, 2<sup>e</sup> semestre, p. 77.)

1833. *Rapport sur de nouvelles expériences.* (*Idem*, 1833, 1<sup>er</sup> semestre, p. 234.)

1832. *Rapport sur un mémoire de M. Chabrier, concernant les moyens de voyager dans l'air et de s'y diriger*, et contenant une nouvelle théorie des mouvements progressifs. (Mémoires de l'Institut, t. XI, partie historique, p. lxj.)

Ce Rapport, très-détaillé, suivi d'une note et de calculs, contient une *théorie du vol des oiseaux* (\*) et de la natation des poissons, et des considérations sur les moyens de diriger les aérostats. Navier détermine quel multiple la vitesse de progression doit être de la vitesse de l'abaissement de l'aile, et il trouve trois fois dans un cas particulier. La fatigue de l'oiseau pour se soutenir est faible en comparaison de sa fatigue pour avancer. Il dépense par seconde, lorsqu'il plane, la *quantité d'action* (ou de travail) nécessaire pour élever son poids à 8 mètres de hauteur. L'homme, d'après son travail continu habituel, s'élèverait de 0<sup>m</sup>,086, ou quatre-vingt douze fois moins qu'il ne faudrait.

Des hommes dans un ballon muni de roues à ailes obliques ne pourraient lutter que contre un vent de 2<sup>m</sup>,33 par seconde pour tenir le ballon immobile. On ne pourrait remplacer l'homme par la vapeur, car l'homme est encore aujourd'hui l'agent mécanique qui, à poids égal, est capable de produire le plus grand travail continu. La création d'un art de la navigation aérienne est donc subordonné à la découverte d'un nouveau moteur.

1833. *Notice nécrologique sur M. Bruyère*, inspecteur général des ponts et chaussées.

(Annales des ponts et chaussées, 1833, 2<sup>e</sup> semestre, p. 382).

(\*) Ce sujet avait déjà été traité par Parent. *Essais et recherches de mathématiques*, t. III.

1834. *Sur le mouvement uniforme des wagons dans les parties des chemins de fer qui sont tracées en ligne courbe.*

(Ann. des ponts et chaussées, 1834, 2<sup>e</sup> semestre, p. 357-370.)

Navier calcule le frottement dans plusieurs suppositions.

1835. *Note sur la comparaison des avantages respectifs de deux lignes de chemin de fer, et sur l'emploi des machines locomotives.*

(Ann. des ponts et ch. 1835, 1<sup>er</sup> semestre, p. 129-179.)

Addition (idem, p. 381-385.)

Navier donne  $P(0,005 A \pm H + \mu h)$  pour l'expression du travail moteur capable de faire parcourir la distance  $A$  et de faire monter ou descendre la hauteur  $H$  à un convoi d'un poids  $P$ , le dernier terme entre parenthèses étant relatif aux montées non utilisées pour la descente. Puis il examine le mouvement uniforme du convoi sur les diverses pentes, le mouvement varié lors du passage de l'une à l'autre, et, en se servant des seules données alors possédées sur l'effet des locomotives, et qui étaient tirées de l'ouvrage de Wood et Tredgold, il ramène l'appréciation comparative du prix de transport des 1000 kilogrammes à la fixation d'un très-petit nombre d'éléments.

1836. *Nouvelles considérations sur l'emploi des machines locomotives dans les chemins de fer et sur l'influence des pentes diversement inclinées, relativement à la dépense du transport.*

(Ann. des p. et ch., 1836, 1<sup>er</sup> semestre, p. 1 à 43.)

Aucun savant n'a eu, plus que Navier, le bon esprit de rectifier ses calculs quand on y a signalé quelque erreur, ou quand de nouveaux documents lui ont appris qu'il les avait basés sur des documents incomplets.

Aussi, à l'apparition du *Traité théorique et pratique des machines locomotives*, où M. de Pambour montrait que la pression dans leurs cylindres est très-sensiblement au-dessous de la pression dans leurs chaudières, et indiquait de nouveaux procédés de calcul, Navier s'empessa de refaire les siens, de tenir compte de l'excès de pression nécessaire aussi pour faire écouler la vapeur par la cheminée, et, encore, d'un élément qu'il reconnait avoir omis dans son Mémoire de 1835, savoir *la résistance de*

*Fair* qui s'exerce avec d'autant plus d'intensité sur le convoi que la vitesse de celui-ci est plus considérable.

Ce Mémoire a obtenu en 1837, après la mort de Navier, la première grande médaille d'or donnée par les suffrages des ingénieurs au meilleur article envoyé aux *Annales* (en 1835).

1835. *Statistique appliquée à la médecine*. Remarques à l'occasion du Rapport fait à l'Académie, le 5 octobre 1835, sur les recherches statistiques du docteur Civiale. (Comptes rendus des séances, t. 1<sup>er</sup>, p. 247.)

« Le calcul, » dit Navier, « est employé seulement à déterminer la *probabilité* des conséquences auxquelles les observations ont immédiatement conduit, et à donner de cette probabilité une évaluation plus précise que le raisonnement seul n'aurait pu faire. L'étendue et la difficulté de cette tâche ne doit point effrayer si la vérité en est le prix..... »

1836. *Rapport sur une machine à élever l'eau, de M. Jappelli*. (Comptes rendus de l'Académie, 11 janvier 1836, t. II, p. 37, et *Annales des ponts et chaussées*, 1836, 2<sup>e</sup> semestre, p. 112.)

1838. Résumé (posthume) des Leçons données à l'École des ponts et chaussées.

*Deuxième partie*, contenant les Leçons sur le mouvement et la résistance des fluides, et sur la conduite et la distribution des eaux.

*Troisième partie*, contenant les Leçons sur l'établissement des machines.

C'est la reproduction de feuilles lithographiées vers 1830, que Navier n'a point revues, et dont il aurait sans doute, à l'impression, changé plusieurs parties.

Ainsi, au n° 62, pour *l'écoulement par un déversoir*, en exprimant, conformément à la manière dont il envisageait le principe de la moindre action (invoqué par lui à l'édition autographiée en 1822), que la dépression de l'eau au-dessus de la crête doit être telle que la force vive de la quantité qui y passe dans l'unité de temps soit la plus grande possible, Navier prend pour cette force

vive *celle qui est due à la vitesse moyenne des filets*, évaluée au n° 35 en regardant leurs vitesses individuelles comme dues aux hauteurs du niveau du réservoir au-dessus de chacun. En égalant la différentielle à zéro, il trouve que cette dépression doit être le  $\frac{1}{2} \left( \sqrt{\frac{21}{5}} - 1 \right)^2 = 0,2753$  de la hauteur du même niveau au-dessus de la crête du déversoir.

Mais Coriolis, M. Belanger, et récemment M. Brashmann (Comptes rendus 16 décembre 1861, p. 1113), ont remarqué qu'il aurait fallu plutôt, à ce point de vue, prendre la somme des forces vives des divers filets. Or on trouve qu'elle est à son maximum quand la dépression est nulle, ce qu'il était facile de prévoir. La manière de déterminer théoriquement cette dépression et la dépense par un déversoir est donc encore à trouver; le frottement des filets y a peut-être une grande part, et il ne paraît pas que l'emploi du principe de la moindre action y soit propre.

On peut faire sur les n° 52, 67, 121, d'autres remarques.

L'évaluation, au n° 119, de l'effet des coudes plus ou moins arrondis des tuyaux, peut être remplacée avantageusement par une autre plus rapprochée de celle de du Buat. (Voy. Comptes rendus, 6 janvier 1862, t. LIV, p. 38.)

Le raisonnement du n° 163, relatif à l'impulsion des fluides sur les corps plongés, est inexact, vu que les filets, en se recourbant à la partie postérieure, exerceraient une action détruisant celle des filets antérieurs, si l'on ne tenait pas compte des frottements et tournoiemens, qui jouent ici le rôle capital.

Cette *deuxième partie* n'en renferme pas moins un grand nombre de choses utiles et alors neuves, entre autres l'évaluation des pertes de force vive à la manière de Borda, substituée avec raison à celle de Bernoulli et de Bossut, etc.

La *troisième partie*, concernant l'établissement des machines, est conforme en partie à ce qui se trouve sur le même sujet dans les *Notes sur Belidor* (ci-dessus, 1819), mais augmentée de nombreux calculs, s'étendant à peu près à toutes les machines connues; celles surtout qui servent à élever l'eau, entre les-

quelles on peut distinguer la *pompe spirale*, utile appareil qu'il a tiré d'un injuste oubli.

1840. *Résumé* (posthume) *des Leçons d'analyse données à l'École polytechnique*, suivi de notes par M. Liouville.

Ces Leçons, à la préparation desquelles Navier consacra de longues veilles, furent singulièrement goûtées des élèves, à cause de leur lucidité, de leur élégante simplicité, et de l'esprit pratique dont elles sont empreintes. Aussi ont-elles été rééditées en 1861, malgré la publication d'ouvrages analogues d'un haut mérite, de MM. Duhamel et Sturm.

Pour lui, par exemple, comme pour Newton, le coefficient différentiel est le *degré de rapidité* avec lequel la fonction varie quand sa variable vient à varier, ou la *pente*, en chaque point, de la courbe qu'elle représente, etc. Il rend visibles les résultats de l'analyse au moyen de considérations géométriques. Il a, le premier, introduit résolûment dans les éléments les procédés indispensables d'intégration des équations aux dérivées partielles, avec des conditions aux limites, par séries trigonométriques, quoique cela ne figurât pas sur le programme, en cela incomplet.

1841. *Résumé* (posthume) *des Leçons de mécanique données à l'École polytechnique*.

Cet ouvrage, comme le précédent, est la reproduction de feuilles lithographiées qu'il n'a pu revoir. Bien que cette science y soit encore traitée, en bien des parties, à un point de vue dont ses travaux ont, plus que tous autres, contribué à amener la réforme (comme nous avons dit à propos des notes sur l'architecture hydraulique de Belidor), il se trouve dans ce livre, rédigé avec simplicité et clarté, beaucoup de choses utiles à consulter et à prendre.

---



## PRÉFACE (DE NAVIER) 1826.

---

On doit à Galilée les premières tentatives qui aient été faites pour soumettre au calcul la résistance des corps aux efforts qui tendent à les rompre. Jacques Bernoulli, Leibnitz, Euler, la Grange, ont traité diverses questions de ce genre. On a fait sur la force des matériaux un grand nombre d'expériences, parmi lesquelles on doit distinguer celles de Buffon. Coulomb a donné les principes de l'équilibre des voûtes et des murs exposés à la poussée des terres.

Ces recherches ont été jusqu'à présent plus utiles aux progrès des mathématiques qu'au perfectionnement de l'art des constructions. La plupart des constructeurs déterminent les dimensions des parties des édifices ou des machines d'après les usages établis et l'exemple des ouvrages existants; ils se rendent compte rarement des efforts que ces parties supportent et des résistances qu'elles opposent. Cela présente peu d'inconvénients lorsque les ouvrages que l'on exécute ressemblent à ceux que l'on a faits de tout temps, et ne s'écartent pas, dans les dimensions et dans les poids, des limites accoutumées. Mais on ne peut plus en user de la même manière lorsque les circonstances obligent à sortir de ces limites, ou lorsqu'il s'agit d'édifices d'un genre nouveau, et sur lesquels l'expérience n'a rien appris.

L'objet de ces Résumés est d'exposer les conditions de l'établissement des constructions que les ingénieurs dirigent, et de mettre à même de vérifier le degré de résistance de chacune de leurs parties. On s'est occupé principalement des constructions en charpente, sur lesquelles on trouve peu de détails dans les ouvrages destinés à l'instruction, et l'on croit devoir indi-

quer succinctement les principes d'après lesquels les questions les plus importantes ont été traitées.

Nous considérons dans les matériaux deux qualités principales, la force d'élasticité et la résistance à la rupture. Par *force d'élasticité*, on entend la résistance que le corps oppose quand on veut l'allonger ou l'accourcir d'une très-petite quantité. Le rapport entre le poids qui allonge ou comprime un corps prismatique dont la section transversale est égale à l'unité de surface, et la fraction qui exprime la variation de la longueur naturelle du corps causée par ce poids, est la mesure de la force d'élasticité : c'est la quantité désignée par E dans le n° 77. Par *résistance à la rupture*, on entend l'effort qu'il faut faire pour séparer les parties des corps, en agissant par extension, ou l'effort qu'il faut faire pour écraser ces parties en agissant par compression. Le poids qui opère l'un ou l'autre effet, en agissant sur une section transversale égale à l'unité de surface, est la mesure de cette résistance : c'est la quantité désignée par R dans le n° 113.

La force d'élasticité et la résistance à la rupture doivent être déterminées par l'expérience pour les diverses substances, et l'on s'est efforcé de rassembler tous les résultats de ce genre qui paraissent être de quelque utilité.

La connaissance de la force d'élasticité donne les moyens de calculer la quantité dont une pièce de charpente peut se comprimer, s'allonger ou fléchir sous une charge donnée. La connaissance de la résistance à la rupture permet de déterminer la limite du poids qu'une pièce peut supporter. Mais cela ne suffit pas pour l'établissement des constructions, parce qu'il s'agit de connaître, non pas le poids qui rompt une pièce, mais le poids dont on peut la charger, sans que l'altération qu'elle subit augmente avec le temps. La recherche de cette dernière limite, qui est de la plus grande importance, peut être rarement l'objet d'expériences directes; mais on peut ici se servir avec avantage des exemples fournis par les constructions existantes.

Nous remarquons qu'en cédant aux efforts auxquels elles sont exposées, les parties des pièces s'accourcissent ou s'allongent, et nous prenons la proportion de cette variation de longueur pour la mesure du degré d'altération de ces parties. Connaissant donc quel est, dans les constructions dont l'expérience constate la solidité, la quantité dont les fibres qui subissent les plus grandes variations de longueur sont allongées ou accourcies, nous regardons ces variations comme des limites que l'on peut atteindre, et qui ne peuvent être dépassées sans danger. A ces variations de longueur correspondent des efforts qui seraient capables de les produire en agissant directement par tension ou par compression. Ces efforts sont regardés comme étant les plus grands que les fibres puissent supporter; et la pièce, pour l'établissement d'une nouvelle construction, est censée prête à rompre quand ces efforts ont lieu. C'est ainsi qu'en attribuant à la quantité  $R$  une valeur beaucoup moindre  $R'$  (voyez le n° 184), les formules relatives au cas de la rupture peuvent servir à calculer les dimensions qui doivent être attribuées aux pièces dans les constructions.

Pour donner un exemple de ces évaluations, on dira que la force d'élasticité du fer forgé est  $E = 20\ 000\ 000\ 000$  kil.; c'est-à-dire que ce poids, agissant sur une barre dont la section transversale serait un mètre carré, allongerait ou accourcirait cette barre d'une quantité égale à sa longueur primitive, les variations de longueur étant toujours supposées proportionnelles aux poids qui les produisent. La résistance de la même substance à la rupture est  $R = 40\ 000\ 000$  kil., parce que ce poids romprait une barre semblable en la tirant suivant sa longueur. Enfin, on admet que le fer serait altéré si les fibres étaient allongées ou accourcies de plus des 0,0005 de leur longueur naturelle; et comme cette variation de longueur serait produite par un poids de 40 000 000 kil. agissant sur la même barre, on attribue cette dernière valeur à la constante  $R'$ , et l'on regarderait dans une construction une barre de fer forgé comme étant trop chargée, si les fibres les plus tendues ou les

plus comprimées supportaient un effort de plus de 40 000 000 kil. sur un mètre carré (voyez les n<sup>os</sup> 182 et 183).

Ces notions admises, tout se réduit à rechercher, dans chaque construction, l'effet des efforts auxquels elle est exposée pour allonger ou accourcir les parties des pièces, soit par une action dirigée dans le sens de leur longueur, soit par une action oblique ou transversale qui oblige la pièce à fléchir, et par conséquent allonge les fibres placées à la face convexe, et accourcit celles qui sont placées à la face concave. Les résultats qui avaient été donnés jusqu'à présent sur l'équilibre des solides élastiques ne s'appliquaient qu'à un très-petit nombre de cas. Mais au moyen des nouvelles questions qui ont été résolues, on peut aujourd'hui se rendre compte de la force des principales pièces, dans les constructions en charpente que les ingénieurs dirigent, avec la même facilité et la même exactitude que l'on se rend compte de la force des chaînes dans un pont suspendu.

L'élément principal des calculs est l'évaluation des limites des efforts que l'on peut faire supporter aux parties des divers matériaux. Cette évaluation, établie d'après l'expérience des constructions existantes, ne peut présenter une exactitude rigoureuse. Il pourra donc exister quelques différences dans les nombres qui seront adoptés par diverses personnes. Le temps et la réunion d'un grand nombre d'observations peuvent seuls fixer les idées sur ce sujet.

Les règles relatives à l'équilibre des murs de revêtement des terres ou des voûtes avaient été exposées dans d'autres ouvrages ; mais il était nécessaire d'avoir égard, comme on l'a fait ici, à la possibilité des disjonctions dans les murs ou dans les pieds-droits, que l'on considérait ordinairement comme des corps d'une seule pièce.

Les ingénieurs, en préparant les projets des travaux qu'ils dirigent, suivent ordinairement une marche analogue à ce qu'on nomme dans les sciences la méthode de fausse position. C'est-

à-dire qu'après avoir conçu et décrit par le dessin la disposition d'un ouvrage, ils examinent s'ils ont satisfait à toutes les conditions nécessaires, et rectifient leur projet jusqu'à ce qu'ils y soient parvenus. Parmi ces conditions, l'une des plus essentielles est l'économie; la solidité et la durée ne sont pas moins importantes. Au moyen des règles exposées dans ces Résumés, on pourra connaître dans chaque cas les limites que l'on ne pourrait dépasser sans exposer l'ouvrage à manquer de solidité. Il ne faudrait pas conclure d'ailleurs que l'on doit toujours, pour avoir égard à l'économie, se placer tout près de ces limites. Les différences que l'on trouve dans les qualités des matériaux, et plusieurs autres motifs, s'y opposent; l'art consiste principalement à juger jusqu'à quel point il est permis de s'en approcher.

---

## AVERTISSEMENT DE NAVIER

SUR LA DEUXIÈME ÉDITION (1833).

---

La première édition de ce Résumé, qui a paru en 1826, étant épuisée depuis longtemps, on a dû le réimprimer, et l'on s'est efforcé de le rendre moins imparfait.

Nous avons rapporté les résultats des expériences sur la résistance des matériaux publiés depuis 1826, et plusieurs résultats inédits que M. Minard, ingénieur en chef des ponts et chaussées, a bien voulu nous communiquer.

Les inexactitudes ou erreurs qui avaient été reconnues, et

dont plusieurs nous ont été signalées par M. Coriolis, ont été rectifiées, et l'on a complété la solution de quelques questions.

On a évité toutefois d'augmenter beaucoup l'étendue de l'ouvrage (ce qu'il eût été facile de faire sans sortir du sujet). Il a paru convenable de se borner aux questions les plus importantes, et dont la solution pouvait servir d'exemple dans les nouveaux cas qui viendraient à se présenter. Comme il existe d'ailleurs un écrit dans lequel la théorie mécanique des ponts en chaînes de fer est exposée avec détail, il eût été superflu de s'en occuper ici.

Nous avons indiqué les auteurs des résultats les plus remarquables qui ont été donnés dans ces derniers temps. Les personnes qui voudraient connaître en détail l'histoire des travaux dont cette partie de la mécanique a été le sujet, pourront recourir à divers ouvrages, parmi lesquels nous citerons principalement le *Traité analytique de la résistance des solides et des solides d'égalé résistance*, par M. Girard, membre de l'Institut; le recueil des articles de Robison, publié après sa mort sous le titre de *A System of mechanical Philosophy*; l'ouvrage anglais de M. Barlow, intitulé : *An Essay on the Strength and Stress of Timber*; le *Traité de la poussée des terres*, par M. Mayniel; les *Mémoires sur la poussée des terres et sur les voûtes*, donnés par MM. Français et Audoy, dans le n° 4 du *Mémorial du génie*. On pourra juger, en consultant les ouvrages dont il s'agit, du point auquel ce genre de recherches avait été porté, et des efforts qui ont été faits pour les étendre et les perfectionner.

On reconnaîtra principalement que les conditions d'équilibre d'un massif de terres, qui forment le sujet de l'article 1<sup>er</sup> de la II<sup>e</sup> section, n'avaient point été données, et qu'il en est de même à l'égard des résultats présentés dans l'article 3 de la même section, et des notions relatives à l'usage des tirants ou des ceintures de fer destinées à consolider les constructions en maçonnerie.

Quant aux questions relatives à la résistance des corps solides et à l'établissement des constructions en charpente, on

n'avait traité que les cas les plus simples de l'équilibre d'une pièce droite, c'est-à-dire les questions élémentaires exposées dans la première section de cet ouvrage, et le premier des cas d'équilibre d'une pièce chargée verticalement, qui forment le sujet de l'article 2 de la IV<sup>e</sup> section. Toutes les autres questions relatives à l'équilibre d'une pièce droite ou courbe, chargée horizontalement, verticalement ou dans une direction oblique, ont été considérées et résolues pour la première fois par l'auteur. Il en est de même des questions relatives à la flexion et à la rupture des plans. Les applications qui ont été faites de ces diverses solutions à l'établissement des principales constructions en charpente semblent mériter l'attention des ingénieurs.

---

N. B. Comme cette préface et cet avertissement de Navier offrent à peu près les seuls passages de son livre où il parle des recherches antérieures sur la matière qu'il doit traiter, nous pensons qu'on nous saura gré de donner, sur ce sujet intéressant, des détails en grande partie peu connus, et que nous étendrons à peu près jusqu'à l'époque où nous sommes.

---

## HISTORIQUE ABRÉGÉ DES RECHERCHES SUR LA RÉSISTANCE ET SUR L'ÉLASTICITÉ DES CORPS SOLIDES.

I. **Moyen Âge.** — Les architectes de cette remarquable période ne nous ont initiés par aucun écrit dans le secret de la manière dont ils déterminaient les proportions de leurs constructions si légères et si hardies (<sup>1</sup>). « Ils cherchaient sans

---

(<sup>1</sup>) On ne trouve à peu près rien sur ce sujet dans l'*Album* ou le *Calépin* de Villard de Honnecourt, architecte du XIII<sup>e</sup> siècle, publié en 1858, avec luxe, à l'imprimerie impériale, et suivi de notes de feu M. Lassus.

cesse, » dit M. Viollet-Leduc <sup>(1)</sup>, « et la routine n'avait pas de prise sur eux; en cherchant, ils trouvaient; ils allaient toujours en avant, et ne disaient jamais : Nous sommes arrivés..... Tous leurs efforts tendaient à équilibrer les forces et à ne plus considérer les points d'appui que comme des quilles maintenues dans la verticale, non par leur propre assiette, mais par la neutralisation de toutes les actions obliques..... Ils connaissaient le principe du levier droit ou coudé, et probablement n'ignoraient pas celui de la composition des forces concourantes, qui peut s'en déduire si naturellement quand les forces sont rectangulaires, bien qu'on en attribue la découverte à Stevin, qui le premier l'a formulé dans sa Statique en 1586. » Ils avaient une sorte de passion pour la diminution du cube des appuis; ils se livraient probablement à quelques essais comparatifs, à l'aide de leviers, avant d'employer quelque pierre non encore connue.

Quant aux charpentes, ils en connaissaient et raisonnaient les assemblages <sup>(2)</sup>; mais le bas prix des bois permettait de donner de fortes dimensions aux pièces. On peut cependant présumer qu'ils savaient qu'une pièce prismatique chargée transversalement résiste en proportion bien plus forte par son épaisseur que par sa largeur, car Galilée semble avoir pour but principal, en cherchant le premier la loi théorique de cette résistance, de déterminer au juste la proportion en question, ainsi que le rapport entre la résistance dite *absolue* qui s'exerce quand on tire une pièce dans le sens de sa longueur, et sa résistance dite *relative* ou *relative*, qui entre en jeu quand on veut la rompre par un effort dirigé perpendiculairement. Il y avait été amené, après une visite à l' Arsenal de Venise, en réfléchissant sur les causes de la non-réussite en grand des machines qui ont réussi en petit <sup>(3)</sup>.

---

(1) Dictionnaire raisonné de l'Architecture française du x<sup>e</sup> au xvi<sup>e</sup> siècle, L. IV, article *Construction*.

(2) On trouve dans Villard de Honnecourt la description du plancher formé par quatre pièces d'une portée moindre que le côté de la salle carrée qu'il est destiné à recouvrir, celle d'une roue hydraulique dont les quatre rais principaux embrassent l'arbre sans l'entamer, etc.

(3) Académie des sciences, 1702, partie historique, p. 402.



II. **Galilée.** — L'auteur des immortels **DIALOGUES**, considérant donc d'abord un parallépipède ou un cylindre horizontal encastré dans un mur <sup>(1)</sup> à une de ses extrémités, et sollicité à l'autre par un poids, et supposant égales toutes les résistances à la disjonction aux divers points de la base ou section située dans le plan du mur, en sorte que leur résultante horizontale passe au centre de cette base, met en équilibre cette résultante avec le poids en les faisant agir aux deux extrémités d'un levier coudé à angle droit, dont il place le point d'appui ou l'axe de rotation à la partie inférieure de la même base ou section de rupture. Les forces étant réciproques à leurs bras de levier, il conclut que la résistance *absolue* est à la résistance *relative* comme le bras horizontal, qui est la longueur ou la saillie du solide, est au bras vertical, qui est sa demi-épaisseur ou hauteur.

De là Galilée déduit facilement qu'une pièce rectangulaire-sollicitée de champ résiste plus que la même pièce sollicitée à plat dans le rapport de la plus grande à la plus petite dimension transversale; que les poids capables d'être supportés par des pièces soit encastrées à un bout, soit posées sur deux appuis, sont comme leurs largeurs, comme les carrés de leurs épaisseurs, et en raison inverse de leurs longueurs; que les cylindres creux, tels que les os, les plumes, les *cannes* ou tiges de graminées, etc., résistent bien plus aux efforts transversaux, à égal volume, que les cylindres pleins, dans une proportion qu'il détermine; ce qui lui donne lieu de se livrer, sur les œuvres de la création, à des considérations d'un ordre élevé. Enfin, fondant du même jet la théorie des solides d'égale résistance dont l'application procure la plus grande économie de matière, Galilée montre qu'une pièce encastrée, de largeur constante, et dont la face inférieure est un plan horizontal, remplira la condition de résister autant partout d'un bout à l'autre si la face supérieure a pour coupe verticale longitudinale une para-

---

(1) *Dialogo secundo, Giornata terza, 4638.* — Opere di Galileo Galilei, t. III, p. 63, article 556 de l'édition de 1744.

bole dont le sommet est à l'extrémité où le poids se trouve suspendu.

III. **Suite de Galilée. Blondel. Marchetti.** — Tous ces théorèmes de Galilée sont justes et ont été confirmés par les recherches faites ultérieurement, sauf toutefois celui qui donne le rapport entre les résistances à la rupture par effort longitudinal et par effort transversal, car c'est le seul point sur lequel influe l'erreur de sa double hypothèse consistant à faire toutes égales les tractions aux divers points de la section de rupture, et à placer au bas de cette section l'appui du levier fictif.

On lui a bien plus reproché, pendant quelque temps, la conséquence suivante qu'il tire de son théorème de la forme parabolique d'égale résistance d'une pièce encadrée : « D'où l'on voit, » dit-il (p. 81), « comment avec une diminution de plus de 33 p. 100 on pourra faire des poutres sans rien diminuer de leur force, ce qui en particulier dans les grands navires peut être très-utile pour régler leurs *couvertures*; car dans de pareils édifices la légèreté importe infiniment. » Cette assertion a fourni l'occasion de contestations très-vives sur la priorité de la découverte et de la rectification de l'erreur qu'on y croyait renfermée. Cependant le principe, posé par lui, de l'économie d'un tiers sur la matière, est parfaitement juste et applicable aux pièces posées sur deux appuis tout comme aux pièces encadrées, si ces pièces ne sont chargées qu'en un seul point, car leur section longitudinale d'égale résistance doit offrir alors deux paraboles ayant leurs sommets sur les appuis et se rencontrant en ce point <sup>(1)</sup>. On ne doit prendre une *coupe elliptique*, comme l'ont conseillé le célèbre architecte François Blondel dans sa deuxième lettre au physicien suédois P. Wurtius <sup>(2)</sup>, et ensuite Alexandre Mar-

(1) Sous-note de la p. 30 du t. II du *Traité de la Construction des ponts de Gauthier*; et, aussi, n° 323 (p. 503) de l'édition 1833 des présentes *Leçons*.

(2) F. B. *Epistola ad P. W. in quâ famosa Galilæi propositio discutitur circa naturam lineæ quæ trubes secari debeant ut sint æqualis ubique resistentiæ, et in quâ lineam illam non quidem parabolicam ut ipse Galilæus arbitratus est, sed ellipticam esse demonstratur.* (Data Parisiis, 1661.) Dans cette lettre, Blondel dit qu'il avait composé, dès 1649, un opuscule sur la Résistance des solides, intitulé *Galilæus promotus*. Sa première lettre, de 1657, était relative aux expériences entreprises par le suédois Wurtius sur le même sujet.

chetti, professeur à Pise <sup>(1)</sup>, que lorsque la pièce doit résister à une charge quel que soit le point où celle-ci agisse (ce qui peut être en effet le cas des poutres des ponts des vaisseaux); et alors, comme l'a remarqué Navier <sup>(2)</sup>, la poutre n'est d'équale résistance pour aucune position de la charge, car elle a un excédent d'épaisseur partout excepté en un seul endroit; la coupe en demi-ellipse ne lui donne cette propriété que lorsque la charge est également répartie sur toute la longueur, comme l'a remarqué également Navier <sup>(3)</sup>; mais il y a toujours une économie de matière en l'adoptant dans l'autre cas <sup>(4)</sup>.

**IV. Hooke et Mariotte. Établissement du principe fondamental.** — Pendant que les principes de Galilée étaient commentés aussi et appliqués par le P. Fabri (Traité de physique, Lyon, 1669), par Vincent Viviani, et surtout par son continuateur le P. Grandi (Guido), camaldule, dont le traité, très-remarquable au point de vue géométrique <sup>(5)</sup>, a été inséré à l'édition de 1744 des OEuvres complètes de Galilée, deux des plus illustres physiciens dont s'honorent l'Angleterre et la France posaient les bases de la vraie théorie de la rupture des solides, ou plutôt, et ce qui importe plus comme on va voir, des modifications qu'ils subissent longtemps avant qu'elle se déclare, et qui sont susceptibles de l'amener.

En 1678, Robert Hooke, à la suite d'une étude des ressorts d'acier <sup>(6)</sup> (surtout de montre), donnait son fameux principe *ut tensio sic vis*, trouvé par lui, dit-il, dès 1660, mais annoncé seulement en 1676 sous l'anagramme *ceiinossttuu* <sup>(7)</sup>, et

<sup>(1)</sup> *De Resistentiâ solidorum*, in-4°, Florence, 1669.—Ad lectorem. — Propositio 39. — Appendix. — Et, aussi, *Lettera nella quale si ribattono l'ingiuste accuse date dal P. D. G. G.*, 1711, pages 18 et 27.

<sup>(2)</sup> Page 323 (n° 503) de l'édition de 1833 des présentes Leçons.

<sup>(3)</sup> *Idem*, n° 324, p. 504.

<sup>(4)</sup> Seulement elle n'est alors que des  $\frac{\frac{1}{2} - \pi}{\frac{1}{2}} = 0,245$  au lieu des 0,333.

<sup>(5)</sup> *Geometrica demonstratio Vivianorum problematum*, in-4°, 1699.

<sup>(6)</sup> *Lectures De potentiâ restitutivâ or of Springs*, explaining the Power of springing Bodies; inséré à ses *Philosophical Tracts and Collections*.

<sup>(7)</sup> A la suite de sa *Description of Helioscopes and some other Instruments*.

énonçant comme base de la théorie de l'élasticité, la *proportionnalité* des extensions ou contractions aux efforts qui les amènent ou qu'elles développent. Il explique par là les mouvements vibratoires des corps; et s'il ne tire du même principe aucun calcul de résistance à la flexion, il fait déjà cette remarque féconde, que la matière des barres élastiques fléchies oppose une réaction (springing) de traction du côté qui devient convexe et une réaction égale de pression du côté qui devient concave.

Vers le même temps (en 1680) notre Mariotte, ayant aperçu par plusieurs expériences sur des tiges de bois et de verre que le rapport entre les poids qui produisent la rupture par traction longitudinale et par effort transversal était plus grand que celui qui résulte du calcul de Galilée, constatait aussi <sup>(1)</sup> que les parties des corps *même les plus durs* (tels que le verre, l'acier) « s'étendent plus ou moins sous l'action de différents poids, » à peu près proportionnellement à ces poids, « et retournent ensuite d'elles-mêmes à leur première étendue; » et qu'elles se compriment aussi, en sorte « qu'un bâton qu'on plie se resserre vers la concavité de la courbure et s'étend vers la convexité avant que de rompre, » et il ajoutait « qu'il est très-vraisemblable que ces pressements résistent autant que les extensions, et qu'il faut une même force pour les faire; » enfin, que les parties étendues ne rompent que parce que leur extension vient à dépasser une certaine proportion qu'elles ne peuvent plus souffrir.

Il montre donc d'abord que si l'on met, comme Galilée, l'axe fixe de rotation au bas de la section, en sorte que les fibres longitudinales dans lesquelles on peut concevoir le solide divisé ne soient qu'étendues, l'inégalité de leurs tensions diverses qui varient uniformément depuis zéro pour la fibre inférieure jusqu'à celle qui est capable de rompre la fibre supérieure, place leur

(1) Traité du mouvement des eaux (qui ne fut publié qu'en 1786 par les soins de Ph. de la Hire après la mort de Mariotte, arrivée le 12 mai 1784), 4 volume in-4<sup>o</sup>, et ensuite l'Œuvres complètes, 5<sup>e</sup> partie, deuxième discours, où il cherche la force à donner aux tuyaux de conduite et à leurs platines, relativement à la hauteur d'eau qu'ils supportent.

résultante aux deux tiers de la hauteur <sup>(1)</sup>; et comme cette résultante, à l'instant de la rupture de la fibre la plus tendue, n'est que la moitié de la force qu'il faudrait pour les rompre toutes à la fois par traction longitudinale, on a entre cette dernière force (résistance *absolue*) et celle qui fait rompre par flexion (résistance dite *relative*) le même rapport qu'entre la longueur du solide et *le tiers* de son épaisseur (au lieu de la moitié qu'avait trouvée Galilée en supposant tacitement toutes les tensions égales).

Et, ensuite, vu les compressions d'une partie des fibres, dont ce premier calcul ne tenait pas compte, Mariotte place définitivement *au milieu de la hauteur du solide* l'axe d'équilibre sur lequel elles ne sont ni étendues ni comprimées (c'est-à-dire cette ligne que M. Ch. Dupin a appelée *des fibres invariables*, et M. Tredgold ligne *neutre*), et il considère à la fois les résistances développées par les compressions en dessous et par les extensions en dessus.

Il se trompe, il est vrai, par une singulière inadvertance, du simple au double dans la supputation du résultat <sup>(2)</sup>, ce qui lui fait trouver la même chose que « si toutes les parties s'étendaient, » ou que si la rotation se faisait autour du bas de la section et non pas autour du milieu, et lui donne le rapport de la longueur du solide au tiers de son épaisseur pour celui des résistances *absolue* et *relative*, ou les *deux tiers* du résultat de Galilée, quand il aurait dû n'en trouver que *le tiers* d'après son point de départ. On ne doit pas moins considérer Mariotte comme ayant posé d'une manière à peu près complète, au moins pour les prismes ayant des sections de forme symétrique dans deux sens rectangulaires dont l'un est celui de la force sollicitante, les principes sur lesquels on se base encore aujourd'hui pour calculer les flexions, et aussi la résistance des solides dans les limites en deçà desquelles on se tient toujours, et où les extensions et compressions

(1) Fontenelle observe, dans les Mémoires de l'Académie pour 1702, que c'est substituer, pour le point d'application de la résultante, le *centre de percussion* ou d'oscillation au centre de gravité de la section.

(2) *Idem*, 43<sup>e</sup> alinéa du *Discours*.

des fibres restent sensiblement proportionnelles aux efforts qui les sollicitent.

V. **Jacques Bernoulli**. — C'est donc à tort <sup>(1)</sup> qu'on a à peu près généralement regardé Jacques Bernoulli comme ayant le premier, ainsi qu'il le prétend, tenu compte des compressions, et comme ayant donné, conformément au titre de son écrit de 1705 <sup>(2)</sup>, la véritable hypothèse à adopter pour calculer ce genre de résistance des solides. L'illustre géomètre de Basle n'avait aucunement parlé de compressions dans son précédent écrit, contenant la découverte de la courbe élastique <sup>(3)</sup> (*voy.* n° XII) et qui est d'ailleurs postérieur de neuf ans à la publication du *Traité du mouvement des eaux*. Il ne fait même, à la théorie de Mariotte, qu'un seul changement peu heureux, consistant à regarder les extensions et contractions comme *augmentant dans un rapport moindre que les forces qui les produisent* ; il prétend le démontrer d'une manière mathématique en disant que si les compressions étaient proportionnelles aux poids qui les causent, la fibre finirait par « se comprimer de plus que toute sa longueur ; » il ajoute qu'il en doit être de même des extensions, « parce qu'elles ne sont que des compressions négatives, » et il croit le confirmer, en ce qui regarde les pièces solides, par des expériences sur des *cordes à boyaux*, qui en effet suivent cette loi <sup>(4)</sup>, toute contraire à ce qu'on a récemment trouvé pour le fer et pour les bois étendus au delà

(1) Navier en fait déjà la remarque à une note du *Traité de la construction des ponts* de Gauthey, t. II (1813), chap. 4<sup>re</sup>, p. 20.

(2) Véritable hypothèse de la résistance des solides avec la démonstration de la courbure des corps qui font ressort ; lettre du 12 mars 1705, insérée aux *Mémoires de l'Académie* pour la même année ; ou *Jacobi Bernoullii opera omnia*, t. II, p. 276.

(3) *Jacobi Bernoullii Curvatura laminae elasticæ*. Acta eruditorum Lipsiæ Junii 1694 p. 262, ou *Opera omnia*, p. 576.

(4) Une corde à boyau de 3 pieds, chargée successivement de 2, 4, 6, 8 livres, s'étendit de 9, 17, 23, 27 lignes, tandis qu'elle se serait étendue de 9, 18, 27 et 36 lignes si elle avait suivi la loi de proportionnalité.

L'historien de l'Académie pour 1705 ajoute cette raison peu concluante : « que si les extensions étaient proportionnelles aux forces, comme les forces peuvent augmenter à l'infini, il faudrait que les fibres pussent s'étendre aussi à l'infini, ce qui est absurde. »

de la limite de conservation de leur contexture. De plus Bernoulli, se trompant du simple au double comme Mariotte, dans son lemme IV, affirme que « la force transversale capable de rompre, est la même que si les fibres étaient ou toutes étendues ou toutes comprimées, » et avance que la position qu'on adopte pour l'axe fixe autour duquel se font les rotations est tout à fait indifférente, soit qu'on le mette en bas de la section ou en haut ou en tout endroit intermédiaire. C'est que, n'apercevant pas le principe de l'égalité nécessaire des deux sommes des forces tendant à accourcir les fibres et des forces tendant à les allonger (voy. n° VII), principe qui est seul propre à fixer la position de cet axe, il cherche à échapper, par un raisonnement singulier, à la nécessité de déterminer cette position préalablement. La compensation partielle de cette seconde erreur par la première est cause de la conformité approchée de ses résultats avec ceux de quelques expériences de rupture faites précédemment par Mariotte.

C'est ce qu'observe très-bien, en citant Parent et Bilfinger (voy. n° VI), l'auteur d'une note mise au bas du Lemme IV à l'édition complète des œuvres de Jacques Bernoulli.

Mais voyons d'abord ce qui avait été dit auparavant touchant la loi des allongements des fibres sous diverses tractions.

**VI. Leibnitz, Varignon, Parent.** — Leibnitz, en juillet 1684, c'est-à-dire deux mois après la mort de Mariotte (1), dont il cite les recherches, mais comme ne connaissant que par ouï-dire ses seuls résultats expérimentaux, admettait comme Mariotte et comme Hooke la loi de proportionnalité des tractions aux allongements, en plaçant, du reste, comme Galilée, l'axe de rotation au bas de la section.

Varignon, considérant que cette hypothèse de proportionnalité de Mariotte, quoique très-vraisemblable, « pouvait n'être pas au gré de tout le monde », présentait, en 1702, un *Mémoire sur la résistance des solides pour tout ce qu'on peut faire d'hypothèses*

---

(1) *Demonstrationes novæ de resistentiâ solidorum.* (Acta eruditorum, Lipsiæ, Julii 1684, p. 349.)

*touchant la force ou la ténacité des fibres du corps à rompre* <sup>(1)</sup>; dans lequel (en plaçant toujours l'axe fixe au bas de la section ou en ne tenant pas compte des compressions) il donnait une formule générale où la résistance opposée par les fibres restait une *fonction indéterminée* de leur extension, fonction sur laquelle on peut faire beaucoup d'hypothèses sans que le rapport des résistances pour diverses sections soit autre, au moins pour celles qui sont rectangulaires, elliptiques etc., que ce qu'a trouvé Galilée, à savoir le rapport des largeurs multipliées par les carrés des épaisseurs. Il faut, on le conçoit, supposer une autre loi que celle de proportionnalité aux premières puissances des extensions, si l'on veut que les formules donnent bien les charges capables de produire la *rupture immédiate*, au lieu de ne donner, comme les formules dont on fait aujourd'hui usage, que les charges au delà desquelles la contexture commence à s'altérer, car cette loi simple ne s'observe pas jusqu'à ce que la rupture s'opère<sup>(2)</sup>. C'est pour appliquer cette idée de Varignon que Jacques Bernoulli fit sa tentative, peu heureuse disons-nous, de 1706.

Mais les erreurs de supputation de Bernoulli et de Mariotte furent très-bien remarquées et rectifiées par un autre géomètre, trop peu cité, l'académicien Parent, qui, après avoir publié divers mémoires relatifs à la théorie géométrique de la résistance des solides et à la détermination « d'autant qu'on veut de figures d'égale résistance » pour des modes quelconques d'application des forces <sup>(3)</sup>, où il mettait encore, comme ses devanciers, l'axe de rotation au bord inférieur de la section, remarqua enfin très-judicieusement, dans un dernier travail <sup>(4)</sup> (comme fit Coulomb aussi quelque temps après) *qu'un point ou une ligne indivisible, comme est ce bord, ne saurait avoir assez de résistance*

(1) Mémoires de l'Académie pour 1702.

(2) Voir et après notre note du n° 454, p. 473 à 485.

(3) 2 avril 1704, à juin 1707 et .... 1708, et 22 février 1710, au recueil des Mémoires de l'Académie. C'est dans celui de 1708 que Parent donne le moyen de tirer d'un tronç d'arbre la poutre qui offre la plus grande résistance. (Voy. ci-après, n° 420, p. 428.)

(4) Essais et Recherches de mathématiques et de physiques, 3<sup>e</sup> volume, XIV<sup>e</sup> mémoire : *De la véritable Mécanique des résistances relatives des solides, et réflexions sur le système de M. Bernoulli de Bâle*, 1713.

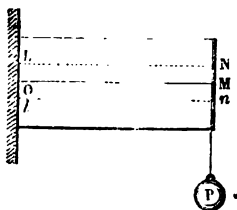


pour servir d'appui, en sorte qu'il faut une portion finie de la partie inférieure de la section du solide pour résister aux compressions. Il prouva que la somme des résistances des fibres comprimées doit être égale à la somme des résistances des fibres étendues, ce qui est, dit-il, une propriété dont on n'avait pas encore parlé. Cette propriété fournit, comme on sait actuellement, l'équation servant à déterminer la position de l'axe de rotation, appelé maintenant ligne neutre ou des fibres invariables<sup>(1)</sup>. En ajoutant les moments, autour de cette ligne, des deux espèces de résistance; pour en égaler la somme au moment du poids qui tend à rompre par flexion, il trouve facilement que les résultats de Mariotte et de Bernoulli sont deux fois trop considérables; et le même raisonnement lui sert à montrer que leurs transformations en quelque sorte graphiques des deux moments en un seul étaient illégitimes et affectées d'un double emploi, ou, ce qui revient au même, de l'omission d'une déflexion qu'il fallait opérer.

Bilfinger, peu d'années après<sup>(2)</sup>, fit la même remarque critique, et, en restituant à Mariotte l'idée première de prendre en considération les compressions, aussi nécessaires pour l'équilibre que les extensions, rectifia comme Parent la conclusion qu'il en tirait mal.

VII. **Coulomb.** — Occupés bientôt des questions mathématiques relatives à la flexion des tiges ou aux courbes élastiques

(1) Le raisonnement de Parent est remarquable. Si P est le poids suspendu à une extrémité de la pièce horizontale encastree OM, et si L, l, sur la section d'en-



castrement, sont les points d'application des résultantes des tractions des fibres à travers la partie supérieure et de leurs pressions à travers la partie inférieure, ce raisonnement revient à observer qu'en représentant la première résultante par la longueur LN de la pièce, il faut que le poids P le soit par Nn = Ll, afin que ces deux forces, en se composant ensemble, en produisent une Nl qui passe par l, condition pour que la somme des moments de P et des deux résultantes horizontales

soit nulle autour de ce point l. Or il faut pour cela que la deuxième résultante soit représentée par ln = LN; elle est donc égale à celle des tractions.

(2) Académie de Saint-Petersbourg, 1729, t. IV, p. 178. *De solidorum resistentiâ specimên.*

qu'elles affectent (voy. n° XIII), les savants cessèrent de s'occuper de leur résistance à la rupture jusqu'en 1773, époque où Coulomb présenta son célèbre Mémoire composé, dit-il, pour son usage particulier dans ses travaux d'ingénieur militaire à la Martinique, et où se trouvent posées presque toutes les bases de la théorie de la stabilité des constructions (1); mémoire où il montre que les questions d'équilibre y relatives peuvent se traiter comme des questions de maximum ou de minimum, ce qui préluait, en même temps que les recherches théoriques d'Euler et de Lagrange, à cette méthode de l'emploi du *potentiel* ou du travail mécanique qui est suivie aujourd'hui avec succès par des géomètres éminents (2) (voy. n° XLII).

Sans avoir eu probablement connaissance du Mémoire de Parent, de 1713, Coulomb se place de suite au vrai point de vue. D'un lemme de statique générale, encore peu connu alors malgré son évidence, et consistant en ce que l'équilibre d'un système sollicité par des forces quelconques exige la nullité de la somme algébrique de leurs composantes suivant trois directions rectangulaires, il déduit que dans la pièce horizontale sollicitée verticalement, il doit y avoir, à travers toute section transversale, égalité entre la somme des tractions horizontales des fibres étendues, et la somme des pressions aussi horizontales des fibres contractées, ce qui lui donne, sur la section d'encastrement par exemple, la position de la ligne de séparation, ou des fibres qui ne varient pas de longueur. En égalant le moment du poids suspendu, c'est-à-dire son produit par la longueur du prisme ou par la distance entre l'encastrement et la suspension, à la *somme du moment des tractions et du moment des pressions des fibres*, il obtient immédiatement le rapport, à ce poids, de la

(1) *Essai sur une application des règles de Maximis et Minimis à quelques problèmes de statique relatifs à l'Architecture.* (Savants étrangers, année 1773, t. VII, publié en 1776.)

Ce mémoire a été réimprimé dans notre siècle avec celui de 1784 sur la torsion des fils et celui que le même Coulomb a publié sur les machines.

(2) Aucune cause naturelle, dit Euler (développant une idée de D. Bernoulli), ne produit d'effet, qui, envisagée sous un certain rapport, ne soit un maximum ou un minimum.

force de traction qui tendrait toutes les fibres autant que la plus tendue de toutes.

Ce rapport, quand la section a une forme rectangulaire à côtés horizontaux et verticaux, est celui de la longueur de la pièce au sixième de sa hauteur, ce qui fait deux fois plus que suivant le calcul de Mariotte, moins exact que ses principes, et trois fois plus que suivant le calcul de Galilée.

Coulomb, au reste, tout en rejetant la roideur parfaite supposée par Galilée, ou la rupture simultanée de toutes les fibres sans extension préalable, remarque très-bien que si la matière du prisme ne suit pas jusqu'au dernier instant la loi de proportionnalité des efforts aux dilatations et compressions, l'axe final de rotation pourra se trouver ailleurs qu'au milieu de la section, et que le rapport en question pourra être moindre <sup>(1)</sup>. Mais il repousse l'opinion que cet axe puisse être au bas, par cette raison péremptoire, déjà aperçue par Parent, qu'une ligne sans épaisseur ne saurait supporter à elle seule une pression finie.

**VIII. Girard, Barlow, Tredgold.** — Le Mémoire de Coulomb comprend tant de choses dans peu de pages, que, pendant plus de quarante ans, l'attention des ingénieurs et des savants ne s'était fixée sur aucune, ainsi que M. Poncelet l'a remarqué pour ce qui est relatif à la théorie des voûtes <sup>(2)</sup>.

Ainsi Girard, en 1798, tout en le citant, n'en avait tenu nul compte; et croyant, sur l'assertion de Bernoulli, que la position attribuée à l'axe des fibres invariables est indifférente, plaçait cet axe au bas de la section comme Leibnitz <sup>(3)</sup>. Les principes si

(1) On peut voir à ce sujet la note que nous avons mise au § 454 ci-après, p. 473 à 485.

(2) *Examen critique et historique des principales théories ou solutions concernant l'équilibre des voûtes.* (Comptes rendus des séances de l'Académie, t. XXIV, 1852, p. 497, 534, 577.)

(3) *Traité analytique de la résistance des solides, et des solides d'égale résistance.* Cet ouvrage est écrit avec une clarté élégante, et les nombreux calculs y sont assez bien faits. Mais leurs bases, et les conclusions, sont souvent fausses; par exemple, pour les solides encastrés aux deux bouts, quand la charge n'est pas à égale distance des encastremens etc. Aussi, son utilité se réduit-elle à celle des résultats des expériences de la section 3<sup>e</sup> sur la force et l'élasticité spécifique du chêne et du sapin.

simples posés par Coulomb ne furent étudiés et compris que dans notre siècle. Encore ne le furent-ils que peu à peu, car, tout en donnant une expression exacte du moment total des forces qui s'exercent à travers toute section symétrique, Duleau <sup>(1)</sup>, sans faire attention à la 3<sup>e</sup> proposition préliminaire de Coulomb et à ce que signifient deux petits triangles dont il égale les aires entre elles pour exprimer l'équilibre des forces horizontales ou l'égalité de la somme des tensions à la somme des pressions des fibres, croyait voir que, d'après ce savant, la ligne de passage des tensions aux pressions devait se déterminer en égalant la somme des moments des premières à la somme des moments des secondes; principe faux qui assignerait à cette ligne ou axe des fibres invariables une situation très-différente de la véritable, pour les sections qu'elle ne partagerait pas en deux portions symétriques.

Plusieurs autres auteurs éminents, entre autres M. Barlow <sup>(2)</sup>, faisaient la même confusion, avouée ingénument et rectifiée par cet illustre correspondant de l'Institut dans son dernier ouvrage sur la force des matériaux <sup>(3)</sup>, en citant M. Eaton Hodgkinson comme la lui ayant judicieusement signalée <sup>(4)</sup>. Leur habile et savant compatriote, M. Tredgold, en mettant comme eux, et comme Coulomb et Young, l'axe neutre à sa vraie place pour les sections rectangulaires, imaginait un principe singulier <sup>(5)</sup> pour en déterminer la position dans les sections d'une autre forme, sans comprendre encore le principe si simple et si rationnel de Parent et de Coulomb.

<sup>(1)</sup> *Essai théorique et expérimental sur la résistance du fer forgé*; mémoire présenté en 1813, et imprimé en 1820; pages 2 et 3.

<sup>(2)</sup> *An Essay on the Strength and Stress of Timber*, 1817, art. 420.

<sup>(3)</sup> *A Treatise on the Strength of Timber, cast Iron, malleable Iron, etc.* 1837, art. 40.

<sup>(4)</sup> Au volume IV des *Mémoires de Manchester*, nouvelle série.

<sup>(5)</sup> *Essay on the Strength of cast Iron*, art. 85<sup>a</sup>; et *Elementary Principles of Carpentry*. Ce principe qu'il substitue, dit-il, à plusieurs règles fausses données par les anciens auteurs, était qu'en doublant chacune des deux parties dans lesquelles l'axe neutre divise la section donnée, les deux sections de forme symétrique qui en résultent soient celles de deux pièces de même résistance l'une que l'autre; il revient à la condition que, pour les deux parties, le moment d'inertie autour de cet axe cherché, divisé par la hauteur ou plus grande ordonnée, donne le même quotient; ce qui n'atteint point le but réel et véritable.

### IX Navier. Premiers essais, et leur rectification.

— Navier aussi, dans les premiers écrits de sa jeunesse, se laissa tromper par l'assertion de Jacques Bernoulli et de Mariotte, relative à l'indifférence prétendue de la situation adoptée pour la ligne des fibres invariables; il chercha même à l'appuyer d'un raisonnement <sup>(1)</sup>, qui prouve seulement que, soit qu'on la place au bas ou au milieu d'une section rectangle, le moment des résistances est comme le cube de l'épaisseur pour une flexion déterminée (et non comme le carré, ainsi que l'avaient cru Girard et beaucoup d'autres) <sup>(2)</sup>. De plus, quelques résultats d'expériences lui faisant soupçonner « un vice caché dans la composition des formules, » il entreprit d'en donner de nouvelles : il supposait pour cela que chaque fibre, bien qu'infiniment mince, opposait à la flexion (comme les lames envisagées par Bernoulli et qui venaient de faire l'objet de son étude), une certaine résistance proportionnelle à sa courbure, et que, vu sa liaison avec les autres, elle opposait à l'extension une seconde résistance, supposée à la fois proportionnelle au degré de son allongement, et à sa longueur absolue <sup>(3)</sup>; ce qui lui donnait pour la somme des moments des résistances des fibres une expression composée de deux termes <sup>(4)</sup>.

Mais Navier ne pouvait rester dans cette singulière erreur, que nous avons dû mentionner parce qu'elle se trouve dans un volume non réédité d'un grand ouvrage. Il la rectifia dans son premier cours de l'école des ponts et chaussées en 1819. On y voit qu'il donna alors <sup>(5)</sup>, pour le moment total des résistances des fibres, une expression exacte, la ligne des fibres invariables étant

<sup>(1)</sup> Tome II (1813) du *Traité de la construction des ponts* de Gauthey, note après le chapitre 4<sup>er</sup>, page 20.

<sup>(2)</sup> Et lui-même à ce qu'il paraît, avant d'avoir été détrompé à ce sujet par M. Bernard, aujourd'hui correspondant de l'Institut, alors élève hors de concours (1813).

<sup>(3)</sup> *Idem*, sous-note, page 33.

<sup>(4)</sup> *Idem*, page 34. Il est évident qu'en écrivant la sous-note de cette page, il oubliait de tenir compte, en déduction, des actions et réactions mutuelles des parties dans lesquelles il divise une tige ou une fibre qu'on étend.

<sup>(5)</sup> Sommaire (lithographié) des leçons de mécanique appliquée données à l'École des ponts et chaussées, 1819-1820. Première partie, n° 60 (De la résistance à la flexion des corps prismatiques suivant la figure de leur section transversale).

supposée connue; mais que, comme Duleau, il déterminait encore cette ligne en posant une équation fautive entre le moment total des résistances des fibres allongées et le moment total des fibres raccourcies, moments qui sont bien loin d'être égaux dans les pièces à base de triangle, de trapèze, de T simple, etc.

Ce n'est que dans son cours de 1824, imprimé et distribué par feuilles la même année, et publié en 1826, c'est-à-dire dans la première édition de l'ouvrage que nous rééditons, que toute erreur de ce genre fut corrigée, et que Navier, seul entre tous les auteurs, détermina la ligne que traversent les fibres invariables sur des sections de toute forme, en égalant entre elles, non plus les deux sommes des moments, mais les sommes des résistances elles-mêmes des fibres tendues et des fibres pressées.

D'où il déduisit, le premier aussi, le principe si simple du passage de cette ligne *par le centre de gravité de la section* lorsque la matière est d'égale texture dans toute son étendue, et qu'on se tient dans les limites de la *conservation de la texture*, ou, comme on dit, de *l'élasticité*, ou plutôt tant que les efforts restent proportionnels aux effets.

**X. Navier (suite). Young.** — Dans ce même remarquable cours de 1824, dont nous avons été un des auditeurs, et qui fit faire à cette branche de la Mécanique un pas considérable, Navier rattacha plus franchement et complètement que n'avaient fait ses prédécesseurs, la théorie de la résistance des solides à celle de leur élasticité, ou celle de la rupture par flexion à celle de *simple flexion* sans rupture <sup>(1)</sup>, dont l'illustre physicien Thomas Young avait, en 1807, donné les formules exactes en y faisant entrer, le premier, un *module d'élasticité*, mais en ne s'occupant que des sections divisibles en deux parties symé-

---

(1) Dès 1819, dans un article (au n° 71) de son cours lithographié, intitulé : *De la rupture considérée comme l'effet de la séparation des fibres allongées ou de l'écrasement des fibres raccourcies*, il exprimait que la théorie de la résistance à la rupture exposée dans les autres articles au point de vue de ses devanciers était en quelque sorte artificielle et qu'il fallait y renoncer.

triques par une ligne horizontale qui est alors évidemment celle des fibres invariables <sup>(1)</sup>.

Il put ainsi résoudre une multitude de questions non encore abordées ; car ce sont les petites déformations subies par une pièce solide qui déterminent la distribution des efforts, non-seulement entre les diverses fibres à leur passage à travers une même section, mais aussi entre les diverses parties de cette pièce et entre les diverses pièces d'un même système.

Navier fit à la fin de l'art. IV (2<sup>e</sup> remarque du § 151 ci-après), une distinction essentielle entre la résistance à la rupture immédiate ou prochaine dont il est presque impossible et heureusement peu utile d'assigner les lois, et la résistance à une rupture *éloignée*, ou à une énervation qui amènerait la rupture au bout d'un temps plus ou moins long <sup>(2)</sup>, et il montra (ce que Young avait indiqué en passant comme nous venons de dire) le vrai parti qu'on peut tirer des formules de flexion pour en prévenir les chances, en limitant convenablement les dilatations ou extensions, ce qui convient mieux et produit souvent d'autres résultats que de limiter les efforts ou tensions ; et ce qui n'empêche cependant pas, si on le trouve commode, d'éliminer ensuite les dilatations-limites, ainsi que les coefficients d'élasticité, des

<sup>(1)</sup> *A Course of Lectures on natural Philosophy and the mechanical Arts.* Le D<sup>r</sup>. Young y dit, vol. 4<sup>or</sup>, p. 441, que l'altération permanente de forme limite la force des matériaux presque autant que la fracture, puisque l'effort qui est capable de produire cet effet est suffisant pour l'accroître jusqu'à ce que la fracture ait lieu ; bien qu'il reconnaisse (p. 442) que cette altération de forme *ne fasse pas perdre l'élasticité* (voy. ci-après p. 22) ; et vol. II, art. 335, que la résistance est limitée par l'extension ou la compression que la substance peut supporter sans manquer (falling) ou s'affaiblir.

Son *Module* est (ci-après, p. 48) la hauteur en pouces que donne le quotient de la charge d'un prisme d'un pouce carré de base par l'allongement ou le raccourcissement qu'elle produit pour chaque pouce de hauteur, et aussi par le poids du pouce cube ; ce qui fait, en substituant le mètre au pouce anglais, le poids E de Navier divisé par le poids du mètre cube, ou exprimé en hauteur d'un prisme de même matière ayant le mètre carré pour section.

<sup>(2)</sup> M. de Guillebon (lithographie du cours qu'il a fait en 1839) dit à cette occasion que la désignation, *moment de rupture*, est donnée à tort à l'expression qu'on égale au moment des forces extérieures pour poser la condition de stabilité ; car, vu que la proportionnalité des forces aux dilatations et compressions ne se conserve pas, l'équation qui en résulte est fautive si on l'applique à l'état où se trouve la pièce à l'instant qui précède celui où elle rompt.

*équations de cohésion* ou de non-rupture; en sorte que ces expressions des conditions de la stabilité de la contexture des pièces peuvent ne contenir que des efforts-limites <sup>(1)</sup>, dont les valeurs sont fournies par diverses expériences ou observations. (Voy. n° XLIV.)

**XI. Suite de Navier. Cas où le calcul des résistances doit être précédé de celui des flexions.**

— Si d'ailleurs on peut, dans quelques cas, poser les équations de stabilité d'une manière directe, sans parler ni des flexions éprouvées ni du coefficient de l'élasticité qui y résistait, il est absolument nécessaire, dans une foule d'autres, d'opérer préalablement le calcul analytique de ces flexions, et plus généralement des déplacements des points des pièces. Ce sont, par exemple (voir ci-après, § 7 de la note du n° 113), les cas où les flexions qui seront prises augmenteront sensiblement certaines composantes des forces extérieures, et surtout leurs bras de levier, comme quand les pièces sont sollicitées dans une direction parallèle ou presque parallèle à la leur. Ce sont aussi ceux où il y a lieu de combiner ensemble une flexion et une torsion. Mais ce sont surtout les cas nombreux où une partie des forces est inconnue parce qu'elles consistent en des réactions d'appuis ou d'encastremens, des actions mutuelles de diverses pièces assemblées, etc., qui ne sont point données *a priori*, et pour la détermination desquelles les théorèmes de la statique élémentaire, exprimés entre les seules forces *extérieures* ou *non-réciproques* agissant sur un corps, ne fournissent qu'un nombre insuffisant d'équations.

Ces sortes de problèmes, d'une nature implicite, peuvent être résolus, comme nous verrons au n° XLIX, par un procédé général, consistant à construire analytiquement les expressions des déplacements des points en fonction des forces tant connues

---

(1) V. ci-après §§ 7 de la note du n° 113, p. 93; 44 du n° 156, p. 83, et note (2) de la p. 829, Appendice complémentaire, § 94. Une erreur du n° 365 de la section IV de Navier relative à la situation de la section dangereuse ou de rupture dans une pièce horizontale chargée de divers poids, a été corrigée dans un cours lithographié de 1837-1838. M. d'Andrea, dans sa traduction italienne de 1836, avait fait la même correction.



qu'inconnues, celles-ci représentées par des lettres, et de s'en servir pour exprimer les conditions définies que les déplacements doivent remplir aux points particuliers où ces forces agissent, par exemple leur nullité aux points fixes, leur égalité et les raccordements qu'ils doivent observer aux jonctions des pièces ou des diverses parties dans lesquelles il faut partager une même pièce parce que les déplacements y sont donnés par des équations différentes <sup>(1)</sup>. De cette manière on parvient constamment à poser autant d'équations qu'on a d'inconnues à déterminer; car il n'y a, dans les questions de mécanique physique, évidemment aucune indétermination.

Navier a posé et résolu le premier, dans son Cours de 1824 (et même déjà dans celui de 1819), un certain nombre de ces sortes de questions, celle par exemple de la pièce encastree aux deux bouts et sollicitée ailleurs qu'au milieu de sa longueur (de sorte qu'on ne puisse pas obtenir, comme Girard, la solution par une assimilation à un cas plus simple); celles de pièces droites posées sur plus de deux appuis, ou de pièces courbes arrêtées aux extrémités; enfin, le fameux problème de décomposition d'une force suivant des droites matérielles concourantes au nombre de plus de deux dans un même plan ou de trois dans des plans différents <sup>(2)</sup>. S'il n'a pas indiqué la méthode générale dont l'application à tous les cas réaliserait l'espérance de sa préface de 1826 (p. lxxxvij), si même, pour diverses

<sup>(1)</sup> Navier a appris à poser ainsi des équations distinctes pour les flexions de ces diverses parties, qui sont séparées par des points où agissent des forces isolées, et autres où la loi de sollicitation change. Il n'a pas eu besoin ainsi de recourir, comme a fait Poisson, à l'emploi difficile des *fonctions discontinues*. (Traité de mécanique, 2<sup>e</sup> édition, 1833, n° 323.)

Nous avons eu lieu d'apercevoir qu'une division de ce genre doit encore être opérée, même quand il y a parfaite continuité ou aucun changement de forme des expressions, lorsqu'il s'agit de déterminer par exemple la flexion d'un anneau ou d'un ressort de dynamomètre *fermé*, car une pareille pièce n'a pas d'extrémité; il faut donc poser l'équation d'équilibre, non pas, comme à l'ordinaire, de toute la partie au delà d'une section quelconque, mais d'une portion comprise entre deux sections, en remplaçant la portion au delà de la seconde par une force et un moment, dont on détermine ultérieurement les intensités en posant les conditions de raccordement. (Cours lithographié, 1837-1838 n° 49, 82; ou Comptes rendus 1843, 6 novembre, t. XVII, p. 4025.)

<sup>(2)</sup> N° 533, page 345 de l'édition de 1833.

sortes de charpente, il est revenu aux décompositions arbitraires ou hypothétiques, fondées sur des suppressions, dont on se servait vaguement avant lui, on doit toujours lui attribuer le principe de ces solutions de questions qui ont été longtemps pour les géomètres une énigme désespérante, restant en effet sans mot tant qu'on attribue aux corps une parfaite rigidité <sup>(1)</sup> qui ne se trouve réellement dans aucune de leurs parties, ni même probablement de leurs dernières particules <sup>(2)</sup> et qui rendrait tout indéterminé dans la répartition intérieure des efforts auxquels elles sont soumises.

Au reste, à la même époque, dans une note <sup>(3)</sup> intitulée *Sur les questions de statique dans lesquelles on considère un corps supporté par un nombre de points d'appui surpassant trois*, Navier, en rapportant les résultats de ses belles solutions relatives à la pièce élastique droite ainsi supportée, observait très-bien que l'indétermination apparente cessait en tenant compte de l'élasticité ou du corps, ou des appuis, ou de l'un et des autres à la fois.

Le même cours de 1824 contient la solution de beaucoup d'autres problèmes sur lesquels nous reviendrons au n° XV.

**XII. Courbes élastiques planes. Jacques Bernoulli.** — Parlons auparavant des *courbes élastiques*, et d'abord de celles qui sont comprises dans un plan.

Leur recherche, plus géométrique que physique, a pu être fort avancée avant que les travaux de Coulomb, de Young et de Navier eussent fait connaître les vraies valeurs du nombre constant ( $\epsilon$  ou  $EI$  ci-après, au n° 80 et à sa note, p. 30, 31) qui figure dans leur équation.

Galilée avait pensé que la courbe affectée par un ressort droit que l'on ploie pouvait être une parabole, les PP. Pardies et de

<sup>(1)</sup> Voy. *Opuscules de d'Alembert*, t. VIII, p. 36. Sur quelques questions de dynamique. — Et, t. XVIII des *Mémoires de Saint-Petersbourg*, un essai d'Euler.

<sup>(2)</sup> Voyez ci-après, n° XXII.

<sup>(3)</sup> Société philomatique, 1825, p. 35.

Lanis une funiculaire. Mais Jacques Bernoulli (et ce fut là sa véritable découverte) en indiqua la vraie nature, d'abord en 1691 sous forme d'énigme <sup>(1)</sup>, puis explicitement dans l'année 1694 <sup>(2)</sup> en basant sa détermination sur cette propriété fondamentale « qu'en un point quelconque le rayon de courbure est en raison inverse du moment, autour de ce point, de la force qui produit la flexion, » propriété dont il donna une démonstration dans l'année 1695 <sup>(3)</sup>, en attribuant une épaisseur à la lame ou au fil élastique, et en supposant, comme Leibnitz, qu'une quelconque de ses sections acquiert une petite inclinaison sur une section voisine et primitivement parallèle en tournant autour d'une de ses bases ou de ses tangentes, qu'il prend, avec Galilée, pour l'axe d'appui d'un levier coudé. Mais il traita plus amplement ce sujet de la courbure des ressorts en 1705, à la suite de sa lettre *Véritable hypothèse, etc.*, citée ci-dessus <sup>(4)</sup>, et où il a été, avons-nous dit, moins heureux quant à la détermination du coefficient de cette proportionnalité.

En égalant, avec lui, pour un fil élastique primitivement rectiligne, le produit de ce coefficient ou de cette constante par l'inverse du rayon de courbure du fil en un point quelconque, à la somme des moments, autour de ce point, des forces qui sont supposées le solliciter dans un seul et même plan depuis là jusqu'à une de ses extrémités <sup>(5)</sup>, on a, pour la courbe qu'il affectera, une équation différentielle du second ordre, dont on obtient toujours une intégrale première quand on peut prendre des axes coordonnés par rapport auxquels on connaisse la direction et la situation de la résultante de ces forces sollicitantes;

<sup>(1)</sup> *Acta eruditorum Lipsiæ*, page 282, ou OEuvr. compl. n° XLII.

<sup>(2)</sup> *Idem*, juin 1694, p. 262, ou OEuvres n° LVIII.

<sup>(3)</sup> *Idem*, décembre, p. 537. Explications et notes; OEuvres, n° LXVI.

<sup>(4)</sup> *Mém. de l'Ac.* 1705; ou OEuvres, t. II, p. 976. Une question du même genre a été traitée par son frère Jean Bernoulli; OEuvres, t. IV, n° CLXXIV.

<sup>(5)</sup> Nous verrons (n° XVI) que cette égalité n'a lieu qu'autant que la tige est droite ou plane, et que son plan, ou celui qui passe par sa fibre moyenne et par la résultante des forces, comprend aussi l'un des deux axes principaux d'inertie de ses sections transversales.

et une seconde intégration ramène le problème aux quadratures (1).

Ces quadratures, quand on n'y emploie pas les transcendentes elliptiques, ne peuvent s'obtenir qu'en développant la fonction sous le signe  $\int$  en série, comme ont fait Bernoulli, Euler et Lagrange, ou en faisant usage de diverses méthodes d'approximation.

(1) Il est clair, en effet, que si l'on pose l'équation, qui est de la forme

$$\frac{EI}{\rho} = X(y-b) - Y(x-a),$$

où  $\rho$  est le rayon de courbure,  $EI$  est une constante, et  $a, b$  sont les coordonnées  $x, y$  du point d'application de la résultante dont  $X, Y$  sont les projections sur les  $x$  et les  $y$ , et si l'on change ces coordonnées, en faisant

$$x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha, \quad y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha$$

en d'autres  $x', y'$  telles qu'il ne reste après substitution que la coordonnée  $x'$  dans le second membre, ce qui revient à prendre  $y'$  parallèle à la résultante  $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$ , l'équation, qui se réduira,  $s$  étant l'axe et  $C'$  une constante, à

$$\frac{EI}{\rho} = EI \frac{d^2 y'}{dx'^2} = x' \sqrt{X^2 + Y^2} + C',$$

aura pour intégrale première,  $C''$  étant une autre constante,

$$EI \frac{dy'}{ds} = R \frac{x'^2}{2} + C' x' + C'' = EI \sqrt{1 - \frac{dx'^2}{ds^2}};$$

d'où l'on tire, en  $x'$  et  $dx'$  seuls, la valeur de  $ds$ , et par suite celle de  $dy' = \frac{dy'}{ds} ds$ . On aurait la même chose en prenant les axes coordonnés nouveaux, ou leur angle  $\alpha$  avec les anciens, de manière à n'avoir dans le second membre que  $y'$ , et

en remplaçant  $\frac{dy'}{\rho}$  par  $\frac{d^2 x'}{ds^2}$ . On y arrive aussi avec Lagrange (Ac. de Berlin, 1769, *Sur la force des ressorts pliés*, ou *Mécanique analytique*, 1<sup>re</sup> partie, section V, art. 50), sans changer d'axes coordonnés, en introduisant pour variable auxiliaire l'angle  $\varphi$  que fait avec celui des  $x$  la tangente à la courbe élastique au point

$(x, y)$ ; car  $\frac{dy'}{\rho} = \frac{d^2 \varphi}{ds^2}$ ,  $x = \int \cos \varphi ds$ ,  $y = \int \sin \varphi ds$ ; d'où, substituant et différentiant,  $EI \frac{d^2 \varphi}{ds^2} = X \sin \varphi - Y \cos \varphi$ , qui multipliée par  $2d\varphi$  et intégrée donne

$$EI \left( \frac{d\varphi}{ds} \right)^2 = -2X \cos \varphi - 2Y \sin \varphi + C''';$$

d'où l'on peut tirer  $ds$  et par suite  $dx$  en  $\varphi$  et  $d\varphi$  seuls.

mation numérique ou graphique dans les cas pour lesquels ces séries, après l'intégration, ne sont pas convergentes, comme l'a remarqué M. Poncelet (1).

**XIII. Classification des courbes élastiques planes par Euler.** — Euler fit, en 1744, une énumération complète des courbes élastiques planes, dans un mémoire (2) où il prend, d'après ce que nous venons de dire, l'ordonnée  $y$  parallèle à la résultante, quand il y en a une, et où il déduit leurs formes et les lois diverses de leurs circonvolutions, tantôt de l'intégration de leur équation en série, tantôt de l'équation différentielle elle-même, car la série n'est pas toujours convergente. Il y cherche d'abord, à la suite de considérations métaphysiques sur le double moyen d'investigation qu'offrent, d'une part, les causes finales, et, de l'autre, le calcul des effets des causes efficientes, quelle doit être la courbe rendant un minimum une certaine quantité appelée *force potentielle* par Daniel Bernoulli, qui lui avait conseillé cette recherche; quantité qui est, ici, *l'intégrale de l'élément de l'arc divisé par le carré du rayon de courbure*, pour une longueur donnée de l'arc entre deux points où les directions de sa tangente sont aussi données (3). Euler trouve que ce sont bien

(1) Dans son Cours de mécanique industrielle (1840, inédit) à la Faculté des sciences de Paris, 44<sup>e</sup> leçon.

(2) *Additamentum De curvis elasticis* à la suite de son bel ouvrage *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes*, dont les méthodes ont été remplacées par celle des variations.

(3) Cette quantité, appelée aujourd'hui simplement le *potentiel* (Voy. App, compl. p. 783, 796), n'est autre chose que le *travail de flexion*. On a en effet, comme aux

n<sup>os</sup> 77 et 80 (note), p. 29, 31,  $\rho$  étant le rayon de courbure,  $ds \frac{v}{\rho}$  pour l'allongement subi par un élément de fibre, d'une longueur primitive  $ds$ , si  $v$  est sa distance à celles qui ont conservé cette longueur entre deux sections voisines  $\omega$ ; d'où pour cette fibre une tension dont l'intensité, nulle quand la flexion commence, a maintenant pour grandeur  $E d\omega \frac{v}{\rho}$ . Il en résulte que le travail de son allonge-

ment est  $\frac{1}{2} E d\omega \frac{v}{\rho} \cdot ds \frac{v}{\rho}$ ; ce qui donne  $\frac{E ds}{2} \int v^2 d\omega$  pour toutes les fibres sur la

longueur  $ds$ ; ou,  $I$  étant le moment d'inertie de la section,  $\frac{EI}{2} \int_0^l \frac{ds}{\rho^2}$  pour le travail de flexion sur une longueur quelconque  $l$  de la tige.

en effet les courbes élastiques de Jacques Bernoulli, définies par la proportionnalité de la courbure, en un point quelconque, au moment des forces autour de ce point.

Il les classe en *neuf espèces*, dont les six premières sont relatives aux cas où les forces ont une résultante qui coupe la courbe, et se distinguent par les grandeurs plus ou moins considérables de l'angle de cette résultante et de la tangente au même point, qui ne peut être qu'un point d'inflexion, même lorsqu'il se trouve à une extrémité libre, puisque le moment et par conséquent la courbure y est zéro.

La courbe élastique est de première espèce, quand cet angle de la résultante et de la tangente est infiniment petit;

De deuxième, quand il est fini et aigu;

De troisième, quand il est droit;

De quatrième, quand il est obtus, mais moindre que  $131^{\circ}41'$ ;

De cinquième, quand il a tout juste cette grandeur, pour laquelle la courbe prolongée se replie sur elle-même, et a un nœud au point où la résultante la coupe;

De sixième, quand l'angle est plus grand, sans excéder deux droits.

La septième et la huitième espèce, qui sont sans point d'inflexion, ne peuvent être produites que par des forces dont la résultante agit par l'intermédiaire d'un bras de levier, sur un point hors de la lame primitivement droite qui a été fléchie.

Et la neuvième espèce, fort remarquable, est relative au cas où les forces, situées toujours dans un plan, n'ont pas de résultante, c'est-à-dire où elles *se réduisent à un couple*. Euler montre que la courbe *est alors un cercle*.

Dans le cas de la quatrième espèce, si l'angle de la tangente et de la force est supposé très-peu au-dessus de l'angle droit, on peut, en mettant approximativement l'élément de l'abscisse pour l'élément de l'arc, intégrer l'équation en termes entiers, ce qui donne simplement une courbe parabolique du troisième degré. C'est le cas très-connu d'une pièce horizontale peu flexible encastrée à un bout et sollicitée à l'autre par un poids, et c'est de la réunion de deux des courbes de cette quatrième espèce, se

raccordant au point de suspension du poids, que se compose la ligne affectée par l'axe d'une pièce *posée sur deux appuis* et sollicitée transversalement dans l'intervalle; et alors les véritables points d'application des forces, ou les points pour lesquels leur moment est nul, sont aux extrémités, vu les réactions des appuis. Euler remarque le premier qu'en observant la petite flèche de flexion on peut déterminer par l'expérience la constante qui mesure l'élasticité de la lame; mais il se trompe en regardant cette constante comme proportionnelle au *carré* et non au cube de l'épaisseur.

La première espèce n'est pas moins importante. Elle se distingue par une singularité qui a étonné les géomètres, et donné lieu à de nombreuses discussions. Elle est relative au cas où la force fait un angle excessivement aigu avec la tangente. C'est le cas des pièces dites sollicitées *debout*, c'est-à-dire pressées dans une direction sensiblement parallèle à leur longueur. Euler, substituant encore approximativement à l'élément de l'arc celui d'une coordonnée, qui est alors prise parallèle à la force, intègre complètement l'équation par sinus sous forme finie. Il en déduit une grandeur que la force est obligée d'atteindre pour pouvoir opérer un commencement de flexion, et qui, une fois surpassée, suffit par cela seul pour que la force détermine la rupture, car la courbure acquise lui donne un bras de levier sans cesse croissant.

C'est ce qu'il a appelé la *force des colonnes*. Le coefficient d'élasticité y entre seul, et non le coefficient de cohésion, parce que quelque grand que soit celui-ci, la pièce ne pourra résister à une flexion qui, une fois commencée, devient rapidement et indéfiniment croissante <sup>(1)</sup>.

---

(1) Duleau et M. Bernard (aujourd'hui correspondant de l'Institut) sans avoir pu consulter, à Cubzac, le mémoire d'Euler, ont aperçu ce principe d'une autre manière, à savoir en supposant approximativement que la courbure de la pièce, d'une longueur  $a$ , pressée debout par un poids  $Q$ , prend la même courbure que si, étant appuyée à ses extrémités, elle était sollicitée transversalement au milieu par une force  $p$  résultante des deux forces  $Q$  supposées agir suivant ses tangentes extrêmes. Alors, en effet,  $f$  désignant la flèche de courbure, l'inclinaison de ces deux tangentes sur la ligne de

A la fin de cet admirable mémoire, Euler étend son analyse :

1° A une lame d'élasticité ou de grosseur inégale ;

2° A une lame égale, mais naturellement courbe, et il prouve qu'on doit éгалer le moment des forces au produit de la constante par la différence  $\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0}$  des inverses des rayons de courbure ancien et nouveau  $\rho_0$  et  $\rho$  ;

3° A une lame sollicitée à la fois par des forces agissant en des points particuliers et par d'autres distribuées sur toute une partie de la pièce, telles que celles qui résultent de son poids propre ;

4° Enfin aux oscillations de la lame abandonnée à elle-même après avoir été fléchie (Voy. ci-après, n° LIII).

Euler revient, dans un mémoire de 1757 <sup>(1)</sup>, sur ce qu'il a dit de la *force des colonnes*, et justifie l'assertion en apparence singulière qu'aucune flexion ne sera prise par un ressort droit pressé longitudinalement, tant que la pression n'excédera pas une certaine intensité dépendant de son élasticité, et qu'il trouve aussi inverse du carré de sa longueur, comme l'avait annoncé Musschenbroeck en 1729 <sup>(2)</sup>.

**XIV. Suite. Lagrange. Euler. (Pièces debout. Paradoxe apparent.)** — Lagrange confirme ce résultat d'Euler dans un premier mémoire <sup>(3)</sup>, où il exprime d'une manière simple les intégrales premières de l'équation de l'élastique au moyen des deux variables  $s$  (l'arc) et  $\varphi$  (l'angle que la

jonction des deux extrémités serait  $\frac{8f}{a}$  (n° 87 ci-après); d'où  $\frac{P}{Q} = 2 \cdot \frac{3f}{a}$ . Or (même n° 87, p. 75), on a  $f = \frac{1}{2} p \left( \frac{1}{2} a \right)^2 \frac{1}{3EI}$ ; d'où  $Q = \frac{8EI}{a^2}$ , expression différent peu de celle  $\frac{\pi^2 EI}{a^2} = 9,87 \frac{EI}{a^2}$  d'Euler. MM. Bernard et Duleux concluaient, comme Euler, qu'une charge produisant la plus petite flèche était capable d'en produire une grande, et de rompre, quoique proportionnelle à la seule élasticité et indépendante de la cohésion.

(1) Académie de Berlin, 1757.

(2) *Introductio ad cohaerentiam corporum firmerum*, 1729.

(3) *Sur la force des ressorts pliés*, Académie de Berlin, 1769.



tangente fait avec une droite fixe), en faisant voir que la quadrature exacte de l'expression trouvée pour l'ordonnée dépend de la *rectification des sections coniques*, ou de ce qu'on appelle les fonctions elliptiques aujourd'hui. Mais il remarque qu'on peut intégrer par logarithmes ou par exponentielles réelles, dans le cas de la sixième espèce, quand la force, qui agit par traction, est dirigée presque dans le prolongement de la tangente, ou fait avec celle-ci un angle très-peu différent de deux angles droits.

A un mémoire sur la *figure des colonnes* (1) publié peu après dans un autre recueil, Lagrange élucide complètement la question de la courbe de première espèce, et fait disparaître toute difficulté analytique sur le résultat relatif à ce cas d'une pièce sollicitée *debout*, en donnant, au moyen d'une série, une intégrale exacte de l'équation différentielle sans substituer l'abscisse à l'arc; d'où une relation exacte aussi entre la flèche de courbure, la longueur développée de la pièce, et la force qui la fait fléchir. Elle montre clairement que pour toute force au-dessous de la grandeur trouvée par Euler, la flèche *serait imaginaire*.

C'est dans ce même Mémoire de Lagrange que se trouva faite, pour la première fois, la remarque que la pièce ainsi sollicitée est susceptible de prendre une courbure à deux, trois quatre... ventres, avec inflexions intermédiaires, ce qui a lieu en effet si quelques points sont empêchés de s'écarter latéralement, mais moyennant qu'on donne à la force 4, 9, 16... fois plus d'intensité que pour la courbure à un seul ventre sans inflexion.

L'analyse de Lagrange fournit la valeur de la flèche de courbure; ce que ne peut pas faire l'analyse d'Euler. Elle donne aussi, pour la longueur de l'arc fléchi, une expression exacte et différant quatre fois plus de sa corde que celle que divers auteurs ont cru pouvoir déduire d'un raisonnement qui les fait aussi arriver à une valeur de la flèche moitié moindre que la véritable (2).

(1) Académie de Turin, volume de 1770-1773.

(2) Sous ce rapport, les formules du n° 385 de l'édition de 1833 de Navier

Nous ne parlons pas de la fin de ce même Mémoire, où Lagrange conclut d'un calcul incomplet qu'un *renflement* non-seulement des colonnes formées d'assises en pierre, mais même de tout soutien ou poteau d'une seule pièce, n'augmente pas la résistance; ce qui n'est admis ni dans la théorie qui a prévalu, comme on verra au n° 506 (p. 325 de l'édition de 1833), ni dans la pratique, comme on peut voir par la forme des bielles en fonte de machines à vapeur.

Euler revient encore sur cet intéressant sujet en 1778, dans trois Mémoires <sup>(1)</sup>, où il examine ce qui arrive quand la colonne *n'est sollicitée que par son propre poids*. Le calcul le conduit à cette conclusion : que quelque haute, pesante et faible de résistance élastique que soit la colonne, elle ne prendra aucune flexion; tandis qu'elle fléchirait dans sa partie inférieure, si la partie supérieure y était simplement posée. *Cet insigne paradoxe* s'explique en remarquant qu'alors, à la face du contact des deux parties, l'axe de la pièce pourrait faire un angle avec la verticale, tandis que cela est impossible si la partie supérieure est liée invariablement à la partie inférieure.

Il suffit d'ailleurs que la plus petite force horizontale agisse en même temps, ou bien que la résultante des poids des parties supérieures s'écarte tant soit peu de la ligne centrale, pour déterminer la flexion.

**XV. Suite. Navier. Ses solutions de problèmes implicites. Flexion des pièces courbes.** — On doit à Navier d'avoir remarqué que l'équation différentielle de la courbe élastique peut, pour toutes les espèces d'Euler (hors la première et la neuvième qui n'en ont pas besoin), être intégrée facilement sous forme finie, même quand il y a une charge

sont à modifier. Les considérations présentées à ce sujet aux n° 89-91 de notre Cours lithographié de 1837-1838 ont été données depuis, avec plus de développement, par M. Ernest Lamarle (Flexion du bois, 2<sup>e</sup> partie) et par M. Bresse (Cours de méc. appl., 1859, n° 89, p. 208).

<sup>(1)</sup> Académie de Saint-Petersbourg. *Determinatio onerum qua columnæ gestare valent. — Examen insignis paradoxi in theoriâ columnarum occurrentis. — De altitudine columnarum sub proprio pondere corruentium.*

répartie sur la longueur totale ou partielle, même quand il y avait une petite courbure préalable, dans tous les cas où la flexion est très-petite; et, cela, sans négliger l'influence de cette flexion sur les bras de levier définitifs des forces, ou en conservant à l'équation sa forme implicite. On y arrive avec lui en dirigeant l'axe d'une des deux coordonnées, non plus suivant la résultante des forces, comme faisait généralement Euler, mais suivant une des tangentes à la courbe, de manière à pouvoir remplacer l'élément de l'arc par l'élément correspondant de cette coordonnée (1). L'ordonnée obtenue s'exprime tantôt par des sinus circulaires ou ordinaires, tantôt par des exponentielles réelles ou des sinus hyperboliques. C'est dans une habile application de cette remarque aux divers problèmes qui intéressent la pratique que se trouve surtout le mérite de son beau Mémoire inédit du 29 novembre 1819 sur la flexion des lames élastiques, approuvé par l'Académie le 4 septembre 1820 (2). Les diverses solutions qui s'y trouvaient comprises ont été données dès 1820, avec d'autres, dans son Cours.

La solution relative à une pièce naturellement droite, mais

(1) En effet, si c'est l'axe des  $x$ ,  $ds$  pouvant être remplacé par  $dx$ , ou  $\frac{4}{\rho}$  par  $\frac{d^2y}{dx^2}$ , on a une équation de la forme

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x) + m^2y, \quad \text{ou} = f(x) - n^2y,$$

la fonction  $f(x)$  dépendant à la fois de la manière dont la pièce est chargée transversalement, et de sa petite courbure primitive si elle en avait une. Cette équation a pour intégrale

$$2my = e^{mx} \int e^{-mx} f(x) dx - e^{-mx} \int e^{mx} f(x) dx,$$

$$\text{ou } ny = \sin nx \int \cos nx f(x) dx - \cos nx \int \sin nx f(x) dx.$$

Si la fonction  $f(x)$  dont dépend la courbure primitive est entière, les deux intégrales s'obtiennent sous forme finie. Ces deux expressions développées donnent toutes celles de Navier. M. d'Andrea, traducteur de Navier, a considéré des cas où la pièce aurait aussi une charge continue longitudinale.

(2) Annales de chimie et de physique, t. XV.

déjà *fléchie*, et posée, la convexité en haut, entre deux appuis ou enclaves, et chargée au milieu, est d'un genre neuf et extrêmement remarquable. Les autres, relatives à une pièce droite non fléchie préalablement, et sollicitée à la fois dans le sens de sa longueur et dans un sens transversal, comme les tirants, entrants, arbalétriers, soupoutres de ponts et entretoises de portes d'écluses, etc., se ramènent aux deux cas (n° 412, 415 de l'édition de 1833, fig. 60, 61), où on la suppose encastrée à un bout et sollicitée obliquement à l'autre, et à ceux (n° 389, 392, fig. 130), où l'on tient compte, en outre, d'une charge transversale répartie sur toute la longueur. Ces solutions sont très-utiles, bien qu'elles aient fort peu passé dans les applications jusqu'ici <sup>(1)</sup>. On doit remarquer aussi les solutions (n° 406, 409, fig. 38, 39), relatives à une pièce sollicitée longitudinalement, mais à une certaine distance de son axe; la première, en supposant cette distance petite, fait cesser, dans un sens pratique, pour les pièces chargées *debout*, les difficultés de la solution abstraite d'Euler et même de Lagrange, car elle tient compte des déviations inévitablement dues à ce que ces pièces ont une certaine épaisseur.

Une pièce qu'on fléchit peut être naturellement courbe. Euler a montré <sup>(2)</sup> que si sa première forme est circulaire, on peut ramener aux quadratures la détermination de sa forme nouvelle tout comme quand elle est en rectiligne, quelle que soit l'ampli-

(1) Toutes les formules qu'il donne à ce sujet, malgré leur apparente complication, deviendraient usuelles au moyen de petites tables numériques donnant, les unes, les cosinus naturels tant circulaires qu'hyperboliques de divers nombres depuis zéro; les autres, les rapports des tangentes tant circulaires qu'hyperboliques à leurs arcs. Lorsque, d'après la nature des données, ces cosinus, ou ces rapports, se trouveraient peu différents de l'unité, ce serait un signe que l'équation de résistance permanente peut être posée sans avoir égard à la flexion inconnue, ou sans tenir compte de l'augmentation qu'elle apportera aux bras de levier des forces.

S'il nous est donné d'annoter avec quelque étendue la 4<sup>e</sup> section de ses leçons, nous nous proposons de comparer les solutions de Navier avec celles que fournirait l'intégration exacte au moyen des fonctions elliptiques (en prenant, avec Euler, la direction de la force pour un des deux axes coordonnés) et de donner des tables complémentaires si la différence est sensible.

(2) Même mémoire *De curvis elasticis*, art. 49.

tude de la flexion qu'on lui fait subir <sup>(1)</sup>. Il en est autrement si la forme primitive n'est pas celle d'un arc de cercle, car le rayon de courbure variable, dont l'inverse multiplié par une constante est à ajouter au second membre de l'équation différentielle, n'est généralement donné qu'en fonction des coordonnées primitives de chaque point, et non pas en fonction de ses coordonnées ultérieures ou après flexion <sup>(2)</sup>.

Mais on doit à Navier d'avoir aperçu qu'on ramène encore aux quadratures le problème de la flexion plane pour une forme primitive de courbe à simple courbure absolument quelconque si la flexion opérée est très-petite, en sorte qu'on puisse prendre approximativement, pour bras de levier définitifs des forces quelconques qui font fléchir, ceux qu'elles possédaient au commencement de la flexion.

Il obtient même les intégrales ou les quadratures très-simplement en fonction entière de l'abscisse quand la courbure est assez peu considérable pour que la dérivée de l'arc puisse être développée suivant les puissances entières de la dérivée de l'ordonnée, si la courbe primitive peut être assimilée à une parabole du second degré. Et il en serait de même en l'assimilant à une parabole d'un degré quelconque ayant une équation à un ou plusieurs termes, ce qui est toujours possible approximativement.

Et quand la forme primitive est un arc de cercle d'autant de degrés qu'on veut, Navier a reconnu, en 1831 <sup>(3)</sup>, que l'in-

<sup>(1)</sup> En effet, on n'a qu'à ajouter la constante  $\frac{EI}{\rho_0}$  au second membre de l'équation 
$$d \frac{dy'}{ds} = \pi' \sqrt{X^2 + Y^2} + C'$$
 de la 6<sup>e</sup> note du n<sup>o</sup> XII ci-dessus; cela n'empêche pas la transformation de cette équation et la suite du calcul.

<sup>(2)</sup> Cependant si, à partir d'un point d'encastrement, on divise la pièce en plusieurs portions finies assez petites pour que dans chacune le rayon primitif puisse être regardé comme constant, on peut de proche en proche, et en exprimant des conditions de raccordement, obtenir approximativement la forme nouvelle, quelque différente qu'elle soit de l'ancienne. (*Note sur les flexions considérables des verges élastiques*, au Journal de Liouville, 1844.)

<sup>(3)</sup> T. I<sup>er</sup> des Ann. des P. et Ch., 1831, p. 428, et n<sup>o</sup> 453, p. 292 de l'édition de 1833 des présentes leçons. Voir aussi le n<sup>o</sup> 607, où il trouve que le milieu de l'arc n'est pas le point où une charge exerce la plus forte action.

tégration se faisait exactement et s'étendait même à une demi-circonférence, ce qui permet de calculer la flexion, les poussées et la résistance des grands systèmes de charpente cintrés.

**XVI. Flexion oblique ou déviée.** — Avant de passer à la flexion à double courbure, arrêtons-nous à considérer le cas fréquent où la flexion d'une pièce droite est *déviée*, c'est-à-dire où elle s'opère dans un plan plus ou moins oblique à celui de *sollicitation*, qui est le plan du moment ou du couple résultant des forces faisant fléchir.

M. Persy, professeur à l'École d'artillerie et du génie de Metz, a très-bien remarqué, en 1834 <sup>(1)</sup>, que l'équation unique de moments, posée comme à l'ordinaire autour de la ligne des fibres invariables, ne suffisait pas pour assurer l'équilibre entre les forces extérieures et les forces intérieures de tension ou pression des fibres à travers une section, à moins que cette ligne ne soit *un des deux axes principaux* d'inertie de celle-ci, passant par son centre de gravité.

Cette condition n'est pas toujours remplie, car elle exigerait que le plan du moment résultant des forces extérieures fût toujours perpendiculaire à un de ces deux axes de plus petit et de plus grand moment d'inertie des sections. Nous avons montré en conséquence qu'il fallait poser *deux équations de moments* des forces <sup>(2)</sup>, et que ce qu'il y avait de plus simple pour obtenir la flexion, était de les prendre autour des deux axes d'inertie. Quand aucun de ces deux moments n'est nul, la flexion est *déviée*, ou s'exécute dans un autre plan que celui de sollicitation à fléchir. Comme elle est résultante, en quelque sorte, de deux flexions qui auraient lieu dans des plans perpendiculaires entre eux et aux axes principaux, les équations de résistance sont très-faciles à poser. Elles donnent des résultats tout différents de ceux auxquels on est conduit soit pour la flexion, soit pour la rupture, quand on ne tient pas compte de cette déviation, qui s'explique aisément, du reste, en considé-

(1) Cours lithographié à Metz, n<sup>o</sup> 42, 43, p. 24.

(2) *Comptes rendus*, 30 octobre et 6 novembre 1843, t. XVII, p. 946, 949, 4024, et *Mémoire sur la torsion* de 1853-1854 aux Savants étrangers, t. XIV, art. 42.

rant que le plan de *flexion effective* tend toujours à se rapprocher du plan de *plus facile flexion* de toute pièce inégalement flexible en divers sens, c'est-à-dire de toute pièce dont la section n'est pas *isotrope* <sup>(1)</sup>, ou n'a pas ses moments d'inertie tous égaux autour de droites tracées sur son plan par son centre de gravité.

Et si la pièce est primitivement courbe, ou bien si les sections d'une pièce droite n'ont pas toutes leurs axes principaux dans les deux mêmes plans passant par son axe, la pièce ainsi sollicitée est toujours *tordue en même temps que fléchie*, et elle prend une double courbure (Voyez n° XX, XXI).

**XVII. Flexions accompagnées d'extension ou compressions longitudinales. Limites de ces dernières, déduites par M. Poncelet des limites des extensions.** — Les pièces droites ou courbes sollicitées à fléchir éprouvent aussi, en général, sous l'action des composantes longitudinales des forces extérieures, une extension ou une contraction qui affecte leur axe ou fibre moyenne, et qui s'additionne à celles que la flexion donne aux autres fibres. Navier, après en avoir très-bien fait la remarque, se contente de calculer l'accroissement total de l'axe, sans déterminer la part des déplacements individuels de ses points dans les sens des coordonnées, due à cette deuxième cause de déformation, ce qui est nécessaire pourtant afin d'obtenir la forme nouvelle prise par les pièces, et de pouvoir calculer complètement, pour celles qui sont naturellement courbes, les *poussées* ou les réactions totales des appuis ou arrêts de leurs extrémités.

Nous avons cherché, en 1837-1838, à combler cette lacune, ou à opérer, comme on dit aujourd'hui, cette *correction* aux

(1) On pourrait, si l'on veut un mot spécial, appeler *isostrophes* (στρερω, tourner), les sections qui tournées de toutes les manières donnent le même moment d'inertie. Mais nous ne voyons pas de danger de confusion à leur donner l'appellation déjà connue *isotrope*, qui a la même signification, bien que Cauchy l'ait créée pour distinguer une texture particulière de corps élastique et non une classe de formes de sections.

résultats obtenus en ne tenant compte que des flexions qui fournissent généralement la *partie principale* ou la plus considérable. Nous l'avons fait <sup>(1)</sup> au moyen du principe, que nous démontrions, de *superposition* ou d'addition de petits effets, ce qui nous a fourni une expression complète de la poussée horizontale d'un arc soit de parabole, soit de cercle, supposé chargé au milieu seulement; en tenant compte aussi d'un autre effet, du même ordre de grandeur que celui des contractions de l'axe courbe, savoir celui des *glissements* (n° suivant), dont nos recherches ultérieures modifient l'évaluation sans la diminuer <sup>(2)</sup>. Et nous indiquions même comment il faut compléter la solution quand les sections extrêmes de l'arc, au lieu de tourner librement, sont astreintes à conserver une direction déterminée, comme dans le cas d'encastrement, ce qui fait passer la résultante des réactions ailleurs qu'au point de la fibre moyenne répondant à chaque naissance.

M. Bresse a étendu l'évaluation corrigée des poussées aux cas où une charge isolée est appliquée ailleurs qu'au milieu (ce qui donne le moyen de calculer par une addition, comme il le remarque, les résultats d'un nombre quelconque de charges semblables, placées en divers points), et, aussi au cas d'une charge uniformément répartie sur toute la longueur soit de l'arc, soit de sa projection horizontale; et il a donné des tables numériques, fort étendues, de calculs tout faits des *parties principales* dues aux seules flexions, et des *coefficients de correction*, au-dessous de 4, par lesquels il faut les multiplier pour tenir compte des contractions de la fibre moyenne, car il suppose l'effet des glissements négligeable <sup>(3)</sup>.

(1) Cours lithographié, n° 44, 79, 80, 81.

(2) Comme on peut voir par les valeurs des inclinaisons prises par la fibre moyenne sur les sections, aux §§ 2 et 3 de la note du n° 453, p. 242, et 45, 46 de la note du n° 456 ci-après, p. 389 à 410.

(3) Les utiles tables et formules de M. Bresse, ingénieusement dressées et disposées, sont fréquemment consultées par les ingénieurs qui ont à projeter des ponts ou viaducs en fonte ou en fer; d'autant plus qu'elles donnent, outre les poussées ou réactions extrêmes, le moyen d'évaluer sans calcul, au moins dans le cas d'une charge répartie, la pression la plus considérable qu'éprouvent les fibres, et de poser par conséquent immédiatement l'équation de résistance per-



Au reste, Navier, bien que n'évaluant pas l'effet des contractions de la fibre moyenne pour modifier plus ou moins la grandeur des poussées, y a égard, ainsi qu'à ses dilatations possibles, lorsqu'il calcule la résistance ou qu'il établit les conditions de stabilité de la cohésion, en maintenant la plus grande extension ou contraction dans de prudentes limites.

Ces deux limites sont difficiles à déterminer (voyez plus loin), celle surtout des compressions qui tendent à produire l'écrasement.

L'écrasement n'est cependant au total qu'une disjonction des parties dans un sens latéral ou perpendiculaire à la force qui comprime. Ainsi, celui du bois pressé dans le sens de ses fibres s'opère par leur séparation les unes des autres ; celui d'une rondelle de métal, par sa fente tout autour qui lui donne la forme d'une rosette ; celui d'un petit bloc de pierre, par la division latérale en espèces d'aiguilles longitudinales avant son broiement en poussière. Aussi M. Poncelet a-t-il ramené théoriquement, dans son cours de 1840 à la Faculté de Paris, le danger des compressions longitudinales à celui des dilatations transver-

manente. La première idée s'en trouve à son mémoire de 1848 (*Études théoriques sur la résistance des arcs*, *Ann. des P. et Ch.*, 4<sup>or</sup> semestre, p. 150). Mais à son ouvrage de 1854 (*Recherches analytiques sur la flexion et la résistance des pièces courbes*, in-4<sup>o</sup>), et dans son Cours (1<sup>re</sup> partie) publié en 1859, il a ajouté les corrections numériques et il a donné à ses tables leur dernière forme. M. Bresse tient compte aussi de deux éléments nouveaux, les effets des changements de température, et ceux du *calage* qu'on opère en chassant des coins sous les appuis des pièces ou à leurs jonctions. Il ramène, d'une manière simple, les cas de non-symétrie à ceux où il y a symétrie dans l'action des forces sur un arc solide ; et il peint aux yeux, par des courbes figuratives, la suite des grandeurs, soit des moments de flexion aux divers points, soit des pressions supportées par la fibre moyenne et par les fibres d'*intradós* et d'*extradós*, qui en sont les plus éloignées.

M. Bresse suppose que les réactions des appuis s'exercent au centre des sections extrêmes, ou sur la fibre moyenne de la pièce. Mais M. Darcel, dans un *Mémoire sur divers problèmes relatifs aux arcs et fermes métalliques surbaissés* (*Ann. des P. et Ch.*, 1862, 2<sup>e</sup> sem. p. 60) a fait servir le même mode de calcul, pour un arc parabolique peu courbe, au cas des *naissances planes*, où ces sections ne peuvent librement tourner, en sorte que la résultante des réactions passe ailleurs qu'en ce point ; et il a considéré aussi, ainsi que M. Albaret (*Calcul des arcs métalliques*, *Ann. des P. et Ch.* 1864, 4<sup>or</sup> sem., p. 90, et 1862, 2<sup>e</sup> sem., p. 305) le cas où la section de la pièce courbe n'est pas constante.

sales dont elles sont toujours accompagnées comme on verra ci-après (n° XLIV).

**XVIII. Glissements et forces tangentielles. Duhamel du Monceau. Coulomb. Young. Vicat, etc.**

— Mais les pièces solides éprouvent deux autres genres de modifications :

1° Celle qui résulte du *glissement* latéral des sections transversales les unes devant les autres, et du glissement nécessairement simultané des fibres longitudinales les unes contre les autres;

2° Celle qui résulte de la torsion, ou de la rotation inégale (provenant d'autres glissements) de ces diverses sections autour de l'axe de la pièce.

M. Vicat a appelé l'attention, en 1833, sur le premier de ces deux effets, qui peut aller jusqu'à trancher une pièce solide, et auquel sa matière oppose une résistance qu'il a appelée *force transverse*, dont l'omission, par divers auteurs, a été le sujet principal des accusations que porte cet ingénieur célèbre contre toute la théorie de la résistance des solides (1).

Il n'avait pas échappé cependant à Coulomb ni au docteur Thomas Young.

Coulomb, dans un passage de ses célèbres *Remarques sur la rupture* (2), reconnaît en effet que l'évaluation donnée par lui de la résistance d'une pièce horizontale encastrée à un bout et sollicitée à l'autre par un poids *n'est vraie* que si les composantes verticales de force, développées dans chaque section et dont la somme pour chacune est égale nécessairement à ce poids n'influent que très-peu sur la tendance à disjonction ; condition qui est remplie, ajoute-t-il, *lorsque le bras de levier du poids est beaucoup plus grand que l'épaisseur de la pièce.*

C'est dire assez que l'influence de cet *effort tranchant*, comme l'ont appelé les ingénieurs des ponts tubulaires de Menai et de

(1) Recherches expérimentales sur les phénomènes physiques qui précèdent et accompagnent la rupture ou l'affaissement d'une certaine classe de solides. (*Annales des Ponts et Chaussées*, 2<sup>e</sup> semestre.)

(2) Mémoire de 1773 cité au n° VII.

Conwai<sup>(1)</sup>, et ensuite M. Belanger<sup>(2)</sup>, peut devenir souveraine dans les pièces excessivement courtes, comme sont les tenons, crochets, ergots, petits boulons ou rivets, clavettes, goupilles et autres pièces que des forces transversales tendent à trancher ou à *cisailler*, terme très-expressif employé par M. Love<sup>(3)</sup>.

Coulomb, un peu plus loin, considère cette même résistance au glissement dans les assises des murs de soutènement, dans les massifs de terre, dans les joints des voûtes, etc.<sup>(4)</sup>.

Young, outre l'extension, la compression, la flexion, distingue, au nombre des effets des forces sur les solides, ce qu'il appelle la *détrusion*<sup>(5)</sup>, produite, dit-il, « lorsqu'une force transversale est appliquée tout contre un endroit fixe de la même manière que les lames d'une paire de ciseaux<sup>(6)</sup> ; » et il y rapporte la torsion (voy. n° XIX).

Il observe qu'en y ayant égard, la détermination de la forme d'égalité résistance cesse de donner paradoxalement zéro pour l'épaisseur d'une pièce horizontale chargée verticalement, au-dessus des deux points où elle est appuyée ; et il propose, pour tracer le profil de la pièce, de substituer à la parabole la tangente à peu de distance de ces points.

Le glissement transversal relatif des sections est toujours accompagné d'un glissement longitudinal relatif des fibres ; car si l'on imagine un petit carré formé de quatre lignes matérielles situées n'importe où à l'intérieur d'un solide, il ne peut se changer en losange par le glissement d'un de ses côtés devant le côté opposé, sans qu'il y ait en même temps glissement relatif des deux autres côtés opposés, et aussi de toutes les lignes qui leur sont parallèles. La rupture d'un corps très-fibreux par

(1) *Shearing Strain*. Description de ces ponts par M. Edwin Clarke.

(2) Théorie de la résistance et de la flexion plane, 1858 et 1862.

(3) Mémoire sur la résistance du fer et de la fonte, 1852 et 1859.

(4) Il cherche même à donner, de l'écrasement d'un pilier, une explication fondée sur un effet de cette espèce ; explication que nous ne croyons pas être la véritable (ci-après note du n° 3, p. 6).

(5) *To detruide*, *Detrudere*, chasser hors de sa place ; d'un mot latin qui n'a fourni à notre langue qu'*intrusion*, *intrus*.

(6) *A Course of Lectures*, etc. Lecture XIII. On passive strenght and friction.

glissement ou cisaillement transversal, paraît être toujours précédée d'une disjonction de ses fibres longitudinales qui cessent d'abord d'adhérer l'une à l'autre sans cesser de se toucher.

C'est aussi, comme il a été remarqué, en 1767, par Duhamel du Monceau <sup>(1)</sup>, à cause de cette adhésion des fibres et de leur résistance au glissement l'une contre l'autre qu'une pièce rectangulaire d'une certaine épaisseur, posée horizontalement sur deux appuis et chargée au milieu, résiste beaucoup plus que ne feraient les voliges superposées dans lesquelles on l'aurait divisée par des traits de scie horizontaux; ou qu'un morceau de fort carton résiste plus, comme il dit, qu'un jeu de cartes qu'on ploie.

La résistance élastique au glissement peut d'ailleurs être attribuée à des résistances à l'extension et à la compression; car quand les côtés opposés d'un carré matériel glissent les uns devant les autres, l'une de ses diagonales s'allonge, l'autre s'accourcit. (Voy. note au n° XLII, et aussi § 6 de la note du n° 2, p. 194, et App. compl., p. 768.)

Elle s'évalue, en tous cas, pour l'unité superficielle, par le produit  $Gg$  d'un certain coefficient d'élasticité  $G$  par le glissement  $g$  rapporté à l'unité de distance des lignes ou des faces parallèles qui cheminent un peu ainsi l'une devant l'autre.

Il est facile d'introduire le glissement dans le calcul des modifications ou déformations d'une tige élastique, et d'évaluer son influence sur les conditions de résistance à la rupture éloignée, ou sur la grandeur de la dilatation maximum, qui a lieu dans un sens un peu oblique aux fibres, comme on a fait dans un cours de 1837-1838, et dans un mémoire de 1843 <sup>(2)</sup>, quand on suppose ce glissement le même à tous les points de chaque section. Mais on a reconnu, depuis, qu'il diminuait du centre au bord des sections <sup>(3)</sup>; et c'est aussi ce qui résulte implicitement ou

<sup>(1)</sup> *Du transport et de la force des bois*, livre V, p. 442 et suivantes.

<sup>(2)</sup> Comptes rendus, 30 octobre 1843.

<sup>(3)</sup> Mémoires sur la torsion, lu le 13 juin 1853, art. 44; et sur la flexion, lu le 20 novembre 1854 et le 20 juillet 1855, inséré en 1856 au journal Liouville. Voir aussi note ci-après du n° 153, § 2.

indirectement des considérations élémentaires et ingénieuses présentées il y a peu d'années par M. Jouravski <sup>(1)</sup>. Mais ce n'est que pour des formes particulières de sections que ces considérations donnent des résultats suffisamment approchés, et il faut en général en substituer de plus compliquées (Voy. ci-après, n° XXXVIII, et le § 46 de la note du n° 156) si l'on veut évaluer exactement son influence qui, heureusement, n'est jamais considérable. (Voy. n° XVII, XLIV, XLV.)

**XIX. Torsion (d'un cylindre circulaire). Coulomb.**

— La torsion est au glissement ce que la flexion est aux extensions et compressions des fibres. La résistance ou réaction élastique qui lui est propre n'est que celle qu'opposent ensemble les éléments d'une section à glisser devant les éléments correspondants d'une section voisine lors de leur rotation l'une devant l'autre, ou, ce qui revient au même, celle qu'opposent à glisser l'une contre l'autre les fibres primitivement droites qui ont ces éléments pour bases, lorsqu'elles s'inclinent sur l'axe et se courbent pour se changer en hélices toutes du même pas. Tant qu'elle reste très-petite, sa réaction n'est nullement attribuable, comme l'ont pensé quelques auteurs, à la résistance à l'allongement que prennent, en se courbant ainsi, les fibres les plus éloignées de l'axe, et à la contraction que doivent prendre simultanément l'axe et les fibres les plus voisines comme le remarque Young; car cette cause, pour une torsion petite du premier ordre, ne développe, comme il le prouve, qu'une résistance petite du second ordre et négligeable, et d'ailleurs proportionnelle au cube de l'angle de torsion, ce qui n'est nullement conforme aux observations, desquelles il résulte que la réaction est proportionnelle à cet angle lui-même <sup>(2)</sup>.

Les lignes matérielles dont l'allongement et l'accourcissement peuvent être regardés comme engendrant la réaction de torsion sont plutôt celles qui forment, autour de l'axe, des hélices in-

---

<sup>(1)</sup> Annales des ponts et chaussées, cahier de novembre et décembre 1856, et ci-après, note du n° 156, § 45, p. 389.

<sup>(2)</sup> Lectures on natural Philosophy, volume I, p. 139. •

clinées à 45 degrés sur les fibres dans deux sens opposés (1).

La torsion a été étudiée pour la première fois par Coulomb (2). Il ne considère que les cylindres à base circulaire; et un raisonnement simple lui montre que les moments, autour de leur axe, des forces qui les font tordre, sont, pour même matière, proportionnels aux rotations par unité de longueur, et aux *quatrièmes puissances des diamètres* (V. note du n° 156, § 60, p. 461):

C'est aussi ce qu'on trouve en supposant les résistances proportionnelles aux distances à l'axe, et ce qu'on aurait généralement en supposant que les sections quelconques *restent planes*, car il en résulte que le *moment de torsion* est égal au produit  $G(I + I')\theta$  du *moment d'inertie*  $I + I'$  de la section autour de son centre (ou à la somme des moments  $I, I'$  autour des deux axes principaux qui y passent) multiplié par la torsion  $\theta$  (l'angle de torsion pour l'unité de longueur, estimé en arc d'un rayon = 1) et par le même coefficient  $G$  qui sert pour la résistance au glissement.

On a cru quelque temps que cette sorte de résistance était exprimée par la même formule quelle que fût la forme de la section, et que les points les plus éloignés de l'axe de torsion étaient ceux où résidait le plus grand danger de désagrégation et de commencement de rupture. Des recherches de M. Cauchy, dont nous avons modifié et étendu les résultats, et dont nous parlerons aux n° XXXVI et suivants, ont appris qu'il n'en était pas ainsi à beaucoup près; ce qui vient de ce que pour toute autre forme du contour que le cercle les sections primitivement planes ne restent pas planes, et qu'ainsi les glissements, toujours mesurés par les petites inclinaisons que prennent les fibres sur les normales aux éléments de ces sections, ne sont point proportionnels aux distances diverses des fibres à l'axe.

Nous y reviendrons après avoir donné (n° XXII et suiv.) l'histoire de la branche nouvelle de la Mécanique appelée la théorie générale de l'élasticité.

(1) Voy. ci-après, § 3 de la note du n° 156.

(2) Recherches théoriques et expérimentales sur la force de torsion et l'élasticité des fils de métal, lu en 1784. Académie des sciences, volume de 1784, publié en 1787.

**XX. Courbes élastiques à double courbure, et torsion avec flexion. Lagrange. Binet. Poisson, Wantzel, etc.** — Nous pouvons exposer maintenant ce qui a été fait pour déterminer les *courbes élastiques à double courbure*.

Lagrange en a donné des équations différentielles du second ordre <sup>(1)</sup>, mais incomplètes parce que, se bornant à généraliser l'application du principe de Jacques Bernoulli, il a basé l'établissement de ces équations sur la supposition implicite que les forces ne s'exerçaient que dans les plans osculateurs à la fibre moyenne de la tige fléchie, ou qu'elles n'avaient de moments qu'autour des normales à ces plans.

Binet a signalé, en 1814 <sup>(2)</sup>, l'omission du moment, qui existe généralement aussi, *autour de la tangente* à cette fibre, c'est-à-dire du moment ou du couple composant qui fait tordre et qui développe une réaction de torsion, dont est capable toute tige élastique capable de résister à la flexion; et Poisson, en 1810, dans la Correspondance de l'École polytechnique <sup>(3)</sup> et ensuite dans l'édition de 1833 de son traité de Mécanique <sup>(4)</sup>, a ajouté pour y avoir égard, à chacune des trois équations de Lagrange, un terme égal à ce *moment de torsion* multiplié par le cosinus d'un des angles que la tangente à la fibre moyenne fait avec les trois coordonnées (note page suivante).

Mais, bien que présentées comme applicables au cas le plus général, les trois équations différentielles ainsi construites ne conviennent réellement qu'à celui où la tige fléchie était primiti-

<sup>(1)</sup> *Mécanique analytique*, 4<sup>e</sup> partie, section V, § III, article 48 et surtout 50.

<sup>(2)</sup> *Sur l'expression analytique de l'élasticité et de la roideur des courbes à double courbure*; mémoire lu le 22 août 1814, et inséré au Journal de l'École polytechnique, tome X ou 49<sup>e</sup> cahier, 1815, p. 448. Il y donne des équations où entrent des forces s'opposant aux changements respectifs de la longueur, de la courbure des tiges, et de l'inclinaison mutuelle de leurs plans osculateurs. Il y fait, le premier, la remarque que l'analyse de Lagrange ne saurait s'appliquer à un ressort en hélice, car la torsion est autant en jeu que la flexion dans sa résistance élastique à une force qui l'allonge ou l'accourcit.

<sup>(3)</sup> *Sur les lignes élastiques à double courbure*; tome III, n<sup>o</sup> III, de janvier 1816, p. 355-360.

<sup>(4)</sup> Tome I, n<sup>os</sup> 346 à 348.

vement rectiligne, et où sa section a une forme *isotrope* (n° XVI) ou dont tous les moments d'inertie sont principaux et égaux autour de droites tracées dans son plan par son centre (comme les sections circulaires, carrées, etc.). Dans tout autre cas, c'est-à-dire quand la tige était primitivement courbe, ou bien quand ses sections sont hétérotropes (comme le rectangle, l'ellipse etc.), les forces ont nécessairement, lorsque l'équilibre est établi, un *troisième moment* ou couple composant, s'exerçant autour de la droite qui est perpendiculaire à la fois à la tangente à l'axe et à la normale à son plan osculateur, c'est-à-dire *autour du rayon de courbure* de l'axe ou fibre moyenne courbe de la tige fléchie et tordue (1);

(1) En effet, quand une tige naturellement droite a une section de l'une des formes *isotropes*, qui sont les seules pour lesquelles le plan de flexion coïncide avec le plan du moment des forces qui tendent à fléchir (n° XVI ci-dessus), si l'on décompose le moment de toutes les forces autour d'un point quelconque de l'axe de la tige, en deux autres, dont l'un s'exerce autour de cet axe, l'autre moment, qui sera le plus grand autour de droites perpendiculaires au même axe, opérera une flexion *dans son plan même*, et ce plan se trouvera être ainsi, en cet endroit, le plan osculateur de la courbe de l'axe fléchi. Mais il en sera autrement si l'axe de la tige avait primitivement une courbure, car elle se composera en chaque point avec la courbure nouvelle imprimée dans un plan généralement différent; ou bien si, d'après la forme hétérotrope de la section, la courbure imprimée l'est dans un autre plan que celui de ce deuxième moment qui la produit. Si nous représentons par  $M_x, M_y, M_z$  les moments, autour des parallèles aux coordonnées  $x, y, z$  menées après la flexion par un point  $(x, y, z)$  de l'axe ou de la fibre moyenne, des forces qui agissent depuis ce point jusqu'à une des deux extrémités de la tige; par  $M_n, M_\rho, M_s$  les moments des mêmes forces 1° autour de la normale  $n$  au plan osculateur, 2° autour du rayon de courbure  $\rho$ , 3° autour de l'élément  $ds$  de l'arc  $s$  de la courbe, nous aurons, en appelant  $X, Y, Z$  les projections, sur les plans  $yz, zx, xy$ , du *parallélogramme de contingence* formé sur deux éléments consécutifs  $ds, ds + d^2s$ , c'est-à-dire en faisant

$$dyd^2z - dzd^2y = X, \quad dzd^2x - dx d^2z = Y, \quad dx d^2y - dy d^2x = Z,$$

et d'après les valeurs connues des cosinus des angles faits avec les trois coordonnées par  $n, \rho$  et  $ds$ :

$$\frac{\rho X}{ds^3} M_n + \frac{\rho}{ds} d \frac{dx}{ds} M_\rho + \frac{dx}{ds} M_s = M_x,$$

$$\frac{\rho Y}{ds^3} M_n + \frac{\rho}{ds} d \frac{dy}{ds} M_\rho + \frac{dy}{ds} M_s = M_y,$$

$$\frac{\rho Z}{ds^3} M_n + \frac{\rho}{ds} d \frac{dz}{ds} M_\rho + \frac{dz}{ds} M_s = M_z.$$

Quand la tige élastique est primitivement droite et quand sa section est iso-



et l'illustre géomètre omet de tenir compte de ce moment.

Poisson arrive en conséquence à ce résultat, donné comme un théorème général : « Que le moment de torsion est constant d'un bout à l'autre de la tige en équilibre », ou, plutôt, de chaque portion de cette tige où il n'y a que des forces pouvant être censées appliquées à son axe ou fibre moyenne (comme la pesanteur), ou, autrement dit, de chaque portion comprise entre des sections où peuvent s'exercer des forces dont la résultante est appliquée à une distance finie de cet axe par l'intermédiaire d'un bras de levier. Mais ce théorème n'est vrai que dans le même cas particulier de tige primitivement droite et de section isotrope ou d'égale inertie en tous sens, pour lequel les équations de Poisson sont complètes et le moment autour du rayon de courbure est nul à l'état d'équilibre définitif. Pour tout autre cas, le moment de torsion est variable; sa dérivée, par rapport à l'arc de la courbe d'axe, est égale au quotient, par le rayon de courbure après la flexion, du moment des forces autour de ce rayon; théorème aperçu par Wantzel en lisant une de nos notes, et qui doit remplacer celui de Poisson, pour chaque portion de tige définie et limitée comme on vient de dire (1).

---

trope ou d'égale inertie, la flexion n'a lieu, comme on vient de dire, que dans le plan du plus grand moment des forces autour des diverses perpendiculaires à son axe ou à sa fibre moyenne; en sorte que  $M_p = 0$ ; et il faut effacer les seconds termes des premiers membres de ces trois équations, qui ne sont alors autre chose, aux notations près, que les trois équations de Poisson, numérotées (4) à l'article de la *Correspondance*, et (b) à la fin du n° 317 du *Traité de Mécanique*, car  $M_s$  est bien ce qu'il appelle le *moment de torsion*. Mais les termes en  $M_p$  subsistent dans tous les autres cas, et devraient figurer dans les équations que nous citons, présentées par Poisson comme générales.

(1) En effet, on a le moment de torsion  $M_s = M_x \frac{dx}{ds} + M_y \frac{dy}{ds} + M_z \frac{dz}{ds}$  (notations comme tout à l'heure), d'où

$$dM_s = M_x d \frac{dx}{ds} + M_y d \frac{dy}{ds} + M_z d \frac{dz}{ds} + \frac{dx}{ds} dM_x + \frac{dy}{ds} dM_y + \frac{dz}{ds} dM_z.$$

Le premier trinôme du second membre, multiplié par  $\frac{p}{ds}$ , est égal à  $M_p$ , car

**XXI. Suite. Mise en compte du troisième moment. Déplacement angulaire du rayon de courbure.** — Pour établir des équations générales et complètes de l'équilibre des tiges élastiques sur lesquelles agissent des forces extérieures, et qui affectaient avant cette action ou qui affectent maintenant une forme courbe non plane, il faut tenir compte de ce que les forces peuvent avoir, après la déformation éprouvée, le *troisième moment* dont on a parlé, qui tend à faire tourner une portion de la tige par rapport à l'autre portion autour du *rayon de courbure* de sa fibre moyenne au point où elles se joignent; moment dont l'existence peut provenir, avons-nous dit, ou de la courbure primitive cette fibre, ou de l'inégale flexibilité de la tige autour de ses diverses lignes normales, qui tient elle-même à la forme non isotrope ou d'inégale inertie des sections transversales.

Alors les trois équations d'équilibre de rotation qu'il convient de poser comme les plus simples, sont celles où l'on exprime les moments des forces autour de la tangente à la fibre moyenne en un point quelconque et autour des deux axes principaux d'inertie de la section au même point. Comme les rayons de courbure font généralement avec les axes d'inertie, après la déformation de la tige, des angles un peu différents de ceux qu'ils faisaient primitivement, ces rayons ont éprouvé, sur le plan des sections, un *déplacement angulaire*, ou, ce qui revient

$\rho \frac{d}{ds} \frac{d(x, y, z)}{ds}$  représente les trois cosinus des angles faits par le rayon  $\rho$  avec les  $x, y, z$ ; et le second trinôme est nul, comme on le reconnaît facilement avec Poisson par l'analyse (Mécanique, 1833, n° 318) ou avec M. Bertrand par un raisonnement synthétique (note III de la nouvelle édition de Lagrange), pour chacune des portions de tige limitées comme on a dit, ou qui ne sont sollicitées qu'à leurs extrémités par des forces autres que celles dont les résultantes partielles coupent l'axe courbe. Donc

$$\frac{dM_s}{ds} = \frac{M\rho}{\rho},$$

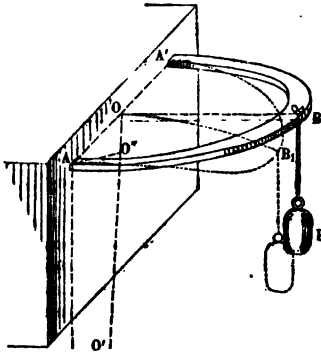
relation donnée pour la première fois aux *Comptes rendus*, 45 Juillet 1844, t. XIX, p 482, dans une Note dont nous avons communiqué le contenu à Wantzel, qui, le jour même, y a ajouté ce théorème nouveau.

au même, les sections ont changé d'orientation ou d'azimut par rapport aux plans osculateurs qui les coupent suivant ces mêmes rayons. Ce déplacement angulaire est même lié aux deux autres éléments sur lesquels nous venons d'appeler l'attention, car il a toujours lieu quand les forces ont un moment autour du rayon de courbure et quand la tige de forme non plane a une section non isotope <sup>(1)</sup>.

Ce même déplacement angulaire relatif des sections et des rayons de courbure correspondants a autant d'influence sur la flexion d'une tige que le changement de sa première courbure, seul élément considéré par Lagrange, et sur la torsion que le changement de sa *cambrure* ou seconde courbure, ou des inclinaisons mutuelles de ses plans osculateurs, introduit par Binet.

La torsion, en effet, dans l'étendue d'un élément de la fibre moyenne, ou la rotation relative, autour de cet élément, des deux sections qu'il sépare, se compose de deux parties, dont l'une est l'augmentation qu'a éprouvée l'angle de *cambrure*

(1) On s'en rend compte clairement par deux exemples. Soit d'abord un demi-anneau horizontal ou une tige élastique mince dont la fibre moyenne est un



demi-cercle  $ABA'$ , encastree et serrée solidement à ses extrémités  $A, A'$ , et sollicitée à son milieu  $B$  par un poids  $P$ . La courbe à double courbure  $AB_1A'$  dans laquelle se change cette fibre moyenne aura, auprès de l'encastrement  $A$  ou  $A'$ , pour projection horizontale le demi-cercle lui-même, et pour projection sur un plan vertical perpendiculaire au diamètre  $AOA'$ , la courbe suivant laquelle fléchissait une tige droite horizontale de même section et d'une longueur  $OB$ , sollicitée au bout par la moitié du poids  $P$ . Son centre de courbure, pour le point  $A$ , sera  $O'$ , pied de la perpendiculaire abaissée de  $A$  sur la ligne de jonction  $OO'$  des centres de

courbure de ses deux projections, car le carré de l'inverse de  $AO''$  est égal à la somme des carrés des inverses de  $AO$  et  $AO'$ . Il y a donc eu un déplacement angulaire  $OAQ''$  du rayon de courbure, et il est dû à ce que la force  $P$  a un moment autour de ce rayon  $AO$  devenu  $AO''$ , indépendamment, dans ce cas, de la forme de la section, qui pouvait être circulaire aussi bien que rectangulaire.

En second lieu, supposons qu'une pièce droite très-mince, telle qu'une lame de

formé par les deux plans osculateurs de la fibre aux extrémités de cet élément, et dont l'autre est la différence, aux deux mêmes extrémités, des déplacements angulaires qu'ont éprouvés les traces de ces plans sur les sections. Et, dans la même étendue, la flexion autour de chacun des deux axes principaux d'inertie d'une des deux sections voisines, a pour mesure l'augmentation éprouvée par l'angle de contingence de la projection de la fibre moyenne sur un plan perpendiculaire à cet axe; or cette augmentation dépend nécessairement de l'angle nouveau que fait le plan en question avec le plan osculateur qui contient les deux éléments consécutifs de la fibre qu'on y projette. La flexion dépend donc aussi du déplacement angu-

fer-blanc dont la fibre moyenne horizontale se projette en  $O$ , et dont les faces sont inclinées à l'horizon, soit sollicitée, à l'extrémité opposée à celle où elle est supposée encastrée, par une force  $OP$  verticale et agissant par conséquent dans un sens oblique aux côtés de la section  $abcd$ . Cette fibre fléchira, non pas dans le plan vertical de sollicitation se projetant suivant  $OP$ , mais dans un plan oblique se projetant suivant  $OO_1$  presque perpendiculaire aux grands côtés  $ab$ ,  $dc$ , d'après ce qu'on a dit page cxxj ou note du n° 83 ci-après) pour la flexion plane *déviée*. Or, supposons qu'au lieu d'une lame droite on ait une lame primitivement courbe dont la section encastrée soit toujours  $abcd$ , et dont la fibre moyenne soit une courbe plane se projetant suivant la verticale  $OP$ , ayant sa tangente horizontale en  $O$ ; le rayon de courbure au même point  $O$  sera, après la flexion, dirigé suivant une ligne oblique telle que  $OO_1$ . Il aura donc éprouvé, sur le plan de la section  $abcd$ , un déplacement angulaire  $\angle POO_1$  qui sera dû, dans cet exemple, non au moment  $M_p$ , mais à ce que la section n'est pas ce que nous appelons isotrope, ou à la grande inégalité de ses deux moments d'inertie principaux.

En général, si  $e$  est l'angle du déplacement du rayon sur une section, si  $I$  et  $I'$  sont ses deux moments d'inertie principaux,  $e$  l'angle primitif et par conséquent  $e + \epsilon$  l'angle ultérieur du rayon de courbure avec l'axe du moment  $I'$ , et  $E$  le module d'élasticité, on trouve

$$\sin \epsilon = \frac{P}{E} \left[ M_p \left( \frac{\cos^2 e}{I} + \frac{\sin^2 e}{I'} \right) - M_n \sin e \cos e \left( \frac{1}{I} - \frac{1}{I'} \right) \right],$$

expression montrant bien comment le déplacement angulaire  $\epsilon$  dépend à la fois du moment  $M_p$  autour du rayon de courbure, et de l'inégalité de  $I$  et  $I'$ , qui constitue ce que nous appelons l'hétérotropie de la section.

laire qu'a pu subir, sur la section, la trace du plan osculateur; c'est-à-dire le rayon de la courbe non projetée (<sup>1</sup>).

Il en résulte qu'une tige courbe peut éprouver une flexion ou une torsion considérable sans que ses courbures ou sans que la forme de la fibre moyenne changent aucunement. Il suffit pour cela que ses sections tournent par rapport aux plans osculateurs, ou que ses rayons de courbure ne passent pas finalement par les mêmes points des sections que primitivement (<sup>2</sup>).

Toute analyse dans laquelle on voudra embrasser le cas le plus général de double courbure et de sections quelconques, et

(<sup>1</sup>) Si  $\varepsilon$  est le déplacement angulaire, ou si,  $e$  étant l'angle fait avec un des deux axes principaux par le rayon de courbure primitif  $\rho_0$ ,  $e + \varepsilon$  est l'angle que fait avec le même axe principal le rayon nouveau  $\rho$ , l'on a  $\frac{\cos e}{\rho_0} ds$  et  $\frac{\cos (e + \varepsilon)}{\rho} ds$  pour les angles de contingence primitif et ultérieur de la projection de la fibre moyenne sur le plan passant par cet axe d'inertie et par l'élément  $ds$  de la fibre; en sorte que la flexion autour de l'autre axe principal de la section correspondante, rapportée à l'unité de distance, est

$$\frac{\cos (e + \varepsilon)}{\rho} - \frac{\cos e}{\rho_0},$$

et la flexion autour du premier axe est, de même

$$-\frac{\sin (e + \varepsilon)}{\rho} + \frac{\sin e}{\rho_0},$$

ce qui donne

$$\sqrt{\frac{1}{\rho^2} - \frac{2 \cos \varepsilon}{\rho \rho_0} + \frac{1}{\rho_0^2}}$$

pour la flexion résultante, égale à la racine de la somme de leurs carrés, et non pas  $\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0}$  comme l'ont cru d'illustres auteurs.

Et, quant à la torsion, ou à la rotation d'une section devant la précédente autour de la tangente, rapportée à l'unité de leur distance  $ds$ , elle est, d'après ce que nous avons dit des deux parties dont elle se compose

$$\frac{1}{v} - \frac{1}{v_0} + \frac{d\varepsilon}{ds},$$

et non pas seulement  $\frac{1}{v} - \frac{1}{v_0}$ ;  $v_0$  et  $v$  étant les rayons de cambrure avant et après la déformation, ou  $\frac{ds}{v_0}$ ,  $\frac{ds}{v}$  étant les angles primitif et ultérieur des deux plans osculateurs en deux points voisins distants de  $ds$ .

(<sup>2</sup>) Par exemple, si l'on fléchit une tige en arc de cercle ABC de manière à la trans-

où l'on fera entrer les rayons de première et de seconde courbure, devra donc contenir aussi le déplacement angulaire dont nous parlons.

On ne pourra se passer de sa considération pour obtenir la forme finale de la fibre moyenne que dans les cas où il sera possible de se passer aussi de la considération des courbures, et de déterminer cumulativement ce qui vient à la fois de ces deux sortes d'éléments, à savoir les rotations, les unes relativement aux autres, des sections, ou plutôt de leurs éléments centraux puisqu'elles ne restent généralement pas planes.

C'est heureusement ce qui peut se faire dans le cas le plus usuel, celui des *très-petits déplacements*, où l'état nouveau de la tige est peu différent de l'état ancien, si ces déplacements n'influent pas sensiblement sur les grandeurs des bras de levier des forces qui font fléchir. Nous sommes parvenu, en 1843, à la suite de longs calculs où s'est trouvée comprise l'intégration de trois équations différentielles simultanées du troisième ordre non linéaires <sup>(1)</sup>, à trois formules très-simples fournissant finalement, par des quadratures, les petits déplacements des points de la fibre moyenne d'une tige de forme quel-

former en un second arc  $A'BC'$  de même rayon et ayant, avec le même point milieu  $B$  et la même tangente en ce point, sa courbure dirigée en sens opposé, et si, en maintenant la tige dans son état nouveau, on la ramène en  $ABC$  par une demi-révolution autour de la tangente, elle sera restée *fléchie*, car ses fibres primitives les plus longues seront devenues les plus courtes et réciproquement, et cependant sa fibre moyenne sera revenue à sa situation première. Et le même effet de flexion aurait pu être obtenu sans changer cette situation; il suffisait pour cela de faire tourner simultanément les deux sections extrêmes  $A, C$  d'une demi-circonférence autour de leurs centres, en contenant les sections intermédiaires entre des arrêts qui les empêchent de s'écartier latéralement sans les empêcher de tourner. Cette flexion tient à ce qu'il y a eu *déplacement angulaire* relatif des rayons et des sections, et il s'élève dans ce cas à deux angles droits.

On obtiendra de même une torsion, aussi considérable qu'on voudra, sans aucun changement de la seconde courbure ou des inclinaisons mutuelles des plans osculateurs, en fixant une des deux sections extrêmes d'une tige à double courbure ainsi contenue latéralement, et en faisant tourner, autour de son centre, l'autre section extrême, qui aura ainsi changé d'orientation ou d'azimut, comme toutes les sections intermédiaires, par rapport aux plans osculateurs ou aux rayons de première courbure.

(1) Mém. du 30 octobre 1843, *Comptes rendus*, t. XVII, p. 952.

conque<sup>(1)</sup>; elles ne contiennent plus ces angles et ces rayons que nous avons fait entrer dans notre analyse pour y arriver. Elles comprennent et redonnent celles de Navier relatives aux pièces courbes planes quand on néglige les extensions et les glissements dont il ne tenait pas compte<sup>(2)</sup>; et nous les avons appliquées à divers exemples de flexion et torsion d'un anneau par des forces perpendiculaires à son plan, et d'un ressort en hélice par des forces parallèles à son axe<sup>(3)</sup>.

Nous avons dit, alors, qu'elles pouvaient être vérifiées et établies directement, en remarquant que leurs divers termes représentent de *petites rotations* des éléments de la fibre moyenne autour des axes coordonnés en vertu des forces extérieures. Cet établissement direct a été effectué par M. Bresse, qui a considéré et composé ensemble les effets des rotations relatives, non de ces éléments linéaires, mais des sections auxquelles ils étaient primitivement normaux<sup>(4)</sup>, comme il avait fait pour la flexion plane dans son ouvrage sur les pièces courbes. Ses formules reviennent aux nôtres de 1843, car on les obtient immédiatement de celles-ci si l'on fait une intégration par parties et si l'on compose ensemble en une flexion unique, autour d'un axe à déterminer, les deux flexions que nous préférons toujours prendre séparément autour de deux axes *connus*, savoir les axes principaux d'inertie des sections. On doit à M. Bresse d'autres formules basées sur le même principe pour évaluer directement les rotations totales éprouvées par une quelconque des sections<sup>(5)</sup>, ce qui permet ordinairement d'exprimer les conditions d'encastrement, de raccordement, etc., et de trouver la situation finale des points de la tige hors de sa fibre moyenne, d'une manière plus simple que par la considération, toujours sûre, des deux courbures et du déplacement angulaire des rayons de la première sur les sections.

Mais lorsque les déplacements des points de la tige sont

(<sup>1</sup>) Mém. du 6 nov. 1843, et note du 4<sup>or</sup> juillet 1844. *Comptes rendus*, t. XVII, p. 4024, et XIX, p. 45.

(<sup>2</sup>) Même mémoire de 1843, p. 4022. (<sup>3</sup>) *Idem*, p. 4026 à 4034.

(<sup>4</sup>) Cours de Méc. appl. Résist. des matériaux. 1859, p. 86.

(<sup>5</sup>) *Idem*, p. 94. Les formules de M. Bresse sont à modifier en ce qui regarde la torsion quand les sections ne sont pas circulaires; et, vu la courbure que les sections prennent, les rotations obliques sont seulement celles de leurs éléments centraux

grands, en sorte que sa forme change considérablement, comme dans les cas de simple courbure traités par Euler et déjà par Jacques Bernoulli (ce qui peut avoir lieu sans altération de l'élasticité si la tige est mince), les rotations de ses diverses tranches ou sections successives ne peuvent plus être composées ensemble par simple addition, et il faut renoncer à cette simplification et aux formules qui en résultent, qui cessent encore d'être applicables lorsque les déplacements, bien que petits, ont une grande influence sur les bras de levier, comme dans le cas des pièces chargées *debout* ou très-obliquement, et qui peuvent être en même temps sollicitées par un couple qui donne une double courbure. Le problème de la détermination des changements sensibles que peut subir ainsi la forme des tiges a été ramené aux quadratures par M. Binet, et ensuite plus simplement par M. Wantzel, mais seulement pour le cas de tiges primitivement droites à section isotrope, où nous avons dit que les trois équations différentielles se réduisent à celles de Poisson, et en supposant que les forces n'agissent qu'aux extrémités et que la section soit constante. L'intégration dépend alors des fonctions elliptiques <sup>(1)</sup>. On peut aussi résoudre le problème, et d'une manière simple, quand la tige, ayant une section même non isotrope, mais constante, a pour forme une hélice primitivement et finalement <sup>(2)</sup>; et il serait résoluble sans doute encore, en tirant parti d'une remarque de M. Kirchhoff, pour divers cas où la forme primitive serait une de celles dans lesquelles une tige droite à section constante et isotrope est changée par

---

(1) La note de M. Binet se trouve aux *Comptes rendus*, 47 juin 1844, t. XVIII, p. 4445. Il exprimait les inclinaisons de la tangente par des fonctions elliptiques, et les coordonnées par des quadratures plus compliquées. Mais Wantzel, le 24 du même mois (*idem*, p. 4497), en prenant pour axe d'une des coordonnées la résultante des forces, simplifie et ramène tout aux fonctions elliptiques, même quand il y a, avec la résultante, un couple perpendiculaire, qu'il a rétabli sur une observation de M. Binet. (Voir aussi la note de M. Bertrand à la nouvelle édition de la *Mécanique analytique*). Il serait curieux d'étudier les intégrales, réduites au besoin en série, et d'en tirer un classement des courbes élastiques à double courbure provenant d'une tige primitivement droite et isotrope, comme a fait Euler pour les courbes planes.

(2) *Comptes rendus*, 6 novembre 1843, t. XVII, p. 4029, et surtout 45 juillet 1844, t. XIX, p. 486.



des forces qui agissent à ses extrémités <sup>(1)</sup>. On ramène encore aux quadratures le cas d'une tige primitivement droite à section isotrope, mais variable graduellement, sollicitée seulement par des couples qui coupent sa fibre moyenne primitive sous un angle constant, ce qui embrasse le cas plus particulier d'une tige droite à section constante sollicitée par des couples à ses extrémités seulement, et pour lequel Wantzel a trouvé que la forme finale est une hélice; ce qui a également lieu si la section et le couple variables se trouvent dans un rapport tel que le moment de torsion soit constant. Ce résultat généralise celui d'Euler relatif aux tiges droites, qu'il a reconnues prendre constamment la forme d'un arc de cercle sous l'action d'un couple quand la courbe dans laquelle il les change est plane.

Pour les cas de déformation considérable que nous venons d'énumérer, la forme définitive de la fibre moyenne peut être trouvée sans considérer l'orientation ou l'azimut des sections sur les plans osculateurs quand la tige n'est encastree qu'en un seul endroit; mais il faut la considérer si la tige est assujettie en un second point où la section doit observer, comme à celui d'encastrement, une certaine polarité, ainsi qu'il arriverait si une tige à section carrée devait, quelque part, passer par un trou carré de même dimension que cette section. Et il faut déterminer cette rotation des sections de toute manière pour connaître ce que deviennent les points hors de la fibre moyenne, ou avoir l'état final complet de la tige et pouvoir calculer sa résistance.

(1) M. Kirchhoff remarque, en effet, qu'alors on peut faire subir à la tige une première déformation qui la rectifie, et partir de là pour arriver à la forme finale. (Ueber das Gleichgewicht..., *Sur l'équilibre et le mouvement d'une tige infiniment mince*, au Journal de Crellé, t. LVI, p. 308; et v. *App. compl.* p. 846).

Le même illustre professeur, à la suite d'une analyse sur laquelle nous reviendrons au n° XLI, qui offre plusieurs points d'analogie avec celle du problème de la rotation d'un corps solide pesant autour d'un point fixe (voir l'*Appendice complémentaire* ci-après, p. 848) a remarqué que le problème statique de l'équilibre d'une tige mince se résolvait dans les mêmes cas que le problème dynamique, en remplaçant l'élément  $dt$  du temps par l'élément  $ds$  de la fibre moyenne de la tige, et deux des moments d'inertie principaux du corps par les moments d'inertie principaux des sections de la tige. Comme le problème dynamique ne se résout que quand le solide est de révolution, le problème statique ne se résoudrait par cette analogie que lorsque la section a ses deux moments d'inertie égaux, c'est-à-dire dans le cas traité en 4844 par Binet et Wantzel.

**XXII. Mécanique moléculaire. Newton. Bosce-  
vich. Clairaut. Laplace. Poisson et Navier** (POUR LA  
PLAQUE ÉLASTIQUE D'ABORD). — Mais à toutes ces recherches fondées  
sur des hypothèses dont rien n'avait justifié encore l'approxima-  
tion, et dont plusieurs même sont entachées d'erreurs heureuse-  
ment sans influence ordinairement quant aux flexions, devait  
succéder un jour quelque chose de plus exact et de plus en rap-  
port avec la manière dont la mécanique s'est constituée comme  
science *géométrique*, ou intimement liée à celle de l'étendue.

Longtemps elle ne s'est occupée que de poids ou d'efforts  
agissant d'une manière un peu vague sur les parties de divers  
appareils. Mais, plus tard, tout y fut mathématiquement déter-  
miné : les efforts complexes furent géométriquement décom-  
posés et remplacés par des forces partielles ou composantes ;  
chaque force partielle eut une *ligne* unique pour direction ; elle  
eut par conséquent un *point* d'application ou sur lequel elle  
agit ; et la doctrine de l'action au seul contact venant à perdre  
faveur et à céder la place, sous l'empire des faits, à celle de l'ac-  
tion à distance que les anciens avaient déjà entrevue, chaque force  
eut nécessairement aussi un *point* dont elle émane ou dont elle  
tend à rapprocher ou éloigner l'autre. Les forces naturelles n'a-  
gissent en effet sur les corps que par d'autres corps. On ne juge  
même que l'un d'eux commence ou cesse d'éprouver telle ou  
telle action qu'en voyant d'autres corps le presser, le heurter, le  
quitter, en un mot changer de position par rapport à lui ; en  
sorte que, dans l'ordre matériel, l'idée d'une action déterminée  
sur un point est pour nous inséparable de l'idée de situation  
relative, ou de distances à d'autres points <sup>(1)</sup>.

---

(1) Ce n'est pas ici le lieu de développer la remarque que la *loi d'inertie*, ainsi  
exprimée : « la vitesse possédée par un corps ne change que quand une cause  
étrangère vient produire son changement, » ne fait qu'exprimer le principe de  
causalité, ou, ce principe étant admis, que cette identité : « la vitesse ne change  
que quand elle change ; » à moins qu'on ne fasse consister ce que cet énoncé  
a d'essentiel dans la qualité d'*étrangère* exigée pour la cause. Or, cette cause  
étrangère survenue ne peut être, pour nos sens, ou hors des profondeurs de la  
métaphysique, qu'un *changement de situation d'autres corps* relativement à celui  
dont nous nous occupons. Les changements de vitesse, ou ce qu'on appelle au-  
jourd'hui les *accélérations*, effets sensibles des *forces* que la science moderne a

Et Newton ayant appuyé de preuves le principes de l'égalité et de l'opposition directe d'une réaction à toute action, tous les phénomènes du monde physique furent désormais expliqués par des attractions et répulsions mutuelles de points matériels s'exerçant dans les directions de leurs lignes de jonction deux à deux, avec des intensités et un sens dépendant des distances qui les séparent ; car il est bien manifeste que l'action n'a pas la même grandeur quand ils sont éloignés que quand ils sont proches, que les très-petits changements de la distance n'en produisent que de très-petits aussi dans cette grandeur ou intensité, enfin que les points très-voisins, tels que ceux qui semblent contigus, se repoussent quand on les approche davantage en les pressant l'un vers l'autre, et s'attirent ou s'entraînent mutuellement, lorsqu'ils font partie d'un même ensemble et qu'on fait effort pour les écarter. Les liaisons mêmes des diverses parties d'un corps devaient être finalement ramenées à de pareilles forces, qu'on était au reste obligé toujours de leur substituer quand il s'agissait d'exposer la mécanique des systèmes. Dès lors les abstractions purent être bannies, et l'on conçut mieux ce qu'il fallait entendre par la dureté, l'impenétrabilité, etc., et, aussi, par ces forces fictives appelées des résultantes de forces non concourantes ou appliquées à des points différents d'un même système de points.

Vainement cette grande loi des actions réciproques fonctions continues des distances est-elle contestée de temps en temps par des auteurs qui veulent repousser quelques-unes de ses conséquences. La rejeter nous semble supprimer la mécanique en tant que science mathématique, et tomber inévitablement dans des contradictions, car pour peu qu'on sorte du domaine de l'empirisme pur et qu'on présente quelque théorie, on l'invoque toujours, au moins tacitement, qu'on s'en aperçoive ou non (*voyez* Appendice V) ; et, ici comme toujours, le scepticisme embrassé systématiquement conduit à un dogmatisme plus arbitraire que celui qu'on a voulu éluder.

---

continué de faire intervenir dans ses calculs des effets, dépendent donc des distances mutuelles des points des corps ; en sorte que la loi invoquée par nous reviendrait à celle d'inertie, que tout le monde invoque.

Newton, après l'avoir merveilleusement appliquée aux mouvements des corps célestes, que de grandes distances séparent, a indiqué son extension aux dernières particules situées à des distances mutuelles imperceptibles, comme pouvant rendre compte des phénomènes terrestres, tels que les combinaisons chimiques, la cohésion, la capillarité<sup>(1)</sup>, enfin la réflexion et la réfraction de la lumière<sup>(2)</sup>; et, dans deux passages<sup>(3)</sup>, il parle du changement des attractions en répulsions, mais sans dire dans quelle circonstance ce changement peut avoir lieu.

En 1743, un physicien nommé Gourn Knight, cité par son compatriote Robison<sup>(4)</sup>, faisant revivre cette grande idée, tenta d'expliquer la cohésion, le magnétisme, l'électricité, etc., par des forces d'attraction entre certains atomes en y joignant des forces de répulsion entre d'autres.

Mais, ainsi que le même Robison le reconnaît, ce fut le célèbre P. Boscovich qui, en 1753, donna sa vraie forme à cette dualité de causes, prise comme base des explications<sup>(5)</sup>. Il y fut conduit par ses réflexions sur la *loi de continuité*, qui se trouvait mise en cause dans la dispute sur les forces vives et sur la communication du mouvement par le choc. Dès 1745, il disait<sup>(6)</sup> que la *force répulsive*, prouvée par l'élasticité et les vibrations, s'oppose à la contiguïté des particules des corps, etc., et son observation intelligente des faits l'amenait à professer qu'il n'y a pas, dans la nature, de corps rigide, ni de verge inflexible ou inextensible, ni d'appui absolument fixe, ni de force agissant instantanément, pas plus que de force simplement ré-

(1) Optique, Question XXXI et dernière.

(2) Principes, livre I, 44<sup>e</sup> section, propositions XCIV à XCVIII.

(3) Optique, même Question; p. 369 et 379-381 de la traduction de Coste; in-4<sup>o</sup>, deuxième édition, 1722.

(4) *A System of mechanical Philosophy*. Edinburgh, 1822, n<sup>o</sup> 262, t. I, p. 266.

(5) *De lege virium in naturâ existentium dissertatio*, habita in collegio romano a patribus Soc. Jesu, 4 septembris 1755. Et ensuite : *Philosophiæ naturalis theoria ad unicam legem virium in naturâ existentium reducta*. 1<sup>re</sup> édition, Vienne, 1758 et 2<sup>e</sup>, Venise, 1763.

(6) *De viribus vivis dissertatio*, au tome II<sup>e</sup> des Commentaires *De Bononiensi scientiarum et artium institutio aique academia*, p. 289. Il l'exposa plus ample-ment en 1748 et en 1764 dans ses dissertations *De lumine* et *De continuitatis lege et ejus consecratis*.

vient du changement du plan en une surface courbe, parvint pourtant à une équation différentielle indéfinie du quatrième ordre, d'une forme exacte, mais dans les coefficients de laquelle l'épaisseur de la plaque n'entre qu'au carré tandis qu'elle devrait entrer au cube.

Navier, après ses beaux travaux sur les lames ou les tiges conçues comme composées de fibres qui s'allongent ou s'accourcissent, devait naturellement passer à des recherches sur les plaques, où il y avait à considérer des changements de deux dimensions à la fois.

Son analyse relative à ces sortes de solides <sup>(1)</sup> fut plus complète que celle de Poisson, et presque exacte (*voyez n° LIX*), car en supposant, ce qui est très-approximativement vrai, que les lignes matérielles menées primitivement dans une direction perpendiculaire aux deux faces de la plaque restent normales à ces faces devenues courbes, il tint compte de changements de distance moléculaire bien plus considérables que ceux qu'avait calculés cet illustre géomètre, savoir de ceux qui résultent de ce que les deux faces extérieures, et les plans intérieurs qui leur sont parallèles, s'étendent du côté devenu convexe et se contractent du côté devenu concave. Aussi l'épaisseur entre-t-elle au cube, comme elle doit le faire, dans les coefficients de son équation différentielle indéfinie, ainsi que dans ceux des équations définies au contour, qu'il donne pour la première fois (*voyez idem*), ce qui lui permet de présenter de remarquables solutions de plusieurs problèmes particuliers.

Ce mémoire sur les plans élastiques, du 14 août 1820, bien que peu connu et n'ayant été l'objet d'aucun rapport, signale cependant une remarquable époque, car, non-seulement, par la manière dont son auteur calcula le moment virtuel total des actions qu'exercent sur chaque molécule toutes celles qui l'environnent dans l'étendue de sa sphère d'activité, son auteur préluda à

(1) Recherches sur la flexion des plans élastiques; présentées le 14 août 1820 (et dont plusieurs membres de l'Académie reçurent des copies lithographiées). Il n'en a été publié qu'un extrait au *Bulletin de la Soc. phil.* pour 1823, page 92.

sa brillante découverte de l'année suivante dont nous allons parler, mais encore il fut l'occasion principale de celles de Cauchy sur la théorie des pressions dans l'intérieur des corps solides et des travaux ultérieurs de ce grand analyste sur le même sujet.

**XXIII. Fondation de la théorie générale de l'élasticité. Navier.** — Ce fut le 14 avril 1821 que Navier présenta son célèbre *Mémoire sur les lois de l'équilibre et du mouvement des corps solides élastiques* <sup>(1)</sup>, qui a fondé la *Mécanique moléculaire* ou la théorie générale de l'Élasticité.

En considérant que les actions intérieures sont en équilibre, ou se détruisent sur chacune des molécules avant les déplacements relatifs que des forces extérieures font éprouver à celles-ci, Navier se bornait à calculer les augmentations et diminutions que ces actions subissent. Il leur attribuait, par une sorte d'extension du principe de Hooke et de Mariotte (n° IV), des intensités proportionnelles aux petits changements des distances mutuelles moléculaires, et aussi à une fonction de ces distances, d'une valeur sensible seulement pour des distances imperceptibles. Entre ces actions il posait les équations de l'équilibre sur une molécule, en exprimant son changement de distance à une quelconque de celles qui l'environnent, au moyen des trois coordonnées nouvelles de celle-ci, exprimées elles-mêmes par des développements de Taylor à trois variables, qui sont les trois projections rectangulaires de la distance primitive, et dont les puissances et produits du premier et du second ordre sont affectés par les dérivées des mêmes ordres des déplacements moléculaires par rapport aux coordonnées. Comme on peut, en formant les trois sommes de composantes rectangulaires des actions de toutes les molécules sur une seule, faire passer ces dérivées hors du signe de sommation ou d'addition  $\Sigma$  ou  $S$ , vu qu'elles sont sensiblement les mêmes, par hypothèse, pour toutes les molécules comprises dans une

---

(1) Tome VII des *Mémoires de l'Institut*.

portion imperceptible du corps, les trois équations d'équilibre indéfinies, ou à satisfaire pour tous les points du corps, sont assez faciles à établir <sup>(1)</sup>. Il ne reste plus qu'à déterminer les rapports mutuels des coefficients constants représentés par les diverses sommes  $\Sigma$  ou  $S$  dégagées ou débarrassées comme on vient de dire; c'est ce que fait Navier en les convertissant en in-

tégrales triples  $\iiint$ , qu'il effectue par coordonnées polaires ou sphériques pour le seul cas de ces solides que Cauchy a nommés *isotropes* parce qu'ils offrent la même élasticité en quelque sens qu'on les envisage ou qu'on les *tourne* autour de chacun de leurs points. Les coefficients à déterminer au moyen de l'expérience se trouvent ainsi réduits de quinze à un seul par la nullité reconnue de neuf d'entre eux et l'égalité démontrée de trois autres au triple des trois derniers, égaux entre eux comme sont ceux-ci.

Mais il fallait, en outre, obtenir les équations d'équilibre *définies*, ou relatives aux limites, c'est-à-dire à la surface-enveloppe du corps élastique considéré.

Navier y arriva par une belle application, sous une forme nouvelle, de la méthode de la Mécanique analytique de Lagrange qui a, comme on sait, l'avantage de donner à la fois ces deux sortes d'équations, et qu'il avait déjà employée au même usage pour le problème de la plaque; méthode qui, à peu près abandonnée depuis en France, revit avec avantage dans les travaux publiés à l'étranger depuis trente ans. Pour cela, en posant <sup>(2)</sup> l'expression du *moment* ou travail *virtuel* de l'action de deux molécules, il en déduit ce qu'on appelle aujourd'hui le *potentiel* de cette action, c'est-à-dire le travail fini dont elle est capable, ou la quantité dont la *variation* ou différentielle par  $\delta$  donne le travail virtuel élémentaire en question; puis, après avoir composé la somme des potentiels de toutes les actions, sur une même molécule, de celles qui se trouvent dans sa sphère

(1) Voyez *Appendice V*, § 65, p. 694.

(2) Voy. le commencement du § 85 à l'*Appendice complémentaire* ci-après, p. 796, où l'on a complété et généralisé l'analyse de Navier.

d'activité, et exprimé, par suite, la somme de ceux des actions intérieures pour tout le corps, il en égale la différentielle par  $\delta$  à la somme, prise en signe contraire, des travaux virtuels des forces extérieures motrices, en y joignant ceux des forces d'inertie s'il y a mouvement, ce qui revient à chercher les conditions du minimum de la somme des potentiels de toutes ces forces. Les intégrations par parties, suivant la méthode connue, lui redonnent, par les termes restés sous le signe d'intégration triple, les trois équations d'équilibre indéfinies déjà obtenues d'une autre manière; et les termes sortis de ce signe, ou restant affectés seulement d'intégrations doubles, facilement transformables en intégrations simples relatives aux éléments de la surface-enveloppe, lui fournissent les trois équations d'équilibre *définies* ou aux limites, à satisfaire pour les points de cette surface.

•Celles-ci sont particulièrement dignes de remarque, car elles comprennent implicitement, dans leurs divers groupes de termes, les formules exprimant ce qu'on a depuis appelé les *pressions* ou tensions, forces élastiques. Aussi, bien que Navier n'ait point parlé de pressions dans les solides, nul n'est arrivé plus loin que lui quant aux conditions d'équilibre et aux équations du mouvement des solides élastiques isotropes ou d'égale contexture en tous sens, quand ils sont supposés se trouver avant les déplacements de leurs points dans l'état *naturel* <sup>(1)</sup> où aucune force extérieure n'y agissait.

**XXIV. Suite. Fresnel.** — De la même époque datent les mémorables travaux, sur la lumière, de ce grand physicien, et notamment l'explication qu'il a donné des phénomènes de la double réfraction par le jeu des actions mutuelles des molécules du fluide éthéré, qu'il regarde, ainsi que Navier, comme proportionnelles aux changements très-petits qu'éprouvent, à partir de l'état d'équilibre, les distances mutuelles de ces molécules, *nécessairement séparées les unes des autres*, car, comme il le montre très-bien, si elles se touchaient ou si elles formaient

---

(1) *Appendice I*, § 32, p. 560, et *App. complémentaire*, § 80, p. 771.



par leur ensemble une matière continue, elles ne pourraient pas propager, par une sorte de frottement de tranches parallèles, leurs vibrations, qui ne sont lumineuses que lorsqu'elles ont des directions transversales ou perpendiculaires au sens de propagation (comme l'ont prouvé ses expériences de non-interférence de deux rayons polarisés à angle droit). Ce qu'il y a d'étonnant, c'est que malgré plusieurs erreurs, et quoique Fresnel ne calcule que les réactions qui sont opposées en divers sens au déplacement d'un *seul* point du milieu éthéré de la part de ceux qui l'environnent, considération insuffisante, et malgré plusieurs autres défauts de sa théorie, il en déduit des conséquences qui sont exactes, ou du moins extrêmement approchées, et dont plusieurs étaient imprévues, et, depuis, ont été merveilleusement vérifiées par des expériences délicates. On peut l'attribuer à la grande force d'intuition et on pourrait dire de divination de l'illustré ingénieur-physicien; et aussi, sans doute, à ce qu'il y a entre les quantités qui varient d'une manière continue suivant les trois dimensions de l'espace, et qui sont susceptibles de se composer et de se décomposer géométriquement, telles que les petites réactions dont nous venons de parler, et telles aussi que les pressions, les dilatations, les moments d'inertie, les courbures, etc., certaines relations générales, dont Fresnel a donné un des premiers spécimens, et qui se retrouvent à peu près sous les mêmes formes dans des recherches sur des sujets très-différents, au moins lorsqu'on se borne aux approximations linéaires; d'où il suit que les résultats de raisonnements faits sur l'une d'elles peuvent convenir à d'autres qu'il eût fallu plutôt considérer.

Nous ne pensons pas pour cela qu'on doive attribuer à Fresnel, non plus qu'à Ampère, qui a présenté à ce sujet quelques considérations élevées, l'invention de la théorie de l'élasticité, qui, après Navier, doit être regardée comme appartenant à Cauchy.

**XXV. Suite. Théorie des pressions dans les solides. Dilatations en divers sens: Cauchy.** — Ce grand analyste, en effet, n'attendit même pas les publications du mémoire de Navier, d'avril 1821, et de celui de Fresnel,

dont la première communication à l'Académie est du 20 novembre de la même année, pour entrer dans cette carrière où il devait laisser de profondes traces de son passage. Le mémoire d'août 1820 sur les plans *élastiques* suffit pour éveiller son imagination inventive. Cauchy remarqua, dans une Note lue à l'Académie le 30 septembre 1822 <sup>(1)</sup>, que Navier y avait considéré entre les points matériels deux espèces de forces, les unes développées par l'*extension* du plan moyen de la plaque, et dont il exprimait le moment ou travail virtuel comme avait fait Lagrange pour une simple membrane, sans l'affecter d'aucun coefficient constant dépendant de la nature ou de l'élasticité de la matière; les autres, développées par la *flexion* qui consiste dans les écartements des molécules du côté devenu convexe et les rapprochements du côté devenu concave, celles-ci calculées plus rationnellement de manière que leur expression se trouve finalement affectée d'un coefficient d'élasticité représentant la valeur inconnue, et déterminable par l'expérience, d'une intégrale définie comme on a dit. Les dernières forces étaient comme les premières, quant à leurs directions, perpendiculaires aux faces taillées normalement à la plaque, ce qui venait de l'hypothèse permise, mais simplement approximative, de la conservation de la normalité de ces faces. Or Cauchy observa « que ces deux espèces de forces pouvaient être réduites à une seule, qui devait s'appeler tension ou pression, étant de même nature que la pression d'un fluide en repos... » à l'exception qu'elle peut être oblique aux faces sur lesquelles elle s'exerce, et qu'elle est, par conséquent, généralement inégale dans les divers sens ou sur les diverses faces se croisant en un même point de l'intérieur d'un corps.

Tel fut le point de départ de la théorie générale des pressions ou tensions dans des corps quelconques solides ou fluides, élastiques ou mous, en repos ou animés d'un mouvement intérieur. Leurs grandeurs sur diverses petites faces ayant leurs centres en un même point ont entre elles des relations régies

---

(1) Cette note, parafée par le secrétaire perpétuel à la date indiquée de 1822, a été imprimée au *Bulletin de la Société philomathique* de janvier 1823, page 9.

par ces deux théorèmes très-généraux dus à M. Cauchy : 1° La pression sur une face est résultante des pressions que supportent ses projections rectangulaires ou obliques sur trois plans quelconques passant par son centre. 2° Quand deux faces qui se coupent rectangulairement ou même obliquement ont le même centre et la même superficie, la pression sur l'une, décomposée dans un sens perpendiculaire à l'autre, est égale à la pression sur celle-ci décomposée perpendiculairement à celle-là <sup>(1)</sup>; théorèmes qu'il ne faut point confondre avec ceux de même forme, presque évidents, qui ont été aperçus et employés par Fresnel, car ceux-ci ne sont, comme on a dit, relatifs qu'aux forces qui tendent à ramener à sa position d'équilibre un point unique qu'on en a écarté.

Le second réduit à six les neuf composantes, en un point quelconque, suivant les directions de trois coordonnées rectangulaires, des pressions sur l'unité de trois faces perpendiculaires à ces coordonnées, car il en résulte que les six composantes tangentielles sur ces faces sont égales deux à deux. Le premier permet d'exprimer, en fonction de ces six composantes, celle de la pression sur une face oblique quelconque, décomposée dans une direction aussi quelconque (V. App. III, p. 548).

Une première conséquence est que si l'on imagine une infinité de petites faces planes de même superficie ayant leurs centres en un même point, on a des ellipsoïdes pour lieux des extrémités de droites tirées de ce point perpendiculairement aux faces, en leur donnant pour longueurs soit les pressions que celles-ci supportent, soit les racines carrées des inverses de leurs composantes normales aux faces <sup>(2)</sup>. MM. Lamé et

(1) Ils sont implicitement compris tous deux dans l'indication donnée, à la page 10 de la note citée du 30 septembre 1822, d'une relation entre la pression sur un plan quelconque et les pressions sur trois autres plans, et d'une première conséquence de cette relation, au bas de la même page.

Ils se trouvent démontrés tous deux à la page 48 des *Exercices de mathématiques*, deuxième année (1827), bien que le second seul y soit énoncé en langage ordinaire. Le premier n'a été énoncé que sous forme analytique, même par Poisson qui l'a démontré plus tard d'une autre manière sans citer Cauchy (Mém. du 4<sup>e</sup> avril 1828, au t. VIII de l'Institut).

(2) Mêmes mémoires de 1822 et 1827.

Clapeyron ont composé un troisième ellipsoïde en prenant pour rayons vecteurs les pressions elles-mêmes portées dans leurs propres directions. Les axes de ces trois ellipsoïdes ont les mêmes directions, et fournissent ce que Cauchy a appelé les trois pressions ou tensions *principales*, qui sont perpendiculaires aux faces sur lesquelles elles s'exercent, ce qui a encore de l'analogie avec un théorème de Fresnel (*V. App. comp.*, p. 776).

Ces théorèmes sont des généralisations de celui de l'égalité et de la normalité des pressions en tous sens, s'observant dans les seuls fluides en repos, pourvu encore que ce soit hors des espaces capillaires ou suffisamment loin des parois qui les contiennent. Cauchy, en exprimant aussi l'équilibre d'un élément parallépipède, a donné, sous le titre *Relations entre les pressions et les forces accélératrices*, trois équations qui de même généralisent celles de l'équilibre des fluides, et dont les premiers membres, au lieu de contenir seulement la dérivée de la pression par rapport à une des trois coordonnées rectangles, contiennent les sommes des trois dérivées, par rapport à ces coordonnées, des trois composantes, suivant une seule, des pressions sur l'unité de trois faces parallèles à celles de l'élément, et passant par son centre (*V. App. III*, p. 585).

En considérant ensuite, indépendamment de leurs causes, les proportions diverses des dilatations et condensations linéaires qui s'opèrent en tous sens autour d'un même point dans un corps que l'on déforme, Cauchy a trouvé qu'un élément primitivement sphérique prenait toujours la forme d'un ellipsoïde, et qu'on obtenait un autre ellipsoïde, remplacé quelquefois par deux hyperboloïdes conjugués, en portant sur les diverses droites tracées par un même point des longueurs égales aux racines carrées des inverses des dilatations dans leurs directions. D'où trois *dilatations principales*, suivant trois droites matérielles rectangulaires entre elles. Ces droites sont en chaque point les seules qui restent perpendiculaires aux plans matériels qu'elles coupaient déjà primitivement à angle droit; toutes les autres *s'y inclinent* un peu, d'où il suit que généralement deux petites faces parallèles et proches *glissent* plus ou moins l'une devant l'autre par l'effet des déformations intérieures du corps que l'on considère (*V. App. comp.*, p. 780.).

De la distribution symétrique soit des autres pressions, soit des autres dilatations autour de celles qu'il vient de déterminer ainsi, Cauchy conclut que dans les corps isotropes les pressions principales doivent avoir les trois mêmes directions que les dilatations linéaires principales. Il regardait, en 1822, celles-là comme proportionnelles à celles-ci supposées très-petites; mais, en 1828, il dut, après une nouvelle tentative, modifier cette hypothèse et composer chacune des pressions principales de deux parties, l'une égale à la dilatation linéaire de même sens multipliée par un coefficient constant, l'autre égale à la dilatation cubique (la somme des trois dilatations linéaires principales) multipliée par un deuxième coefficient, dépendant, comme le premier, de la nature du corps <sup>(1)</sup>; ce qui revient à supposer (comme fait maintenant M. Kirchhoff) que chaque pression principale est mesurée par la somme des trois petites dilatations principales multipliées par des coefficients qui, de neuf, doivent se réduire à deux inégaux, vu la symétrie nécessaire de composition des trois formules. A chacune des trois expressions, Cauchy ajoutait une constante représentant la pression, égale en tous sens, qui pouvait exister dans le corps isotrope antérieurement aux déformations qui en ont altéré l'isotropie. Il en déduisit analytiquement des expressions toutes semblables pour les trois composantes *normales* de pressions sur des faces quelconques non principales; et, pour les trois composantes *tangentielles* (qui alors ont des grandeurs finies), des expressions proportionnelles aux trois *glissements* correspondants, c'est-à-dire aux cosinus des angles légèrement aigus dans lesquels les petites déformations changent les trois angles droits des faces adjacentes d'un élément parallépipède; cosinus qui reviennent aux quantités dont ces angles se sont rétrécis, ou à celles dont les côtés opposés des mêmes faces ont *glissé* les unes devant les autres pour l'unité des distances de ces côtés.

Cette première manière d'établir les formules des pressions, applicable, comme le pensait Cauchy, aux *masses continues* s'il en existe, n'est pas irréprochable. On ne voit pas en effet de

---

(1) *Exercices de mathématiques*, 3<sup>e</sup> année, p. 477, 478, formules (67) et (70).

raison de supposer *à priori* que les pressions principales ne dépendent que *linéairement* des dilatations principales, car toute fonction n'est pas développable suivant les puissances entières et ascendantes de ses variables en commençant par la puissance 1; et une fonction de variables supposées être assez petites pour qu'on puisse ne conserver que leurs puissances les plus basses, n'est pas, ainsi, nécessairement algébrique du premier degré (V. App. V, p. 663). Il était plus rationnel de partir du principe physique des actions exercées par les points matériels les uns sur les autres dans les directions de leurs lignes de jonction, et avec des intensités dépendant de leurs distances, ce qui se réduit, comme on a dit, à soumettre à la géométrie les forces qui agissent et réagissent, et à admettre les lois d'inertie et de réaction appliquées à des points matériels.

**XXVI. Formules générales pour les corps hétérotropes.** — C'est ce que fit Cauchy dans deux admirables Mémoires insérés aux *Exercices* immédiatement après celui dont nous venons de parler. Dans le premier, qui a été pour la plus grande partie présenté à l'Académie le 1<sup>er</sup> octobre 1827 <sup>(1)</sup>, et dont l'objet est d'établir *les équations de l'équilibre d'un système de points matériels*, Cauchy opère comme a fait Navier à la première partie du sien (de 1821), mais avec cette différence essentielle qu'il fait entrer dans son analyse *les actions mutuelles totales des points*, fonctions de leurs distances nouvelles, au lieu de se borner comme Navier à ne considérer que *les accroissements* subis par ces actions, en abstrayant ce qui vient de leurs valeurs primitives. Comme il a soin de tenir compte de ce que les lignes de jonction des points matériels deux à deux ont changé non-seulement de grandeur, mais aussi de direction ou d'inclinaison sur les axes fixes des coordonnées, la fonction des distances nouvelles représentant l'action ultérieure des points n'apparaît dans ses calculs que divisée par ces distances; et c'est le quotient, et non pas la fonction elle-même,

---

<sup>(1)</sup> *Exercices*, 3<sup>e</sup> année (1828), p. 200.

qu'il développe suivant les puissances du très-petit accroissement de celle-ci <sup>(1)</sup>.

Par là, Cauchy fait un calcul exact (à cela près des quantités d'ordre supérieur qu'on veut négliger), et embrasse le cas général où il y avait à l'intérieur des corps, avant les déplacements opérés, des pressions absolument quelconques, égales ou inégales en divers sens. Son analyse embrasse aussi les corps *hétérotropes* ou de contexture inégale quelconque autour de chaque point, parce qu'il conserve, outre les six constantes qui sont les valeurs des composantes des pressions primitives, quinze coefficients distincts régissant l'élasticité, et se présentant sous la forme de sommes d'un très-grand nombre de produits de fonctions des distances d'un point matériel dans l'état primitif, par des puissances des cosinus des angles que ces distances aux points environnants formaient avec les axes coordonnés fixes. Il prouve ensuite que ces quinze coefficients se réduisent à six distincts dans le cas particulier et fréquent, considéré pour la première fois par lui, de trois plans rectangulaires de symétrie de contexture <sup>(2)</sup>, et à un seul dans le cas plus particulier d'isotropie ou d'égalité de contexture en tous sens <sup>(3)</sup>, cas où les équations se réduisent identiquement à celles de Navier quand on suppose nulle la pression antérieure aux déplacements; et il démontre ces réductions sans avoir besoin de convertir en intégrales autour d'un point les sommes de composantes d'actions, qu'il ne cesse jamais de représenter par un signe d'addition  $\Sigma$  ou  $S$  d'un nombre extrêmement grand, mais fini, de termes partiels.

<sup>(1)</sup> Cette remarque est essentielle. Si  $f$  est la caractéristique de la fonction, et si  $r$  et  $r_1$  sont les distances primitive et ultérieure, Cauchy fait ainsi :

$$\frac{fr_1}{r_1} = \frac{fr}{r} + (r_1 - r) \frac{dfr}{dr} + \frac{(r_1 - r)^2}{2} \frac{d^2fr}{dr^2} + \dots$$

ce qui donne autre chose que si l'on se bornait à faire  $fr_1 = fr + (r_1 - r) \frac{dfr}{dr} + \dots$   
ce qui serait mettre  $r$  au lieu de  $r_1$  au dénominateur du premier membre.

<sup>(2)</sup> *Exercices*, 3<sup>e</sup> année, p. 498.

<sup>(3)</sup> *Idem*, p. 204.

Dans son second mémoire, Cauchy calcule la pression ou tension de l'intérieur du même *système de points matériels* en y faisant entrer, comme dans les équations du premier mémoire, l'action nouvelle *totale* de deux quelconques des points sans abstraire leur action primitive, et en supposant encore quelconque la contexture du système dans les divers sens. Il obtient ainsi des formules très-générales, affectées des mêmes quinze coefficients (réductibles à six et à un dans les mêmes cas particuliers) que les équations du mémoire précédent, non compris les six composantes des pressions primitives, pressions qu'il ne suffit pas d'ajouter à celles que les déplacements développeraient si celles-ci étaient nulles, pour avoir les pressions ultérieures totales; en effet, ces pressions antérieures aux déplacements éprouvés entrent aussi dans les termes affectés des dérivées des déplacements des points, ce qui se conçoit sans peine si l'on considère que ceux-ci font tourner, dans l'intérieur du corps, la situation des plans menés parallèlement aux coordonnées, et changent par conséquent les grandeurs de la partie antérieure des composantes de pressions, qui étaient généralement inégales en divers sens <sup>(1)</sup>.

Dans ce mémoire, Cauchy donne de la pression sur une petite face, pour la calculer, la définition mathématique suivante : « L'action totale exercée sur un petit cylindre matériel indéfini ayant cette face pour base, par toute la matière qui est de l'autre côté du plan prolongé de celle-ci. » Il en résulte la même chose dans le calcul en question, à cela près de quantités de l'ordre de celles qu'on néglige, que lorsqu'on donne de la pression cette autre définition plus simple, et que Cauchy a depuis trouvée meilleure : « La résultante de toutes les actions qui

---

<sup>(1)</sup> En mettant dans les formules de la p. 222 de ce mémoire, numérotées (25) à (30), à la place de la densité nouvelle  $\rho$ , la densité ancienne  $\Delta$  divisée par la dilatation cubique, on obtient les six formules de pression sous la forme définitive qu'a dû en donner Cauchy, à la p. 138 de la 4<sup>e</sup> année (1829) des Exercices. Voyez ci-après Appendice III, § 23 (note) p. 564 et 574, et, surtout, Appendice complémentaire, § 84, p. 795, les formules (212), complétées par les formules (42) et (43) des pages 556 et 594.



s'exercent d'un côté à l'autre à travers la face <sup>(1)</sup>; » résultante facile à exprimer analytiquement, car on peut voir qu'elle est la même que « celle des actions qu'exercerait, sur chaque molécule  $m$  située d'un des deux côtés du plan de la face, un pareil nombre de masses concentrées au centre  $M$  de celle-ci, et égales, pour chaque molécule  $m$ , à la masse du cylindre oblique taillé dans la matière du côté opposé, ayant la même face pour base, et des arêtes égales et parallèles à la ligne de jonction  $Mm$  du centre  $M$  à la molécule  $m$  <sup>(2)</sup>. »

Ces formules des neuf composantes de pressions, réduites à six (conformément au deuxième théorème du n° XXV) sur des plans perpendiculaires aux coordonnées, et d'où l'on déduit facilement (par le premier théorème) la pression sur une face oblique quelconque, donnent le moyen de construire immédiatement les équations d'équilibre *définies*, ou relatives à la surface-enveloppe des corps élastiques. Elles dispensent ainsi de l'emploi de la méthode de Lagrange et de l'équation des travaux virtuels, traitée par le calcul des variations, que Navier a employée.

Elles donnent aussi, en substituant dans les relations entre les pressions et les forces accélératrices, tirées, avons-nous dit, (n° XXV), de l'équilibre de l'élément parallépipède, les *trois équations indéfinies*, toutes semblables à celles qui se trouvent construites directement au premier des deux mémoires cités de Cauchy, en mettant en équilibre les actions sur une molécule unique.

(1) Comptes rendus, 23 juin 1845, t. XX, p. 4765.

M. Duhamel a, le premier, proposé comme possible cette deuxième définition, mais sans s'y arrêter (1828, *Journal de l'École polytechnique*, 21<sup>e</sup> cahier, p. 213). Nous avons montré (Société philomathique, 30 décembre 1843, ou *Journal l'Institut*, n° 534) qu'elle permettait seule de remplacer identiquement la résultante des actions moléculaires du dehors au dedans d'un élément polyédrique quelconque par la résultante des pressions sur ses faces. L'autre définition amène l'omission de certaines actions, et le double ou triple emploi d'un certain nombre d'autres. (Voy. aussi Appendice III, § 46, p. 544, note.) Cette définition évite aussi les difficultés des arêtes vives, rencontrées par Poisson à son mémoire du 42 octobre 1829 (*Journal de l'École polytechnique*, 20<sup>e</sup> cahier, n° 25, 49, 50, 53).

(2) Car le cylindre contient évidemment toutes les molécules, situées de son côté, qui agissent sur des molécules situées du côté opposé de la face à des distances égales et parallèles à  $Mm$  (Comptes rendus, 7 juillet 1845, t. XXI, p. 24. Voyez aussi Note du n° 452, § 8, p. 497, et, surtout, Appendice III, note du § 23, p. 565).

**XXVII. Suite. Poisson.** — Aussi, en traitant le même sujet, Poisson s'est-il dispensé de construire directement les équations de l'équilibre intérieur, et a-t-il commencé par l'établissement des formules de pression ses recherches, communiquées en partie à l'Académie le 1<sup>er</sup> octobre 1827 <sup>(1)</sup>, ou le même jour que le premier mémoire de Cauchy, puis réunies dans son mémoire du 11 avril 1828 <sup>(2)</sup>, modifié en plusieurs points par celui du 12 octobre de l'année suivante 1829 <sup>(3)</sup>. Au grand mémoire de 1828, remarquable surtout par la partie philosophique et par de magnifiques applications, Poisson considère, comme faisait en même temps Cauchy (n° précédent), les actions *totales*, fonctions des distances moléculaires modifiées par les déplacements, et il calcule de suite la pression produite sur une face quelconque, oblique aux plans coordonnés, que Cauchy n'exprime qu'ultérieurement au moyen des pressions sur des faces parallèles à ceux-ci. Du reste, il est moins heureux que Cauchy, soit dans les raisonnements, soit dans les résultats obtenus; car, outre que les siens ne sont applicables qu'aux corps isotropes, on peut remarquer que dans les coefficients, qui sont des sommes triples prises par rapport aux grandeurs des distances moléculaires et par rapport à deux angles qui déterminent leurs directions, Poisson convertit en intégrations les deux sommes relatives aux angles; ce qui le détermine à supposer que la sphère d'activité, bien qu'imperceptible, comprend un nombre tellement immense de molécules que les actions qui s'exercent aux plus petites distances soient tout à fait négligeables devant les actions bien plus faibles, mais plus nombreuses, s'exerçant aux distances moins petites; hypothèse toute gratuite et même improbable, que Cauchy n'est point obligé de faire, car il laisse ses quinze coefficients sous forme de sommes de produits, com-

(1) Un extrait en a paru au *Ann. de ch. et de ph.*, aussi en 1827, puis en janvier 1828 au *Bulletin Férussac*, t. IX, p. 27.

(2) Mémoire sur l'équilibre et le mouvement des corps solides élastiques (qui a paru *in extenso* l'année suivante, au t. VIII de ceux de l'Institut).

(3) Mémoire sur les équations générales de l'équilibre et du mouvement des corps élastiques et des fluides (*Journal de l'École polytechnique*, 30<sup>e</sup> cahier).

posés comme on a dit tout à l'heure. On peut remarquer aussi, comme le reconnaît Poisson au mémoire de l'année suivante (1829), où il reprend tous ses calculs (en évitant les deux conversions de sommes en intégrales dont nous venons de parler), que ses formules du mémoire de 1828 et du commencement de celui de 1829 représentent les *neuf* composantes, toutes inégales, des pressions qui s'exercent, non pas sur trois faces d'une superficie = 1 perpendiculaires aux coordonnées fixes, mais sur trois faces qui avaient cette superficie et ces directions *avant les déplacements des points*; formules qui prêtent ainsi à des erreurs <sup>(1)</sup>, et auxquelles il est obligé de faire subir une transformation compliquée pour en tirer les *six* formules vraiment utiles de composantes <sup>(2)</sup>, auxquelles Cauchy arrive très-directement et pour des corps de texture quelconque, isotrope ou non.

Poisson consacre cependant aussi, au même Mémoire de 1829, un chapitre aux corps non-isotropes, qu'il réduit à ceux qui sont régulièrement cristallisés. Mais il se borne à poser, pour les *six* composantes, des expressions ayant une forme linéaire en fonction des neuf dérivées du premier ordre des déplacements dans les sens des trois coordonnées, par rapport à ces coordonnées; forme justifiée implicitement, pour ses lecteurs, par les considérations moléculaires des autres chapitres. Puis il montre la réduction à trente-six de leurs cinquante-quatre coefficients, sans apercevoir leur réductibilité à vingt-un inégaux au plus comme l'a montré Green <sup>(3)</sup>, et même à quinze comme l'avait déjà prouvé Cauchy (n° précédent), et comme Poisson l'a reconnu plus tard en lisant à l'Académie, le 28 octobre 1839, son Mémoire *sur l'équilibre et le mouvement des corps cristallisés*, où il considère cependant les molécules non

(1) Comptes rendus, 28 juillet 1862, t. LV, p. 205.

(2) Mém. au 20<sup>e</sup> cahier du *J. de l'Éc. pol.*, de la page 47, où sont reproduites les form. de 1828 avec un signe différent (parce qu'au contraire de 1828 il attribue le signe + aux répulsions et le signe — aux attractions), à la page 52 où sont les formules définitives, conformes à celles de Cauchy du cas d'isotropie.

(3) Voy. 5<sup>e</sup> Appendice ci-après, § 70, p. 712.

plus comme de simples points, mais comme des groupes de points ou atomes pouvant tourner sur eux-mêmes <sup>(1)</sup>.

Au même Mémoire du 12 octobre 1829, Poisson s'occupe des fluides et arrive, par un raisonnement différent, quant à la seule forme, de celui de Navier, aux équations trouvées en 1822 par celui-ci pour leur mouvement <sup>(2)</sup> en tenant compte, non pas, comme il le dit, de leur *viscosité* ou de l'*adhérence* de leurs parties (car les gaz n'en offrent aucune et ont cependant un frottement), mais de l'engrènement réciproque de leurs molécules ou du frottement mutuel de leurs couches; équations données aussi par Cauchy en 1828 comme pouvant représenter le mouvement intérieur des corps mous ou plastiques dénués d'élasticité <sup>(3)</sup>, et pouvant encore s'obtenir par un autre moyen très-simple <sup>(4)</sup>. Mais ces équations ne sont applicables que pour les mouvements extrêmement lents et réguliers que prennent les fluides dans des cas exceptionnels, par exemple lors de leur écoulement par des tubes ou des vaisseaux capillaires. (V. App. V, p. 734.)

Poisson y prélude aussi aux recherches originales et dignes d'attention publiées en 1831, sous le titre : « Nouvelle théorie de l'action capillaire, » et qui doivent être étudiées, au moins dans leurs généralités, pour se faire une idée des questions que soulèvent les considérations de mécanique moléculaire, applicables aux solides comme aux liquides.

**XXVIII. Suite. Poisson et Cauchy (pour les sommes non remplaçables par des intégrales.)** —

On voit en effet à cet ouvrage, entre autres choses remarquables, que Poisson insiste (comme dans ses écrits de 1828 et 1829) sur la nécessité de laisser sous forme de sommes d'un nombre fini quoique considérable de termes, les coefficients des formules, et, si l'on y remplace par des intégrations les sommes relatives aux angles (comme il faisait en 1828), de se bien

(1) Mém. de l'Institut, t. XVIII.

(2) Mémoire sur le mouvement des fluides en tenant compte de leur viscosité, etc. Institut, t. VI.

(3) Exercices, 3<sup>e</sup> année.

(4) Comptes rendus, 27 novembre 1843, t. XVII, p. 4240.

garder de faire de même pour les sommations relatives aux distances; car si ces coefficients étaient convertis en intégrales définies depuis une valeur zéro de la distance, une intégration par parties donnerait des pressions intérieures *nulles* après les déplacements quand elles le sont avant <sup>(1)</sup>, et l'on déduirait encore, des coefficients ainsi convertis, d'autres conséquences tout à fait contraires aux faits, savoir que les pressions ne varieraient que comme les carrés des densités, et qu'elles seraient toujours normales aux faces, ou qu'elles n'auraient pas de composantes tangentielles. Ces considérations, bien que d'une apparence purement analytique, sont d'une haute portée pour la philosophie de la science. Elles prouvent, comme Fresnel l'avait déjà remarqué avec une grande sagacité pour l'éther (n° XXIV) que les corps, même fluides, avec les propriétés que tous les faits dénotent, ne sauraient être formés d'une matière continue; conclusion qui, étendue à la constitution des dernières particules, fait disparaître même les atomes étendus et figurés, mais inséparables et invariables, de Leucippe et de Démocrite, conservés jusqu'à nos jours, pour faire place à ceux du système dont nous avons parlé au n° XXII; système préconisé par divers physiiciens anglais et allemands qui n'y voient nullement un idéalisme négateur de la matière, et adopté, parmi nous, pour d'autres raisons encore, par Ampère, ainsi que par Cauchy qui en a

(1) En effet,  $r$  étant la plus petite valeur des distances  $r$  entre les molécules, et  $r'$  la plus grande de celles pour lesquelles leur action  $fr$  a une grandeur sensible, l'intégration par rapport aux angles donne pour la pression primitive  $K$  et pour le coefficient d'élasticité  $k$  affectant les dérivées des déplacements

$$K = \frac{2\pi}{3} \int_r^{\Gamma} r^3 fr \cdot dr, \quad k \text{ (ou } \epsilon \text{ de Navier)} = \frac{2\pi}{45} \int_r^{\Gamma} r^5 \frac{d^2 r}{dr^2} dr.$$

Or la deuxième expression, intégrée par parties, donne :

$$k = \frac{2\pi}{45} (\Gamma^4 f\Gamma - r^4 fr) - K.$$

Le premier terme entre parenthèses est nul puisque  $fr$  devient tout à fait insensible avant que  $r$  ne soit grand, et le deuxième est nul aussi pour la limite inférieure  $r=0$  à moins qu'il n'y ait des répulsions infinies du quatrième ordre au contact, et que ce ne soient ces répulsions-là qui seules déterminent la valeur de  $k$  lorsque la pression primitive  $K$  est nulle; ce qui exclurait toute élasticité.

fait le sujet d'une de ses leçons de physique supérieure, à Turin en 1832<sup>(1)</sup>.

Cauchy avait montré en effet, aussi en 1828, mais sans y appuyer autant que Poisson<sup>(2)</sup>, que l'on tombe dans les conséquences signalées, si contraires aux faits (proportionnalité des pressions aux carrés des densités, et nullité des composantes tangentielles) si, sans même supposer la continuité de la matière, on admet seulement comme Poisson « qu'on puisse abstraire l'action, sur une molécule, de celles des molécules environnantes qui en sont le plus proches, » vis-à-vis de l'action des autres, supposées en nombre immense malgré la petitesse de la sphère d'activité; opinion émise pour la première fois par Poisson dans une lettre d'octobre 1827<sup>(3)</sup>, et où l'on s'étonne de le voir persister en 1829<sup>(4)</sup> et 1830 quand il n'en a plus besoin, puisque alors il n'intègre pas plus par rapport aux angles que par rapport aux distances.

Au reste, les calculs qui ont pour base la loi moléculaire des actions fonctions des distances ne supposent pas admis nécessairement, comme quelques auteurs anglais l'ont pensé, le système de Boscovich ou des atomes inétendus. Ces calculs n'exigent même pas que les dimensions des atomes, si on leur en attribue, soient supposées très-petites par rapport aux distances mutuelles de leurs centres de gravité; car ces sommes relatives aux distances d'un point à tous les points environnants<sup>(5)</sup>, qui forment les coefficients constants des formules,

(1) Un écrit de treize pages, sur ce sujet, a été inséré à la date du 20 janvier 1844 au Bulletin de la Société philomathique de Paris. Un court extrait en a paru aussi au n° 528 du journal *l'Institut*, du 7 février, p. 48.

(2) Exercices, 3<sup>e</sup> année, p. 203, 204 de son premier mémoire cité, et p. 225, 230, 234 du second.

(3) *Annales de Chimie et de Physique*.

(4) Mémoire du 12 octobre 1829, au 20<sup>e</sup> cahier du *Journal de l'École polytechnique*, art. 3 ou p. 7.

(5) C'est-à-dire ces sommes  $\sum \frac{\rho m}{r} F(r) \cos^n(r, x) \cos^{n'}(r, y) \cos^{n''}(r, z)$ , où  $\rho$  est la densité du corps,  $r$  sont les distances d'un point à tous les atomes ou éléments d'atomes dont les masses sont  $m$  et qui se trouvent compris dans sa très-petite sphère d'activité sensible;  $n, n', n''$  sont des exposants entiers dont la somme est 4 pour les principaux des coefficients ainsi exprimés; enfin  $F(r)$  est

peuvent tout aussi bien être composées d'un nombre infini de termes, même pour chaque atome, que d'un nombre total fini. Il suffit, pour pouvoir établir les équations, que les atomes ne se touchent pas, ou ne soient point fondus en une masse ininterrompue.

Ce n'est même pas précisément dans la conversion de chaque somme  $\Sigma$  ou  $S$  en une intégrale que gît le danger des conséquences fausses; c'est, comme l'a très-bien remarqué M. Clausius <sup>(1)</sup>, dans la supposition que la limite inférieure de l'intégration pour les distances soit zéro. Dès qu'on prend une limite inférieure finie, si petite qu'elle soit, qui sauvegarde la non-contiguïté des dernières parties, rien n'empêche d'intégrer si cela est commode pour obtenir des résultats d'une certaine forme; car si une intégrale ne peut guère être substituée à une somme particulière relative aux diverses molécules qui en entourent une seule, elle peut très-bien l'être à une *moyenne* d'un très-grand nombre de pareilles sommes, vu la compensation qui s'opère alors entre les inégalités ou irrégularités individuelles; et cette moyenne est, après tout, seule à considérer dans les applications, comme dit le même savant. De là l'accord des équations trouvées par Cauchy et par Poisson avec celles auxquelles Navier était arrivé sans discuter ce qui résulterait des transformations analytiques du coefficient qu'il trouve, et qui se présente sous forme d'intégrale définie. De là aussi la possibilité, malgré quelques objections de Poisson, de continuer de se servir, dans ces sortes de recherches, comme font encore les géomètres anglais et allemands, des méthodes de la mécanique analytique de Lagrange, qui, d'ailleurs, permettent très-bien de laisser subsister sous forme de simple somme  $\Sigma$  ou  $S$ , les coefficients ressortant des résultantes d'actions sur chaque point matériel, tout en faisant entrer ensuite, dans l'analyse, des intégrales triples prises pour toute l'étendue du système; ce qui n'a

---

une fonction qui se déduit de celle  $f(r)$  représentant l'action mutuelle à la distance et dans la direction  $r$  pour l'unité de masse des points matériels qui l'exercent l'un sur l'autre.

(1) Ueber die Veränderungen, etc., aux *Annales de Poggendorff*, vol. LXXVI, p. 56-58.

pas plus d'inconvénients que l'usage, fait aussi par Laplace, des intégrales dans la théorie capillaire, et que tout autre emploi du calcul différentiel et intégral pour les corps solides ou fluides qu'on sait très-bien être discontinus ou composés d'un nombre fini, quoique très-grand, de molécules isolées <sup>(1)</sup>.

**XXXIX. Suite. Polémique entre Poisson et Navier. Remarques de M. Clausius.** — Ici doit trouver place la mention de cette vive polémique soutenue en 1828 et 1829. Poisson, dans son premier mémoire, d'avril 1828, en donnant un historique du problème des corps élastiques, n'avait fait nulle mention de Navier qui, le premier, l'a mis en équation; mais, faisant cependant à son travail une allusion évidente, il avançait que des recherches où les résultantes d'actions entre molécules étaient exprimées par des intégrales, et même toute analyse où l'on opérerait des intégrations, comme celles que comporte l'usage du calcul des variations appliqué suivant les règles de la mécanique analytique de Lagrange, n'était bonne que pour les masses continues s'il en existe, et était tout à fait impropre à donner les conditions d'équilibre des corps élastiques tels qu'ils sont dans la nature, c'est-à-dire formés de molécules disjointes <sup>(2)</sup>. Dans ses répliques aux réponses de Navier qui trouvait étrange une pareille exclusion, il reprochait encore à celui-ci d'avoir abstrait les actions primitives entre les molécules pour ne faire entrer dans son calcul que leurs changements de grandeur. Et Arago, rédacteur du recueil qui servait d'arène à cette discussion, la fermait par une Note <sup>(3)</sup> où il demandait à Navier comment il pouvait concevoir un corps dont tous les points matériels seraient sans action les uns sur les autres dans l'état naturel, etc.

Tous ces reproches étaient ou sans fondement ou exagérés.

<sup>(1)</sup> Voyez 5<sup>e</sup> Appendice, § 74, p. 743, et Appendice complémentaire, §§ 84. 85.

<sup>(2)</sup> Note sur les vibrations des corps sonores, aux *Annales de Chimie et de Physique*, 4<sup>o</sup> octobre 1827, — ou Bulletin Ferussac, 1828, t. IX, p. 27. — Et Mémoire du 4<sup>e</sup> avril 1828 au t. VIII de ceux de l'Institut, art. 44, p. 400.

Voyez, pour le reste de la discussion, les *Annales de Chimie et de Physique*, t. XXXVII, XXXVIII, XXXIX, juillet, août et octobre 1828, et janvier 1829.

<sup>(3)</sup> Mêmes *Annales*, t. XL, 1829.



Au dernier, Navier répondit très-bien, dans une Note récapitulative insérée au *Bulletin des sciences* de M. de Ferussac<sup>(1)</sup>, qu'il avait regardé comme nulles, non pas les actions antérieures aux déplacements, mais leurs résultantes, ce qui est en effet possible quand on suppose qu'il n'y avait pas primitivement de pressions<sup>(2)</sup>. Il est bien vrai (comme nous avons dit tout à l'heure) qu'on ne doit pas prendre les intégrales figurant comme coefficients depuis des valeurs nulles des distances, comme si la matière était continue, mais cela n'empêche pas d'être exactes les équations de Navier, où ces intégrales définies restent ineffectuées et donnent des expressions qui n'auraient plus rien d'impossible en prenant une autre limite inférieure que zéro, comme nous avons vu (n° précédent) que l'a très-bien remarqué M. Clausius; et cela empêche encore moins, comme nous avons dit aussi, d'appliquer aux systèmes moléculaires le calcul intégral et le calcul des variations<sup>(3)</sup>.

A cette discussion se trouvent mêlées des considérations des deux illustres savants sur la question des plaques élastiques, qui n'aurait pas dû les diviser, car Poisson y reconnaît que la méthode de son mémoire du 1<sup>er</sup> août 1814, où il supposait la plaque sans épaisseur, ne mettait pas en jeu les véritables forces; et celle dont il fait usage en 1828, comme application des formules générales nouvelles, le conduit précisément aux mêmes équations que Navier avait obtenues en 1820, sauf l'une des équations *aux limites* ou aux bords de la plaque. (Voyez n° XXII et LIX.)

On y trouve aussi de lumineuses observations sur la forme possible de la fonction des distances entre deux molécules, capable d'exprimer leur action mutuelle. Si on la représente par un seul terme affecté d'une exponentielle, comme avait fait Poisson à son mémoire de 1828, on satisfera bien à la condition de la diminution rapide de l'action pour peu que la distance

(1) *Bulletin universel des Sciences et de l'Industrie*, 4<sup>me</sup> section, mars 1829.

(2) Voyez ci-après, Appendice complémentaire, § 80, p. 774.

(3) Voyez *idem*, §§ 83, 84, 85, p. 783 à 800.

augmente <sup>(1)</sup>, mais elle restera toujours de même signe quelle que soit la distance, et l'équilibre *naturel* qu sans forces extérieures sera impossible; car, comme le rappelle Navier, cet équilibre exige que les actions mutuelles soient répulsives pour certaines distances, et attractives pour d'autres. Aussi Poisson reconnaît <sup>(2)</sup> qu'il aurait dû prendre pour l'action moléculaire une différence de deux fonctions de cette forme <sup>(3)</sup>.

**XXX. Suite. MM. Lamé et Clapeyron.** — Pendant la même année 1828 fut envoyé à l'Académie, sur le même sujet, un mémoire remarquable de lucidité et de sagacité, où ces deux ingénieurs français, alors en mission en Russie, arrivèrent aux mêmes équations indéfinies que Navier, en exprimant, comme lui, mais sans avoir eu connaissance de ses recherches, l'équilibre, sur une seule molécule, des actions développées par les petits changements de distance des molécules environnantes, et supposées proportionnelles à ces changements; en abstrayant, comme Navier, les actions antérieures, supposées se faire équilibre naturellement ou sans forces extérieures dans l'état qui a précédé les déplacements des points. Et les mêmes considérations les conduisirent directement aux formules des pressions pour les corps isotropes.

La manière dont ils en déduisirent un grand nombre de théorèmes sur les pressions prouverait qu'ils n'avaient pas non plus pris connaissance des mémoires présentés en 1822 et 1827 par Cauchy, qui était arrivé à une grande partie de ces théorèmes pour des corps d'une texture absolument quelconque en repos ou en mouvement.

Nous reviendrons sur ce mémoire aux n<sup>os</sup> XXIII et XXV.

<sup>(1)</sup> La forme que Poisson donnait comme exemple était  $a \cdot b - \left(\frac{r}{\pi\alpha}\right)^m$ ,  $a$  et  $b$  étant deux constantes,  $r$  la distance,  $\alpha$  le plus petit intervalle moléculaire,  $\pi$  un nombre très-grand, et  $m$  un très-grand exposant positif, afin que, conformément à son idée (n<sup>o</sup> XXVII) l'action restât presque constante et égale à  $a$  tant que  $r$  ne comprend pas un grand nombre de fois  $\alpha$ , et décroît rapidement quand  $r$  devient plus grand que  $\pi\alpha$ .

<sup>(2)</sup> Note de M. Arago (*Ann. de Chimie et de Physique*, janvier 1829, p. 403); et Deuxième mémoire de M. Poisson, 12 octobre 1829, p. 8 et 45.

<sup>(3)</sup> Voyez ci-après, 3<sup>e</sup> Appendice, § 46 (note), p. 543; et 5<sup>e</sup> Appendice, p. 739.

**XXXI. Suite. M. Duhamel (Prise en considération des températures).** — Peu de temps après furent présentés et publiés au *Journal de l'École polytechnique* plusieurs mémoires remarquables de mécanique moléculaire, approuvés par l'Académie, où M. Duhamel, aujourd'hui membre de ce corps savant, tenait compte des changements de température développés par les changements de volume des diverses parties des corps élastiques (1). M. Wertheim en a tiré des conséquences relatives aux différences qu'on trouve constamment entre les valeurs des coefficients d'élasticité déduits du mesurage statique, et ceux que l'on conclut de l'observation du nombre des vibrations dans l'état dynamique.

Au reste, les effets mécaniques de la variation de température des barres soumises à un effort de traction peuvent être évalués approximativement d'une manière élémentaire dans beaucoup de cas, comme a fait M. Poncelet au n° 308 de l'*Introduction à la mécanique industrielle*.

**XXXII. Premières applications de cette nouvelle branche de la mécanique, par Poisson et Cauchy.**

— La découverte ainsi faite d'une nouvelle branche de la science de l'équilibre et du mouvement eut une influence marquée sur la manière dont cette science en général fut bientôt enseignée. Le beau préambule du mémoire de Poisson de 1828 contribua sans doute pour beaucoup, avec les travaux de Navier, et avec quelques passages d'un livre de Coriolis (2), et, aussi, des premières le-

(1) Mémoire sur les équations de la propagation de la chaleur dans les corps solides dont la conductibilité n'est pas la même dans tous les sens; 7 avril 1828 (*Journ. de l'École polyt.*, 24<sup>e</sup> cahier). — Second mémoire sur les phénomènes thermo-mécaniques, lu le 23 février 1835 (*idem*, 25<sup>e</sup> cahier). — Sur le calcul des actions moléculaires développées par les changements de température (*Savants étrangers*, t. V).

(2) *Du Calcul des effets des machines*, 4<sup>e</sup> édition, 1829, ch. III. — A la 2<sup>e</sup> édition (1844, posthume) de ce livre, on a ajouté, entre autres choses, la matière d'un « Mémoire sur la manière d'établir les principes de la mécanique pour des systèmes de corps en les considérant comme des assemblages de molé-

çons de M. Poncelet aux ouvriers de Metz, à faire substituer désormais les réalités physiques, c'est-à-dire la compressibilité, l'élasticité, l'action à distance et sa transmission graduelle par les tiges et les liens, etc., aux abstractions de dureté absolue dans les solides, d'inextensibilité dans les liens, d'action instantanée au seul contact, etc., en sorte que, bien que les savants cités ici n'aient pas toujours écrit à ce point de vue, on met aujourd'hui généralement en pratique une pensée qu'avait eue Laplace dès 1825<sup>(1)</sup>, d'introduire dans les démonstrations de la mécanique, pour leur donner plus de clarté et pour se rapprocher de la nature, la considération des actions réciproques à de petites distances, qui régissent les phénomènes terrestres.

Mais la mécanique moléculaire ou la théorie de l'élasticité des solides eut aussi pour application, presque immédiatement, la solution de divers problèmes utiles. Pour nous borner ici à ceux d'équilibre (devant parler plus loin de ceux de mouvement), Poisson reconnut dès 1827, comme conséquence évidente des formules de composantes normales de pressions, que lorsqu'un prisme élastique est dilaté dans le sens de sa longueur par une force de traction parallèle à ses arêtes, distribuée uniformément sur ses bases, et que ses faces latérales sont libres, il y a, dans les sens transversaux, une contraction dont la proportion est le quart de celle de la dilatation pour les corps d'égale élasticité en tous sens<sup>(2)</sup>, résultat auquel arrivèrent M. Cauchy<sup>(3)</sup> et MM. Lamé et Clapeyron l'année suivante<sup>(4)</sup>, et qui a été aussitôt confirmé par une expérience de M. Cagniard de Latour, autant que le permettait le degré d'exactitude du mode d'observation employé.

cules, » inséré en 1835 au *Journal de l'École polytechnique* (24<sup>e</sup> cahier), et où Coriolis veut bien citer (page 94, note) un mémoire du 4<sup>e</sup> avril 1834, trouvé alors hardi par lui et par M. Poncelet, présenté par nous à l'Académie sur cette même manière de démontrer les théorèmes généraux du mouvement et de l'équilibre des systèmes.

(1) *Mécanique céleste*, fin du chapitre 4<sup>o</sup> du livre XII.

(2) *Annales de Chimie et de Physique*, 1827.

(3) *Exercices de mathématiques*, 3<sup>e</sup> année.

(4) *Savants étrangers*, t. IV, p. 508 (n<sup>o</sup> 40).

Poisson déterminait aussi les rapports de ces deux effets à celui de contraction générale produit par une pression de même intensité, appliquée sur toute la surface d'un corps isotrope de forme quelconque; et il résolvait divers problèmes élémentaires sur les sphères creuses en même temps que MM. Lamé et Clapeyron, qui en résolvaient d'analogues sur les cylindres creux (n° LVIII ci-après).

Passant aux problèmes de la torsion et de la flexion des cylindres, qu'il suppose à base circulaire, et de dimensions finies en tous sens, Poisson, faute de pouvoir donner, des équations différentielles de leur équilibre, des intégrales qui ne sont point encore trouvées pour tous les modes de sollicitation, même aux seules extrémités, tente de résoudre le problème d'une manière approchée quand les dimensions transversales sont très-petites. Pour cela il fait une supposition difficile à justifier, et qui conduit à des résultats souvent justes, mais quelquefois faux, à savoir que les pressions intérieures, ainsi que les déplacements des points, sont exprimables en séries convergentes procédant suivant les puissances entières des petites coordonnées transversales <sup>(1)</sup>. Ces séries, à coefficients indéterminés, étant mises dans les équations différentielles définies et indéfinies à la place des quantités inconnues, donnent, par la comparaison des termes affectés d'une même puissance, et eu égard à la nullité supposée des pressions sur les faces latérales, une suite d'autres équations plus simples, qu'il combine de manière à en tirer les coefficients, en effaçant finalement les termes d'un degré supérieur tantôt au premier, tantôt au second degré. Il arrive ainsi aux formules connues de la flexion et de la torsion des cylindres à base circulaire, formules dont la démonstration ordinaire est fondée, en effet, sur des suppositions qui reviennent à celles de Poisson mais où l'on se borne à des termes du premier degré. Nous parlerons au n° LIX de la solution que le même illustre savant a donnée, au moyen d'une hypothèse analogue, du problème de l'équilibre et du mouvement des plaques.

---

(1) Mémoire de 1828, n° 34, p. 447, et 44, p. 464.

Vers la fin de la même année 1828, sans connaître les travaux de Poisson autrement que par deux courts extraits n'indiquant pas ses procédés, Cauchy appliquait également le développement supposé possible en séries entières, à la détermination de la flexion des lames minces, d'une largeur indéterminée ou indéfinie (en supprimant la considération de la dimension ou de la coordonnée dans son sens); et, ensuite, des tiges à section rectangulaire finie, d'une épaisseur constante ou variable, dont la fibre moyenne est primitivement droite ou courbe, et dont la matière est isotrope ou hétérotrope; et il arrivait ainsi aux formules fournies par les hypothèses, un peu plus restreintes, de la théorie ordinaire<sup>(1)</sup>. (Voyez n° XLI.)

**XXXIII. — Applications, par MM. Lamé et Clapeyron.** — Ils ne s'occupèrent pas de la flexion, pour laquelle Poisson et Cauchy n'ont trouvé que des résultats simplement approchés et discutables. Mais dans leur grand mémoire, où rien, dans les applications, n'est donné à l'hypothèse, ils arrivèrent, sous le titre de *Cas généraux*, à de belles solutions de problèmes où toutes les ressources actuelles de l'analyse aux différences partielles sont mises en œuvre. L'une est relative à un solide de dimensions infinies en longueur, largeur et épaisseur, mais terminé d'un côté par un plan indéfini sur lequel agissent des pressions distribuées d'une manière absolument quelconque, continue ou discontinue; l'autre à un solide compris entre deux plans parallèles indéfinis, comprenant entre eux une épaisseur finie, l'autre enfin à un cylindre droit, de longueur infinie, sollicité sur sa surface latérale par des forces quelconques. Bien que M. Lamé ne les ait pas reproduites dans ses leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité, de 1852, en disant avec modestie<sup>(2)</sup> que ce n'étaient que des essais entrepris dans le but de chercher une solution générale, et ne paraiss-

(1) *Exercices*, 3<sup>e</sup> année (1828), p. 243 à 328 et 356 à 368; et 4<sup>e</sup> année (1829), p. 26. Nous croyons avoir résumé ce qui s'y trouve de plus essentiel (sauf l'application aux vibrations) au n° 43 de notre Mémoire de 1854 sur la flexion des prismes (Journal Liouville, 1856).

(2) Fin de la 42<sup>e</sup> leçon, § 68.

sant pas placés sur la route qui doit y conduire, elles sont remarquables et il n'est pas impossible qu'un jour elles fournissent d'utiles applications <sup>(1)</sup>.

**XXXIV. Solution ultérieure, par M. Lamé, du problème de la sphère pleine ou creuse sollicitée d'une manière quelconque. Difficultés pour le prisme.** — Quant aux solides de dimensions finies en tous sens, c'est seulement pour une sphère pleine ou creuse qu'a été résolu le problème de l'état d'équilibre déterminé par des pressions appliquées et distribuées d'une manière quelconque sur la surface. C'est à M. Lamé qu'on doit cette belle solution, publiée en 1853, ou un an après ses leçons sur l'élasticité <sup>(2)</sup>. (Voyez n° LVIII pour le cas particulier de pressions constantes, traité à la 16<sup>e</sup> leçon et déjà en 1828.)

On peut, aux mêmes leçons, où l'illustre analyste s'est efforcé de réduire la théorie de l'élasticité à des termes simples, prendre une idée de la longue recherche qu'il a faite d'une solution semblable pour un solide prismatique, et voir quel point difficile <sup>(3)</sup> empêche et empêchera d'y arriver longtemps encore, et peut-être même toujours, si l'on en peut juger par l'insuccès du persévérant appel fait par l'Académie, sur sa proposition, aux géomètres des deux mondes, en mettant au concours, depuis 1846, ce grand problème de calcul intégral aux différences partielles, qu'elle en a définitivement retiré en 1858 en désespoir de cause.

<sup>(1)</sup> Il a bien voulu nous communiquer un mémoire manuscrit où se trouvent développées « en séries numériques et immédiatement calculables » ses expressions (27) du cas de deux plans parallèles, au moyen de la décomposition des fractions sous le quadruple signe  $\int$ , en fractions partielles dont chacune a pour dénominateur un des facteurs imaginaires, en nombre infini, des dénominateurs (de la forme  $\frac{e^x - e^{-x}}{2} \pm x$ ) de ces fractions. Il est fâcheux qu'il ait renoncé à les publier par la raison que ces sortes de décompositions sont comprises dans le calcul des résidus de M. Cauchy.

<sup>(2)</sup> Mémoire sur l'équilibre d'élasticité des enveloppes sphériques, lu le 4<sup>er</sup> août 1853, et inséré au Journal de M. Liouville, t. XIX, 1854.

<sup>(3)</sup> Douzième leçon, § 66, p. 455 et suivantes.

**XXXV. Nécessité de se contenter de solutions qui supposent un mode particulier de distribution des forces sur les bases. Méthode inverse.**

**MM. Lamé et Clapeyron.** — On ne doit pas se dissimuler, à ce sujet, que si même un succès aujourd'hui inespéré venait un jour vaincre cette difficulté si grande, c'est-à-dire si l'on parvenait à intégrer les équations d'équilibre pour des pressions quelconques agissant sur les bases et les faces d'un parallépipède, cylindre ou prisme, une autre difficulté peut-être plus désespérante viendrait, indépendamment de l'immense complication des calculs, se dresser devant ceux qui chercheraient à tirer quelque parti de la solution trouvée. Ce serait de savoir *quelles sont*, dans chaque cas, *ces pressions* que le problème prend pour ses données. On n'agit en effet sur la surface d'un corps que par l'intermédiaire d'autres corps en contact avec lui; or on ne sait point, et l'on ne saura de longtemps comment se distribuent les pressions sur la surface de contact de deux corps élastiques, même lorsque le second de ces deux corps se réduit à un lacet enroulé autour du premier, et auquel le poids est suspendu. Le fait est que si l'on excepte les pressions exercées par un fluide en repos, on ne connaît jamais, des forces qui agissent sur la surface d'un corps, que leurs résultantes et leurs couples ou moments résultants; on ignore, hors de là, leur mode de distribution sur les divers éléments de cette surface.

D'où il suit qu'en général il importe peu de savoir déterminer l'équilibre d'élasticité d'un solide plutôt sous l'action des forces qui agissent réellement, que sous celle d'autres forces statiquement *équivalentes*, ou qui ont même résultante et même moment, mais un autre mode d'application et de distribution, bien qu'on ne puisse pas dire absolument que ce mode soit dénué de toute influence sur la grandeur des déplacements des points.

Sous tous ces rapports il faut se contenter, pour l'équilibre d'élasticité et pour les conditions de résistance des pièces prismatiques, supposées sollicitées d'abord aux extrémités seulement, de solutions relatives à un mode déterminé de distribution des forces extérieures sur leurs deux bases.



MM. Lamé et Clapeyron ont donné, les premiers, deux exemples simples de ce genre de solution. Il consiste à prendre pour donnée la loi des déplacements de tous les points, et à déterminer la loi correspondante de distribution des forces à la surface, ce qui permet ensuite de déterminer les grandeurs de ceux-là connaissant les intensités des résultantes et des moments résultants de celles-ci, supposées distribuées suivant le mode trouvé.

La loi de déplacement qu'ils se donnèrent à cet effet pour le prisme à base quelconque consiste en ce que les dilatations linéaires (positives ou négatives) soient partout les mêmes dans le sens longitudinal, et partout les mêmes aussi, mais d'une autre grandeur, dans les sens transversaux. Les équations leur montrèrent immédiatement que cette loi est possible quand on néglige les effets très-petits de la pesanteur; et que les forces qui la donnent sont *une traction ou une pression uniforme aux divers points des deux bases*, et une pression normale constante (comme la pression atmosphérique) sur les faces latérales. D'où se déduisent immédiatement les résultats trouvés par Poisson (n° XXXII) d'une manière moins simple.

Celle qu'ils se donnent pour le cylindre droit, de manière qu'il soit *tordu* en même temps qu'étendu ou comprimé, est qu'il y ait, outre des dilatations uniformes en trois sens, des rotations relatives des sections, égales d'un bout à l'autre pour mêmes intervalles entre ces sections supposées rester planes et perpendiculaires à l'axe autour duquel elles tournent. Les équations indéfinies prouvent encore que ces sortes de déplacement sont possibles sans forces agissant sur la masse, et les équations définies montrent qu'outre les tractions et pressions normales du cas précédent (et qui peuvent être toutes nulles) il faut, sur les éléments égaux de chacune des deux bases circulaires *des forces dirigées dans leurs plans, perpendiculaires aux rayons vecteurs, et proportionnelles à ces rayons ou aux distances des éléments à l'axe de torsion* (1).

---

(1) N° 54 ou page 527 du Mémoire cité.

**XXXVI. Méthode mixte, plus étendue dans ses applications. Torsion. Flexion inégale avec glissements.** — A la méthode inverse qu'ils ont employés pour cela et qui consiste, au moyen d'une simple différentiation, à déduire les forces des déplacements qu'on se donne, il faut, pour des cas plus composés, comme ceux de flexion, ou comme ceux de torsion de prismes à base non circulaire, substituer une méthode *semi-inverse* ou *mixte*, consistant à se donner à la fois une partie des déplacements et une partie des forces, et à chercher les autres forces et les autres déplacements, méthode qui ne dispense pas d'intégrer, mais qui permet de réduire la part de l'intégration à ce que les procédés connus de l'analyse aux différences partielles permettent d'aborder.

Cette méthode mixte a d'abord été appliquée par nous au problème de la torsion de prismes à bases non circulaires, de formes indéfiniment variées <sup>(1)</sup>.

Jusqu'au mémoire publié en 1829 par M. Cauchy *sur la torsion et les vibrations tournantes des verges rectangulaires* <sup>(2)</sup>, on avait cru (n° XIX) que les résistances opposées par les diverses fibres d'un prisme à cette sorte de déformation étaient, comme pour le cylindre à base circulaire, proportionnelles aux inclinaisons que ces fibres prennent sur l'axe de torsion en devenant des hélices, et par conséquent à leurs distances à cet axe. Mais, au lieu de la formule  $G(I + I')\theta$  du moment de réaction de torsion qui en résulte, comme nous avons dit (même n°),  $I$  et  $I'$  étant les moments d'inertie principaux de la section autour de droites tracées sur son plan, Cauchy trouva, pour le prisme rectangle,  $G \frac{4II'}{I + I'} \theta$  <sup>(3)</sup>, expression qui ne coïncide avec la pré-

<sup>(1)</sup> *Mémoire sur la torsion des prismes* lu le 13 juin 1833 et inséré au t. XIV (1855) des *Savants étrangers*. Et rapport de M. Lamé sur ce mémoire, du 26 décembre 1853 (aux *Comptes rendus*, t. XXXVII, p. 984). Plusieurs des résultats avaient été publiés en 1817 aux numéros des 22 février, 22 mars et 10 mai des *Comptes rendus*, t. XXIV, p. 262, 485, 847, et au *Bulletin de la Société phil.* 26 février 1853.

<sup>(2)</sup> *Exercices*, 4<sup>e</sup> année.

<sup>(3)</sup> Ou plutôt  $\frac{40}{\frac{4}{GI} + \frac{4}{G'I'}}$ , car Cauchy embrassa le cas où l'élasticité de glisse-

cédente que quand  $I = I'$  ou quand la base est carrée, mais qui est infiniment moindre lorsque le prisme tordu est plat ou se réduit à une lame mince ; car, alors, si  $I'$  est le moment autour de la grande médiane, on peut le négliger au dénominateur comme du second ordre devant le moment  $I$  autour de la petite médiane, et il reste  $G.4I'.\theta$ . Nous reproduisons l'analyse de Cauchy à une note du § 39 de notre 4<sup>me</sup> Appendice (p. 621), en observant qu'elle est fondée, comme celle qu'il a employée ainsi que Poisson pour la flexion, sur la supposition gratuite que les pressions intérieures sont exprimables en séries convergentes suivant les puissances entières des deux coordonnées transversales, et sur des suppressions, non justifiées, de termes dont on ne connaît pas le rapport de grandeur avec ceux que l'on conserve ; et nous avons dû même, à cette note, signaler la suppression d'un terme négatif auquel on peut assigner une valeur égale au tiers de ce qui est conservé, en sorte qu'en en tenant compte le moment de torsion se trouve réduit aux deux tiers, ce qui donnerait manifestement trop peu, tandis qu'on a trop avec la formule non réduite de cette manière <sup>(1)</sup>.

Aussi Cauchy a renoncé, en 1854, à son analyse <sup>(2)</sup>, pour adopter la nôtre. Si nous avons discuté celle-là, c'est à cause de l'insistance mise par un physicien à l'invoquer pour ne pas adopter celle-ci (Appendice IV, § 38, p. 619).

Son mémoire de 1829 a néanmoins fait faire un grand pas à la théorie de la torsion, car, outre que la formule à laquelle il arrive est exacte pour les prismes plats ( $I'$  négligeable devant  $I$ ), l'analyse qu'il y développe fait apercevoir un rapport nécessaire entre la torsion  $\theta$  et la dérivée seconde du déplacement longitudinal des points de chaque section par rapport aux deux coordonnées transversales <sup>(3)</sup> ; dérivée dont l'existence annonce

ment à des coefficients différents  $C, C'$  dans les sens parallèles aux deux côtés du rectangle de base.

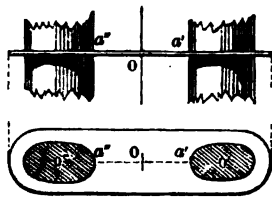
<sup>(1)</sup> Voyez aussi, même Appendice, la note du § 45, p. 641.

<sup>(2)</sup> *Comptes rendus*, 20 février 1854, t. XXXVIII, p. 326.

<sup>(3)</sup> Cette relation est  $\frac{d^2u}{dydz} = \frac{1-I'}{1+I'}\theta$ ,  $u$  étant le petit déplacement en question ; elle n'est exacte que pour une section elliptique.

que les divers points des sections d'un prisme rectangle tordu se déplacent inégalement dans un sens parallèle aux arêtes, ou que ces sections ne restent pas planes, mais se *gauchissent* pour prendre une forme analogue à celle d'un paraboloidé hyperbolique, ou d'une double aile de moulin à vent <sup>(1)</sup>, d'autant plus prononcée que les deux côtés des sections sont plus inégaux.

La nécessité de cette courbure de la section primitivement plane s'aperçoit facilement si l'on prend, pour le corps tordu



autour d'un axe central, l'ensemble de deux prismes ou cylindres parallèles et égaux, rendus solidaires par deux liens rigides de manière que leurs sections  $o'$ ,  $o''$  se regardent constamment par les mêmes points  $a'$ ,  $a''$ , astreints à rester sur une

même droite passant par l'axe  $O$  autour desquels on les tord simultanément. Les axes particuliers des deux cylindres se changeront en deux hélices, auxquelles les sections  $o'$ ,  $o''$  resteront sensiblement normales; en sorte que si chacune de ces deux sections partielles est supposée rester plane, leur ensemble, ou la section totale, ne pourra faire un seul plan. Or quelque chose de semblable doit avoir lieu, on le conçoit, pour les deux extrémités d'une section rectangle très-allongée; le plan de cette section se changera donc en une sorte de surface gauche si l'on tord le prisme auquel elle appartient.

Une section carrée elle-même ne saurait rester plane; elle doit nécessairement s'infléchir de manière à couper normalement, à ses quatre angles, les quatre arêtes saillantes du prisme, devenues des hélices. Remarquons en effet généralement que lorsqu'un prisme ou cylindre tordu ou fléchi, etc., est sollicité seulement vers ses extrémités, ses faces latérales n'éprouvent, intermédiairement, que la pression de l'atmosphère; et comme celle-ci, qui n'agit que normalement, ne tend nullement à faire

(1) Cette interprétation géométrique a été donnée pour la première fois à un Mémoire du 20 novembre 1843 (*Comptes rendus*, t. XXIII, p. 4488). Il n'y a pas lieu de s'arrêter à ce qui y est dit du prisme à base losange, l'erreur reconnue y étant plus grande que pour le prisme rectangle.

glisser les éléments de ces faces extérieures devant les petites faces parallèles intérieures (si la contexture est d'égale élasticité en tous sens), les petites lignes matérielles intérieures qui leur étaient normales *leur sont encore normales* après la déformation. Les sections primitivement planes doivent donc affecter la forme de surfaces courbes, normales aux surfaces latérales déformées, et par conséquent aux arêtes vives saillantes ou rentrantes devenues des hélices, suivant lesquelles se coupent deux parties adjacentes de ces faces devenues courbes.

Et toutes les autres hélices, dans lesquelles se sont transformées les arêtes non vives, doivent se projeter, sur les éléments superficiels correspondants de la section, tangentiellement à son contour, puisque le contour et chaque arête ont une normale commune, qui est dans le plan de cet élément.

Il en résulte de suite que c'est seulement quand son contour est circulaire que la section reste plane et perpendiculaire à l'axe de torsion, car toute hélice projetée sur un plan perpendiculaire à son axe, donne un cercle dont le centre est sur cet axe. (V. note du n° 156, § 4, p. 244.)

C'est aussi, par conséquent, uniquement sur une section circulaire que les inclinaisons des fibres, ou les glissements et par conséquent les résistances partielles développées, sont proportionnelles aux distances des fibres à l'axe; en sorte que c'est seulement pour les cylindres à base de cercle que  $G(I + I')\theta$  donne le moment de torsion. Pour tout autre cylindre ou prisme cette formule donne un moment trop fort, parce que les fibres, en s'inclinant sur le plan primitif des sections, entraînent avec elles les éléments superficiels qui leur servent de base, de manière que les inclinaisons mutuelles des fibres et des éléments sont généralement moins considérables que si ceux-ci étaient restés dans leur plan primitif commun.

Les fibres et les éléments superficiels restent même tout à fait perpendiculaires les unes aux autres, comme on vient de voir, aux quatre angles des sections rectangulaires, en sorte que le danger de désagrégation et de rupture est nul en ces endroits, au lieu d'y être à son maximum comme le voulait l'ancienne théorie, qui conserve aux sections leur forme plane

primitive, et même celle de Cauchy qui, au lieu de leur vraie forme, revient à leur attribuer constamment celle d'un plan gauche ou paraboloidé hyperbolique (1).

Pour trouver la forme réelle de la surface courbe affectée par les sections, et, par suite, les glissements et la vraie valeur du moment, la méthode nouvelle dont ce grand analyste a approuvé la substitution à la sienne, a consisté, comme nous avons dit, à *se donner en partie les déplacements*, en ce qu'on les prend tels que le prisme éprouve une torsion uniforme, ou que les diverses sections transversales tournent les unes devant les autres d'angles proportionnels à leurs distances mutuelles, en se déformant toutes de la même manière, laissée d'abord inconnue, et qui est à déterminer par la condition que les faces latérales n'éprouvent aucune action dans le sens longitudinal; ce qui est, comme on voit, *poser aussi pour donnée une partie des forces*.

En introduisant dans les équations d'équilibre les données ainsi choisies ou établies, la première des trois équations indéfinies et la première des trois équations définies d'équilibre sont réduites à ne plus contenir que le déplacement *longitudinal*, qui même n'y entre que différencié par rapport aux deux coordonnées transversales si l'on ajoute aux données la supposition (ultérieurement justifiée) que la dilatation des fibres dans le sens de leur longueur est nulle ou constante (2).

(1) Voyez § 24 de la note du n° 156, p. 289.

(2) Car si  $u, v, w$  sont les projections du déplacement d'un point sur la coordonnée longitudinale  $x$  et sur les coordonnées transversales  $y, z$ , et si  $\theta$  est la torsion par unité de longueur du prisme, la donnée sur les déplacements s'exprime par  $\frac{dv}{dx} = -\theta z, \frac{dw}{dx} = \theta y$ ; expressions qui, substituées dans la première

équation indéfinie, en y ajoutant la supposition de dilatation  $\frac{du}{dx} = \text{constante}$ , la

réduit à la forme  $G \frac{d^2u}{dy^2} + 2H \frac{d^2u}{dydz} + G' \frac{d^2u}{dz^2} = 0$ , où  $G, G', H$  sont des coefficients dépendant de la texture supposée symétrique par rapport aux sections; et la donnée sur les forces réduit la première équation définie à

$$\left[ G' \left( \frac{du}{dx} + \theta y \right) + H \left( \frac{du}{dy} - \theta z \right) \right] - \left[ G \left( \frac{du}{dy} - \theta z \right) + H \left( \frac{du}{dx} + \theta y \right) \right] \frac{dz}{dy} = 0,$$

Non-seulement on reconnaît que de pareilles données sont compatibles entre elles, mais encore on obtient ce déplacement longitudinal au moyen d'une intégration, qui se trouve ramenée ainsi aux méthodes connues du calcul aux dérivées partielles; et comme on déduit de ce déplacement, par différentiation, les glissements sur les bases, et par suite les composantes de pression à appliquer sur leurs divers éléments pour obtenir l'équilibre, tout ce qu'on ne s'est pas donné en fait de déplacements comme en fait de forces se trouve déterminé.

En égalant, au moment supposé connu des forces extérieures autour de l'axe de torsion, le moment des pressions extrêmes dont a ainsi trouvé l'expression analytique, on tire la valeur cherchée de la torsion  $\theta$ , par unité de longueur, du cylindre ou prisme.

Cette méthode, appliquée à un cylindre elliptique, fournit précisément l'expression très-simple  $G \frac{4I'}{I+I'} \theta$  que Cauchy avait trouvée pour le prisme rectangle. Mais en employant la même méthode pour ce dernier solide, on obtient des expressions en séries convergentes de sinus circulaires et de sinus hyperboliques dont les divers termes sont faciles à calculer en s'aidant des tables dressées par M. Guderman pour ces dernières transcendentes. Le moment de torsion auquel on arrive ainsi pour le prisme rectangle s'accorde avec celui que donne la formule Cauchy quand ce prisme est très-plat; mais il n'en est que les 0,843, ou il a pour valeur  $0,843 G(I+I')\theta$  quand la section est un carré. Si l'on a donc deux barres, l'une ronde, l'autre carrée, de même matière et dont les deux sections ont le

où  $\frac{dz}{dy}$  est tiré de l'équation du contour d'une section; car comme  $\frac{du}{dy} = \theta z$ ,

$\frac{du}{dz} + \theta y$  expriment les glissements longitudinaux sur des faces perpendiculaires aux  $y$  et aux  $z$ , les quantités entre crochets représentent les composantes, suivant les  $x$ , des pressions sur l'unité de ces faces. Ces équations peuvent être réduites, par un changement de coordonnées, à la même forme simple qu'elles prennent quand on a  $H = 0$ , comme nous l'avons remarqué en 4853 (Appendice complémentaire, p. 774).

même moment d'inertie autour de leur centre, la seconde exige, au bout du même levier, une force moindre que l'autre dans le rapport de 0,843 à 1 pour prendre la même torsion  $\theta$  ; résultat qu'avaient manifesté, à peu de chose près, les expériences de Duleau et de Savart, et que Navier ne savait comment expliquer, si ce n'est en l'attribuant à une différence présumée de qualité dans les fers.

De même que dans l'établissement des conditions de résistance à la *rupture éloignée* par flexion pure, on doit prendre pour le *point dangereux* ou le plus exposé celui où se trouve la grandeur la plus considérable de la dilatation linéaire à laquelle il s'agit d'imposer une limite, de même, dans la résistance à la rupture ou à l'énervation par torsion, on doit prendre pour ce point celui où le glissement sur une section est le plus grand, c'est-à-dire où l'inclinaison d'une fibre sur l'élément correspondant de la section est le plus considérable. Ce point est toujours sur le contour de la section ; mais, tandis que dans la théorie commune, et même dans celle de 1829 de Cauchy, ce point serait l'un de ceux qui se trouvent le plus éloignés de l'axe de torsion, et par conséquent serait l'un des angles de la section rectangle ou carrée, la théorie nouvelle le place au contraire à l'endroit du contour le plus proche de l'axe, c'est-à-dire aux milieux des plus grands côtés si la section est rectangle, ou aux extrémités du petit axe si la section est elliptique, etc., ce qui s'explique en considérant que c'est en cet endroit que la normale à l'élément de la section s'incline sur l'axe de torsion dans le sens le plus directement opposé à celui où s'incline la fibre, en sorte que ces deux inclinaisons sur l'axe *s'ajoutent* pour composer le glissement, qui est l'inclinaison *mutuelle* de cette normale et de la fibre ; au lieu que pour les points les plus éloignés de l'axe, les deux inclinaisons partielles, plus fortes chacune, mais de même sens, se soustraient l'une de l'autre, et donnent pour résultat le glissement minimum ; et même zéro ou une compensation exacte et un glissement nul aux angles saillants comme on a dit.

Le même fait de la situation du plus grand glissement aux points du contour les plus rapprochés de l'axe se reproduit



pour plusieurs sections d'une autre forme : par exemple, la section en étoile à quatre pointes et la section en triangle équilatéral ; mais il ne saurait être général, car nous avons vu qu'aux angles rentrants, quand il y en a, le glissement est nul comme aux angles saillants, et il serait faible aux endroits offrant un creux arrondi, mais étroit. Même, dans les sections en double spatule, comme celles des rails de chemin de fer, les points dangereux se trouvent dans des situations intermédiaires entre les points du contour qui sont le plus rapprochés et ceux qui sont le plus éloignés du centre ou de l'axe de torsion.

La même analyse fournit en effet toutes les circonstances de la torsion de prismes ou cylindres ayant une infinité d'autres bases que l'ellipse et le rectangle, et l'on pourrait même, par son moyen, avec un travail suffisant, les déterminer par approximation pour une base de forme donnée quelconque. Qu'on prenne, en effet, pour le petit déplacement longitudinal  $u$ , qui détermine la forme nouvelle de la surface primitivement plane des sections, une somme quelconque d'un nombre infini ou fini de termes, soit algébriques entiers, soit transcendants en  $y, z$  (coordonnées transversales appelées  $u, v$  à la note du n° 156), avec la seule condition de satisfaire à l'équation indéfinie du second ordre, ce qui est toujours facile en déterminant une partie des coefficients dont les termes sont affectés, en fonction des autres qu'on laisse indéterminés ; et qu'on substitue cette expression de  $u$  dans l'équation générale définie qui exprime la nullité des pressions sur les faces latérales, on a une équation différentielle du premier ordre qui n'est autre chose, en  $y$  et  $z$ , que celle des contours répondant à l'expression monôme ou polynôme choisie pour le déplacement longitudinal ; et cette équation, qui s'intègre toujours d'elle-même <sup>(1)</sup>, donne, pour le contour, une équation, ou plutôt une

---

(1) En effet (note précédente), en se bornant au cas  $H = 0, G = G'$ , le premier membre de  $\left(\frac{du}{dz} + Ay\right) dy + \left(\frac{du}{dy} - Az\right) dz = 0$  est une différentielle exacte si  $u$  est une des fonctions de  $y, z$ , d'une infinité de formes, algébriques ou transcendants, qui satisfont à  $\frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2} = 0$ . (Voyez note du n° 156, § 40, p. 255.)

infinité d'équations non différentielles, différant entre elles par la grandeur de la constante qui occupe seule le second membre, et dont les valeurs diverses suffisent pour faire varier considérablement la forme représentée. On a donc une infinité de classes d'un nombre infini de contours de sections planes dont on peut connaître le changement en surfaces courbes, produit par la torsion du prisme ou cylindre auquel elles servent de base, ce qui fournit immédiatement le moment de torsion et les conditions de résistance à la torsion qui leur sont relatifs.

Au nombre de ces sections est le triangle équilatéral, qui donne la formule de torsion la plus simple après le contour circulaire. Au nombre est aussi une courbe du huitième degré en forme de croix de Malte ou d'étoile à quatre pointes arrondies, donnant pour moment de torsion les 0,537 seulement de ce qu'on aurait en prenant l'expression  $G(I + I')^0$  de l'ancienne théorie, ce qui prouve que les axes ou arbres tournants de machine dits *emplumés* ou à côtes saillantes, qui résistent assez bien à la flexion, sont fort peu propres à résister à la torsion (V. note du n° 156, § 37, p. 335-343). Au nombre est même une section composée de deux orbés séparés, presque circulaires, bases de deux cylindres parallèles supposés tordus simultanément ou solidairement autour d'un axe intermédiaire (*idem*, § 36, p. 332); on voit, par le résultat, qu'ils ne résistent que pour un moment égal à la somme de ceux qui se développeraient si on les tordait séparément autour d'axes intérieurs; et un raisonnement simple et général (*idem*, § 15, p. 265) vérifie que le moment de réaction de torsion d'un prisme ou cylindre a la même grandeur, quel que soit l'axe intérieur ou extérieur, parallèle à ses arêtes, autour duquel on lui fait éprouver une torsion déterminée très-petite.

La même analyse, appliquée dans un cas fort simple, donne les 0,84 de  $G(I + I')^0$  pour le moment de torsion d'un prisme ayant pour base une courbe du quatrième degré, en forme de carré curviligne à angles un peu arrondis. Comme le coefficient numérique diffère extrêmement peu de 0,843462 trouvé pour le carré parfait à côtés rectilignes, mais qui a été fourni par une analyse transcendante non susceptible d'être exposée dans les cours de mécanique pratique, on voit que l'on peut dé-

montrer dans ces sortes de cours, en se bornant à des approximations, les résultats principaux de la théorie nouvelle de la torsion.

### XXXVII. Torsion présentée élémentairement.

— On peut en effet établir élémentairement, et même de plusieurs manières (entre lesquelles l'expérience de l'enseignement pourra seule fixer le choix pour chaque cours) les théorèmes exprimant les équations de cette théorie <sup>(1)</sup>. Ainsi, en concevant le prisme comme partagé en fibres ou éléments parallépipèdes rectangles dont les quatre arêtes latérales sont parallèles aux siennes ou à l'axe de torsion, on évalue, comme on verra à la note du n° 156 (§ 5, p. 245), les *glissements longitudinaux*, qu les petites diminutions éprouvées par les angles primitivement droits de ces arêtes avec les côtés des bases des éléments, en additionnant les diminutions que ces angles éprouveraient si les arêtes des éléments se déplaçaient seules en vertu de la torsion qui les change en hélices, avec les diminutions qui auraient lieu si c'étaient seulement les petites bases élémentaires rectangles qui prissent une inclinaison, ou leurs quatre côtés qui changeassent légèrement de direction en vertu du gauchissement des sections planes dont ces bases font partie. Et comme les actions ou composantes de pression longitudinales sur les quatre faces latérales des éléments solides sont proportionnelles à ces glissements, dont les grandeurs ont sur les faces opposées deux à deux une partie commune qui disparaît, on conclura, au § 6 (p. 248-250), en posant simplement l'équilibre de quatre forces de même direction, la propriété générale ou *indéfinie* dont doivent jouir toutes les surfaces légèrement courbes dans lesquelles se changent les sections planes des prismes tordus; propriété dont on donne au § 7 (p. 251)

---

(1) Nous ne parlons pas de l'essai, fait par Tredgold, de ramener la torsion d'un prisme à une sorte de flexion autour d'une diagonale joignant un point d'une de ses bases avec un point opposé de l'autre base (section VI de l'*Essai sur la résistance du fer coulé*, traduite de la 2<sup>e</sup> édition, 1826, ou n° 233 de la nouvelle édition anglaise). Cette sorte de considération ou de comparaison ne conduit à aucun résultat qu'on puisse regarder même comme approché.

une démonstration plus directe, mais encore fondée sur le principe ou lemme général d'addition pure et simple des effets très-petits dus aux deux causes de glissement.

Mais on peut se passer de ce lemme, ou des suppressions, et démontrer très-simplement ou directement, d'une autre manière qu'aux §§ cités de la note du n° 156, ces deux propriétés de la surface des sections, en faisant usage seulement des considérations rigoureuses et si connues de projections de lignes droites et de lignes brisées (1).

(1) Qu'on prenne en effet pour unité de longueur la petite distance des deux sections planes transversales voisines dont faisaient partie les bases rectangulaires B, B' d'un des petits éléments parallépipèdes considérés. Une rotation, d'un petit angle  $\theta$ , de la deuxième section, inclinera les quatre arêtes de cet élément, de sorte que la projection de l'une d'elles,  $\alpha$ , sur un plan perpendiculaire à l'axe de rotation ou de torsion, sera le produit de  $\theta$  par la distance de l'arête à cet axe; et les projections de la même arête  $\alpha = 4$  sur les deux côtés adjacents primitifs  $c$ ,  $c'$  de la petite base B seront, abstraction faite du signe, les produits de  $\theta$  par les distances respectives, au même axe de torsion, de ces côtés  $c$ ,  $c'$  prolongés; tandis que la projection de cette même arête sur une parallèle à l'axe est  $= 4$ , à cela près d'une quantité de second ordre à négliger.

Or, supposons que le côté  $c$  de la petite base B de l'élément se soit courbé légèrement à cause du gauchissement possible de la section dont elle fait partie, et appelons  $i$  la projection, sur sa tangente menée au pied de l'arête  $\alpha$ , de l'unité de longueur portée sur l'axe de rotation, nous aurons, pour la projection de l'arête  $\alpha$  sur cette même tangente, la somme des projections de ses trois projections rectangulaires ci-dessus; cette somme sera simplement  $i$  plus ou moins le produit de  $\theta$  par la distance du côté  $c$  à l'axe, car la troisième projection de l'arête  $\alpha$ , celle qui a été faite sur le deuxième côté adjacent  $c'$ , donnera zéro pour quote-part. En appelant  $i_1$  une projection semblable, faite sur la tangente menée à la deuxième extrémité du même côté  $c$  devenu courbe, la projection, sur cette deuxième tangente, de l'arête  $\alpha'$  aussi  $= 4$ , adjacente à cette deuxième extrémité du petit côté  $c$ , sera  $i_1$  plus ou moins produit de  $\theta$  par la distance du côté  $c$  à l'axe; en sorte qu'à cause de cette dernière partie qui est commune, la différence des projections respectives, sur les deux tangentes, des deux arêtes  $\alpha$  et  $\alpha'$  adjacentes aux deux extrémités du côté  $c$ , se réduira à  $i_1 - i$ . Or les actions tangentielles qui s'exercent, parallèlement aux arêtes, sur les deux faces latérales perpendiculaires au côté  $c$ , ont pour intensité le produit d'un coefficient d'élasticité tangentielle G multiplié par les projections dont on vient de parler, qui mesurent les glissements estimés dans le sens longitudinal ou des arêtes. Comme ces forces longitudinales doivent être tenues en équilibre par celles qui s'exercent, dans une direction parallèle, sur les deux autres faces latérales du même élément parallépipède dont on abstrait la pesanteur et dont on suppose que les bases ne sont point pressées normalement, on en conclut

$$G(i_1 - i) + G'(j_1 - j) = 0$$

**XXXVIII. Suite de la méthode mixte. Flexion généralement inégale et avec glissements.** — Le problème de la flexion est du même genre que celui de la torsion, mais sa solution exacte et complète, par la même méthode mixte, est plus compliquée, et nous ne l'avons obtenue

si  $G'$  est un second coefficient d'élasticité de la matière dont on suppose la contexture symétrique dans les sens de division des éléments, et si  $j, j_1$  représentent la même chose pour le deuxième côté  $c'$  de la base, aussi devenu courbe, que  $i, i_1$  pour le premier  $c$ . Comme ces quatre petites quantités sont aussi les pentes ou inclinaisons des quatre tangentes sur le plan primitif de la section perpendiculaire à l'axe de torsion, on voit que si la contexture est la même dans tous les sens transversaux, ou si  $G = G'$ , les surfaces légèrement courbées affectées par les sections primitivement planes sont de celles dont la pente croît dans un sens, à partir d'un point quelconque, autant qu'elle décroît dans un sens perpendiculaire, ou dont les rayons de courbure, mesurés dans deux plans normaux à angle droit, sont partout égaux et opposés.

Aux points du contour des sections, vu la conservation de la normalité des petites lignes matérielles primitivement normales à la surface latérale (qui n'éprouve que la pression normale de l'atmosphère), il faut que les arêtes du prisme ou cylindre, comme toutes les autres lignes tracées sur cette surface latérale après sa déformation, se projettent tangentiellement au contour sur le plan mené au même point tangentiellement à la surface courbe de la section. D'où l'on déduit, si  $y$  et  $z$  sont les deux coordonnées rectangulaires transversales, supposées prises parallèlement aux directions primitives des éléments solides dans lesquels on a conçu divisée la tranche mince comprise entre deux sections, l'origine étant prise sur l'axe de torsion, que le rapport  $\frac{dz}{dy}$  des projections, sur ces coordonnées,

d'un élément linéaire du contour, doit être égal au rapport  $\frac{j + \theta y}{i - \theta z}$  des

deux valeurs qu'on vient de trouver pour les projections d'une arête  $\alpha = 4$  sur deux petites droites rectangulaires  $c, c'$  qui sont, après les déformations, sur le plan tangent à la section. Si les élasticités sont différentes dans deux sens  $y, z$  regardés comme principaux quant à la contexture, il faut multiplier respectivement par les coefficients  $G$  et  $G'$  le numérateur et le dénominateur de cette fraction, qui représenteront après cette multiplication les composantes longitudinales de pression sur l'unité de petites faces perpendiculaires aux  $z$  et aux  $y$ ; composantes dont les expressions seraient plus compliquées, et produiraient l'équation définitive de la note précédente (p. xxxvlij) si la contexture n'était symétrique que par rapport aux sections.

Nous espérons que cette démonstration, de plusieurs manières élémentaires, des deux principes ou des deux équations fondamentales de la théorie nouvelle de la torsion, qui a été approuvée par l'Institut de France, et confirmée par des géomètres de l'Allemagne comme seule vraie, pourra faciliter son introduction dans l'enseignement des savants professeurs, qui sauront lui imprimer leur cachet d'habituelle lucidité, et qui, en opérant comme aux §§ 40 et suivants de la note ci-après du n° 456, pourront en déduire, sans calcul différentiel, les diverses conséquences pratiques.

qu'après de longues recherches <sup>(1)</sup>. Les sections ne restent planes et normales que quand la flexion est égale d'un bout à l'autre ou s'opère en arc de cercle. Dans tout autre cas les sections s'inclinent sur la fibre centrale, et se gauchissent ou se changent en même temps en surfaces courbes. La propriété de ces surfaces, relative aux points du contour, est la même que dans la torsion, car elles coupent encore normalement, en tous ces points, les faces latérales déformées du prisme; mais, aux points intérieurs, la somme algébrique des deux courbures principales de la surface (ou ce que nous avons appelé  $i, -i + j, -j$  à la note du n° précédent), au lieu d'être nulle partout comme dans la torsion, doit avoir une grandeur proportionnelle à l'une des deux coordonnées transversales, celle qui se mesure parallèlement au plan de flexion. La donnée sur les déplacements n'est autre chose que ce qui caractérise ou définit une flexion, à savoir qu'à travers chaque section les dilations des diverses fibres varient uniformément dans un certain sens transversal, ou sont proportionnelles à la même coordonnée dont on vient de parler. La donnée sur les forces consiste en ce que les faces latérales n'éprouvent aucune action longitudinale ni transversale ni normale. Et il faut, pour rendre le problème déterminé, en joindre une autre; elle consiste à supposer qu'à l'intérieur les fibres ou éléments longitudinaux n'exercent mutuellement aucune action transversale, ou perpendiculaire à leur longueur, tout en pouvant agir les uns sur les autres dans le sens de celle-ci; supposition ou donnée complémentaire dont l'analyse prouve la compatibilité avec les autres ainsi qu'avec les conditions générales de l'équilibre d'élasticité, et qui se trouve ainsi justifiée ultérieurement.

En exprimant analytiquement les données choisies comme on vient de dire, on déduit d'abord que le moment de flexion, s'il varie, ne peut le faire que d'une manière uniforme d'un bout à l'autre du prisme ainsi sollicité sur les seules bases extrêmes, en sorte que ce moment s'exprime linéairement en fonction de l'abscisse comptée longitudinalement. Une première et facile

---

(1) Mémoire sur la flexion des prismes, sur les glissements, etc., lu le 20 novembre 1854. Journal Lipoville, 1856.

intégration des équations qui en résultent donne les expressions des déplacements des points dans trois sens, mais avec des fonctions arbitraires. On parvient à réduire ces fonctions à une seule; et la détermination de cette fonction des deux coordonnées transversales dépend de l'intégration d'une équation du second ordre aux dérivées partielles, sous la condition exprimée par une équation au contour. Ces deux équations indéfinie et définie sont celles qui caractérisent, comme nous venons de le spécifier, les surfaces légèrement courbes dans lesquelles se changent les plans des sections, car la fonction inconnue représente la petite ordonnée de cette surface. L'intégration donne une série transcendante quand le contour des sections est un rectangle, mais simplement *une fonction entière du troisième degré* pour une multitude infinie de contours courbes, au nombre desquels se trouvent l'ellipse et le cercle.

De cette analyse, parfaitement rigoureuse tant que les déformations restent extrêmement petites, et dont les conclusions générales peuvent s'étendre à tout prisme ou cylindre de matière homogène quelles que soient la forme du contour des sections et la variabilité de l'élasticité en divers sens autour de chaque point, l'on déduit que si la surface latérale n'éprouve d'un bout à l'autre qu'une action ou nulle ou normale et constante comme celle de l'atmosphère, et si ses bases sont sollicitées : 1° normalement par des forces qui varient, sur leurs divers éléments superficiels, comme une même coordonnée transversale, mais dans deux proportions qui peuvent être différentes sur ces deux bases, bien qu'elles y aient des résultantes égales et opposées; 2° tangentiellement, par d'autres forces, dont les intensités et les directions, les mêmes sur les éléments homologues de ces mêmes bases, dépendent, et de la différence des deux proportions dont on vient de parler, et de la forme du contour; le prisme ainsi sollicité fléchira en arc de cercle quand les deux proportions en question seront les mêmes, ou les forces normales égales aux points homologues des deux bases, et quand les forces tangentielles seront nulles; et, dans tout autre cas, il fléchira suivant les courbes que fournit la théorie ordinaire (n° X à XV ci-dessus), dont les formules sont, ainsi, exactement vraies en ce qui concerne les tractions et les dila-

tations longitudinales des diverses fibres, ainsi que les moments de flexion <sup>(1)</sup>, sous la condition du mode particulier ici supposé d'application et de distribution des forces sur les bases extrêmes, forces dont les composantes tangentielles ajoutées ensemble pour un certain sens (qui diffère quelquefois de celui de flexion, n° XVI) donnent pour somme l'effort tranchant ou transversal, égal d'un bout à l'autre, et dont le produit par le bras de levier forme le moment de flexion en un point quelconque.

Mais la théorie nouvelle, en offrant une vérification de la théorie ancienne dans ce que celle-ci donne, et sous une condition qu'elle spécifie, révèle des faits que la théorie ancienne ne donne pas, savoir le changement léger de la forme du contour des sections, et, de plus, leur inclinaison sur les fibres, ainsi que leur incurvation, et par conséquent l'existence de *glissements* transversaux de ces sections les unes devant les autres, ou longitudinaux des fibres les unes contre les autres, circonstances qui augmentent les flèches de flexion, et peuvent influencer sur les grandeurs des réactions de certains appuis (note du n° XVII), et qui, surtout, modifient quelquefois d'une manière sensible l'établissement des conditions de résistance <sup>(2)</sup>.

Ces résultats fournis par l'analyse, mise en œuvre légitimement au moyen de suppositions que la suite justifie, peuvent être vérifiés à posteriori, soit par un calcul, comme on verra

(1) C'est-à-dire que si,  $x$  étant une coordonnée transversale,  $p_0$  et  $p_1$  deux constantes linéaires,  $E$  le module d'élasticité d'extension, les éléments  $d\omega$  des deux bases  $\omega$  sont sollicités normalement par des forces  $\frac{E}{p_0} x d\omega$ ,  $\frac{E}{p_1} x d\omega$ , et tangentiellement par des forces dont la somme de composantes dans le sens  $x$  est  $P = \frac{EI}{\alpha} \left( \frac{4}{p_0} - \frac{4}{p_1} \right)$  (I étant le moment d'inertie de la section et  $\alpha$  la longueur du prisme), le moment de flexion sera, à une distance  $x$  d'une des extrémités,  $P(\alpha - x)$ , et la dilatation de la fibre dont l'ordonnée est  $z$  sera  $\frac{P(\alpha - x)}{EI} z = \frac{\alpha - x}{\alpha} \left( \frac{4}{p_0} - \frac{4}{p_1} \right) z$

(2) Note du n° 454, p. 216-236; et, aussi, §§ 44, p. 383, et 58, p. 453, de la note du n° 156.



à l'Appendice III (§§ 36, 37, p. 612, 613), soit d'une manière géométrique et élémentaire comme on verra à la note du n° 80 (§§ 3, 4, 5, p. 34 à 39) en ce qui concerne la flexion proprement dite, et, à celles des n° 152 (§§ 2, 3, 4, p. 189 à 190) et 156 (§§ 45, 46, p. 389 à 413) en ce qui regarde les glissements qui l'accompagnent, enfin sous une forme didactique et à peu près synthétique à l'Appendice II (§ 13, p. 537). La démonstration élémentaire <sup>(1)</sup>, pour la flexion, est fondée sur ce lemme, que quand des fibres traversant une même section éprouvent, suivant leur longueur, des dilatations ne variant que *linéairement* avec les coordonnées mesurées sur cette section, il est toujours possible de modifier leurs petites bases de manière que ces fibres, *sans cesser d'être contiguës*, subissent les mêmes contractions transversales, suites de leurs dilatations longitudinales (n° XXXII), que si elles formaient autant de petits prismes isolés, en sorte qu'elle ne se pressent ni ne s'attirent nullement l'une l'autre par leurs faces latérales dans un sens perpendiculaire à leur longueur. Un lemme semblable a besoin déjà d'être invoqué, même pour démontrer la loi plus simple et généralement admise, de l'allongement d'un prisme, sans flexion, quand il n'est que tiré d'une manière uniforme sur ses deux bases (note du n° 21, § 3, p. 16).

Et l'on obtient approximativement les grandeurs des glissements, quand une pièce mince est sollicitée de champ à fléchir, lorsque sa largeur est beaucoup plus petite que son épaisseur dans le sens de sollicitation, en posant l'équilibre d'un petit élément longitudinal. On en déduit la forme de la *doucine* du troisième degré que les sections doivent affecter, en tenant compte des contractions transversales qui accompagnent les dilatations. On prouve d'une autre manière, aussi fort élémentaire, que les fibres d'une pareille pièce doivent adhérer ensemble et exercer les unes sur les autres, longitudinalement, des actions considérables, sans lesquelles la pièce solide ne résisterait pas plus à la flexion que plusieurs planches minces

---

<sup>(1)</sup> Fin du Mémoire *sur la flexion*, de 1854, imprimé au Journal Liouville 1856, art. 31. Voir aussi note ci-après du n° 80, p. 35, et Appendice II, p. 534; et aussi, Appendice complémentaire § 79, 4°, p. 767.

superposées, de même largeur et d'égale épaisseur totale, comme on a dit au n° XVIII, p. cxxv. Or on en déduit la variation approchée des glissements, et la nécessité de la courbure des sections en doucine (note du n° 156, § 45, p. 389).

### XXXIX. Sur les solutions indirectes en général.

**Remarque d'Ampère.** — Les solutions dont on vient de parler, et même les équations particulières dont on doit les tirer, s'obtiennent, comme l'on voit, d'une manière plus ou moins indirecte, en prenant plusieurs données dont on reconnaît ensuite l'accord mutuel, ou la compatibilité entre elles ainsi qu'avec les lois de l'élasticité, c'est-à-dire en faisant plusieurs suppositions dont la légitimité est ultérieurement vérifiée. Et même, le plus souvent, au lieu de déduire, de l'équation supposée donnée du contour des sections, celle des surfaces courbes dans lesquelles leurs plans se changent, on est obligé de poser celle-ci, en les astreignant à satisfaire à leur équation différentielle dite indéfinie, et d'en déduire les contours correspondants.

Cette marche ne doit pas plus étonner qu'empêcher de regarder les résultats comme exacts. En mathématiques, les solutions tout à fait directes, par dégagement des inconnues, sont extrêmement rares. On ne résout le plus souvent les problèmes que par essai et vérification. Cela se voit dès l'arithmétique par les opérations de l'extraction des racines, et même de la division numérique, et par toutes les solutions dites de fausse position, qui conduisent au résultat soit d'un seul coup soit par une suite d'approximations. Le calcul intégral n'est guère qu'une collection de résultats inverses; on peut remarquer spécialement que l'intégration des équations aux dérivées partielles, dans les problèmes analogues à ceux de la chaleur, ne s'obtiennent qu'en choisissant et vérifiant quelque solution particulière dont on part pour composer par addition la solution générale et complète en une série dont on détermine ensuite les coefficients, en montrant finalement que cette solution obtenue est unique par cela seul qu'elle satisfait à toutes les conditions du problème, vu qu'il est complètement déterminé.

C'est précisément ce que nous faisons pour nos solutions de questions d'extension, torsion et flexion des pièces élastiques.

C'est ainsi qu'en physique même la découverte des lois des phénomènes s'opère par la méthode d'*explication*, comme disait Ampère, ou de *synthèse inverse*, bien plus que par la déduction directe ou par l'induction pure que préconisait Bacon sans l'avoir jamais appliquée <sup>(1)</sup>.

**·XL. Problème le plus général de ce genre, traité par M. Clebsch.** — Ce professeur éminent, qui de Carlsruhe vient de passer à l'Université de Giessen, a eu l'idée d'embrasser dans une même analyse toutes les solutions ci-dessus <sup>(2)</sup>, en partant seulement de nos données sur les actions extérieures latérales, et de ce que nous y ajoutions constamment, sauf vérification, pour l'intérieur; et il a bien voulu donner notre nom au problème général: « Déterminer quels sont les systèmes des forces qu'il faut appliquer aux bases extrêmes d'un prisme pour que, ses faces latérales étant fibres, les sections intérieures *longitudinales* (ou les faces des fibres) ne supportent rien dans le sens transversal, ou perpendiculaire aux arêtes, et quels sont les déplacements ou les diverses petites déformations qui résultent de cette application. » Il trouve que les déplacements transversaux qui y satisfont sont exprimés par des fonctions entières du troisième degré des coordonnées, et que les déplacements longitudinaux se composent d'une pareille fonction, plus une autre qui dépend de la solution d'une équation du second ordre aux dérivées partielles à deux variables. Et il remarque que cette dernière fonction peut être décomposée en quatre autres, qui, isolément, seraient relatives aux cas: 1° d'extension, 2° de torsion, 3° et 4° de flexions simples autour des deux axes principaux d'inertie des sections. Ces quatre sortes de déformations sont les seules que puissent prendre les prismes ou cylindres,

<sup>(1)</sup> Ampère. *Essai sur la philosophie des sciences*, 1834 et 1843.

<sup>(2)</sup> *Theorie der Elasticität Fester Körper*, 1862.

<sup>(3)</sup> C'est-à-dire que si  $x$  est la coordonnée longitudinale, on ait, partout, dans l'intérieur du prisme, comme sur ses faces latérales, les composantes de pression  $p_{xy}$ ,  $p_{yz}$ ,  $p_{zx}$  nulles, mais non pas les composantes longitudinales  $p_{xx}$ ,  $p_{yy}$ .

sollicités sur leurs bases de manière que, sur les faces longitudinales intérieures, il n'y ait d'actions que parallèlement aux arêtes; et il faut, pour que cela ait lieu ainsi, que les forces soient appliquées et distribuées, sur les bases, des diverses manières que nous avons déterminées dans nos deux mémoires.

Mais M. Clebsch observe ensuite, comme nous, que lorsque, au lieu de ces forces, on en applique d'autres *qui agiraient de la même manière sur un corps rigide*, c'est-à-dire qui aient la même résultante et le même couple résultant que celles-là, mais qui soient autrement appliquées et réparties vers les extrémités des prismes, s'il en résulte quelques actions transversales sur des faces longitudinales intérieures dans de petites étendues à partir de ces mêmes extrémités de prismes d'une certaine longueur, cela n'empêche pas les formules de donner toujours leur extension, leur torsion et leurs flexions avec toute l'approximation désirable.

De nombreuses expériences, ainsi que nous l'avons déjà dit au n° XXXV, prouvent en effet cette presque indifférence du mode d'application et de distribution des forces vers les extrémités; et cela, non-seulement pour les deux cas, cités à ce numéro, d'extension simple d'une tige et de torsion d'un cylindre circulaire, qui se résolvent exactement par la méthode purement *inverse*, mais aussi pour ceux de flexion, dont les formules, fournies par la méthode *mixte*, l'étaient déjà par les hypothèses de la théorie ancienne; théorie qui supposait tacitement (il faut le remarquer) ce que la nouvelle exige et énonce, à savoir l'action, sur les bases, de forces distribuées suivant le mode assigné pour toutes les sections intermédiaires, et qui n'est jamais réalisé sur les sections extrêmes. La même presque indifférence du mode de distribution doit avoir lieu pour l'emploi des formules *nouvelles* qu'a fait découvrir la même méthode mixte ou semi-inverse, simple instrument servant à appliquer les mêmes principes à des cas plus complexes.

Les solutions exactes que donnent ces deux méthodes, qui n'en font réellement qu'une, fournissent pour l'extension, la torsion, les flexions d'un prisme, une sorte d'état-type ou limite, susceptible d'être comparé à celui qui est déterminé en

physique mathématique dans beaucoup de phénomènes d'un autre genre. Il est, pour les diverses sections, à une distance sensible de chaque extrémité, ce qu'est l'état *permanent* d'un écoulement d'eau, ou l'état de *règlement* auquel arrive le mouvement d'une machine quelques instants après celui où elle a commencé à se mouvoir, vu que l'action des causes constantes efface promptement l'effet des causes initiales. C'est un état qui se continue de lui-même une fois qu'il est atteint, et vers lequel converge promptement jusque-là l'état réel du prisme étendu, tordu ou fléchi, quel que soit le mode d'application des forces données vers les extrémités, à mesure que l'on considère des sections de moins en moins voisines de celles-ci; car, ici, le règlement s'opère par l'*espace* et non par le *temps*.

On le vérifie encore en remarquant que des forces qui se font équilibre sur une petite partie d'un prisme (en caoutchouc, par exemple), telles que celles qui viennent des mâchoires d'une tenaille, ne produisent guère d'impression au delà de cette petite partie où elles agissent (note du n° 80, p. 41); d'où il suit, puisque deux systèmes de forces statiquement équivalents ne diffèrent l'un de l'autre que par des forces qui se font ainsi équilibre, qu'ils doivent, appliqués vers une même extrémité d'un prisme, produire sensiblement le même effet sur toute sa longueur hors une portion extrêmement courte vers cette extrémité.

On peut donc, quel que soit le mode d'application et de distribution, vers les extrémités, de forces ayant une résultante et un moment résultant déterminés, se servir très-approximativement des formules dont la rigoureuse exactitude exigerait un certain mode particulier de distribution et d'application.

Et il est heureux qu'il en soit ainsi, car, comme nous avons dit au n° XXXV, le mode réel lui-même, ou le mode censé donné, est toujours à peu près inconnu; et si le problème des déformations dues à des pressions connues aux divers points de la surface était résolu pour les prismes, comme M. Lamé l'a résolu pour la sphère, il resterait inappliqué *faute d'en connaître les données* dans chaque cas. On ne connaît en effet jamais que les résultantes et les moments résultants des forces qui agissent sur un solide par l'intermédiaire d'autres solides. Et la solution

de ce grand problème de calcul intégral aux dérivées partielles, si jamais on la trouve, n'aura probablement pas d'autre usage que de démontrer d'une autre manière, en en faisant mieux voir l'approximation, les formules ci-dessus, connues ou nouvellement trouvées, d'extension, de torsion et de flexion, qui, dans les applications, serviront toujours exclusivement.

#### **XLI. Tiges infiniment minces. M. Kirchhoff.**

Ces formules sont d'ailleurs exactes quel que soit le mode d'application des forces aux extrémités des prismes, lorsque ceux-ci ont des dimensions transversales infiniment petites par rapport à leur longueur. M. Kirchhoff l'a démontré au moyen de considérations délicates appartenant, à proprement parler, plutôt à la cinématique qu'à la mécanique, car elles lui servent à exprimer analytiquement (voy. Appendice complémentaire §§ 95 et 96, p. 830 à 844) les déformations qu'un pareil solide est susceptible d'éprouver indépendamment des forces capables de les produire, en mettant pour seule condition que certaines quantités ne deviennent pas infinies vis-à-vis d'autres, ce qui revient à ce qu'il n'y ait rien de brusque dans les variations des diverses quantités d'un bout à l'autre de la tige dont on s'occupe.

Ces déformations ne peuvent être, comme le prouve son analyse, que des combinaisons de celles des espèces qui ont été considérées ci-dessus, c'est-à-dire, pour chaque tranche ou tronçon infiniment court, une extension ou contraction longitudinale commune à tous les éléments du second ordre, des extensions ou contractions transversales, aussi communes à tous, enfin des flexions en deux sens, et une torsion. Or on déduit de là, en y joignant toujours notre supposition, ultérieurement vérifiée, de pressions intérieures transversales nulles sur les sections longitudinales quand les forces ne sont appliquées qu'aux extrémités, la vérification de toutes nos formules (hors celles des glissements sans torsion, car ils sont infiniment petits du second ordre et négligeables dans un pareil solide). Nous avons déjà parlé (à une note du n° XXI) de l'extension possible de l'analyse de l'éminent géomètre-physicien de

Heidelberg, à des tiges naturellement un peu courbes, et un peu tordues ou *torses*, et, aussi, de grosseur variable lentement et graduellement.

**XLII. Emploi du potentiel des forces moléculaires, ou de leur travail entre l'état naturel et un état de torsion déterminé. Navier. Green. Gauss. Thomson. M. Clapeyron.** — C'est, comme nous avons dit au n° XXIII, en se servant de la méthode de la mécanique analytique de Lagrange, légèrement perfectionnée au moyen du calcul préalable du potentiel ou du travail virtuel *fini* de toutes les forces en jeu, pratiqué par Navier dès 1821, que les savants de l'Angleterre et de l'Allemagne ont traité les questions de l'élasticité. Green, d'abord, en 1837-1839, dans ses deux célèbres mémoires sur la lumière, a réduit par cette considération et en usant d'un raisonnement original (tiré de l'impossibilité du mouvement perpétuel), les coefficients des formules à *vingt-un* comme nous avons dit, ce qui ne préjudicie nullement à leur réduction à un nombre encore moindre par d'autres considérations qui sont toujours inévitablement invoquées; et il a posé et ingénieusement mis en œuvre les formules exprimant jusqu'aux quantités très-petites du second ordre, ces six quantités que nous appelons *dilatations* et *glissements* qui se présentent dans tous les calculs, et que le savant M. Macquorn-Rankine appelle *strains* (*fouitures*, déformations), tandis qu'il nomme *stresses* les six composantes de pression suivant les mêmes axes rectangulaires. On doit, sur le même sujet, à MM. Mac-Cullagh, Haughton, W. Thomson, Stokes, Maxwell, Kirchhoff, Clausius, Charles Neumann, Clebsch, et, antérieurement, à l'illustre Gauss, des vues nouvelles et d'utiles considérations que nous avons citées et dû discuter à l'Appendice V et à l'Appendice complémentaire. M. Rankine, surtout, a fait sur les lignes qu'il appelle *axes d'élasticité*, par rapport auxquelles certaines forces élastiques se distribuent symétriquement, un travail digne de remarque, où il classe les coefficients des formules (au point de vue où l'on en compte 21 distincts) et où il généralise, pour des axes coordonnés obliques, la considération des glissements, qu'il appelle

alors *quasi-distorsions* (1), et celle des composantes de pressions, ce qui lui permet d'expliquer diverses formes cristallines.

Le potentiel n'est autre chose, en ce qui regarde les forces moléculaires, que le travail qu'elles sont capables de fournir par détente jusqu'à annulation de leurs diverses résultantes ou des pressions à travers les faces des éléments, c'est-à-dire jusqu'à retour à l'état *naturel* ou sans pression ni tension (2). Comme sa valeur est égale à celle du *travail de déformation* du corps élastique dont on s'occupe, depuis son état naturel jusqu'à celui où on l'envisage, elle est la moitié de cette quantité dont la considération et le calcul, par M. Clapeyron, lui ont servi à résoudre quelques questions de pratique, principalement en ce qui regarde la résistance des ressorts (voy. n° LII) (3).

(Pour l'historique du problème des surfaces, vases ou plaques élastiques, voy. n° LVIII, LIX, LX.)

(1) Il les mesure, en considérant un petit parallélogramme dont les côtés sont des lignes matérielles parallèles à deux des axes coordonnés obliques, par le petit cheminement ou glissement d'un des cotés devant le côté opposé, divisé, non par leur distance, mais par la longueur d'un des autres cotés, ce qui donne toujours des expressions telles que  $\frac{dv}{dx} + \frac{d\omega}{dy}$ ,  $y$  et  $z$  étant les coordonnées obliques,  $v$ ,  $\omega$  les composantes ou projections obliques du déplacement d'un point dans leurs sens. (*On Axes of Elasticity and crystalline Forms*. Trans. of the Royal Society 1855.)

(2) Sa considération donne, par exemple, le vrai sens à ce que nous avons dit au n° XVIII, que la résistance à un glissement équivaut ou peut être attribuée aux résistances à une extension et à une compression simultanées dans des sens *diagonaux* ou obliques. (V. aussi § 6 de la note du n° 452, p. 493, et Appendice compl., p. 768.) On trouve bien en effet, au moyen de l'expression (499

$\Phi^1 = \frac{4}{2} a_{xxxx} \partial_x^2 + \dots$ , p. 788, du potentiel ou du travail par unité de volume

pour des déformations  $\partial_x, \dots, g_{xy}$ , et de la formule symbolique (225)  $a_{xyxy} = [(a_{xx}c_{xx} + 2y c_{yy})(2x c_{xy} + 2y c_{yy})]^2$  de la page 802, de transformation des coefficients pour de nouveaux axes coordonnés  $x', y'$  (l'axe  $z$  restant le même), que le travail mo-

léculaire de déformation  $\Phi^1$  par unité de volume, dû à des dilatations  $\partial_x = \frac{4}{2} g$ ,

$\partial_y = \frac{4}{2} g$  dans les deux directions rectangulaires anciennes  $x, y$ , est égal à celui

qui est dû au glissement  $g_{x'y'} = g$  pour les deux nouvelles  $x', y'$ , supposées faire un angle demi-droit avec celles-là.

(3) Le théorème de M. Clapeyron consiste, à proprement parler, en ce que le



**XLIII. Nombre des coefficients des formules de l'élasticité.** — Nous ne reproduirons pas ici l'historique, fort détaillé à notre Appendice V, de l'opinion qui s'est formée de la *dualité* des coefficients dans les formules des corps isotropes, et de l'indépendance des trente-six coefficients de celles des corps hétérotropes, ou au moins de vingt-un d'entre eux, sans qu'on ait jamais réfuté l'analyse par laquelle Cauchy a prouvé que ces coefficients ne sont qu'au nombre de quinze indépendants dans le cas le plus général de contexture, et se réduisent à un seul pour la contexture isotrope. Nous ne rappellerons pas que la loi des actions moléculaires, sur laquelle Cauchy et Poisson n'ont jamais cessé de se baser, et dont la mise en œuvre, même sans calcul, conduit infailliblement à cette réduction, est inévitablement invoquée dans toute la mécanique, spécialement lorsqu'on pose des formules *linéaires* pour les composantes des pressions, car, sans cette invocation au moins tacite, il serait illogique d'exciper de la petitesse des variables qui y entrent pour donner à leurs fonctions cette forme plutôt qu'une foule d'autres. Nous renvoyons donc surtout au résumé,

travail en question est exprimé, avec nos notations, par

$$\frac{1}{2} (P_{xx}^2 x + P_{yy}^2 y + P_{zz}^2 z + P_{yz}^2 yz + P_{zx}^2 xz + P_{xy}^2 xy).$$

Nous mettons  $1/2$  parce que ce travail est produit par des forces dont les intensités commencent par zéro et croissent uniformément.

Il est facile de voir que si la distribution des élasticités est *ellipsoïdale*, comme au § 89, p. 844, de l'Appendice complémentaire, et ainsi qu'on doit généralement le supposer dans les corps amorphes ou à cristallisation confuse, et si l'on particularise l'expression (109) p. 788 de  $\Phi^1$  en conséquence de (229) p. 805, en faisant  $a = (2+i)a^2$ ,  $b = (2+i)b^2$ ,  $c = (2+i)c^2$ ,  $d = bc$ ,  $e = ca$ ,  $f = ab$   $d' = b'c'$ ,  $e' = c'a'$ ,  $f' = a'b'$ , qui satisfont à ce mode de distribution (page 844), on a pour le potentiel  $\Phi^1$ , en mettant à la place des dilatations et glissements leurs valeurs tirées des formules de composantes de pression y relatives :

$$\Phi^1 = \frac{1+i}{2(2+3i)} \left( \frac{P_{xx}}{a} + \frac{P_{yy}}{b} + \frac{P_{zz}}{c} \right)^2 + \frac{P_{yz}^2 - P_{yy}P_{zz}}{2bc} + \frac{P_{zx}^2 - P_{zz}P_{xx}}{2ca} + \frac{P_{xy}^2 - P_{xx}P_{yy}}{2ab},$$

expression qui est identique avec celle de M. Clapeyron quand  $a^2 = b^2 = c^2 = \mu$ ,

$i = \frac{\lambda}{\mu}$  (7<sup>e</sup> leçon de M. Lamé, 1852, § 32, p. 82), et qui montre que l'expression du travail moléculaire est aussi simple quand il y a distribution ellipsoïdale que quand il y a distribution sphérique ou isotrope.

§ 75 de l'Appendice cité, p. 746-762; et si, dans nos formules, nous conservons des coefficients en plus grand nombre (au moyen d'accents), ce n'est pas que nous doutions de la réductibilité soutenue par nous, c'est afin de montrer que nos résultats ne sont point subordonnés à l'opinion controversée, et, aussi, parce que les calculs présentés en conservant 21 coefficients contribuent peut-être à avancer quelque branche de l'analyse, un jour applicable à d'autres sujets analogues à la théorie de l'élasticité.

**XLIV. Manières successivement proposées d'établir les conditions de la résistance à la rupture éloignée. Préférence à donner à la limitation des dilatations positives, Mariotte, M. Poncelet. Cas où il y a simultanément flexion et torsion, etc.**

— Le problème pratique le plus important sur les solides employés comme matériaux est celui de l'établissement des conditions de leur résistance à la rupture prochaine ou éloignée, et même à une altération nuisible de la forme. C'est même, comme le remarque M. Lamé <sup>(1)</sup>, la nécessité d'établir complètement ces conditions qui a, si ce n'est donné naissance à la théorie de l'élasticité, au moins déterminé les recherches pour sa constitution la plus complète.

Galilée, Leibnitz, etc., ont imposé, pour cette stabilité de la cohésion des pièces solides, la condition que nulle part, à travers leurs faces intérieures, les *tensions* éprouvées n'excèdent une certaine intensité qui varie, par unité superficielle, avec la matière.

Presque tous leurs successeurs jusqu'à nos jours, y compris Coulomb, ont adopté cette manière de voir, en limitant aussi les *pressions* dans la vue de prévenir l'écrasement des fibres comme leur rupture par séparation longitudinale.

Cela peut suffire dans les circonstances ordinaires où les solides, de forme allongés, ne sont que fléchis en même temps que tirés ou pressés dans le sens de la longueur, leurs faces latérales étant libres, en sorte que chaque fibre se comporte

---

(1) 1<sup>er</sup> leçon, § 3.

comme un prisme isolé. Et c'est de cette manière que Navier pose, dans tout son article IV, les équations de non-rupture par flexion, qu'il établit même directement sans les déduire, comme il l'aurait pu, des équations de l'article III où il traite de la flexion.

C'est aussi, par analogie, à l'article VI, en limitant l'intensité des efforts tangentiels sur les éléments des sections transversales, qu'il établit comme Coulomb la condition de résistance à la rupture par pure torsion.

6- Mais, dès 1782, Mariotte posait un autre principe, car il remarquait que « les parties étendues ne rompent que parce que leur *extension* vient à dépasser une certaine *proportion* (1), » et ce principe est évidemment plus vrai, car les molécules ne se séparent tout à fait que parce qu'on les a écartées à un certain degré de manière à diminuer l'intensité des attractions qui les tenaient unies. Navier invoque ce même principe de limitation des dilations ou extensions en divers endroits, par exemple au n° 112 ci-après, où il dit que la rupture a lieu quand les fibres étendues ne peuvent plus l'être davantage sans séparation, ce qu'il répète au n° 152 en tentant de traiter un cas nouveau; et il l'applique, même, dans la note (a) du n° 167 (p. 507) comme seul capable de conduire à comparer théoriquement entre elles les deux limites (R et T) des intensités des résistances spécifiques à la flexion et à la torsion.

Ces deux principes, ou ces deux manières de poser l'équation de cohésion (2), donnent (ainsi qu'il a été montré dès 1837-38 par des exemples à notre cours lithographié) des résultats fort différents dans plusieurs cas; et ce ne sont pas seulement les cas où il y a simultanément flexion et glissement ou torsion, on peut en donner aussi des exemples où il n'y a que des tractions; car si l'on imagine deux cubes égaux et de même matière, dont l'un est tiré sur ses six faces normalement et également, et le second seulement sur deux faces opposées, par des forces de même intensité que celles qui sont appliquées à toutes les faces

(1) *Traité du mouvement des eaux*, 5<sup>e</sup> partie, 6<sup>e</sup> et 13<sup>e</sup> alinéa du second discours.

(2) Nous avons préféré cette dénomination à celle d'équation d'écartissage employée dans des Cours de l'École de Metz. Celle qui ne donne que les flexions, etc. y est appelée équation d'élasticité.

du premier, un calcul facile, fondé sur la théorie des corps élastiques isotropes, montre que la dilatation maximum sera deux fois moindre dans le premier cube que dans le second, en sorte que celui-ci éprouvera un danger de rupture double de celui-là, bien que la tension intérieure la plus grande soit la même pour tous deux.

Aussi M. Poncelet, dans son cours de mécanique industrielle professé en 1839, où il a bien voulu nous citer, a conseillé de préférer décidément la seconde manière, celle qui impose *une limite aux dilatations éprouvées*. On lui doit, à cette occasion, comme nous avons déjà dit au n° XVII, d'avoir ramené théoriquement la résistance aux compressions longitudinales à la résistance aux extensions transversales qui les accompagnent quand les faces latérales sont libres <sup>(1)</sup>; et cette explication est d'accord avec les faits, car, outre ceux que nous avons cités à ce numéro, et celui de la séparation d'une sorte de *coin* de pièces de fonte du côté devenu concave, l'expérience des effets d'une puissante machine à courber les bois en les contenant de manière à empêcher, comme on a dit lors de son exposition en 1854, les fibres comprimées de *se boursoufler* latéralement, vient bien à l'appui de la remarque de l'illustre académicien « que le rapprochement moléculaire ne peut être une cause de désagrégation. » (V. p. 6.)

D'où il suit qu'il suffit de limiter, en tous sens, les dilatations positives dans un sens ou transversal ou oblique, comme on fait pour les dilatations longitudinales, mais à un autre taux si la matière n'est pas isotrope, et en ayant égard à ce que les pressions sur deux bases rapprochées empêchent les dilatations transversales de s'opérer librement.

Si la pièce dont on veut assurer la cohésion permanente est d'égale contexture dans toutes les directions, il suffit d'imposer une limite déterminée à *la plus grande des dilatations* qu'elle éprouve; et, pour obtenir la grandeur et le sens de celle-ci en chaque point, le moyen analytique le plus général est de construire, pour ce point, *l'ellipsoïde des dilatations*. On peut se dispenser de cette construction dans les problèmes usuels de

---

(1) Notes du n° 3, § 8, p. 44-42, et du n° 456, sous-note du § 43, p. 384.

flexion avec glissement ou torsion, où les fibres d'un prisme n'éprouvent que des extensions et contractions longitudinales et transversales, avec ces inclinaisons sur leurs bases qui constituent les glissements, car la plus grande dilatation autour d'un point est fournie alors par une formule assez simple que nous avons trouvée en 1838, et dont M. Poncelet a rendu la démonstration plus élémentaire en la donnant en 1839-1840 dans le cours cité (1).

C'est la dilatation que cette formule donne au *point dangereux*, qui est celui pour lequel sa valeur est la plus grande, ou c'est, autrement dit, le *maximum maximorum* des dilatations, qu'il convient d'égaliser à la limite qu'on ne peut dépasser sans danger, pour avoir l'équation de cohésion permanente.

Et, une fois établie, cette formule ou équation peut généralement être débarrassée et des dilatations et des glissements, en leur substituant leurs valeurs en fonction des forces qui les produisent. Par là s'éliminent les coefficients d'élasticité (E et G), car on donne généralement à la dilatation-limite une désignation venant de la méthode primitive qui consistait à limiter les forces; et cette désignation consiste à les exprimer par un quotient  $\frac{R_0}{E}$  ou  $2\frac{T_0}{G}$ , en sorte que, bien que dressées avec le principe qui a prévalu, celui de limitation des dilatations, les équations de cohésion ne contiennent généralement que les coefficients  $R_0$ ,  $T_0$ , dits de cohésion et d'*adhésion* permanente, c'est-à-dire les limites des forces, ce qui est sans inconvénient et rend les applications plus faciles.

**XLV. Cas où la limite des dilatations n'est pas la même en tous sens.** — Mais quand le corps est d'inégale contexture autour de chaque point, ce n'est pas la plus grande des dilatations qu'il convient d'égaliser à une limite déterminée, car la limite des dilatations non dangereuses varie avec la direction, dans un corps même homogène, s'il est *lévé*.

---

(1) Même sous-note du § 53 de la note du n° 456, p. 375.

*rotrope*; elle doit, par exemple, évidemment pour le bois, avoir une tout autre grandeur dans le sens de la longueur des fibres que dans un sens perpendiculaire.

Il faut donc imposer généralement la condition que, dans aucune direction, la dilatation n'excede une limite relative à cette direction. C'est du rapport de la dilatation à cette limite corrélatrice qu'il convient de rechercher le maximum, afin d'astreindre ce maximum à ne pas dépasser l'unité.

Comme on ne peut guère déterminer par expérience ces limites que pour quelques directions principales, on leur supposera, pour les directions intermédiaires, une loi de variation continue; celle qui se prête le mieux au calcul est que les racines carrées des inverses des limites soient représentées par les rayons vecteurs d'un même ellipsoïde. La condition de stabilité sera que cet ellipsoïde reste compris tout entier dans l'intérieur de celui qu'on a vu être formé par les racines carrées des inverses des dilatations, prises aussi pour rayons <sup>(1)</sup>. L'expression de cette condition conduit à une équation du troisième degré dont une des trois racines (la plus grande) est le rapport maximum de la dilatation à sa limite de même direction pour le point que l'on considère <sup>(2)</sup>,

(1) Ces deux ellipsoïdes peuvent être remplacés par deux autres plus faciles à concevoir (page 782, équations 496 et 497) dont les rayons vecteurs ont simplement pour grandeurs l'unité plus la dilatation, et l'unité plus sa limite, dans les diverses directions de ces rayons.

(2) C'est cette équation du troisième degré (405 bis) qui se trouve à la 2<sup>e</sup> note du § 83 de l'Appendice complémentaire, p. 784. On l'obtient en appelant  $\delta_r$  la limite pour une direction  $r$  faisant, avec les directions principales  $x, y, z$ , des angles dont les cosinus sont  $c_x, c_y, c_z$ , et  $\delta_x, \delta_y, \delta_z$  les valeurs de  $\delta_r$  pour les directions  $x, y, z$ , en sorte que

$$\delta_r = \delta_x c_x^2 + \delta_y c_y^2 + \delta_z c_z^2.$$

Or la dilatation de même direction est (formule 9 de la page 553),

$$\partial_r = \partial_x c_x^2 + \partial_y c_y^2 + \partial_z c_z^2 + g_{yz} c_y c_z + g_{zx} c_z c_x + g_{xy} c_x c_y.$$

La condition de cohésion sera que  $\delta_r = \text{ou} > \partial_r$  partout et en tout sens, ou que la valeur maximum de  $\frac{\partial_r}{\delta_r}$ , pour laquelle on a  $d \frac{\partial_r}{\delta_r} = 0$ , soit au plus égale à l'unité. Si, dans cette équation, écrite

$$\delta_r d\partial_r - \partial_r d\delta_r = 0;$$

nous mettons pour  $\delta_r$  et  $\partial_r$  leurs valeurs, en différentiant par rapport aux trois

Cette équation est réductible au second degré quand les rapports des dilatations à leurs limites sont les mêmes dans les directions de deux coordonnées transversales, et encore lorsque ces rapports sont assez peu différents pour pouvoir être approximativement remplacés par une certaine moyenne, ce qui est le cas le plus ordinaire de la pratique (1). La formule ou la condition analytique à laquelle conduit alors sa résolution est aussi simple que celle du cas d'isotropie; et comme elle relie d'une manière continue les divers cas extrêmes, tout comme faisait la relation entre les limites en divers sens, qu'il a fallu supposer pour établir l'équation du troisième degré, on peut l'employer avec autant de confiance que ce qu'on tirerait de celle-ci (2). Aussi en avons-nous fait, aux notes du n° 154 et du n° 156, de nombreuses applications à des cas, qui n'ont encore

cosinus, et si nous éliminons une des trois différentielles au moyen de  $c_x dc_x + c_y dc_y + c_z dc_z = 0$ , en égalant à zéro ce qui affecte les deux autres, nous obtenons la triple équation :

$$\begin{aligned} & \frac{(2\partial_x c_x + g_{xy} c_y + g_{xz} c_z) \delta_r - 2\delta_x \partial_r c_x}{c_x} = \\ & = \frac{(g_{xy} c_x + 2\partial_y c_y + g_{yz} c_z) \delta_r - 2\delta_y \partial_r c_y}{c_y} = \\ & = \frac{(g_{zx} c_x + g_{yz} c_y + 2\partial_z c_z) \delta_r - 2\delta_z \partial_r c_z}{c_z} . \end{aligned}$$

Comme la somme des numérateurs de ces trois fractions, multipliés respectivement par  $c_x, c_y, c_z$ , n'est autre chose que  $2\partial_r \delta_r - 2\delta_r \partial_r = 0$ , et comme la somme des dénominateurs multipliés de même est  $= 4$ , chacun des trois numérateurs est nul. Il en résulte trois équations entre lesquelles on peut éliminer finalement les rapports des cosinus comme on a fait pages 724, 777, 784, entre les équations (458), (480), (494); il reste l'équation du troisième degré citée (495 bis) en  $\frac{\partial_r}{\delta_r}$  dont la plus grande racine est le maximum de ce rapport en un point donné.

(1) Car en remplaçant dans l'équation citée (495 bis) du 3° degré,  $\frac{\partial_y}{\delta_y}, \frac{\partial_z}{\delta_z}$  par une moyenne, qu'on peut appeler  $\eta_1 \frac{\partial_x}{\delta_x}$ , en supposant  $g_{yz} = 0$  comme dans tous les cas de flexion et de torsion d'un prisme dont les arêtes sont parallèles aux  $x$ , on peut diviser tous les termes de cette équation par  $\frac{\partial_r}{\delta_r} - \eta_1 \frac{\partial_x}{\delta_x}$ .

(2) Cette équation du second degré est celle du § 43 de la note du n° 156, p. 379 ou 382.

été traités nulle part, de corps à la fois fléchis et tordus, comme les arbres de machines sollicités à la fois par deux engrenages et deux courroies, ou en même temps étendus, comprimés et tordus, ou même étendus et *cisailés* ou éprouvant des glissements intérieurs autres que ceux qui sont dus à la torsion, comme les rivets, les boulons, etc. La pratique de ces sortes de calculs nous a fait reconnaître que la recherche des points dangereux, ou du maximum absolu du rapport dont le maximum relatif à un seul point est donné par la formule dont nous parlons, doit se faire numériquement, avec emploi final d'une méthode particulière d'approximations successives<sup>(1)</sup>, et non pas par la règle analytique tirée du calcul différentiel, car celle-ci, dans les cas rares où la complication des calculs ne la rend pas impraticable, se trouve en défaut, ou bien conduit à des points hors du contour ou de l'enveloppe, qui ne sauraient convenir. Nous donnons assez d'exemples pour montrer comment cette recherche peut se faire.

Cette formule, fondée sur la limitation des dilatations dans tous les sens, devait fournir et fournit en effet, comme un de ses cas particuliers, la limite des *compressions* longitudinales, déduite, comme a fait M. Poncelet, de celle des dilatations transversales. Au reste elle se prête facilement à ce qu'on y introduise, sans en altérer la forme, comme on a dit aux n<sup>os</sup> X et XLIV, les constantes tirées directement des expériences et observations relatives à chaque genre de rupture, et qui représentent des forces, limites des efforts normaux ou tangentiels que la même matière peut supporter d'une manière permanente dans des circonstances déterminées.

**XLVI. Exceptions apparentes.** — Nous ne prétendons pas, au reste, qu'une théorie subordonnant uniquement le danger de rupture d'un solide à la grandeur qu'atteint une dilatation linéaire n'importe dans quelle de ses parties, et indépendamment des autres circonstances où il se trouve en même temps, soit le dernier mot de la science et de l'art. Une expérience remarquable, citée au § 16 de la note du n<sup>o</sup> 113 (p. 119), a mon-

---

(1) §§ 34, 35 de la note du n<sup>o</sup> 156, p. 348, 327.



tré qu'une dilatation énorme, produite dans un sens tangentiel à la surface intérieure du cylindre creux en fonte d'une forte presse hydraulique, mais accompagnée d'une contraction considérable dans un sens perpendiculaire, n'amenait aucune gerçure ni autre désagrégation. Cela peut tenir uniquement, il est vrai, à ce que le cylindre en fonte était contenu et serré dans un fort cylindre en fer, en sorte que les circonstances de l'épreuve s'opposaient à toute disjonction et qu'il n'en pouvait résulter qu'un emboutissage ou forgeage à froid. Néanmoins nous ne saurions assurer d'une manière absolument certaine que ce qu'il convient de limiter ne soit pas une fonction, encore inconnue, des trois dilatations linéaires principales (n° XXV), au lieu d'être uniquement la plus grande des trois (¹). Nous dirons seulement que, quoi qu'il en puisse être, cela ne changera rien aux conditions ci-dessus indiquées de non-rupture, toutes les fois qu'un prisme ou cylindre, dont les faces latérales sont libres comme à l'ordinaire, n'éprouvera que des extensions ou compressions longitudinales avec des flexions, puisque les deux contractions transversales, pour chaque fibre, sont fonctions de son extension à laquelle on impose une limite, et que lorsqu'il y aura en même temps des glissements et des torsions, une formule comme celle du § 43 de la note du n° 156 (p. 379 au bas), qui satisfait aux divers cas extrêmes conformément aux expériences, en les reliant entre eux d'une manière continue, est dans toutes les conditions requises pour satisfaire aux cas intermédiaires avec l'approximation qu'on peut désirer.

Il peut aussi avoir rupture de certaines fibres, ou désagrégation de quelques petites parties d'une pièce solide, sans que la stabilité soit compromise ou que la résistance du reste de la masse soit diminuée. Depuis longtemps Emerson (²) a avancé qu'en faisant subir à une section transversale de forme carrée certaines tronçatures revenant à abattre en chanfrein deux arêtes vives de la pièce prismatique à laquelle elle appartient, au lieu

---

(¹) En tous cas, cette fonction ne peut évidemment pas être leur somme, ou la dilatation cubique, car un glissement, ou une torsion, n'en produit pas, et peut cependant amener la rupture.

(²) Emerson's *Mechanics* (souvent cité par Tredgold).

d'affaiblir cette pièce supposée sollicitée à rompre par flexion dans un plan contenant une diagonale des sections, on augmente sa résistance jusqu'à la proportion d'un neuvième. On verra aux §§ 8 de la note du n° 113 (p. 94) et 9 de celle du n° 120 (p. 135), que cette assertion n'a rien de paradoxal, et qu'elle s'étend même à une section circulaire ou à une section en croix, etc., si l'on veut parler de la résistance telle que la donne la formule; c'est une raison, si ce n'est pour retrancher effectivement les fibres qui théoriquement ne sont point utiles et qui pratiquement le sont fort peu, au moins pour calculer la résistance comme si elles n'existaient pas.

**XLVII. Matière hétérogène. Matière qui n'est homogène que cylindriquement ou sphériquement, etc.** — La matière peut être non-seulement hétérotrope, mais encore hétérogène, ou d'une texture variable d'un point à l'autre. On peut alors poser facilement des formules de flexion, comme M. Bresse, en faisant varier, dans l'étendue de chaque section de la pièce, le coefficient  $E$ , qui, alors, comme nous verrons (§ 7 de la note du n° 21, p. 20), ne représente que sous une certaine condition le module d'élasticité des diverses fibres. On peut, pour les bois, faire varier ce coefficient suivant une loi parabolique (plutôt que suivant la loi linéaire qu'il suppose), à partir du centre des couches ligneuses; mais, pour les fers, c'est seulement auprès du contour des sections que le changement de nature est sensible, et il convient que les formules, soit d'élasticité, soit de cohésion permanente, se composent de deux termes dont l'un est affecté du moment d'inertie de la section, l'autre de celui du périmètre (§§ 7 de la note du n° 80 et 15 de celle du n° 113, pages 43 et 116); on a donc deux constantes à déterminer par plusieurs expériences, en compensant leurs écarts par les méthodes graphiques ou analytiques connues (p. 43 et 117-118).

Une matière non isotrope, mais *homogène*, ne l'est pas toujours *rectilignement* ou *parallèlement* comme les corps cristallisés ou comme les plaques de tôle dont l'élasticité est constante mais de trois grandeurs différentes dans les trois sens rectangulaires de sa longueur, de sa largeur et de son épaisseur. En effet,

qu'on enroule en tuyau cylindrique cette plaque homogène non isotrope supposée mince, elle ne cessera pas d'être homogène, mais l'égalité d'élasticité aux divers points aura lieu suivant les rayons qui convergent sur l'axe du tuyau, et aussi suivant les tangentes à leurs cercles, et non plus suivant des directions parallèles entre elles. Ce tuyau jouit d'une homogénéité qu'on peut appeler *semi-polaire* ou *cylindrique*. On conçoit qu'il y a de même une homogénéité *polaire* ou *sphérique*, etc.

Les formules d'élasticité relatives à ces genres d'homogénéité se déduisent de celles du cas de l'homogénéité ordinaire ou parallèle en changeant de système de coordonnées, et l'on peut en déduire diverses conséquences (1).

#### XLVIII. Rupture immédiate ou prochaine. —

**M. Hodgkinson, etc.** — Les équations de cohésion permanente dont on vient de parler n'expriment que les conditions de résistance à la rupture *éloignée*, ou de stabilité indéfinie de la contexture, vu la petitesse des déformations; et ces équations ont pu être établies (n° X) à l'aide des équations d'élasticité qui ne s'observent que dans les limites de la proportionnalité des petits effets aux intensités de leurs causes.

Mais lorsqu'on est dans le cas de dresser des projets d'échafaudages, de barraquements, de ponts de service et autres constructions purement temporaires et surveillées d'une manière assez continue pour qu'on soit averti à temps de leur chute, il peut être utile de savoir calculer les justes résistances, à une rupture *immédiate* ou *prochaine*, des matériaux dont on se propose de les composer économiquement.

On ne pourrait faire ce calcul exactement que si l'on connaissait la loi plus ou moins compliquée des extensions et compressions en fonction des efforts jusqu'à l'instant des disjonctions, et par conséquent la situation, à cet instant, de la ligne dite neutre ou des fibres invariables. Mais on démontre quelques formules générales qui sont indépendantes de cette loi (comme

---

(1) Mémoire sur les divers genres d'homogénéité mécanique (*Comptes rendus* 24 mai 1860, t. L, p. 930).

par exemple celle qui donne la proportionnalité des charges aux largeurs, aux carrés des épaisseurs et aux inverses des longueurs des pièces) et qui permettent d'appliquer aux pièces de toute dimension et d'une certaine forme les résultats d'expériences relatifs à des pièces de même forme et de certaines dimensions. On doit aussi au savant M. Eaton Hodgkinson la tentative d'un calcul plus général, fondé sur la substitution, à la loi inconnue, d'une loi qui s'en rapproche probablement. On peut voir aux §§ 2 et 3 de la note du n° 151, p. 175, et 60, 61 de la note du n° 156, p. 461, des calculs de rupture immédiate par flexion et par torsion que nous avons faits en modifiant et généralisant sa supposition, et les conséquences pratiques qui peuvent en être tirées.

**XLIX. Pièces posées et sollicitées de diverses manières. Réactions inconnues. Systèmes de charpente. Serrage et calage. Navier. M. Michon. M. Clapeyron, etc.** — Ce qui a été dit depuis le n° XII est relatif à *une seule pièce* sollicitée par des forces supposées toutes connues, et, même, à *une seule des parties* dans lesquelles on doit souvent diviser une pièce (comme nous avons dit au n° XI, note p. cvij).

Pour passer aux *systèmes*, ou aux ensembles dont sont formées les constructions, et calculer les résistances de leurs diverses parties, il faut, avons-nous dit aussi, déterminer préalablement les forces inconnues ou qui ne sont pas données *a priori*, à savoir les réactions des points fixes et les actions mutuelles des diverses pièces ou portions de pièces aux endroits où elles se joignent soit avec articulation libre, soit avec sujétion de conserver certaines directions relativement les unes aux autres, et calculer aussi les inclinaisons nouvelles et surtout les bras de levier définitifs dont dépendent les grandeurs des composantes et des moments des forces dans l'état d'équilibre final du système déformé.

Ces réactions ou actions mutuelles peuvent se déterminer dans un certain nombre de cas en se servant seulement du principe de l'équilibre autour d'un point, et des équations de composantes et de moments que la statique élémentaire établit entre

les seules forces *extérieures* ou non réciproques qui sollicitent un corps ou un système de corps, les forces *intérieures* ou réciproques se trouvant éliminées par les additions d'équations partielles posées pour les établir. C'est ce qui a lieu quand chaque pièce est supportée seulement par deux points autour desquels elle peut tourner, et quand les diverses pièces ne s'articulent pas au nombre de plus de trois au même point si leurs directions sont dans un même plan, ou de quatre si elles sont dans des plans différents. Cela se peut encore dans quelques cas où les pièces se joignent au même point en plus grand nombre, quand par exemple elles forment deux groupes symétriques, et, encore, lorsque deux d'entre elles sont directement opposées, car alors on peut établir une relation entre les forces qui agissent suivant les autres pièces en posant, pour l'équilibre, la nullité de la somme des projections de celles-ci suivant une normale à la direction commune de celles-là; et, ensuite, une nouvelle relation où les premières forces sont comprises, en faisant les projections sur leur direction même <sup>(1)</sup>; et un pareil artifice pourrait être généralisé pour des cas où certaines pièces concourantes seraient dirigées dans un plan et d'autres dans un plan perpendiculaire, etc. Ces sortes de calcul ne demandent que quelque attention afin d'éviter les fausses décompositions.

On peut encore ramener la détermination des actions inconnues aux principes de la statique des forces non réciproques quand certaines pièces, en métal ou en bois, doivent être serrées, tendues ou calées, après leur pose, au point qu'il faudra pour que plusieurs réactions s'annulent, par exemple les poussées horizontales d'une ferme de comble, ou bien pour que certains points n'éprouvent aucun déplacement ou restent en ligne droite, ce qu'on peut chercher à obtenir, par exemple, des appuis multiples d'un albalétrier, etc. Alors les grandeurs et les directions d'une partie des réactions se trouvant connues, les équations de la statique élémentaire peuvent fournir assez de relations pour déterminer les autres. C'est par cet artifice, ou

---

(1) C'est le cas de certaines poutres en treillis simple, composées de triangles juxtaposés.

en conséquence de cette remarque sur les conditions dans lesquelles se mettent en place certaines constructions, que M. Michon, capitaine du génie en 1848 et chargé alors d'un cours à l'École d'application de Metz, a donné, pour les résistances des diverses fermes de charpente à grande portée et à tirants métalliques horizontaux et inclinés dont on recouvre les larges hangars ou les gares, des calculs complets, faits avec soin et talent, qui ont été reproduits à peu de chose près dans les ouvrages récents de M. Morin et de M. Bressé.

Mais, comme l'observe très-bien l'un de ces auteurs, il est difficile de réaliser et surtout de maintenir pour les tirants, etc. le degré de serrage qui rend exacts les résultats de ce procédé de calcul, en sorte qu'il en laisse désirer un autre où les tensions pourraient avoir diverses valeurs, au nombre desquelles il faudrait considérer celles qui s'établissent d'elles-mêmes sous l'action de charges données (1).

Et il y a aussi, comme nous avons vu (n° XI), même pour une seule pièce, ou pour des assemblages fort simples, des cas nombreux où les théorèmes élémentaires de la statique ne suffisent pas à la détermination de la répartition des efforts. Enfin les déformations changent les bras de levier et les inclinaisons, sur les tangentes aux fibres moyennes, des forces même patentes ou connues *a priori*, et ce sont les inclinaisons et les bras de levier définitifs qui doivent entrer dans les composantes et dans les moments dont il faut tenir compte pour assurer la stabilité, en sorte que l'établissement des équations de résistance demande, à double titre, la détermination préalable ou simultanée des déformations des pièces ou des déplacements de leurs points.

---

(1) M. Poncelet, dans son rapport du 5 août 1839, qui se trouve aux *Comptes rendus*, t. IX, p. 200, et aussi en tête des utiles *Études théoriques et expérimentales sur l'établissement des charpentes à grande portée* (in-4°, 1840), de feu le général Ardant, remarque que l'on pourrait, *même par flexion*, en employant des moyens de force, annuler, au moment de la pose, la poussée horizontale de beaucoup d'autres fermes retroussées; mais il observe aussi que les calculs incomplets ou simplifiés par un certain nombre de suppositions plus ou moins arbitraires offrent des chances considérables d'incertitude.

On a dit (même n° XI) ce que Navier a fait pour surmonter cette difficulté dans des cas simples, mais importants, et pour montrer qu'il doit être possible, dans tous les autres, de faire de même ou de compléter toujours un nombre d'équations égal à celui des inconnues, mais qu'ensuite, pour divers systèmes, il a fait usage d'expédients non justifiés, afin de suppléer à une méthode générale qu'il n'a peut-être pas bien aperçue, préoccupé comme il l'était de donner, par des intégrations d'équations implicites, les expressions les plus rigoureuses des flexions de chacune des pièces en particulier, etc. Nous croyons avoir formulé cette méthode <sup>(1)</sup>, qui consiste à poser toutes les conditions d'appui et de raccordement après avoir exprimé analytiquement, pour chaque pièce ou portion de pièce, les déplacements, dans les trois sens des coordonnées, des points de la fibre moyenne, en fonction des intensités, des directions et des bras de levier tant connus qu'inconnus des forces qui les produisent; et, comme celles de réaction sont souvent en nombre infini (par exemple dans les parois des encastremements ou sur les surfaces de contact mutuel), de faire entrer seulement dans les équations les *trois sommes de composantes* et les *trois sommes de moments* de toutes celles qui agissent en un même endroit. Les conditions définies à poser seront la nullité des déplacements aux points fixes, leur égalité pour deux pièces ou deux parties de pièces aux points qui leur sont communs, et la conservation des directions de l'axe des pièces aux encastremements et de leurs inclinaisons mutuelles aux endroits où elles s'assemblent d'une manière stable, sauf les petits angles de glissement transversal et de jeu dans les encastremements s'ils sont assez influents pour qu'il faille en tenir compte : ce sera aussi, pour les cas de torsion et de double courbure (n° XXI), la conservation des azimuts de sections assujetties à ne point tourner autour de la fibre moyenne qui leur est perpendiculaire, etc. Tout étant exprimé, on aura autant d'équations algébriques que d'inconnues, et il restera à les résoudre pour en tirer la connaissance des forces

---

<sup>(1)</sup> Cours lithographié, 1837-1838, n° 29 bis, 46, 47, 48; et *Comptes rendus de l'Académie*, Mémoire du 30 octobre 1843, n° 48, au t. XVII, p. 953-954.

cachées, ce qui sera long quelquefois, mais possible, vu que les équations sont toutes du premier degré (comme il a été dit en 1843), au moins en se tenant à une première approximation, qui sert au besoin de point de départ pour une seconde quand on se trouve, pour quelques pièces, dans les cas (n° XV) où les moments et les composantes sont changés d'une manière sensible par les déplacements.

Cette méthode a été appliquée en 1838 et en 1843 à quelques exemples, comme à celui d'une pièce horizontale chargée d'un poids et portée sur trois pièces verticales, et les cas singuliers de ressorts fermés et d'anneaux fléchis à simple et à double courbure, qu'il faut, comme nous avons dit, diviser en plusieurs parties qui se raccordent. On a aussi commencé à l'appliquer à des ponts à contre-fiches dans un travail qui est à compléter, mais qui a manifesté divers particularités <sup>(1)</sup>.

Depuis, M. Clapeyron <sup>(2)</sup> a simplifié considérablement la solution donnée par Navier du problème de la poutre horizontale reposant sur plusieurs appuis, et il a pu l'étendre à un nombre indéfini de ceux-ci en découvrant une relation générale et simple entre les grandeurs des *moments fléchissants* (ou des moments totaux des forces s'exerçant à travers une section) au-dessus de trois appuis consécutifs.

Enfin M. Bresse a fait, en 1854 <sup>(3)</sup>, une application complète de cette méthode à une travée de pont, dite du système Vergniais, composée d'un arc circulaire en fonte à grande portée, ayant une flèche du sixième de la corde, surmonté latéralement de deux demi-arcs de même rayon ayant leurs centres sous les naissances du premier et leurs sommets au même niveau que celui-ci sur les reins duquel ils s'appuient. Il est à désirer que d'autres ingénieurs ne se laissent pas plus rebuter que lui par les calculs de ce genre, et qu'ils les appliquent à un

<sup>(1)</sup> Il a été présenté en commun avec M. Paul Michelot, le 4 décembre 1843. *Comptes rendus*, t. XVII, p. 4275.

<sup>(2)</sup> Dans un *Mémoire sur le calcul d'une poutre élastique reposant librement sur des appuis inégalement espacés*, lithographié le 7 octobre 1857.

<sup>(3)</sup> *Recherches analytiques sur la flexion et la résistance des pièces courbes*, ch. III, § VI, 67 à 74.



certain nombre de constructions existantes bien stables, mais réputées hardies au dire de constructeurs expérimentés qui peuvent en avoir vu tomber d'autres plus légères; car tant qu'on n'aura pas fait un pareil travail, on ne possédera, sur les valeurs des coefficients de cohésion permanente ( $R_0$ ,  $R'_0$ ), qu'il faut faire entrer dans les équations, que des données tout à fait vagues et fournissant des valeurs différant peut-être considérablement de celles qu'il faudrait leur donner pour obtenir à la fois solidité et économie. L'imitation des bonnes constructions, sans ces calculs, sera toujours aveugle et non raisonnée.

Et quant aux constructions où les diverses pièces résistent surtout par tension et pression longitudinale, ce sera seulement en y appliquant ce calcul complet, fondé sur la prise en considération, qui n'a presque point encore été faite, des petits déplacements causés par leurs allongements et accourcissements, dans des hypothèses extrêmes de serrage et de calage, que l'on pourra être complètement assuré que les répartitions des charges entre les diverses pièces du système resteront aussi entre des limites déterminées, et que l'on pourra proportionner leurs résistances aux efforts, de manière à satisfaire le mieux possible à l'économie de matière comme à la stabilité.

**L. Vibrations. Résistance vive ou résilience des pièces. Cas où l'on peut négliger leur inertie. Young. M. Poncelet. M. Clapeyron. Module de Tredgold. Proportionnalité au simple volume.** — Mais les solides employés dans les constructions ne sont pas dans un état constant d'équilibre de leurs parties. Les pièces des machines exercent les unes sur les autres des actions variables qui changent continuellement leur état de compression ou de dilatation. Celles des ponts et autres constructions fixes reçoivent, du choc ou du passage rapide des charges, des mouvements vibratoires qui ajoutent à leurs déformations statiques et augmentent les écartements moléculaires capables de détruire leur cohésion.

Longtemps les questions de ce genre ont été de pures énigmes, comme celles de répartition des efforts dont nous avons

parlé aux nos XI et XLIX. On savait, par la considération des quantités de mouvement, déterminer jusqu'à un certain point les effets du choc de deux corps pour modifier les vitesses de leurs centres de gravité, et mettre en équilibre plusieurs chocs ou plusieurs forces dites *instantanées*, en tant que capables d'imprimer séparément à un même corps différentes vitesses. Mais le problème si souvent posé de la *comparaison du choc avec la pression* ne pouvait donner lieu, quand il s'agissait surtout d'effets de rupture, qu'à des raisonnements et à des conjectures, dont on ne serait jamais sorti, même en s'aidant d'expériences, si l'on avait persisté à envisager les corps abstractivement comme dans la statique élémentaire. C'est dans l'application de la dynamique, et, aussi, de la théorie de l'élasticité, à la détermination de ce qui se passe à l'intérieur des corps, que ce fameux problème peut trouver sa solution, variable suivant les cas divers.

L'effet du choc d'un corps très-résistant, tel qu'une masse sphérique de métal, contre une verge ou contre un système de verges élastiques, est facile à évaluer quand on néglige la masse de ce système ou de cette pièce, et par conséquent l'inertie qui retarde le déplacement de ses diverses parties. Alors le système peut être regardé comme prenant constamment et instantanément la forme que lui imprimeraient des actions purement statiques, d'intensités croissantes. Il réagit avec des intensités égales contre la masse qui l'a heurté, et on peut, si la déformation n'a qu'une faible amplitude, regarder les actions et réactions comme proportionnelles aux déplacements successifs du point qui a reçu l'impulsion, déplacements qui seront par exemple les allongements ou accourcissements s'il s'agit d'une pièce heurtée longitudinalement, et les flèches de flexion si elle est heurtée transversalement. Le mouvement s'arrête quand le travail négatif total de ces réactions devient égal à la puissance vive (demi-force vive) initiale de la masse heurtante plus le travail dû à son poids pendant qu'elle agit sur la pièce ou le système. Il en résulte immédiatement que si l'impulsion a été horizontale, de sorte que le travail du poids soit nul, le déplacement dynamique maximum du point heurté est égal au produit de la vitesse d'impulsion et de la racine carrée du quotient, par la pesanteur  $g = 9^m,809$ , du déplacement purement *statique*

qui serait produit par une force égale au poids de la masse heurtante; théorème depuis longtemps connu (au moins pour le cas d'un simple fil élastique fixé à un bout et portant à l'autre une masse oscillant dans sa direction). Et si l'impulsion a lieu verticalement, le déplacement maximum est égal à *plus ou moins* le déplacement statique (selon que l'impulsion a lieu du haut en bas ou de bas en haut) plus la racine carrée de la somme des carrés de celui-ci et du déplacement dynamique qui serait produit par le choc horizontal; résultat trouvé par M. Poncelet en considérant seulement le choc longitudinal d'une barre verticale <sup>(1)</sup>, mais qui s'étend à une barre horizontale et même à un système quelconque, et d'où l'on peut déduire comme cas particulier, lorsque la vitesse d'impulsion est nulle, ou qu'un poids est simplement *posé*, par exemple sur une pièce horizontale soutenue aux deux bouts, ce théorème de Young <sup>(2)</sup>, que la flèche de *mise en charge* est double de la flèche d'équilibre <sup>(3)</sup>.

On n'a pas besoin d'ajouter qu'une fois la flèche, ou l'allongement, ou plus généralement le petit déplacement, arrivé à son maximum, le système exécute et fait faire au corps heurtant

(1) Introduction à la Mécanique Industrielle, 1839, n° 348, p. 399 et 404.

(2) *A course of Lectures on natural Philosophy and mechanical Arts*, 1807.

(3) Soient généralement  $Q$  et  $V$  le poids et la vitesse du corps qui vient heurter le système dans une direction que nous supposons faire un angle  $\alpha$  avec la verticale,  $f$  le déplacement statique qui serait dû à une force  $Q$  agissant sur le système dans cette direction, enfin  $z$  le déplacement effectif à un instant quelconque, et  $F$  sa plus grande valeur, qui a lieu quand la vitesse ou la force vive est annulée. La réaction, proportionnelle au déplacement  $z$  supposé rester très-petit, est  $Q \frac{z}{f}$  puisqu'elle doit, pour l'équilibre statique, être égale à  $Q$  quand  $z = f$ .

On a donc  $\frac{Q}{g} \frac{V^2}{2} + Q \cos \alpha \cdot F = \int_0^F Qz \, dz = \frac{QF^2}{2f}$ , d'où

$$F = f \cos \alpha + \sqrt{(f \cos \alpha)^2 + V^2 \frac{f}{g}}$$

ce qui donne bien : 1° quand  $\cos \alpha = 0$  (choc horizontal),  $F = V \sqrt{\frac{f}{g}}$ , déplacement purement dynamique, que nous pouvons appeler  $F_1$ ; 2° quand  $\cos \alpha = \pm 1$  (choc vertical),  $F = \pm f + \sqrt{f^2 + F_1^2}$ , expression de M. Poncelet; 3° quand  $V = 0$ ,  $\cos \alpha = 1$  (simple mise en charge),  $F = 2f$ , résultat trouvé par Young.

qui y est joint, des oscillations isochrones, dont l'équation se détermine comme pour celles du pendule simple <sup>(1)</sup>.

Pour assurer la stabilité de la cohésion, il faut calculer ce que M. Poncelet a appelé la *résistance vive*, et Young la *résilience* de la pièce ou du système, à savoir la puissance vive que doit posséder le corps heurtant, ou « le produit de son poids par la hauteur due à sa vitesse » pour être capable de produire la rupture, ou, plutôt, de faire éprouver à la partie la plus étendue du système l'allongement  $\delta' = \frac{R_0}{E}$  regardé comme ne pou-

vant être dépassé sans danger <sup>(2)</sup>; ou, ce qui revient au même, il faut calculer le travail dynamique total des réactions élastiques opposées jusque-là par la pièce ou le système heurté <sup>(3)</sup>.

On pourrait déduire l'expression de cette puissance vive ou de ce travail résistant, de celle que nous venons de donner du déplacement maximum du point qui reçoit le choc. Mais on peut, plus simplement, avec Young, M. Poncelet et M. Clapeyron, la calculer d'une manière directe et prouver avec facilité que la *résilience est proportionnelle au volume* d'une pièce heurtée, et par conséquent indépendante du rapport mutuel de ses trois dimensions; théorème donné par Young pour le choc transversal <sup>(4)</sup> et que Tredgold a facilement étendu au choc longitudinal, en montrant aussi que cette même quantité est proportionnelle à  $R_0 \delta'$ , ou à ce quotient  $\frac{R_0^2}{E}$  qu'il a appelé *module de résilience*; en sorte que la résistance au choc est comme le carré de la cohésion permanente  $R_0$  de la matière, et comme sa *flexibilité*  $\frac{1}{E}$  qui est l'inverse de la *roideur* ou du module d'élasticité  $E$ .

(1) Avec les mêmes notations on a en effet  $\frac{Q}{g} \frac{d^2z}{dt^2} = Q \cos \alpha - \frac{Qz}{l}$  dont l'intégrale est  $z = f \cos \alpha + \sqrt{f^2 \cos^2 \alpha + \frac{f}{g} v^2} \cdot \sin \left( t \sqrt{\frac{g}{l}} \right)$ .

(2) *Lectures on natural Philosophy*, vol. I, p. 443.

(3) M. Poncelet. Introduction à la Mécanique industrielle, n° 247, p. 294.

(4) *Lectures on natural Philosophy*, vol. II, sect. IX, n° 337.

On peut même prouver facilement, pour un système d'un nombre quelconque de pièces, cette proportionnalité de la résistance vive au quotient  $\frac{R_0^2}{E}$  <sup>(1)</sup>, et aussi sa proportionnalité au volume total, si les pièces composantes résistent toutes de la même manière, et si elles ont des dimensions relatives telles qu'elles ne courent pas plus de danger de rompre l'une que l'autre. On n'a pour cela qu'à considérer et calculer, avec M. Clapeyron <sup>(2)</sup>, afin de l'égaliser ensuite à la puissance vive du

(1) Car si  $f$  est le déplacement du point heurté, et si  $P$  est la valeur finale de la réaction dont l'intensité, nulle en commençant, est supposée restée dans les limites de sa proportionnalité à  $x$ , le travail résistant total est  $\frac{1}{2}Pf$ . Or  $P$  est proportionnel à la tension finale  $R_0$  des parties les plus tendues, et  $f$  l'est à leurs dilatations finales  $\frac{R_0}{E}$ . Donc le travail résistant total, ou la puissance vive consommée, est bien en raison directe de  $\frac{R_0^2}{E}$ .

Si l'on veut évaluer le travail ou la résistance vive jusqu'à la rupture dite *immédiate*, ou même seulement jusqu'à un état où les réactions  $p$  ont cessé d'être proportionnelles aux allongements ou aux déplacements, il faut, comme il a été fait pour la résistance vive de rupture des barres sollicitées longitudinalement dans l'introduction à la Mécanique industrielle (n° 296, p. 358), calculer l'intégrale  $\int_0^f pdz$ , où l'on suppose  $p$  connu expérimentalement en fonction de  $z$  par une courbe ou autrement. M. Poncelet a donné un grand nombre de valeurs de cette résistance vive en calculant l'intégrale par quadrature graphique, d'après la valeur de la traction  $p$  et de l'allongement  $z$  de diverses pièces de fer jusqu'à rupture, et en a déduit des conséquences remarquables.

Si l'on admet une expression empirique telle que celle qui est employée à la p. 476 ci-après pour calculer la résistance statique à la rupture immédiate, c'est-à-dire si l'on prend  $p = P \left[ 1 - \left( 1 - \frac{z}{f} \right)^m \right]$ , on trouve  $\int_0^f pdz = \frac{m}{m+1} Pf$ , ou le produit d'un coefficient numérique  $\frac{m}{m+1}$  par le poids qui fait rompre statiquement, et par l'allongement ou la flèche à l'instant de la rupture. Ce coefficient a pour limites  $1/2$  (pour  $m=1$ ), et  $1$  (pour  $m$  grand). La quantité  $\int_0^f pdz$  est à égalité à la demi-force vive du corps heurtant, réduite à  $\frac{Q}{Q+Q'} \frac{v^2}{2g}$ , comme montre M. Poncelet, s'il frappe sur un corps  $Q'$  d'un poids notable, lié au système heurté dont on suppose toujours que l'inertie peut être négligée. (V. nos suivants.)

(2) Septième leçon de M. Lamé, de 1852.

corps heurtant, le travail total des actions intérieures, qui se réduisent par exemple aux résistances élastiques de toutes les fibres longitudinales des pièces si elles ne sont qu'étendues, comprimées ou fléchies ; et l'on peut même déterminer ainsi la fraction numérique dont il faut affecter le produit du volume du système par le module  $\frac{R_0^2}{E}$  pour avoir la résistance vive. Cette fraction est  $\frac{1}{2}$  si les pièces sont prismatiques et toutes étendues ou toutes comprimées ;  $\frac{1}{18}$  si elles sont encore prismatiques et à section rectangulaire, et toutes fléchies ; enfin  $1/6$  si ce sont des solides de largeur constante et d'épaisseur variant de manière à remplir la condition d'égale résistance<sup>(1)</sup>. Mais le même principe

(1) Car, 1° dans le cas où toutes les pièces sont étendues, comme on suppose que c'est finalement dans une proportion  $\frac{R_0}{E}$ , si  $l$  et  $\omega$  sont la longueur et la section de l'une d'elles,  $R_0\omega$  est sa tension finale, ou  $\frac{1}{2}R_0\omega$  est la moyenne des tensions successives, qui ont commencé par zéro ; et comme  $\frac{R_0}{E}l$  est l'allongement ou l'espace parcouru dans la direction de la force, on a  $\frac{1}{2}R_0\omega \cdot \frac{R_0}{E}l = \frac{1}{2} \frac{R_0^2}{E} \omega l$  pour le travail, qui est, comme on voit,  $\frac{1}{2}$  de  $\frac{R_0^2}{E}$  multiplié par le volume.

2° Si toutes les pièces sont des prismes rectangulaires fléchies par des forces parallèles à l'épaisseur, les fibres éprouvent, à travers une même section, des tensions variant uniformément de 0 à  $R_0$ , et des dilatations variant de même de 0 à  $\frac{R_0}{E}$  dans le sens de l'épaisseur. Le travail total, vu qu'on a en général  $\int_0^a \left(\frac{x}{a}\right)^2 dx = \frac{1}{3}a$ , ne sera, pour chaque élément de la longueur, que le  $1/3$  de ce qu'il serait s'il y avait tension et dilatation uniforme. Pareille réduction à  $1/3$  devra avoir lieu en raison des variations uniformes des tensions et des dilatations dans le sens de la longueur. Il en résulte bien  $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{18}$  du produit de  $\frac{R_0^2}{E}$  par le volume.

3° Si les pièces sont d'égale résistance, la plus grande tension est la même pour toutes les sections ; mais comme les aires des sections sont comme les puis-

ne sera pas applicable si quelques pièces d'un système sont étendues, d'autres comprimées, ou d'autres fléchies, etc.

Young se livre, à cette occasion, à diverses considérations pratiques sur les trois qualités à rechercher dans les pièces, la roideur (*stiffness*) qui dépend du coefficient  $E$ ; la résistance (*strength*) du coefficient  $R$  ou  $R_0$ ; enfin la résilience, qu'on vient de voir mesurée par  $\frac{R_0^2}{E}$ . Pour un plafond la roideur est

surtout désirable, pour un navire la résistance, pour une chaîne la résilience, pour un ressort de voiture la résilience avec la flexibilité, c'est-à-dire peu de roideur.

En étendant, comme nous venons de dire dans une note, ces distinctions aux charges capables d'altérer la contexture et même de rompre, M. Poncelet a conseillé l'emploi du fer doux et ductile plutôt que du *fer fort* pour les chaînes-câbles de marine qui ont à supporter des chocs, en montrant par ses calculs (\*) que ces derniers fers, quoique résistant mieux à une charge morte, peuvent offrir jusqu'à cinquante fois moins de résistance vive que les premiers, qui ont aussi l'avantage d'avertir du danger par les grands allongements permanents qui précèdent la rupture.

**LI. Prise en considération de la masse des pièces heurtées, quant au partage de la vitesse initiale. Tredgold. M. Hodgkinson.** — Pour tenir compte de la masse, négligée par Young, de la pièce appuyée aux deux bouts et heurtée transversalement au milieu, M. Tredgold l'a fait entrer en partage de la quantité de mouvement de la masse heurtante, ce qui diminue la vitesse qu'on doit regarder comme initiale parce que c'est celle qui est possédée, au premier instant

---

sances  $\frac{1}{2}$  des distances à une extrémité, et comme  $\int_0^a dx \sqrt{\frac{x}{a}} = \frac{2}{3} a$ , le travail total est les  $\frac{1}{2} \cdot \frac{R_0^2}{3E} \cdot \frac{2}{3}$  du produit de la longueur par la plus grande section et par conséquent les  $\frac{1}{2} \cdot \frac{R_0^2}{3E}$  du volume.

(\*) Introduction à la Mécanique Industrielle, 1839, n° 296, 297, 298, p. 357-362.

qui suit le choc, par la masse heurtante et par le point heurté, sur lequel il concentre la masse de la pièce. Puis, supposant toujours que la courbure et la réaction élastique sont les mêmes, à chaque instant, que dans la flexion statique, Tredgold calcule la grandeur que la flèche de flexion doit atteindre pour que les réactions anéantissent la vitesse ainsi réduite.<sup>(1)</sup>

M. Eaton Hodgkinson a remarqué que dans ce calcul la masse de la pièce *devait être réduite* dans une certaine proportion, parce qu'elle n'est pas libre, et que ses points prennent à chaque instant tous les degrés de vitesse depuis les appuis jusqu'au milieu. Il a reconnu que la formule de Tredgold, avec cette modification, satisfaisait assez approximativement à ses nombreuses expériences en fixant à 0,47, ou plutôt, comme il le conseille, à 1/2 la proportion de la masse de la barre qu'on suppose partager ainsi, comme ferait un corps libre, la quantité de mouvement imprimée<sup>(2)</sup>.

Cette proportion peut être fixée d'une manière générale et fort plausible en divisant, à un instant quelconque, la puissance vive du système heurté par celle qu'il posséderait si les vitesses de tous ses points étaient égales à celle du point qui reçoit le choc; calcul facile puisque en supposant que les déplacements de ses points s'opèrent comme par une pression statique, on connaît les rapports qu'ils ont entre eux. Cela revient à évaluer, comme dans la théorie du choc des corps libres restant unis ensuite l'un à l'autre, la diminution de force vive totale causée par le choc, à la force vive du corps heurtant, due à la vitesse qu'il a perdue par le choc, plus celle que le choc a fait prendre brusquement au système heurté<sup>(3)</sup>. On trouve ainsi la fraction

(1) Essai sur la force du fer coulé (*Strength of cast iron*), traduction française de M. Duverne sur la deuxième édition, 1826, section XI; surtout aux nos 254 et 264. Ou nouvelle édition anglaise, n° 302. Et *Elementary Principles of Carpentry*. 2<sup>e</sup> ed<sup>n</sup>, 1828, n° 432<sup>e</sup>.

(2) *Report of the Commissioners appointed to inquire into the Application of Iron to Railway-Structure*, 1849, Appendix A, page 4. — Et, aussi, Fairbairn, de l'Application de la fonte de fer et de de la tôle dans les constructions, traduit par M. Perret-Porta, 1857, page 448 (note).

(3) En effet,  $\frac{P}{g}$  étant la masse du système heurté, et  $k \frac{P V_1^2}{g}$  sa puissance vive.



$\frac{17}{35} = 0,4857$  pour le cas du choc transversal, ce qui ne diffère point, dans la limite d'exactitude des expériences, du nombre 0,47 ou 0,50 qu'elles ont donné moyennement à M. Hodgkinson; et on trouve  $\frac{1}{3}$  pour le choc longitudinal <sup>(1)</sup>. Or cela est tout à fait conforme avec ce que donnent les formules exactes dont on parlera aux n<sup>os</sup> LV et LVI, quand on se tient à leurs termes les plus influents, c'est-à-dire aux deux premiers de leurs développements en série <sup>(2)</sup>.

lorsque le point heurté possède la vitesse  $v_1$ , l'égalité dont nous venons de parler sera :

$$\frac{Q v^2}{g} - \left( \frac{Q v_1^2}{g} + k \frac{P v_1^2}{g} \right) = \frac{Q (v - v_1)^2}{g} + k \frac{P v_1^2}{g};$$

d'où, pour la vitesse du corps heurtant et du point heurté, à l'instant qui suit le choc, la valeur

$$v_1 = \frac{Q}{Q + kP} v;$$

la même que si la quantité de mouvement imprimé  $\frac{Q}{g} v$  se partageait entre deux

masses libres  $\frac{Q}{g}$  et  $\frac{kP}{g}$ , en sorte que  $k$  est bien la proportion que l'on cherchait.

<sup>(1)</sup> En effet, quand une barre de longueur  $a$  est fixée à un bout et tirée à l'autre, comme son allongement statique est uniforme, si  $x$  est la distance d'un quelconque de ses points au premier bout, et  $v_1$  la vitesse de l'autre, on a pour la somme des puissances vives des éléments :

$$\int_0^a \frac{P dx}{ga} \cdot \frac{1}{2} \left( \frac{v_1 x}{a} \right)^2 = \frac{1}{3} \frac{P}{g} \cdot \frac{v_1^2}{2}, \text{ d'où } k = \frac{1}{3}.$$

Et quand cette barre, d'une longueur  $a = 2a$ , est soutenue aux deux bouts et sollicitée transversalement au milieu, si  $z'$  est le déplacement transversal d'un de ses points à une distance  $x$  du milieu, où  $z$  est le déplacement, comme on a (n<sup>o</sup> 86, p. 72 ci-après)  $z' = z - \frac{3z}{a^3} \left( \frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right)$ , on trouve

$$2 \int_0^a \frac{P dx}{2ga} \cdot \frac{1}{2} v_1^2 \left[ 4 - \frac{3}{a^3} \left( \frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) \right]^2 = \frac{17}{35} \frac{P v_1^2}{g}; \text{ d'où } k = \frac{17}{35}.$$

<sup>(2)</sup> De ce résultat relatif au choc transversal, combiné avec ce qu'on a trouvé au numéro précédent et à sa note, il résulte que si un poids  $Q$  heurte horizontalement, au milieu, avec une vitesse  $v = \sqrt{2gH}$ , une barre d'une longueur  $l$  et d'un poids  $P$ , en sorte que,  $E$  étant son élasticité et  $I$  le moment d'inertie de sa

**LII. Prise en considération de leur inertie, comme cause que leurs parties n'entrent en mouvement que successivement.** — Mais Young, dont la perspicacité a embrassé comme d'un seul coup d'œil presque tous les points du sujet qu'il a traité, a très-bien observé que le mouvement n'est pas instantanément communiqué à toutes les parties d'une pièce soumise à un choc, vu que leur inertie s'y oppose, en sorte qu'il faut un certain temps pour que l'effet s'en propage du point qui le reçoit aux extrémités <sup>(1)</sup>. Si donc, continue-t-il, la vitesse avec laquelle arrive le corps heurtant est à la vitesse de propagation de l'ébranlement, qui dépend

section,  $f = \frac{Qf^3}{48EI}$  est la flèche statique que le poids  $Q$  lui ferait prendre, on aura pour la flèche dynamique

$$F = \frac{v}{\sqrt{1 + k \frac{P}{Q}}} \sqrt{\frac{f}{g}} = \sqrt{\frac{2Hf}{1 + k \frac{P}{Q}}}$$

Elevant au carré et remplaçant  $F^3$  par  $F \cdot \frac{Q'}{Q} f$ ,  $Q'$  étant le poids capable de donner statiquement la flèche  $F$ , on a la relation de M. Hodgkinson

$$H = \frac{Q'F(Q + kP)}{2Q^3},$$

donnée à la page 148 (note) de la traduction citée de l'ouvrage de M. Fairbairn.

Et si le poids  $Q$  heurte verticalement la barre en tombant de la hauteur  $H$ , on a (note du numéro précédent) pour la flèche dynamique prise en bus de la flèche statique que la barre prenait déjà sous son propre poids, en faisant  $k = \frac{47}{35}$ ,

$$F = \frac{Qf^3}{48EI} + \sqrt{\left(\frac{Qf^3}{48EI}\right)^2 + \frac{Qf^3}{24EI} \cdot \frac{H}{1 + \frac{47P}{35Q}}}$$

d'où, comme  $F = \frac{Q'f^3}{48EI}$ , l'expression  $\frac{Q'}{Q} = 1 + \sqrt{1 + \frac{96EI}{Qf^3} \cdot \frac{H}{1 + \frac{47P}{35Q}}}$ , qui,

même en négligeant  $\frac{47P}{35Q}$  devant 1, diffère de celle  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{492EI}{Qf^3} H}$  qui a été donnée par M. Lemoine dans une note insérée aux *Annales des Ponts et Chaussées* en 1859, 4<sup>e</sup> semestre, page 329.

(1) *A Course of Lectures, etc.*, vol. 1, p. 144.

du module d'élasticité de la matière de la pièce heurtée, dans un plus grand rapport que l'extension ou la compression susceptible d'être supportée par un prisme de cette matière, est à sa longueur totale, sa résilience sera vaincue, et le corps heurtant, quelque petit que soit son volume, le brisera, ou bien y fera quelque impression permanente exigeant que sa contexture soit altérée, au moins à l'endroit soumis au choc.

On voit qu'il ne suffit pas, pour assurer la résistance à une impulsion (en supposant même que les petites impressions purement locales soient sans danger) de calculer et de limiter l'allongement maximum *total*, ou la plus grande dilatation moyenne d'une pièce droite quand elle est heurtée longitudinalement (comme les tiges de ponts suspendus) ni sa plus grande flèche et la plus grande courbure statique correspondante si elle est heurtée transversalement comme une poutre de pont). Il faut encore savoir calculer, afin de les limiter de même, les dilatations individuelles des diverses parties de la première, et les courbures prises successivement aux différents points de la seconde (et qui déterminent les extensions des fibres du côté convexe), vu que ces dilatations et ces courbures peuvent être, en quelques endroits et à quelques instants, considérablement au-dessus des autres, d'où il suit qu'on n'a aucune sécurité en établissant les conditions de résistance par les calculs du n° précédent, pour peu que la masse de la pièce heurtée approche ou surpasse la masse du corps heurtant.

### LIII. Calcul du mouvement des diverses parties.

**Cordes et lames. Taylor. D. Bernoulli. Euler. D'Alembert.** — Le calcul des modifications successives d'une pièce vibrante, ou la mise en compte complète de l'inertie de ses parties, dépend de travaux qui ont occupé les plus grands géomètres depuis un siècle et demi, et des intégrations qu'ils ont appris à opérer des équations aux dérivées partielles linéaires du second et du quatrième ordre avec conditions définies aux limites, dans la vue surtout de déterminer les lois de la production et de la propagation du son par les cordes, les lames et les colonnes d'air vibrantes.

Sauveur, élu en 1696 membre de l'Académie des sciences,

avait déterminé analytiquement, en se fondant sur la théorie du pendule et des centres d'oscillation, les rapports mutuels des nombres de vibrations fournis par des cordes tendues de différentes longueurs et de différents poids <sup>(1)</sup>.

Mais ce fut Taylor qui mit sur la voie de déterminer la forme affectée par une corde pendant qu'elle oscille, en prouvant <sup>(2)</sup> que si elle a initialement, c'est-à-dire au moment où on la lâche, la forme de la *compagne de la cycloïde*, appelée aussi *trochoïde* ou *sinusoïde* parce que ses diverses ordonnées sont proportionnelles aux sinus de mêmes multiples des abscisses correspondantes, elle conservera pendant ses vibrations constamment cette même forme, en sorte qu'elle redeviendra périodiquement rectiligne. Il avança, au reste, l'opinion hasardée que quel que fût l'état initial, cette forme de trochoïde serait prise au bout de peu de temps et était nécessaire à la régularité des vibrations.

Jean Bernoulli arriva analytiquement au résultat principal de Taylor <sup>(3)</sup> en commençant par considérer une corde sans masse, mais chargée, à des distances égales, de diverses masses étrangères qu'il finit par multiplier à l'infini en les atténuant.

Peu après Daniel Bernoulli s'occupa des *lames* élastiques, et proposa à Euler, sur les petites oscillations de celles qui sont encastées à une extrémité, un problème dont celui-ci donna une solution en 1734 <sup>(4)</sup>.

D. Bernoulli lui adressa alors de nouvelles lettres, offrant des vues neuves <sup>(5)</sup>, et publia en 1741-1743, sur le même sujet, deux mémoires où il l'envisage analytiquement d'une manière plus générale, avec deux séries d'expériences confirmatives <sup>(6)</sup>. Il ne posa pas encore l'équation aux dérivées partielles

<sup>(1)</sup> Mémoires de l'Académie, 1713. Il rappelle qu'aux tomes de 1700, 1704, 1702, 1707, 1714, il a établi les fondements de l'Acoustique.

<sup>(2)</sup> *Methodus incrementorum directa et inversa*, Londini, 1717; page 89, propositio XXII, problema XVII. *Definire motum nervi tensi*.

<sup>(3)</sup> OEuvres, t. III, n° CXL. *Meditationes de chordis vibrantibus*.

<sup>(4)</sup> *De minimis oscillationibus corporum tam rigidorum quam flexibilium methodus nova et facilis*. Tome VII des Anciens Commentaires de l'Acad. de Saint-Petersbourg. Voyez aussi t. VIII.

<sup>(5)</sup> Tome XIII des mêmes Commentaires, page 4. *Excerpta ex litteris à Daniele Bernoulli ad Leonardum Eulerum*.

<sup>(6)</sup> Même tome, p. 405. *De vibrationibus et sono laminarum elasticarum Descriptio*. — Et plus loin, *De sono laminarum .....experientia*. — Enfin, *De sonis multifariis quos lumina elastica diversemodò edunt, experimentis illustrata*.

dont l'une des variables principales est le temps, l'autre l'abaissement comptée suivant la longueur de la lame; mais, assimilant le mouvement transversal oscillatoire de chaque élément à celui d'un pendule simple, il rechercha quelle courbe devait, pour la lame oscillante, remplacer la sinusoïde donnée par Taylor pour la corde, ou donner lieu au retour périodique à l'état rectiligne et conserver la même forme sauf l'amplitude des écarts. Il trouva que l'ordonnée de cette courbe dépendait d'une équation simplement différentielle du quatrième ordre; et, se servant d'une intégrale de ces sortes d'équations, due à Euler <sup>(1)</sup>, il donna pour les écarts transversaux des points de la lame, en fonction des distances à une extrémité, une expression composée de quatre termes, savoir: 1° deux semblables à ceux qui satisfont à l'équation du second ordre relative à la corde tendue parfaitement flexible, et où l'abscisse est engagée dans des exponentielles imaginaires à exposants égaux au signe près, ou, ce qui revient au même, deux termes où elle entre dans le sinus et dans le cosinus circulaire d'un même arc; 2° deux termes où l'abscisse est engagée dans des exponentielles à exposants réels, aussi égaux et de signe contraire, et qui peuvent être remplacés par deux termes affectés de ce qu'on nomme aujourd'hui un sinus et un cosinus hyperbolique.

Dans son dernier mémoire, D. Bernoulli suppose successivement la lame encastrée à un bout; libre (ou suspendue à un fil suffisamment long); encastrée aux deux bouts; enfin simplement attachée, c'est-à-dire posée et soutenue aux deux extrémités, autour desquelles elle peut pivoter librement. L'expérience confirme, quant aux sons rendus, les résultats comparatifs de calculs pour des lames de différentes longueurs et de différents poids, attachées des différentes manières considérées.

Euler y ajouta beaucoup à la fin de son célèbre mémoire *De curvis elasticis* <sup>(2)</sup>, toujours en regardant comme « absolument nécessaire » (n° 65 de ce mémoire) de connaître préalablement « la courbe que la lame prend pendant qu'elle oscille; » connaissance qu'il croit lui être fournie par l'intégration de l'équa-

(1) Académie de Berlin, t. VII.

(2) *Additamentum* au grand ouvrage *Methodus inveniendi*, etc., n° 63 à 96.

tion simplement différentielle  $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y}{c^2}$ . Il y montre que le calcul des multiplicateurs dont l'abscisse  $x$  est affectée dans les exponentielles et dans les sinus, et par conséquent la détermination du nombre des oscillations selon les diverses manières dont la lame est attachée ou soutenue, dépend de la solution de diverses équations transcendantes <sup>(1)</sup>; mais il n'en calcule que la plus petite racine, la seule qu'il croie utile de connaître.

Mais, dans la même année 1747, d'Alembert montrait <sup>(2)</sup> que la détermination complète et générale des mouvements d'une corde vibrante, ou de la suite indéfinie des petits écarts transversaux de ses points, dépendait de la solution d'une équation aux différences partielles du second ordre dont l'une des deux variables indépendantes est le *temps*, l'autre l'abscisse; et il donnait de cette équation  $\frac{d^2y}{dx^2} + a^2 \frac{d^2y}{dt^2} = 0$  l'intégrale générale connue, contenant deux fonctions arbitraires. D'où il concluait, comme elle peut représenter une infinité de courbes, que la corde peut affecter toute sorte de formes dans sa vibration.

L'année suivante, Euler, après avoir rectifié l'analyse de d'Alembert en ce qui regarde la détermination des fonctions arbitraires pour un état initial donné, prouva la même chose d'une autre manière, en montrant <sup>(3)</sup> que l'écart ou l'ordonnée de la corde, au lieu d'être ou de devenir, au bout de peu de temps, comme l'avait soutenu Taylor, proportionnelle au sinus d'un multiple déterminé de l'abscisse, pouvait bien être représentée par la somme d'un nombre quelconque, même infini, de termes affectés des sinus d'une suite de multiples ayant entre eux pour rapports ceux des nombres naturels 1, 2, 3, 4, ....., ce qui donne une variété infinie de courbes.

Étonné de ces résultats et disposé d'abord à les nier, parce

(1) Telles que  $\frac{e^m + e^{-m}}{2} \cos m = \pm 1$ ,  $\tan m = \frac{e^m - e^{-m}}{e^m + e^{-m}}$ .

(2) Recherches sur la courbe que forme une corde tendue mise en vibration. Académie de Berlin, 1747, p. 214 et 220.

(3) Acad. de Berlin, 1748, p. 69. Sur les vibrations des cordes.]

qu'il ne reconnaissait qu'à la sinusoïde de Taylor la propriété de donner des vibrations « régulières, simples et isochrones malgré l'inégalité des petites excursions, » Daniel Bernoulli aperçut bientôt <sup>(1)</sup> qu'on pouvait tout concilier en « faisant un examen synthétique de la question posée, » examen sans lequel on est en général sujet, dit-il, à se laisser surprendre plutôt qu'éclairer par les résultats d'une analyse abstraite. Il montra donc que les vibrations nouvelles de d'Alembert et d'Euler pouvaient être admises, mais dans un sens nouveau aussi, et en quelque sorte impropre ; qu'une corde tendue pouvait exécuter de plusieurs manières des vibrations simples et isochrones ; savoir en oscillant dans son entier, ou partagée en deux, trois, quatre..... parties égales offrant autant de *ventres* avec *nœuds* immobiles intermédiaires ; qu'on pouvait, en mêlant ces vibrations de divers ordres dans des proportions quelconques, déterminées à volonté par les grandeurs des coefficients dont on affecte les divers sinus, produire des formes aussi quelconques, et que les *courbes nouvelles* de MM. d'Alembert et Euler n'étaient absolument que de pareils mélanges de vibrations tayloriennes.

Ce fut à cette occasion que le célèbre géomètre révéla le fameux principe physique de la coexistence dans les corps, dans les systèmes et jusque dans l'air, des petites oscillations qui se produisent, se continuent et se propagent indépendamment les unes des autres, tout en se superposant <sup>(2)</sup>.

Euler n'admit pas de suite <sup>(3)</sup> qu'un mélange de sinusoïdes, en nombre même infini, pût produire toutes les courbes possibles. Et d'Alembert, après avoir tenté de prouver le contraire <sup>(4)</sup>, le niait encore huit ans après <sup>(5)</sup>, alléguant le cas où la figure initiale de la corde serait *discontinue*, telle qu'une ligne *brisée* ou

(1) Acad. de Berlin. Réflexions et éclaircissements sur les nouvelles vibrations des corps exposés dans les Mémoires de l'Académie de 1747 et 1748.

(2) Même Académie 1753. Sur le mélange de plusieurs espèces de vibrations simples et isochrones qui peuvent coexister dans un système de corps ; p. 473.

(3) Même volume de 1753, p. 496.

(4) Article *Fondamental* (en musique) de l'Encyclopédie.

(5) Opuscules, t. I, 1764, p. 4 et 65. *Idem*, supplément ; et, ensuite, t. IV, 1768.

*anguleuse*, et ajoutant que D. Bernoulli lui-même avait senti la difficulté <sup>(1)</sup>.

**LIV. Solution complète pour la corde d'abord, puis pour les lames, etc. Lagrange; sa formule de réduction en série de sinus. Formules d'Euler, de Fourier. Solutions de Poisson, de Cauchy.** — La difficulté fut levée (ainsi que d'Alembert parut bientôt le reconnaître) par le célèbre mémoire de Lagrange, de 1759 <sup>(2)</sup>, où il jette les fondements du calcul aux différences partielles, constitué de nos jours par Fourier et ses émules; mémoire dans lequel, en partageant d'abord la corde en un nombre fini de parties, Lagrange apprit à déterminer, par un genre nouveau d'élimination, les coefficients de la série de pareil nombre de sinus qui est capable de représenter, en fonction de l'abscisse, toutes les ordonnées des points de division quelles que soient leurs grandeurs diverses <sup>(3)</sup>. La chose parut plus claire après les développements, et les considérations plus directes, d'un mémoire de 1762 <sup>(4)</sup>, où Lagrange remplace de suite par une intégration, entre les deux extrémités de la corde, l'addition qu'il opérât d'un nombre très-grand de séries, suivie de la supposition que ce nombre était infini; et où il donna en conséquence une formule très-générale de développement de toute fonction considérée entre deux limites données de sa variable <sup>(5)</sup>.

Alors on comprit que les lignes brisées ne faisaient pas exception, et l'on posséda une méthode sûre et facile pour déter-

<sup>(1)</sup> Journal des Savants; mars 1768.

<sup>(2)</sup> Mémoires (*miscellanea*), de Turin, t. I. Recherches sur la nature et la propagation du son.

<sup>(3)</sup> On peut voir ce calcul au Résumé des leçons d'analyse de l'École polytechnique, de Navier, n° 494.

<sup>(4)</sup> Mémoires de Turin. t. III. Solution de différents problèmes de calcul intégral, et applications aux cordes sonores.

<sup>(5)</sup> C'est la formule  $\varphi(x) = \frac{2}{a} \sum_{i=1}^{i=\infty} \left[ \int_0^a \varphi(x') \sin \frac{i\pi x'}{a} dx' \right] \sin \frac{i\pi x}{a}$ , où  $i$  re-

présente tous les nombres entiers de 1 à l'infini; et 0,  $a$  sont les deux limites entre lesquelles on veut représenter par une série de sinus la fonction quelconque  $\varphi(x)$ .



miner par des intégrales définies, calculées soit analytiquement, soit au besoin par des quadratures, la suite des coefficients de séries de sinus multiples, toujours convergentes, capables de représenter toute espèce de fonction continue ou discontinue, ou même des parties de fonctions ayant des valeurs données entre certaines limites, et s'annulant au delà comme en deçà.

On put trouver en conséquence, pour un état initial quelconque d'une corde vibrante, la suite des formes par lesquelles elle doit passer, et par un procédé ayant sur celui de d'Alembert l'avantage de distinguer les vibrations des divers ordres qui se superposent et qui rendent des sons différents, se faisant simultanément entendre avec des degrés très-divers d'intensité.

Mais d'autres problèmes de physique mathématique peuvent se présenter que celui de la corde vibrante. Les équations aux différences partielles qui expriment, comme le remarque Navier <sup>(1)</sup>, les lois générales des principaux phénomènes dont l'étude est l'objet de la philosophie naturelle, peuvent être d'une autre forme et d'un autre ordre, ainsi que les conditions définies que doivent remplir certaines valeurs particulières de l'inconnue qui y est engagée. Euler, le pressentant sans doute, a donné en 1777, dans un de ses derniers mémoires <sup>(2)</sup>, plusieurs formules de développement où les sinus sont remplacés par des cosinus d'arcs procédant d'une manière un peu différente, mais toujours par progression arithmétique. Et ces sortes de solutions ont été, comme on sait, considérablement étendues par Fourier dans son immortelle *Théorie de la chaleur* <sup>(3)</sup>, où l'on trouve des séries dans lesquelles, au lieu de nombres équidifférents, les arcs successifs ont pour multiplicateurs les racines, en nombre infini, de diverses équations transcendantes comme celles qui se sont présentées à Euler

<sup>(1)</sup> Leçons d'analyse de l'École polytechnique, n° 487.

<sup>(2)</sup> *Methodus facilis inveniendi series per sinus cosinusve angulorum multiporum procedentes*. Et, surtout : *Disquisitio ulterior super seriis secundum multipla ejusdem anguli progredientibus*; imprimés seulement en 1798 au t. XI des *Nova acta de Saint-Petersbourg*, p. 94 et 114.

<sup>(3)</sup> Publiée en 1820, mais précédée de divers mémoires insérés à ceux de l'Institut et au Journal de l'École polytechnique.

dans ses travaux cités sur les vibrations des lames (n° LIII), mais dont il ne prenait, avons-nous dit, que la plus petite racine, parce qu'il ne considérait, comme D. Bernoulli, que les vibrations principales donnant le son le plus grave, sans s'occuper des vibrations secondaires qui les accompagnent en nombre infini. Enfin le même illustre géomètre de notre siècle, en rapprochant indéfiniment l'une de l'autre les grandeurs des termes consécutifs des séries, remplaçait celles-ci par des intégrales de zéro à l'infini, et attachait son nom à une formule dont MM. Liouville et Sturm, Lebesgue, etc., ont prouvé que toutes les autres pouvaient être déduites (1), mais dont l'emploi direct ne convient généralement qu'à des problèmes relatifs à des corps ou à des espaces de dimensions indéfinies.

Poisson, presque en même temps que Fourier, donnait d'autres solutions du même genre, où les exponentielles réelles se trouvent mêlées aux lignes trigonométriques, et, ensuite, une méthode générale propre à y conduire dans des cas variés; et bientôt Cauchy, par l'invention de son *Calcul des résidus*, les présentait sous une forme plus générale en les rattachant à des considérations analytiques importantes dont on lui est également redevable.

Dès lors on put, pour les lames ou les tiges vibrantes, traiter l'équation aux dérivées partielles du quatrième ordre donnée par Euler en 1779 (2), comme Lagrange avait traité en 1759 l'équation du second ordre relative à la corde, et déterminer non-seulement le nombre des oscillations, dont s'étaient occupés Bernoulli et Euler, mais encore leur amplitude, qui est la chose importante à connaître dans les questions de résistance, et résoudre complètement le problème des états successifs du

(1) Premiers volumes du Journal de mathématiques pures et appliquées.

(2) *Investigatio methodum quibus laminæ et virgæ elasticae contremiscunt*, aux Nova acta Petrop. 1779.

En faisant dans l'équation, de la forme  $a^2 \frac{d^4 y}{dx^4} + \frac{d^2 y}{dt^2} = 0$ ,  $y = Y \sin am^2 x$ , on la réduit à une équation simplement différentielle qu'Euler considérait dans ses précédents écrits. Et il ne va pas plus loin dans celui de 1779, si ce n'est en considérant deux cas nouveaux d'une lame encastrée à un bout et simplement pivotante à l'autre, enfin pivotante à un bout et libre à l'autre.

corps vibrant, quand on connaît initialement les écarts de ses points de l'état d'équilibre, et les vitesses dont ils peuvent être animés en commençant de vibrer.

Pour les vibrations *longitudinales* des tiges élastiques, le problème, *si ces tiges vibrent seules*, se trouvait déjà résolu depuis 1789, car elles dépendent de la même équation que les vibrations transversales de la corde infiniment flexible, ainsi que l'a montré Lagrange, qui applique le même calcul à une colonne d'air; en sorte que son mémoire, ainsi que le titre l'indique, résout le problème de la propagation du son, dont la solution n'avait été indiquée par Newton que dans des termes obscurs <sup>(1)</sup>.

Pour les vibrations transversales des mêmes tiges, lames ou poutres, le problème fut résolu complètement et en même temps en 1828 par Poisson <sup>(2)</sup> et par Cauchy <sup>(3)</sup>, aussi *quand elles vibrent seules*, et pour un état initial quelconque supposé connu <sup>(4)</sup>.

**LV. Participation, nécessaire à considérer, des masses heurtantes au mouvement vibratoire du système heurté. Solution de Navier pour le choc longitudinal. Complément par M. Poncelet.** — Mais ces solutions restent inutiles aux calculs de résistance des pièces tant qu'on suppose que celles-ci *vibrent seules*.

Leur mise en état de vibration est en effet déterminée généralement par le choc de quelque masse étrangère (telle qu'une voiture dont une roue retombe après avoir monté sur quelque corps ou quelque aspérité). Or, en supposant même que cette masse rebondisse, *elle est restée unie à la pièce pendant au*

(1) Laplace, au Bulletin de la Société philomatique, 1816, p. 490, a déduit facilement, d'une intégrale comme celle de d'Alembert, la vitesse de propagation longitudinale du son dans une barre solide.

(2) Mémoire cité du tome VIII de l'Institut n<sup>os</sup> 46, 47, 48; et, aussi, Traité de mécanique, édition de 1833, n<sup>os</sup> 549 à 529.

(3) Exercices de mathématiques, 3<sup>e</sup> année.

(4) Cette solution se trouve reproduite en partie au chapitre intitulé *Poutres vibrantes* du cours de M. Bresse (1859), qui ajoute un terme pour les petites oscillations tournantes des diverses tranches ou sections autour de la ligne des fibres invariables, mais qui ne considère de même que les poutres vibrant seules.

moins le temps d'une demi-oscillation principale, et c'est dans cette durée que se produisent les écarts moléculaires capables de mettre la cohésion en danger.

Il faut donc *savoir déterminer les oscillations d'une tige unie à une masse étrangère.*

Mais ce n'est pas tout : il faut encore savoir *quelles vitesses initiales* on attribuera à la masse étrangère et aux diverses parties ou sections de la pièce; puis exécuter le calcul avec ces données.

Sous tous ces rapports, Navier est le premier qui ait résolu complètement et dans son vrai sens un problème de *résistance vive.*

La solution qu'il a donnée est relative à un *choc longitudinal* produisant extension, c'est-à-dire, pour fixer les idées, à l'impulsion, tout auprès de l'extrémité libre d'une barre attachée à l'autre extrémité d'une masse qui y serait enfilée, et qui viendrait heurter brusquement un petit arrêt formé par un bourrelet saillant dont l'extrémité mobile serait armée. Pour abstraire la pesanteur, on peut supposer d'abord la barre horizontale.

Navier trouve, par un procédé remarquable, fondé sur l'emploi d'une des séries à cosinus d'Euler, que le déplacement d'un point quelconque de la barre unie à la masse étrangère qui se trouve au bout libre, est donné à chaque instant par une série de produits de deux sinus d'arcs proportionnels respectivement au temps et à la distance du point à l'extrémité fixe, mais où les multiplicateurs des arcs, au lieu de procéder par équidifférences comme quand la barre est seule, sont proportionnels à toutes les racines positives, faciles à calculer, d'une équation transcendante dans laquelle entre le rapport du poids de la barre au poids étranger<sup>(1)</sup>. Le temps écoulé se trouve multiplié par le rapport de ces racines au temps très-court de la propagation du son d'une extrémité à l'autre de la barre.

Pour appliquer au résultat du choc du corps étranger l'expression ainsi obtenue, Navier fait sur l'état initial, ou relatif à

---

(1) Cette équation, où  $m$  désigne l'inconnue, est  $m \tan m = \text{ce rapport} \frac{P}{Q}$ .

l'instant qui suit immédiatement l'impulsion, une supposition qui semble hardie, à savoir qu'à cet instant les vitesses de la barre sont nulles partout, excepté dans la section heurtée, qui aurait tout juste alors la vitesse du corps heurtant. Mais on peut, pour se conformer mieux à l'état physique des choses, partir d'un instant non immédiat, où les sections, sur une longueur très-petite de la barre proche de l'extrémité heurtée, ont acquis déjà des vitesses croissantes suivant une loi quelconque depuis zéro jusqu'à celle du corps heurtant, celle-ci légèrement diminuée par le partage qui s'en est fait avec la petite partie correspondante de la masse de la barre, déjà mise en mouvement. En continuant le calcul, la longueur indéterminée de cette portion excessivement petite disparaît, et l'on obtient, absolument le même résultat que Navier, qui supposait cette longueur nulle.

Navier ne développé cette belle solution que pour le cas où le rapport  $\frac{P}{Q}$  du poids  $P$  de la barre ou du *fil* au poids heurtant  $Q$  est négligeable devant l'unité. Il trouve ainsi, comme cela devait être, l'expression depuis longtemps connue, dont nous avons parlé au n° L, relative à un poids oscillant au bout d'un fil sans masse, s'allongeant uniformément d'un bout à l'autre à tous les instants de son mouvement oscillatoire.

Il aurait obtenu, pour l'allongement maximum total de la barre, une expression aussi simple et incomparablement plus approchée en développant l'expression transcendante suivant les puissances du rapport  $\frac{P}{Q}$  en question et en ne négligeant que les termes affectés de son carré et de ses puissances supérieures, car comme le carré supprimé avait pour coefficient la petite fraction  $\frac{1}{120}$ , la série réduite à ses deux premiers termes donne encore une valeur approchée, même quand le poids  $P$  de la barre excède le double du poids heurtant  $Q$ . Il est digne de remarque que la valeur de l'allongement, ainsi trouvée, est exactement celle qu'on obtient par le procédé dont nous avons parlé au n° LI, dont Tredgold a eu la première

idée en ce qui concerne le choc transversal; c'est-à-dire qu'elle est ce qu'on obtient en supposant toujours que la barre s'allonge uniformément comme dans l'état statique, mais que la vitesse du corps heurtant se trouve réduite, immédiatement après le choc; comme si sa quantité de mouvement s'était partagée avec la barre heurtée réduite à une fraction de sa masse qui est, pour le choc longitudinal, du  $\frac{1}{4}$ .

Mais, ainsi que nous avons dit au commencement du numéro précédent LII, les allongements, dont dépend le danger de rupture, ne sont point uniformes comme dans l'état statique; et ils se trouvent, à certains instants surtout, très-inégalement répartis d'un bout à l'autre de la barre, en raison des vibrations secondaires (comparables aux vibrations de la corde à deux, trois... ventres), qui se mêlent à la vibration principale, et qui sont données par le second, le troisième terme... de la série, dont les autres termes diminuent rapidement.

Nous nous sommes donc livré, sur la formule exacte de Navier, à un long travail d'application numérique, en nous aidant de constructions graphiques à grande échelle afin de relier ensemble les valeurs des déplacements, calculées pour cinq points de la barre. En appelant toujours  $P : Q$  le rapport de la masse de la barre à celle du poids heurtant, et  $i_n : i_m$  le rapport entre la dilatation maximum et la *vibration moyenne* (quotient de l'allongement total par la longueur de la barre), nous avons trouvé que, pour

$$P : Q = \frac{1}{4} \quad , \quad \frac{1}{2} \quad , \quad 1 \quad , \quad 2 \quad , \quad 4 \quad ,$$

$$\text{on a } i_n : i_m = 1,48 \quad , \quad 1,59 \quad , \quad 1,84 \quad , \quad 2,67 \quad , \quad 3,47.$$

D'où l'on voit bien qu'on se trompera dans une proportion entre 1 à  $1\frac{1}{4}$ , et 1 à  $3\frac{1}{4}$  (et même plus si le poids comparatif de la barre excède 4) en regardant la barre comme s'allongeant uniformément ou de la même manière que dans l'état statique. La formule indiquée au n° LI, analogue à celle qui a été dressée par MM. Tredgold et Hodgkinson pour un autre problème (celui du choc transversal) ne peut donc pas suffire, bien que donnant assez approximativement les allongements totaux, et

par suite les allongements moyens; et il faut, pour déterminer les conditions de résistance, ou de limitation de la plus grande dilatation produite par un choc longitudinal, se servir de la formule en série transcendante de Navier, ou d'une table de correction de calculs, telle que celle que nous venons de rapporter.

Quand la barre est dans une situation verticale, il faut tenir compte de l'allongement produit par son propre poids, et de l'excédant de travail moteur résultant de la chute du poids heurtant, qui continue après son choc. Navier n'avait fait ce calcul qu'en supposant la barre déjà tendue statiquement par l'action de celui-ci. Mais cela ne doit guère arriver. Aussi M. Poncelet a-t-il cherché à résoudre le problème pour le cas bien plus ordinaire où le poids n'a pas agi sur la barre verticale avant de la heurter. Il y est parvenu en ajoutant à la série trigonométrique de Navier une deuxième série du même genre, mais où le temps se trouve engagé dans des cosinus au lieu de sinus <sup>(1)</sup>. Il a même, dans une seconde note <sup>(2)</sup>, embrassé le cas où il se trouverait déjà, à l'extrémité inférieure de la barre, une certaine masse que la masse tombante vient heurter, et avec laquelle on peut supposer approximativement, avec lui <sup>(3)</sup>, qu'elle partage sa quantité de mouvement préalablement à toute action sur la barre; et il est facile de voir que son analyse s'appliquerait encore si chacune de ces deux masses était sollicitée, en outre, par une force autre que son poids, telle que la pression qu'exerce un gaz ou un liquide sur un piston de machine ou de pompe <sup>(4)</sup>.

**LVI. Solution analogue par le choc transversal. Expériences à l'appui.** — Un calcul complet du même genre, en tenant aussi compte de l'inertie de la barre, était désirable pour le cas, bien plus fréquent, de son choc transversal. Nous l'avons entrepris <sup>(5)</sup>. Les vibrations d'une barre, appuyée

<sup>(1)</sup> Introduction à la mécanique industrielle, 1839, p. 440, note du n° 322.

<sup>(2)</sup> *Idem.* p. 424, note du n° 325.

<sup>(3)</sup> *Idem.* p. 445, n° 323.

<sup>(4)</sup> Ainsi que l'a supposé M. Belanger (Cours lithographié, 1848-49), mais en s'en tenant au calcul qui suppose négligeables la masse de la tige et l'inertie de ses parties.

<sup>(5)</sup> Société philomathique, 5 novembre 1853 et 24 janvier 1854, ou journal

aux deux extrémités, et unie à une masse étrangère placée à son milieu, dépendent d'une équation aux différences partielles du quatrième ordre. L'intégrale générale est une somme d'une infinité d'intégrales particulières où le sinus circulaire d'un multiple du temps se trouve multiplié par un sinus aussi circulaire ainsi que par un *sinus hyperbolique* d'un multiple de l'abscisse ; et les nombres donnant ces divers multiples sont toutes les racines réelles et positives, en nombre infini, d'une équation transcendante où les sinus des deux espèces se trouvent mêlés (<sup>1</sup>). Les coefficients de la série se déterminent, *pour des vitesses initiales données*, par un procédé d'élimination analogue à ceux de Lagrange, Euler Fourier et Poisson, mais modifié parce que tous les termes de la série qui exprime ces vitesses ne disparaissent pas hors un en intégrant les deux membres de l'équation entre les limites de la longueur de la barre, après l'avoir multipliée par un certain facteur.

Quant au choix des vitesses initiales, nous les faisons, comme dans le problème de la barre heurtée longitudinalement, nulles partout excepté dans une étendue fort petite où elles croissent de part et d'autre depuis zéro jusqu'à leur valeur au milieu de la barre, où elles ont la grandeur de celle du corps heurtant, légèrement diminuée en raison du partage déjà fait de sa quantité de mouvement avec cette petite partie. Comme la longueur de celle-ci s'élimine, on a la même chose que si l'on avait supposé toutes les vitesses nulles hors celle de la section heurtée.

On tient compte du travail de la pesanteur de la barre et de celle du corps heurtant depuis que le choc est opéré en ajoutant une deuxième série, ou en faisant ce qu'a fait M. Poncelet pour le choc longitudinal.

Quand le rapport du poids de la barre au poids heurtant est très-petit, l'expression ainsi déterminée pour la flèche dynamique se réduit à ce qu'a trouvé Young (n° L). Quand il n'ex-

*L'Institut*, 45 février, n° 405; et *Comptes rendus de l'Académie*, 40 août 1857, t. XLV, p. 204.

(<sup>1</sup>) Cette équation est  $m \left( \frac{\sin m}{\cos m} - \frac{e^m - e^{-m}}{e^m + e^{-m}} \right) = 2 \frac{P}{Q}$ , P et Q étant les poids de la barre et du corps heurtant.



cède pas 2 et même 4, elle se réduit au premier terme de la série transcendante, ou à ce qui résulte de la vibration partielle principale; et, en développant l'expression de la flèche suivant les puissances du rapport du poids de la barre au poids heurtant, on peut négliger son carré, qui est affecté d'une très-petite fraction numérique; et l'on trouve précisément ce que fournit le mode de calcul élémentaire du n° LI, c'est-à-dire ce qu'on aurait en calculant cette flèche comme si la barre conservait la forme qu'elle prend sous une charge en repos, après avoir réduit la vitesse du corps heurtant par un partage avec les  $\frac{47}{35}$

de la masse du corps heurté; en sorte que les résultats de cette analyse se trouvent confirmés par de nombreuses expériences de M. Hodgkinson, même en soumettant directement les résultats au calcul au lieu de prendre la formule empirique qui les résume.

Mais les deuxième, troisième et quatrième termes de la série sont très-influents quant aux diverses courbures prises par la barre, et qui déterminent la plus grande dilatation des fibres du côté devenu convexe. On les manifesta très-bien par un modèle en plâtre représentant la surface très-ondulée décrite par la barre supposée emportée d'un mouvement rapide perpendiculaire à son plan pendant qu'elle vibre. Aussi, pour calculer sa résistance, il faut, sous peine de commettre de graves erreurs qui inspireraient une fausse sécurité, se livrer au long calcul de la formule nouvelle et exacte. Ce calcul, aidé de constructions graphiques, a été fait pour des rapports

$$P:Q = \frac{1}{2}, \quad 1 \quad \text{et} \quad 2$$

du poids P de la barre au poids Q du corps heurtant; il en résulte que les résistances calculées à la manière du n° LI sont trop faibles dans des proportions respectives de 1 à

1,18, à 1,23, à 1,49,

qui différencieraient encore plus de l'unité pour des barres ayant plus de masse par rapport au corps qui les heurte.

**LVII. Résistance vive sans choc. Bielles et balanciers. M. Tredgold. Charge voyageuse. M. Willis. M. Stokes. M. Phillips.** — La résistance vive peut être mise en jeu et des oscillations peuvent être engendrées par l'action mutuelle des pièces d'une machine qui s'arrête brusquement, comme le fait observer M. Tredgold au n° 257 de son *Traité de la résistance du fer coulé*.

Mais, comme l'observe le même auteur, la même chose peut avoir lieu à un certain degré sans impulsion brusque et par l'effet de l'action variable, quoique continue, d'un piston sur un balancier, d'une bielle sur une manivelle, etc. Les calculs et les règles pratiques qu'il donne aux nos 266 à 294 du même ouvrage auraient besoin d'être analytiquement discutés, comme nous avons fait pour ses évaluations des effets du choc. Ce genre de recherches, où les forces qui étendent, compriment ou fléchissent sont variables et se trouvent augmentées et même remplacées par des produits de masses et d'accélération, méritent d'occuper les ingénieurs non moins que les analystes (1).

On peut regarder comme du même genre le problème du *poids voyageur*, c'est-à-dire de l'action, sur une poutre horizontale, d'une charge en mouvement, qui la parcourt uniformément avec assez de rapidité (comme une locomotive sur un pont) pour qu'il faille tenir compte des inerties dues aux mouvements ver-

(1) Si la loi du déplacement d'une extrémité d'une pièce élastique est connue et comme *obligatoire*, la détermination des déplacements des autres parties dépend d'une méthode qui a été donnée par M. Duhamel le 23 avril 1832 sous le titre *Mémoire sur les vibrations d'un système de points matériels* (Journ. de l'Ec. pol., 23<sup>e</sup> cahier). Elle consiste à déterminer d'abord l'expression des déplacements successifs que prendra un quelconque des points de la pièce par suite d'un déplacement invariable, infiniment petit, de l'extrémité donnée, puis à ajouter ensemble les grandeurs de ceux qui résulteront de même, pour le point quelconque, d'une suite connue d'autres déplacements infiniment petits imprimés encore à l'extrémité. Cette méthode serait applicable aux effets des flexions variables, comme celles que la commission anglaise qui va être citée a opérées au moyen d'un excentrique pressant et lâchant alternativement le milieu d'une barre.

En appliquant cette même méthode à la résistance qu'éprouverait une voiture roulant sur un système de ressorts verticaux juxtaposés, nous avons trouvé une expression du frottement de roulement sur un sol élastique, assez conforme à quelques expériences (Soc. Phil., 24 juin 1845; ou n° 604 du journal *l'Institut*, Note sur le frottement de roulement ou de deuxième espèce). M. Phillips a aussi appliqué cette méthode (Comptes rendus, 45 février 1864, t. LVIII, p. 317).

ticaux qu'elle prend en faisant fléchir la poutre, ou, ce qui revient au même, des forces centrifuges engendrées; et, aussi, de l'inertie mise en jeu par les mouvements des diverses parties de la poutre en ayant égard à ce qu'elles n'ont pas le temps de prendre d'un bout à l'autre les mêmes flexions et les mêmes situations à chaque instant que dans l'état produit statiquement par une force verticale agissant dans chacune des situations occupées par la charge.

Cette question a été l'objet de l'*Appendice B*, fort étendu, du célèbre rapport déposé le 26 juillet 1849 par la commission que le gouvernement anglais avait chargée en 1847, de recherches sur la force des rails et des poutres métalliques des chemins de fer (1).

Après plusieurs séries d'expériences, où MM. Willis, James et Douglas Galton relevèrent exactement la suite des formes prises par des barres sur lesquelles ils faisaient rouler des cylindres de fonte avec différentes vitesses en augmentant à volonté, par une disposition ingénieuse, l'effet de l'inertie de la barre sans la rendre plus grosse ni moins flexible, M. le professeur Willis s'est livré à des recherches analytiques ayant pour objet la détermination théorique de la trajectoire du poids mobile (2). En tenant compte de l'inertie de ce poids, mais en négligeant celle de la barre, ou en supposant que celle-ci prend la même forme à chaque instant que si la pression qui s'y exerce, due au poids et à la force centrifuge, agissait sur elle statiquement, il a posé facilement une équation différentielle de cette trajectoire (3).

(1) *Report of the Commissioners appointed to inquire into the Application of Iron to Railway Structures*. Nous reviendrons sur ses importants travaux.

(2) Même *Report*, p. 497. *Theoretical inquiry of the Trajectory*.

(3) Cette équation est  $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{g}{v^2} \left[ 1 - \frac{y}{f} \cdot \frac{a^4}{(2ax-x^2)^3} \right]$ ,  $2a$  étant la longueur de la barre entre les deux appuis,  $y$  étant la dépression verticale à une distance  $x$  du premier appui,  $v$  la vitesse horizontale de la charge  $Q$ ,  $f = \frac{Qa^3}{6EI}$  la flèche statique qu'elle ferait prendre à la barre si elle était posée sur son milieu,  $E$  est le coefficient d'élasticité et  $I$  le moment d'inertie de la section. En effet, si l'on appelle  $2P$  une charge statique s'exerçant transversalement à des distances  $x$  et  $2a-x$  des deux appuis, on trouve facilement avec Navier (cité par M. Willis),

M. Stokes l'a intégrée complètement <sup>(1)</sup>, et il a évalué, tantôt par l'intégrale obtenue, tantôt par des séries qui prêtent mieux au calcul <sup>(2)</sup>, les nombres qui composent deux tables numériques (V et VI, p. 199 et 200 du *Report*) fournissant, pour une suite de valeurs de l'abscisse, de cinquantième en cinquantième et de vingtième en vingtième de la portée totale de la poutre, celles de la dépression ou de l'ordonnée  $y$  de la trajectoire, ou plutôt de son rapport  $\frac{y}{f}$  à la flèche statique  $f$  que produirait la charge en équilibre au milieu de la poutre. Ces deux mêmes tables, qui

que la dépression ou flèche  $y$  produite à l'endroit même de la charge est  $y = \frac{2P[x(2a-x)]^2}{3.2a.EI}$  (édition de 1833, n° 359). Or il faut y faire

$$2P = Q - \frac{Q}{g} \frac{d^2y}{dt^2} = Q - \frac{Q}{g} \frac{v^2 d^2y}{dx^2},$$

car il faut attribuer à l'action de la charge sur la barre une valeur égale à son poids  $Q$  augmenté, soit de son *inertie*  $-\frac{Q}{g} \frac{d^2y}{dt^2}$ , soit, ce qui revient au même, de la force centrifuge  $\frac{Q}{g} \frac{v^2}{\rho}$ ,  $\frac{1}{\rho}$  étant la courbure, sensiblement égale à  $-\frac{d^2y}{dx^2}$  quand elle est faible. Ces substitutions donnent bien l'équation posée, du second ordre.

<sup>(1)</sup> Dans un beau mémoire inséré au t. VIII, part. V, année 1849, des *Transactions of the Cambridge philosophical Society*, p. 787, intitulé : *Discussion of a differential Equation relating to the breaking of Railway Bridge*. L'intégrale de cette équation, posée à la note précédente, est

$$y = \frac{g}{2a\sqrt{2m-n}} \left[ x^m (2a-x)^n \int_0^x x^n (2a-x)^m dx - x^n (2a-x)^m \int_0^x x^m (2a-x)^n dx \right]$$

si  $m, n$  sont deux nombres tels que  $m+n=1$ ,  $mn = \frac{ga^2}{4\sqrt{2}}$ .

<sup>(2)</sup> Par exemple quand, dans l'équation différentielle de la note (3), réductible, en faisant  $x=2ax, y=46fy$ , et  $\frac{ga^2}{4\sqrt{2}f} = 6$ , à la forme  $y = (x-x^2)^2 - \frac{1}{6} (x-x^2)^2 \frac{d^2y}{dx^2}$ , la constante 6 est grande, on obtient facilement par des approximations successives cette série convergente, où  $X$  est écrit pour  $(x-x^2)^2$

$$y = X - \frac{1}{6} X \frac{d^2X}{dx^2} + \frac{1}{6^2} X \frac{d^2}{dx^2} \left( X \frac{d^2X}{dx^2} \right) - \frac{1}{6^3} X \frac{d^2}{dx^2} \left( X \frac{d^2}{dx^2} \left( X \frac{d^2X}{dx^2} \right) \right) + \dots;$$

procédé qui s'appliquerait à des équations plus compliquées, où l'on tiendrait compte de l'inertie de la barre.

s'appliquent à neuf grandeurs (de  $\frac{5}{36}$  à 20) d'une certaine constante  $\epsilon$  (1), donnent aussi, dans d'autres colonnes, les rapports, appelés  $z$ , de l'ordonnée ou de la dépression dynamique en chaque point, à la dépression statique que produirait au même point la charge en équilibre (2); enfin, dans d'autres colonnes, les valeurs correspondantes  $T$  de ce que M. Stokes appelle la *tendance relative à la rupture*, et qui est le rapport du plus grand moment de flexion ou de la plus grande courbure dans l'état dynamique, pour chaque position de la charge mobile, au plus grand moment ou à la plus grande courbure qu'on aurait dans l'état statique en plaçant cette charge au milieu de la poutre (3).

On reconnaît ainsi que le rapport de la dépression dynamique à la dépression statique est très-faible aux points proches du premier appui, c'est-à-dire de l'endroit où la charge arrive sur

(1) L'inverse  $\frac{1}{\epsilon} = \frac{v^2}{g} \cdot \frac{2Qa}{3EI}$  de cette constante numérique (appelée  $B$  à la traduction du rapport par M. Busche), est égale au double de la hauteur due à la vitesse  $v$ , multipliée par la courbure  $\frac{4f}{a^3} = \left(-\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{s=a}$  au milieu de la trajectoire  $y = \frac{f(2ax - x^2)^2}{a^4}$  qui serait parcourue si la vitesse de la charge était infi-

nitement petite; en sorte que  $Q\left(1 + \frac{4}{3}\right)$  est le poids  $Q$  augmenté de l'inertie ou de la force centrifuge qu'il acquiert à ce point même en parcourant toute pareille trajectoire.

(2) On a  $z = \frac{y}{f} \left(\frac{a^2}{2ax - x^2}\right)^2$  qui, comme on voit, se réduit à  $\frac{y}{f}$  pour  $s = a$  au milieu de la poutre.

(3) On a  $T = \frac{y}{f} \frac{4^3}{2ax - x^2}$ . En effet, quand la masse de la poutre est négligeable, la courbure s'opère à chaque instant comme sous une charge statique  $Q - \frac{Q}{y} \frac{d^2y}{dx^2}$ ; et comme la plus grande courbure a lieu alors au point où cette

charge agit, le plus grand moment est cette même charge multipliée par  $\frac{x}{2a}(2a-x)$ . Or ce produit, d'après l'équation précédente, est égal à  $\frac{y}{2ax - a^2} \cdot \frac{Qa^3}{3f}$  et son rapport au plus grand moment de l'état statique  $\frac{Qa}{2}$  est bien ce que nous venons d'égalier à  $T$ .

la poutre, et est au contraire extrêmement grand aux points proches du deuxième appui, c'est-à-dire de l'endroit où la charge quitte la poutre; et, pour certaines valeurs de la constante appelée  $\delta$ , ce rapport, après avoir atteint l'infini, devient négatif, ce qui prouve que la poutre, fléchie par le passage de la charge vers le milieu, rebondirait vers la deuxième extrémité, et quitterait quelquefois l'appui correspondant. La *tendance à rupture*, qui est proportionnelle à la courbure prise, acquiert sa plus grande valeur au delà du milieu de la poutre; son rapport, appelé  $T$ , à celle qui a lieu au milieu dans l'état statique, est d'environ  $3/2$  quand la constante dont nous avons parlé est 3; mais elle s'élève bien plus haut quand cette constante  $\delta$  est moindre ou quand les vitesses sont considérables.

Lorsque la constante  $\delta$  est grande, c'est-à-dire la vitesse petite ainsi que le poids fléchissant, ou la roideur de la pièce considérable et la flèche statique faible, l'augmentation proportionnelle de flèche, au milieu, due au mouvement, est sensiblement

mesurée par l'inverse  $\frac{1}{\delta} = \frac{4\sqrt{V^2}}{ga^2} = \frac{2QaV^2}{3gEI}$  de cette constante,

et l'augmentation correspondante de la plus grande courbure, ou du moment qui tend à rompre, suit la même proportion, égale tout juste à celle de la partie de la pression de la charge qui est due à son inertie, ou à la force centrifuge qu'elle acquerrait au milieu de la trajectoire répondant à une vitesse infiniment petite, si elle la parcourait au lieu de la trajectoire réelle <sup>(1)</sup>.

(1) C'est-à-dire que la flèche ou la courbure maximum dynamique est à la flèche ou à la courbure maximum statique comme 4 est à 1.

$$1 + \frac{1}{\delta} = 1 + \frac{V^2}{g} \cdot \frac{2Qa}{3EI} = 1 + \frac{V^2}{g} \cdot \frac{4f}{a^2}.$$

Cette résulte immédiatement de l'équation différentielle  $y = \frac{f(2ax - x^2)^2}{a^4} \times \left(1 - \frac{V^2}{g} \frac{d^2y}{dx^2}\right)$  donnant, en négligeant  $\frac{V^2}{g} \frac{d^2y}{dx^2}$  devant 1, la dépression statique qui, regardée comme une première approximation, et substituée dans la parenthèse, donne  $1 + \frac{4fV^2}{ga^2} \cdot \frac{6ax - 3x^2 - 2a^2}{a^2}$ ; d'où  $1 + \frac{4fV^2}{ga^2}$  au milieu ou pour  $x = a$ .

M. Willis a comparé ces résultats du calcul, rendus plus manifestes au moyen d'épures des trajectoires, avec ceux de diverses expériences faites à Portsmouth par MM. Henri James et Douglas Galton, et d'expériences non moins variées faites par lui à Cambridge plus en petit, mais d'une manière qui les rendait plus comparatives entre elles et qui permettait mieux d'en saisir la loi, surtout en ce qui regarde la part d'influence de l'inertie de la barre. Dans celles-ci, pour ne pas diminuer la flexibilité dont dépendent la sensibilité et la justesse des mesurages, et qui diminue naturellement quand la masse augmente, M. Willis se sert constamment de la même barre d'acier, de 1<sup>m</sup>,22 de long sur 5<sup>mm</sup>,84 d'équarrissage; et il fait varier artificiellement son inertie en suspendant, au milieu, par une bielle verticale mince, l'une des deux extrémités d'un appareil qu'il appelle une *balance d'inertie*, consistant dans un simple levier horizontal à deux bras égaux, sur lequel on met des masses tantôt plus petites tantôt plus grandes, mais toujours en équilibre statique sur ce levier; de sorte qu'elles ne résistent au mouvement vertical de la bielle qu'autant que ce mouvement est accéléré ou retardé. Comme M. Willis trouve que l'inertie de la barre doit résister à peu près de la même manière que si sa masse était concentrée à son milieu, mais réduite seulement aux  $0,486 = \frac{17}{35}$  de sa grandeur (<sup>1</sup>), il peut comparer facilement, en

(<sup>1</sup>) On a vu (fin du n° LI, note) que cette masse, réduite aux  $\frac{17}{35}$  concentrée au milieu, a la même force vive que toute la barre si l'on suppose, comme fait M. Willis, que ses divers points se déplacent transversalement comme dans l'état statique sous l'action d'une charge centrale.

En partant de cette même supposition on peut facilement, sans remplacer les masses des éléments de la barre par une masse centrale unique, calculer pour un instant quelconque les rapports approchés de leurs diverses inerties à celle du poids roulant (ou à sa force centrifuge) et en déduire, comme deuxième approximation, par deux équations de moments de flexion, l'état de la barre soumise à ces diverses forces ainsi qu'à la charge et aux réactions des appuis; d'où, pour la trajectoire, une équation différentielle du second ordre, analogue à celle de la note ci-dessus, ou contenant  $\frac{d^2y}{dx^2}$ , y première puissance et diverses puissances entières de x. En l'intégrant en série comme nous avons dit qu'a fait M. Stokes

divers points de la barre, les inerties factices créées par son appareil; et il trace en conséquence les trajectoires que suivrait la charge pour divers rapports du poids roulant au poids de la barre d'une roideur supposée constante.

La comparaison avec les trajectoires calculées de M. Stokes donne une concordance approchée quand le poids de la barre est très-faible; mais quand le poids de la barre approche de celui de la charge roulante, elle donne un écart déjà sensible qui augmente beaucoup.

En conséquence M. Stokes, dans une deuxième addition à son mémoire (où il fait un examen critique d'un article de M. Cox)<sup>(1)</sup>, pose une équation complète de l'équilibre de rotation de la barre autour d'un quelconque de ses points, sous l'action de toutes les forces y compris les inerties de ses parties. Débarrassée par deux différentiations, comme on fait ordinairement, de la variable auxiliaire qu'elle contient sous deux intégrales qui y entrent, cette équation devient exactement celle du mémoire de 1779 d'Euler, à deux termes différentiels l'un du 4<sup>e</sup> ordre par rapport à l'abscisse  $x$ , l'autre du 2<sup>e</sup> ordre par rapport au temps  $t$ , car pour tous les problèmes relatifs à une lame ou barre vibrant transversalement, l'équation indéfinie est la même, et ils ne diffèrent que par les conditions définies aux limites de la barre ou de chaque partie de la barre. Comme il ne paraît pas qu'on puisse l'intégrer exactement avec les conditions du problème dont nous nous occupons, M. Stokes en cherche des solutions approchées, en supposant les inerties des divers éléments distribuées proportionnellement aux dépressions qu'ils prendraient sous l'action de poids uniformément répartis d'un bout à l'autre. Il y arrive, mais *pour le second cas extrême*, savoir le cas où c'est la masse mobile qui est très-petite par rapport à la masse de la barre et de sa charge permanente.

Enfin M. Phillips, et, quelques années après lui, M. Renaudot,

pour un cas plus simple, elle donne des résultats où l'inertie paraît comptée d'une manière suffisante quant au calcul des flèches successives servant d'ordonnées à la trajectoire.

(1) On the dynamical Deflection and Strain on Railway-Girders (Civil Engineer Journal, september 1848).



dans de remarquables mémoires, le premier présenté le 23 avril 1855, approuvé le 18 février 1856 et inséré aux *Annales des mines* (1), le second inséré en 1862 aux *Annales des ponts et chaussées*, ont cherché d'une manière nouvelle à donner une solution complète du problème, en tenant compte de la masse de la poutre ainsi que de celle d'une charge permanente répartie sur sa longueur (2). M. Phillips pose d'abord, pour les deux parties dans lesquelles la barre se trouve partagée au point où se trouve la charge, supposée agir en un seul endroit à chaque instant, deux équations différentielles du quatrième ordre en  $x$  et du deuxième en  $t$  comme celle d'Euler, et les équations de condition à la jonction ainsi qu'aux extrémités, qu'il suppose successivement encastrees et simplement appuyées. Il cherche à satisfaire aux équations en exprimant l'inconnue par des séries ordonnées suivant les puissances entières de l'abscisse  $x$ , et dont chaque coefficient indéterminé est fonction du temps  $t$ . Il trouve facilement que ces coefficients peuvent se déduire tous, par des différentiations d'ordre pair, de quatre d'entre eux, dont deux pour chaque portion. Pour déterminer ceux-ci, qui, en vertu des conditions de raccordement, se trouvent engagés dans quatre équations différentielles d'ordre infini, M. Phillips les regarde comme développables eux-mêmes suivant les puissances entières successives d'une certaine constante  $\frac{4}{A^2}$  proportionnelle au poids de la poutre par unité de longueur, et à sa flexibilité ou à l'inverse de son moment d'élasticité  $EI$  (3), et dont les puissances paires affectent déjà les termes successifs des équations en question. Chacun des coefficients des nouveaux

(1) Calcul de la résistance des poutres droites sous l'action d'une charge en mouvement, *Comptes rendus*, t. XL, p. 951 et XLI, p. 325; et *Ann. des Mines*, t. VII, 1855.

(2) Nous pensons avec M. Renaudot que cette charge permanente doit être supposée vibrer comme la poutre elle-même. Cela n'exige, au reste, d'autre modification aux équations de M. Phillips que d'annuler une constante.

(3) Cette constante  $\frac{4}{A^2}$  est, en effet, avec les notations précédentes, et en appelant  $P$  le poids de la poutre et de sa charge, égale à  $\frac{4}{2ag} \frac{P}{EI}$ .

développements se trouve ainsi dépendra d'une simple équation différentielle du second ordre, intégrable par une marche d'approximations successives, en série de termes qui sont des fonctions connues du temps, ou de l'abscisse actuelle du poids voyageur, affectés des puissances d'un produit de ce poids par la longueur et la flexibilité de la poutre et par les deux tiers de la hauteur due à la vitesse du mouvement (c'est-à-dire des puissances de la constante  $\frac{1}{6}$  de M. Stokes).

En négligeant partout les puissances deuxième et supérieures de ces deux constantes, M. Phillips obtient des solutions qui satisfont, dans les limites de l'approximation à laquelle il se borne, aux diverses conditions de la question, excepté à la condition initiale de l'immobilité de la poutre, car, d'après les formules trouvées, les éléments auraient déjà, avant le passage de la charge, certaines vitesses transversales. Mais M. Phillips montre que les mouvements vibratoires qui résulteraient d'ébranlements initiaux correspondants sont, dans les limites des données de la pratique, faibles et sans influence sensible sur l'évaluation des déplacements et des résistances.

Le résultat principal est que la courbure, dont dépend la tendance à rompre, peut être évaluée comme pour l'état de repos sous la double action de la charge placée au milieu et du poids propre de la poutre, en augmentant cette courbure statique locale dans une certaine proportion, qui est précisément celle que donne le calcul de M. Stokes relatif au cas où l'inertie de la poutre peut être négligée, et qui résulte aussi, comme on a vu (note 2, p. cxli), d'une intégration en série, bornée à deux ou trois termes, de l'équation différentielle du second ordre posée par M. Willis<sup>(1)</sup>, et se réduisant, quand on se tient à deux termes, à ce dont l'inertie verticale de la charge ou sa force centrifuge augmente sa pression sur la poutre. M. Phillips tire, pour le cas d'une poutre encastree aux deux bouts, des conséquences analogues<sup>(2)</sup>.

(1) En effet, avec la notation  $\frac{1}{\theta} = \frac{2Qav^2}{3gEI}$ , il trouve  $\frac{1}{\theta} + \frac{1}{\theta} + 2,5 \frac{1}{\theta} + \dots$

(2) Le deuxième terme de la seconde parenthèse de l'expression numérotée (76) aurait besoin d'être réduit de moitié, comme l'a remarqué M. Bresse, en rectifiant une inadvertance dans le calcul final.

Le calcul de M. Renaudot est imité de celui de M. Phillips, mais relatif au cas où la charge roulante occupe, comme un convoi, une certaine longueur de la poutre. Dans ses Résumés et conclusions (p. 197), il néglige aussi ce qui vient de la masse de la poutre en ce qui est relatif aux rapports de la tension dynamique à la tension statique.

Cette solution, qui se distingue par la hardiesse des expédients, mériterait qu'on poussât plus loin le calcul des termes successifs des trois ordres de séries entières dont M. Phillips a cru pouvoir faire usage et qui s'y combinent, principalement celle qui procède suivant les puissances de la masse de la poutre, afin de s'assurer au moins par des exemples numériques nombreux, de leur convergence dans les cas de la pratique. La question, dans l'état actuel, ne paraît point épuisée. On a vu en effet tout à l'heure que la correction de la flèche statique, semblable à celle qui a été déduite par M. Stokes du calcul de la courbure de la trajectoire pour une inertie nulle de la poutre, donnait des résultats très-différents de ceux des expériences de M. Willis pour peu que la masse de la poutre approchât de celle de la charge roulante.

On a vu aussi, au n° XXXII, et l'on verra encore au n° LX, que les séries entières n'ont pas toujours fourni à MM. Poisson et Cauchy, dans des problèmes d'équilibre, des résultats conformes, même par approximation, avec ceux d'une analyse plus exacte où l'on ne faisait point usage de cette forme de développement non justifiée; et l'on a encore vu (n° LII et LIII) que dans des questions de mouvement ou de *résistance vive*, ces sortes de séries, tout en donnant à peu près les flèches centrales ou les allongements dynamiques totaux des barres heurtées transversalement ou longitudinalement, ne fournissaient, pour les allongements individuels des parties, ou pour les courbures, que des nombres fort différents de ceux que révèlent les intégrales exactes en séries de sinus, ou de sinus et d'exponentielles. Une masse roulante, il est vrai, ne doit pas produire autant qu'une masse heurtante, ces vibrations du second et du troisième ordre qui rendent très-onduleuse et très-variable la forme réelle de la pièce, et qui produisent, en cer-

tains points, des courbures très-fort au-dessus de celles qu'on a quand l'inertie est négligée, ou la déformation supposée propagée instantanément. Mais quelque chose de semblable doit néanmoins se produire ici à un certain degré, et paraît échapper aux calculs que nous citons, ainsi qu'aux expériences faites jusqu'à présent, où l'on n'a guère observé que les flèches de courbure <sup>(1)</sup>.

Nous pensons donc que jusqu'ici il n'y a de solutions analytiques complètes et certaines du problème de la résistance aux déformations dynamiques des pièces solides que celle qui a été donnée par Navier pour les allongements produits par un choc longitudinal, en y joignant celle que nous avons donnée suivant les mêmes principes et par une marche analogue pour le choc transversal (n° précédent LVI).

**LVIII. Surfaces élastiques. Sphère et cylindre creux. Tuyaux. Vases. Chaudières et réservoirs. Mariotte. Navier. M. Lamé.** — Voyons maintenant ce qui a été fait pour le calcul des déformations et des vibrations des vases et des plaques.

C'est pour arriver au calcul des épaisseurs des tuyaux cylindriques supportant des pressions dans leur intérieur, et de celles des rondelles ou platines qui les ferment, que Mariotte a entrepris et inséré dans le *Traité du mouvement des eaux* ses recherches théoriques et expérimentales sur la résistance des solides en général.

D'après la première des deux règles qui terminent son *deuxième discours* déjà cité (n° IV), l'épaisseur du tuyau, supposé cylindrique à section circulaire, doit être proportionnelle à la fois à la pression et au diamètre.

Ce théorème se démontre de suite en supposant le tuyau

---

(1) Il serait possible d'obtenir la suite des formes d'une barre ou bourtée ou sollicitée par une charge roulante, en fixant latéralement, à plusieurs de ses points, des styles qui marqueraient leur trace sur un plan vertical enduit de noir de fumée et entraîné rapidement dans une direction oblique à l'horizon pour éviter la confusion des différentes traces. Ce serait un sujet digne de la sagacité des habiles expérimentateurs qui ont enrichi la science de tant de faits soigneusement observés, surtout au Conservatoire sous la direction de M. Morin.

coupé longitudinalement par un plan méridien. Pour l'équilibre d'une moitié du tuyau et du fluide contenu, la tension sur l'unité de longueur, dans chacune des deux coupes de la matière suivant son épaisseur, doit être égale à la *pression intérieure de l'eau sur l'unité superficielle, multipliée par le rayon*.

De même, pour une sphère creuse, Navier a remarqué que la tension totale, dans une coupe annulaire diamétrale, doit être égale à la pression intérieure par unité superficielle, multipliée par la surface d'un grand cercle intérieur, ce qui donne, par unité de longueur de l'arc intérieur de la coupe, une tension égale à la pression multipliée par *la moitié du rayon*.

Quant aux dilatations que les tensions font éprouver à la paroi suivant les sens tangentiels transversaux, et auxquels il faut imposer la limite désignée ordinairement par  $\frac{R_a}{E}$  pour établir l'équation de cohésion, elles ne sont point égales dans toute l'épaisseur de la paroi, soit cylindrique, soit sphérique; et leurs moyennes n'ont point pour mesure, même lorsque l'épaisseur est très-petite, les tractions divisées par la section et par le module d'élasticité E de l'allongement et de la flexion d'un prisme de même matière dont les faces sont libres. MM. Lamé et Clapeyron ont déterminé, en 1828, par une analyse rigoureuse, fondée sur la théorie de l'élasticité <sup>(1)</sup>, la manière dont les tensions et les dilatations varient dans l'épaisseur, soit d'un tuyau cylindrique indéfini, fermé aux deux bouts <sup>(2)</sup>, soit d'une sphère creuse, dont Poisson s'est occupé la même année à peu près dans les mêmes termes <sup>(3)</sup>. On en déduit que lorsque les parois sont très-minces, leurs dilatations dans le sens tangentiel transversal sont égales aux tensions par unité de section diamétrale, divisées, non pas par le coefficient d'élasticité ordinaire E, mais par  $\frac{8}{7} E$  pour le cylindre, et par  $\frac{4}{3} E$  pour la sphère. On trouve,

<sup>(1)</sup> Sur l'équilibre intérieur des solides homogènes, 1828 (Sav. étr., t. IV), n<sup>os</sup> 45 à 48, et 57 à 60.

<sup>(2)</sup> Nous pensons qu'il convient de supposer toujours cette fermeture, même dans un tuyau de conduite ouvert aux deux bouts s'il est d'une grande longueur, car la pression de l'eau contenue doit être à peu près égale en tous sens.

<sup>(3)</sup> Ann. de ch. et de ph., 1828, 2<sup>e</sup> série, t. XXXVIII, p. 330.

aussi, que si l'épaisseur est le  $\frac{1}{6}$  du diamètre extérieur, la dilatation tangentielle, dans la sphère comme dans le cylindre, est à peu près deux fois plus forte du côté intérieur que du côté extérieur <sup>(1)</sup>.

Les deux théorèmes élémentaires ci-dessus  $T = pr$  pour le tuyau et  $T = \frac{1}{2} pr$  pour la sphère creuse à parois minces ( $r$  et  $r$  étant leurs rayons,  $p$  la pression intérieure, ou plutôt son excès sur la pression extérieure de l'atmosphère, et  $T$  la traction tangentielle), peuvent se démontrer aussi sur des portions, même infiniment petites, de leurs parois, à savoir sur une calotte de la sphère et sur une bande longitudinale du tuyau. Mais ils exigent pour être exacts, comme l'observe M. Lamé <sup>(2)</sup>, que les tractions tangentielles exercées aux contours de ces portions produisent les mêmes dilatations que si la sphère était entière et partout également pressée et que si le cylindre était aussi entier et même de longueur infinie, ou que si la partie considérée était infiniment éloignée des deux couvercles ou platines de fermeture. Il en résulte, continue M. Lamé, que si une chaudière à vapeur est composée d'un cylindre terminé par deux calottes de sphère, les tractions ne se régleront conformément aux deux théorèmes  $T = pr$  et  $\frac{1}{2} pr$  qu'autant que les épaisseurs de la paroi cylindrique et du fond sphérique seront entre elles comme 7 fois le rayon  $r$  de la partie cylindrique est à 3 fois le rayon  $r$  de la partie sphérique. C'est, en effet, la condition pour que les dilatations tangentielles soient les mêmes pour toutes deux, à leur cercle de jonction, et conséquemment partout, et que par conséquent aussi le rayon de ce cercle s'étende autant comme faisant partie de l'une que comme faisant partie de l'autre <sup>(3)</sup>.

(1) M. Barlow; dans son chapitre *Force des presses hydrauliques*, trouve que ce rapport n'est que celui des inverses des diamètres intérieur et extérieur. On voit qu'il est bien plus considérable. C'est que son calcul est basé sur la supposition que faire de l'anneau est la même après qu'avant la dilatation, et que la densité est restée uniforme, ce qui n'est point exact (*A Treatise of the Strength, etc.*, édition de 1837).

(2) Note sur les épaisseurs et les courbures des appareils à vapeur (*Comptes rendus*, 18 février 1850, t. XXX, p. 457).

(3) En effet si  $e$ ,  $e$ , sont les deux épaisseurs supposées parties, les dilatations

La même règle peut servir à très-peu près pour les épaisseurs de la paroi cylindrique et du fond sphérique d'un réservoir d'eau en tôle (1).

C'est au moyen des mêmes formules du mémoire de 1828, modifiées comme à la 16<sup>e</sup> leçon sur l'élasticité en y introduisant deux coefficients, que M. Lamé a fourni à M. Regnault un calcul approximatif des dilatations de ses piézomètres de deux formes, dont nous parlons à l'appendice V, p. 668 et 674.

Si un tuyau cylindrique a une coupe transversale d'une autre forme que le cercle, la tension en un endroit quelconque, comme le prouve Navier par un raisonnement simple, est la moitié de la pression intérieure (supposée constante) pour une surface égale à la projection de l'unité de longueur du tuyau sur un plan parallèle à ses arêtes et à la normale en cet endroit. Et, pour un vase fermé, par une raison semblable, la somme des tensions dans la portion de paroi répondant à la courbe de contact d'un cylindre qui envelopperait ce vase tangentielllement, est égale à la pression intérieure sur une surface égale à la section droite du cylindre.

Mais quand les coupes ne sont pas circulaires, la pression produit généralement, avec la tension qu'elle développe, des *flexions* qui tendent à les rendre telles, et dont il résulte des inégalités plus ou moins considérables dans la répartition des dilatations suivant les épaisseurs : il faut calculer la plus grande pour lui imposer une limite (2).

des parois du cylindre et de la sphère seront respectivement, comme nous venons

de dire,  $\frac{pr}{8 Ee}$  et  $\frac{\frac{4}{2} pr}{\frac{4}{3} Ee}$ . Leur égalité donne bien la proportion  $\frac{e}{o} = \frac{7r}{3r}$  de

M. Lamé.

(1) La formule à laquelle arrive M. Dupuit pour ce fond (Traité de la conduite et de la distribution des eaux, page 242) revient à  $T = \frac{4}{2} pr$  donné ci-dessus.

L'attaque que M. Love dirige contre cette formule (Des diverses résistances de la fonte, du fer et de l'acier, 1859, n° 452, p. 235) n'a nul fondement, non plus que le raisonnement par lequel il prétend prouver qu'au centre de la calotte la tension est nulle.

(2) C'est ce qu'a fait M. Bresse (Société philomathique, 28 février 1857), sur une

Quand la pression la plus forte vient de l'extérieur de l'enveloppe sphérique ou cylindrique, les conditions sont analogues, excepté lorsque des inégalités de courbure ou d'épaisseur déterminent des flexions qui peuvent amener un aplatissement ou écrasement.

**LIX. Plaques et membranes élastiques. Leur équilibre et leurs vibrations. Euler. Jacques Bernoulli (de 1787). Sophie Germain. Lagrange. Poisson (1814). Première rectification, presque complète, et applications exactes, par Navier.** — Quant aux plaques, aux membranes, et aux vases ouverts, tels que les cloches, nous pouvons parler ici à la fois de ce qui est relatif à leurs vibrations et de ce qui regarde leurs déformations statiques.

Il n'a été fait dans le siècle dernier, comme dit M. Poisson <sup>(1)</sup>, que quelques essais infructueux sur les *surfaces élastiques* pliées à la fois dans deux sens différents. Ainsi Euler, après avoir donné en 1764 une équation de la forme  $\frac{d^2\zeta}{dt^2} = a^2 \frac{d^2\zeta}{dx^2} + b^2 \frac{d^2\zeta}{dy^2}$  pour le mouvement vibratoire des *tambours* ou membranes parfaitement flexibles, en les considérant comme des tissus de fils élastiques se croisant rectangulairement <sup>(2)</sup>, a présenté, dix-huit pages plus loin, un essai sur le son des cloches <sup>(3)</sup>, qu'il décompose, moins heureusement, en anneaux vibrant indépendamment l'un de l'autre, supposition qui conduit à des résultats en désaccord avec l'expérience comme avec le véritable état des choses.

En 1787 un jeune géomètre portant le beau nom de Jacques

indication de M. Belanger, pour une chaudière dont la coupe offre un petit degré d'ellipticité. Voir aussi le n° 407 de la deuxième édition (1862) de la Théorie de la résistance et de la flexion plane des solides, par M. Belanger.

<sup>(1)</sup> Mémoire sur les surfaces élastiques, lu le 4<sup>or</sup> août 1814 (Mém. de la classe des sciences mathématiques de l'Institut, 1812), déjà cité n° XXII et XXIX.

<sup>(2)</sup> *De motu vibratorio tympanorum*, au tome X (1767) des *Novi commentarii Academiæ Petropolitanae*, p. 243.

<sup>(3)</sup> *Tentamen de sono campanarum*. (*Idem*, p. 1785.)



Bernoulli <sup>(1)</sup>, présenta, à l'occasion des expériences que venait de publier le physicien allemand Chladni sur les plaques sonores <sup>(2)</sup>, un mémoire dans lequel, appliquant à une plaque rectangulaire une hypothèse analogue à celle qu'avait faite Euler sur les toiles ou membranes, il la considère comme formée de deux systèmes superposés de lames parallèles à ses deux côtés, ce qui lui donne facilement,  $x$  et  $y$  étant les coordonnées comptées dans les mêmes directions, sur le plan moyen,  $K$  une constante et  $\zeta$  l'ordonnée normale ou le petit déplacement perpendiculaire à la plaque, une équation

$$K \left( \frac{d^4 \zeta}{dx^4} + \frac{d^4 \zeta}{dy^4} \right) = Z \quad \text{ou} \quad = -m \frac{d^2 \zeta}{dt^2}$$

selon que la plaque est en équilibre sous une charge  $Z$  par unité superficielle au point  $(x, y)$  ou selon qu'elle vibre,  $m$  représentant sa masse aussi par unité. Cette équation est incomplète; elle manque d'un terme  $2K \frac{d^4 \zeta}{dx^2 dy^2}$  comme nous allons voir.

L'auteur reconnaissait, au reste, qu'on pouvait lui objecter la division également possible de la plaque en lames non droites, ou bien non orthogonales, etc., « ce qui ne donnerait peut-être pas la même chose, » mais en ajoutant qu'il ne présentait son mémoire que comme un premier essai sur ce sujet.

Cependant Chladni étant venu en France vers 1808 et ayant montré les curieuses lignes nodales, de forme courbe régulière et très-variée, qui sont dessinées par le sable fin répandu sur les plaques qu'il faisait vibrer à l'aide d'un archet, l'Académie, sur l'indication du souverain d'alors, proposa en 1810 pour sujet de prix de donner la théorie mathématique des vibrations des surfaces élastiques, et de la comparer à l'expérience <sup>(3)</sup>. Une seule

(1) Fils du second Jean (ou petit-fils du premier, et surnom de Daniel), né en 1759, mort en 1789 d'un accident dans la rivière de Neva. *Essai théorique sur les vibrations des plaques rectangles et libres*, présenté le 21 septembre 1788. Tome V (1789) des *Nova acta*.

(2) Cette première publication de Chladni parut à Leipzig en 1787.

(3) *Traité d'acoustique de Chladni*, traduction publiée par lui en 1809, p. 357.

pièce fut envoyée, car, seule entre les géomètres du temps, mademoiselle Germain (\*) ne se laissa pas décourager par un mot de Lagrange, qui avait dit qu'il faudrait, pour la solution de cette question, un nouveau genre d'analyse. Elle aperçut et énonça un principe qui lui parut capable de conduire à l'équation véritable. Ce principe revient à ce que la somme  $\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'}$  des courbures, ou des inverses des rayons de courbure  $\rho$ ,  $\rho'$  dans deux sens rectangulaires, somme qui mesure en quelque sorte le degré de déformation de chaque élément de la plaque, doit jouer dans la flexion le même rôle que la courbure  $\frac{1}{\rho}$  dans la flexion d'une simple tige primitivement droite; en sorte que cette somme multipliée par une constante mesurerait la force élastique tendant à ramener à sa forme plane l'élément superficiel courbé, et à diminuer par conséquent la même somme; d'où il suivrait que le moment ou travail virtuel de la réaction en question serait égal, pour toute la plaque, à la somme des superficies des éléments multipliées par une constante  $K$  et par le produit  $\left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'}\right) \delta \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'}\right)$  de la même somme par sa variation ou différentielle par  $\delta$ ; en sorte que le potentiel des forces élastiques développées, ou la quantité dont la variation donne le travail virtuel, serait  $\frac{K}{2} \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'}\right)^2$  par unité superficielle.

Comme elle fit, à ce qu'il paraît, une erreur de calcul en posant ou en développant l'équation de travaux virtuels qui en découle, son mémoire de 1811 ne fut pas jugé remplir les conditions du programme. Mais Lagrange, qui encourageait les travaux de cette personne aussi modeste qu'éminente, adopta son idée et lui montra qu'on en tirait facilement, par les méthodes de la mécanique analytique, l'équation

$$K \left( \frac{d^2\zeta}{dx^2} + 2 \frac{d^2\zeta}{dx^2 dy^2} + \frac{d^2\zeta}{dy^2} \right) = Z \quad \text{ou} \quad -m \frac{d^2\zeta}{dt^2} \quad (*)$$

(\*) Née en 1776, morte en 1831. Voyez la notice en tête de ses *Considérations sur l'état des sciences et des lettres*, publiées en 1833.

(\*) En effet, en réduisant les courbures aux valeurs qu'elles prennent quand

La question fut remise au concours une deuxième et une troisième fois, et Sophie Germain, en présentant en 1813 cette équation différentielle complète, avec un essai d'établissement, par le même principe, des conditions-limites pour les seules plaques rectangulaires, obtint d'abord une mention honorable; puis, de nouveaux développements, et l'extension à des plaques naturellement courbées en forme de surface cylindrique, sur lesquelles elle fit également des expériences, lui méritèrent le grand prix en 1816. Elle ne se détermina qu'en 1821, sur les exhortations de Fourier et de Legendre, à publier ses travaux <sup>(1)</sup>, auxquels elle donna une suite en 1826 <sup>(2)</sup>. Tout en soutenant son hypothèse, elle semble décliner l'invention de l'équation différentielle, en se réservant pour tout mérite de l'avoir appliquée. Ses intégrales, exprimées en sinus et exponentielles, sont *particulières*, et ne fournissent que le nombre de vibrations principales ou du ton le plus grave, et le nombre des lignes nodales, sans déterminer les amplitudes de celles-là ni les formes de celles-ci. On verra plus loin que le potentiel, ou la quantité à rendre un minimum pour l'équilibre, est proportionnel, non pas à  $\left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'}\right)^2$ , mais à ce carré plus une constante multipliée par la somme  $\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{\rho'^2}$ , qui, traitée de même, conduit à la même équation du quatrième ordre <sup>(3)</sup>.

Aussitôt qu'il eut connaissance de l'équation différentielle nouvelle, Poisson en chercha une démonstration exacte, et lut

elles restent très-petites, on a, pour toute l'étendue de la plaque

$$K \iint dx dy \left( \frac{d^2 \zeta}{dx^2} + \frac{d^2 \zeta}{dy^2} \right) \left( \frac{d^2 \zeta}{dx^2} + \frac{d^2 \zeta}{dy^2} \right)$$

qui, en intégrant par parties deux fois, donne, pour le terme restant affecté du double signe d'intégration,  $K \iint dx dy \left( \frac{d^4 \zeta}{dx^4} + 2 \frac{d^4 \zeta}{dx^2 dy^2} + \frac{d^4 \zeta}{dy^4} \right) \delta z$ .

(1) Recherches sur la théorie des surfaces élastiques, in-4°.

(2) Remarques sur la nature, les bornes et l'étendue de la question des surfaces élastiques.

(3) En effet, les deux rayons de courbure principaux  $\rho$  et  $\rho'$  sont donnés comme

à ce sujet le mémoire, déjà cité, du 4<sup>or</sup> août 1814. Dans la première partie, il s'occupe des membranes, c'est-à-dire des surfaces infiniment flexibles ne résistant aux déformations, comme la corde vibrante, qu'en vertu de tensions longitudinales ou tangentielles ; et il parvient, en embrassant le cas où la forme primitive est courbe, à une équation qui se réduit, lorsque cette forme est plane, à celle d'Euler (de 1766), plus générale que celle de Lagrange, car, dans la *Mécanique analytique* <sup>(1)</sup>, la ten-

l'on sait (quand la courbure est petite) par l'équation du second degré

$$\left(\frac{1}{\rho} - \frac{d^2\zeta}{dx^2}\right)\left(\frac{1}{\rho} - \frac{d^2\zeta}{dy^2}\right) = \left(\frac{d^2\zeta}{dxdy}\right)^2;$$

d'où résulte, en tirant leurs valeurs et en substituant,

$$\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{\rho'^2} = \left(\frac{d^2\zeta}{dx^2}\right)^2 + 2\left(\frac{d^2\zeta}{dxdy}\right)^2 + \left(\frac{d^2\zeta}{dy^2}\right)^2.$$

Multippliant par  $dxdy$ , prenant les  $\iint$ , différentiant par  $\delta$  et intégrant par parties, ce qui restera affecté du double signe et de  $dxdy\delta z$  sera le même trinôme du quatrième ordre qui est fourni par  $\left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'}\right)^2$ .

(1) Édition de 1844, 4<sup>or</sup> partie, section V, ch. III, § II, n<sup>os</sup> 44, 45.

Fourier a aussi étudié les *surfaces élastiques*, d'abord seulement, dans un Mémoire présenté le 8 juin 1818, sous le rapport de la propagation d'un mouvement qu'on y excite quelque part, lorsqu'elles sont infinies en tous sens; et il a donné à ce sujet, de leur équation différentielle

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} + a^2\left(\frac{d^2\zeta}{dx^2} + 2\frac{d^2\zeta}{dx^2dy^2} + \frac{d^2\zeta}{dy^2}\right) = 0,$$

une intégrale en série d'exponentielles réelles et imaginaires susceptible d'être sommée par une intégrale définie. M. Poisson ayant présenté à cette occasion, à la séance suivante de la Société philomathique, et inséré à son Bulletin, p. 97, des *Remarques sur les rapports qui existent entre la propagation des ondes à la surface de l'eau* (sujet dont il s'était déjà occupé, même Bulletin, juin 1817, p. 85) et leur propagation dans une plaque élastique, Fourier répliqua par une *Note relative aux vibrations des surfaces élastiques et au mouvement des ondes*, où il donne de l'équation précédente une intégrale sous forme finie contenant deux fonctions arbitraires engagées chacune sous une intégrale double prise de  $-\infty$  à  $\infty$  par rapport à des variables auxiliaires. La même intégrale est donnée par Poisson quelques pages avant, au même cahier, p. 125, sous le titre : *Sur l'intégrale de l'équation relative aux vibrations des surfaces élastiques*, en partant de celle  $z = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2 t} \varphi(\alpha + 2\alpha\sqrt{mt}) d\alpha$  de  $\frac{dz}{dt} = m \frac{d^2z}{dx^2}$ , trouvée par Laplace (*J. de l'Éc. pol.*, 4<sup>or</sup> cahier). Mais M. Poisson ne fait aucun usage de cette intégrale dans son Mémoire de 1828 où il ne considère qu'une plaque de dimensions finies.

sion est seulement supposée égale en tous sens. Passant à ce qui est relatif à une plaque, c'est-à-dire à une surface capable de résister à la flexion, il suppose sa résistance due à des forces répulsives mutuelles entre ses points matériels (n° XXII ci-dessus). Ces forces, sur lesquelles il ne fait d'autre supposition que celle de leur action à des distances insensibles seulement, ne se trouvent finalement engagées, comme dans les calculs relatifs à l'action capillaire, etc., que dans des intégrales définies se réduisant à des constantes arbitraires déterminables par l'observation. Les changements de distance qui mettent ces actions en jeu ne sont, dans son analyse, que ceux des points de la surface moyenne, car, comme nous l'avons dit au n° XXII et comme il l'a reconnu, il réduisait la plaque à une série de points répandus sur cette surface plane, d'où il suit que le trinôme différentiel de Sophie Germain et de Lagrange n'est multiplié que par le carré de la masse de l'unité de surface de la plaque et par conséquent par le carré de son épaisseur tandis qu'il devrait l'être par le cube. Cette équation est applicable du reste à des surfaces douées de tous les degrés de flexibilité, car selon qu'on néglige certains termes ou certains autres elle peut servir à la plaque ou à la membrane. Poisson termine son mémoire en montrant (comme nous venons de faire dans deux notes, mais en embrassant le cas de courbures plus grandes) que la surface élastique, en appelant  $d\omega$  son élément, a la propriété de rendre un minimum non-seulement  $\int d\omega \left( \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'} \right)^2$  mais encore  $\int d\omega \left( \frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{\rho'^2} \right)$  et par conséquent toutes les sommes de ces deux intégrales multipliées par des constantes; ce qui vient, observe-t-il, de ce qu'elles diffèrent entre elles d'une constante multipliée par  $\int \frac{d\omega}{\rho\rho'}$ , dont la différentielle par  $\delta$  est nulle quand on n'a égard qu'à ce qui reste sous le double signe  $\iint$  après qu'on a remplacé  $d\omega$  par sa valeur  $dx dy$  et intégré par parties. Cette propriété généralise celle qui avait été aperçue par D. Bernoulli et développée par Euler pour les simples lames (n° XIII).

Navier le premier envisagea les surfaces élastiques ou les plaques dans leur réalité physique en tenant compte de leur épaisseur, dans un mémoire déjà cité (n° XXII), présenté à l'Académie le 14 août 1820 et imprimé par extrait en 1823 (1). Il composa pour cela (comme il fit l'année suivante pour des corps de forme quelconque) la résultante des actions s'exerçant sur chaque molécule de la part de toutes les molécules environnantes, en vertu de ce que leurs distances ont été augmentées ou diminuées par la courbure de la plaque, dont il suppose que les lignes matérielles primitivement normales aux deux faces leur sont restées normales. Comme il se sert du calcul des variations et de la méthode de la *Mécanique analytique*, les intégrations par parties lui fournissent non-seulement l'équation différentielle du quatrième ordre avec un coefficient où l'épaisseur entre au cube, mais, encore, les *équations aux limites*, ou les conditions à remplir aux bords de la plaque selon la direction et l'intensité des forces extérieures qui agissent sur ces bords.

Son analyse est exacte, excepté en ce qu'il suppose que les petits éléments linéaires, dans le sens de l'épaisseur, *restent de la même grandeur* qu'avant la courbure de la plaque, tandis que, par suite des dilatations  $\frac{z}{\rho}$ ,  $\frac{z}{\rho'}$  des éléments linéaires *dans les sens parallèles* à la plaque, au point à la distance  $z$  de la surface moyenne, et en vertu de ce qu'on suppose nulles les pressions perpendiculaires aux deux faces, les premiers éléments auraient dû être regardés comme se contractant dans des proportions  $\frac{1}{3} \left( \frac{z}{\rho} + \frac{z}{\rho'} \right)$  d'après la théorie de l'élasticité, qui ne fut créée que l'année suivante par Navier lui-même, et développée seulement en 1827 dans ses conséquences par Cauchy et Poisson.

De cette omission il résulte que le potentiel par unité de surface, ou la quantité dont il faut rendre un minimum la somme des produits par les éléments superficiels, est proportionnel, dans son mémoire, à  $\frac{1}{2} \left( \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'} \right)^2 - \frac{2}{3} \frac{1}{\rho\rho'}$ , tandis

(1) Bulletin de la Société philomathique, p. 92.

qu'il l'est réellement à  $\frac{1}{2} \left( \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'} \right)^2 - \frac{3}{4} \frac{1}{\rho\rho'}$ . Cela n'empêche pas Navier d'arriver à la véritable équation indéfinie du quatrième ordre, ce que l'on comprend d'après la remarque finale du mémoire de Poisson rapportée tout à l'heure ; l'erreur n'affecte que les équations définies à satisfaire au contour. Encore est-elle tout à fait sans influence sur les belles applications qu'il en fait à la plaque rectangulaire, en sorte qu'on doit considérer Navier comme ayant le premier montré le genre de rectification qu'il fallait faire subir à l'expression du travail virtuel de déformation adoptée par Sophie Germain et Lagrange.

Il suppose horizontale la plaque rectangulaire, et :

1° Appuyée au contour sur un cadre fixe et chargée de poids arbitrairement répartis sur sa surface ; d'où il déduit comme cas particulier ce qui arrive quand la charge est ou au milieu ou également répartie, ce qui sert à démontrer analytiquement le théorème, prouvé tout autrement par Mariotte, de la constance du poids de rupture quelles que soient les dimensions.

2° Appuyée seulement sur quatre angles et sollicitée à tous les points de son contour par une force constante horizontale ou parallèle à son plan primitif (comme l'est une simple lame sollicitée debout ou longitudinalement).

Les intégrales offrent une belle application des méthodes de Fourier, alors nouvelles et non encore publiées.

**LX. Suite des plaques et membranes. Poisson. Cauchy. M. Lamé. M. Kirchhoff. Potentiel moléculaire véritable des plaques. Nombre des conditions aux limites.** — Mais la découverte des équations générales de l'équilibre d'élasticité permit bientôt à Poisson en 1828, et à Cauchy la même année, de présenter d'une autre manière celles qui sont relatives aux surfaces élastiques.

Poisson s'occupe d'abord de la membrane <sup>(1)</sup>, à laquelle il attribue une courbure quelconque primitive ou acquise. Il la suppose sollicitée seulement par des forces agissant sur son

---

(1) Mémoire au t. VIII de l'Institut, 1828, n° 54 et suivants.

contour, ainsi que par d'autres s'exerçant sur tous les points à la manière de la pesanteur et de l'inertie, et assez mince pour que les pressions intérieures puissent être regardées comme les mêmes dans toute l'étendue de son épaisseur. En exprimant l'équilibre d'un de ses éléments terminés par quatre faces normales, il obtient une équation, à laquelle M. Lamé arrive d'une manière bien plus simple <sup>(1)</sup> en taillant l'élément en forme de prisme quadrangulaire tronqué, qui a ses faces latérales perpendiculaires à deux des coordonnées. De cette équation il déduit, quand la membrane est primitivement plane, deux équations différentielles du second ordre donnant les déplacements que ses points peuvent éprouver dans deux sens parallèles à son plan, et, aussi, l'équation du second ordre, semblable à celle d'Euler (1766) donnant les vibrations perpendiculaires au même plan. M. Lamé l'a intégrée pour des cas remarquables où les diverses lignes nodales doivent se déterminer par des considérations tirées de la théorie des nombres.

Pour la plaque susceptible de résister à la flexion, Poisson et Cauchy <sup>(2)</sup>, à défaut d'une intégration complète des équations de l'élasticité, jusqu'à présent ineffectuée pour les corps *finis* non sphériques, regardent les déplacements à l'intérieur comme exprimables en séries convergentes procédant suivant les puissances entières de la très-petite ordonnée  $z$  qui est la distance de chaque point à la surface moyenne divisant l'épaisseur en deux parties égales. En supposant qu'aucune pression ne s'exerce sur les deux faces, et en ne conservant qu'un certain nombre de termes des développements, ils arrivent à l'équation différentielle du 4<sup>e</sup> ordre ci-dessus, où  $Z$  doit être, comme l'on voit, une force agissant sur toutes les molécules à la manière de la pesanteur ou de l'inertie, et, du reste, distribuée d'une manière quelconque aux divers points <sup>(3)</sup>. Mais on peut en étendre

<sup>(1)</sup> Neuvième leçon sur l'élasticité, 4853.

<sup>(2)</sup> Mémoire de M. Poisson du 4<sup>e</sup> avril 1828 au t. VIII de l'Institut, n° 65, p. 523 et suiv. ; et Mémoire du 6 octobre 1828 (présenté avant la publication de celui de Poisson), aux Exercices de mathématiques, 3<sup>e</sup> année, p. 328-355.

<sup>(3)</sup> Pour le faire comprendre nous croyons devoir rapporter ici, sous une forme simple, ce qu'il y a de plus essentiel dans leur analyse. Soient  $z$  la coordonnée normale, comptée depuis le plan moyen de la plaque,  $x$  et  $y$  les deux autres coor-



approximativement l'emploi, dans les problèmes d'équilibre, au cas où  $Z$  représenterait une pareille force augmentée d'une charge étrangère distribuée aussi suivant une loi quelconque

données rectangles,  $2\epsilon$  l'épaisseur très-petite de la plaque, sur les deux faces de laquelle on suppose qu'aucune pression ne s'exerce, en sorte qu'avec les notations du troisième Appendice, p. 547, on doit avoir  $p_{xz} = 0$ ,  $p_{yz} = 0$ ,  $p_{zz} = 0$  pour  $z = \pm \epsilon$ ; enfin soit  $\frac{Z}{2\epsilon}$  l'intensité de la force, parallèle aux  $z$ , qui agit sur l'unité de volume à la manière de la pesanteur ou de l'inertie, au point  $(x, y, z)$ , ou soit  $Z$  cette force rapportée à l'unité de surface. Posons les équations d'équilibre intérieur (même Appendice, p. 585) :

$$0 = \frac{dp_{xx}}{dx} + \frac{dp_{xy}}{dy} + \frac{dp_{xz}}{dz}, \quad 0 = \frac{dp_{xy}}{dx} + \frac{dp_{yy}}{dy} + \frac{dp_{yz}}{dz}, \quad \frac{Z}{2\epsilon} = \frac{dp_{xz}}{dx} + \frac{dp_{yz}}{dy} + \frac{dp_{zz}}{dz}.$$

Différentions-les respectivement par rapport à  $x$ , à  $y$ , à  $z$ ; puis différencions par rapport à  $z$  ce qui en résulte, et ajoutons, à la troisième équation non différenciée, les trois résultats de cette double différenciation, multipliés respectivement par  $\frac{\epsilon^2}{3}$ ,  $\frac{\epsilon^2}{3}$ ,  $\frac{\epsilon^2}{6}$ ; nous avons, vu quo  $\frac{\epsilon^2}{3} + \frac{\epsilon^2}{6} = \frac{\epsilon^2}{2}$  :

$$\frac{\epsilon}{2\epsilon} \left( Z + \frac{\epsilon^2}{6} \frac{d^2 Z}{dz^2} \right) = \frac{\epsilon^2}{3} \frac{d}{dz} \left( \frac{d^2 p_{xx}}{dx^2} + 2 \frac{d^2 p_{xy}}{dx dy} + \frac{d^2 p_{yy}}{dy^2} \right) + \frac{d}{dx} \left( p_{xz} + \frac{\epsilon^2}{2} \frac{d^2 p_{xz}}{dz^2} \right) + \frac{d}{dy} \left( p_{yz} + \frac{\epsilon^2}{2} \frac{d^2 p_{yz}}{dz^2} \right) + \left( \frac{dp_{zz}}{dz} + \frac{\epsilon^2}{6} \frac{d^3 p_{zz}}{dz^3} \right).$$

Si l'on fait  $z = 0$ , les trois dernières parenthèses du second membre s'annulent, car si l'on s'arrête aux quatre premiers termes du développement suivant, supposé convergent et appliqué à  $p_{xz}$ ,  $p_{yz}$ ,  $p_{zz}$ , où les indices zéro marquent ce que deviennent, pour  $z = 0$ , les quantités qui en sont affectées

$$p = p_0 + z \left( \frac{dp}{dz} \right)_0 + \frac{z^2}{2} \left( \frac{d^2 p}{dz^2} \right)_0 + \frac{z^3}{6} \left( \frac{d^3 p}{dz^3} \right)_0,$$

cette annulation des trois binômes entre parenthèses est nécessaire pour que ces trois composantes de pression  $p_{xz}$ ,  $p_{yz}$ ,  $p_{zz}$  deviennent nulles pour  $z = \pm \epsilon$  comme on le suppose.

L'équation précédente se réduit donc, en effaçant, dans la parenthèse du premier membre, le terme en  $\epsilon^2$  vis-à-vis du terme qui n'en est pas affecté, à

$$Z_0 = \frac{2\epsilon^3}{3} \left[ \left( \frac{d^3 p_{xx}}{dx dx^2} \right)_0 + 2 \left( \frac{d^3 p_{xy}}{dx dy} \right)_0 + \left( \frac{d^3 p_{yy}}{dy^2} \right)_0 \right].$$

Or si nous mettons dans le second membre, qui est affecté de  $\epsilon^3$ , à la place de  $p_{xx}$ ,  $p_{xy}$ ,  $p_{yy}$  leurs valeurs (35) du § 26, p. 584 du 3<sup>e</sup> Appendice, en fonction des déplacements  $u$ ,  $v$ ,  $w$  des points dans les sens  $x$ ,  $y$ ,  $z$  pour une matière isotrope, nous pouvons y remplacer, au même degré d'approximation, les dérivées des déplacements parallèles  $u$ ,  $v$  par leurs valeurs en fonction des dérivées

sur la face supérieure, car il devra en résulter sensiblement la même flexion, sauf à changer très-légèrement la valeur de la constante affectant le trinôme différentiel.

Si des forces agissent non-seulement dans le sens normal mais encore dans deux sens tangentiels rectangulaires, on arrive de la même manière à une équation qui se sépare en deux autres et dont l'une donne les déplacements tangentiels comme dans le cas de la membrane susceptible de dilatations et de contractions, l'autre les déplacements normaux.

Mais il faut avoir aussi les équations d'équilibre *définies*, à satisfaire aux limites, c'est-à-dire aux bords ou au contour d'une portion quelconque de plaque dont nous supposons les faces horizontales pour fixer les idées. Poisson en pose trois, savoir : 1° une pour la somme des forces verticales, ou, comme on dit, des *efforts tranchants* qui peuvent agir sur l'unité de longueur de ce contour; 2° et 3° deux pour les sommes de moments, autour de parallèles aux deux coordonnées horizontales, des forces tant horizontales que verticales s'exerçant sur la même unité de longueur du bord ou *cylindre contournant*. Les forces verticales sont tenues en équilibre de translation par les réactions transversales, c'est-à-dire par les composantes de pression intérieure, de même direction, agissant à travers une section aussi verticale, rendue légèrement inclinée et courbe par les petits glissements qui les développent. Ces composantes sont nulles sur les

$\frac{dw}{dx}$ ,  $\frac{dw}{dy}$  du déplacement normal  $w$ , tirées de la supposition qu'on a  $p_{xx} = 0$ ,  $p_{yy} = 0$ ,  $p_{zz} = 0$  dans toute l'épaisseur comme on l'a sur les deux faces de la plaque; c'est-à-dire on peut faire  $\frac{dw}{dx} = -\frac{dw}{dx}$ ,  $\frac{dw}{dy} = -\frac{dw}{dy}$ , et  $\frac{d}{dz} \frac{dw}{dz} = -\frac{e'}{2e + e'} \frac{d}{dz} \left( \frac{dw}{dx} + \frac{dw}{dy} \right) = \frac{e'}{2e + e'} \left( \frac{d^2w}{dx^2} + \frac{d^2w}{dy^2} \right)$ . Or il en résulte

$$Z_0 = 4e \frac{e + e'}{2e + e'} \cdot \frac{2e^3}{3} \left( \frac{d^4w_0}{dx^4} + 2 \frac{d^4w_0}{dx^2 dy^2} + \frac{d^4w_0}{dy^4} \right),$$

c'est-à-dire l'équation du quatrième ordre qui était à établir et qui, étant intégrée, donnera le déplacement normal  $w_0$  du plan moyen, et où  $Z_0$  est la force agissant, à l'endroit  $(x, y)$ , sur une portion de la plaque répondant à l'unité de surface.

faces supérieure et inférieure, et Poisson a pu les négliger, sur toute l'épaisseur, dans le calcul qui a conduit à l'équation différentielle indéfinie; mais, ici, il faut en tenir compte, et Poisson conserve, dans la série entière par laquelle il les représente, le terme affecté du carré de la coordonnée verticale (<sup>1</sup>).

Quant aux réactions ou composantes de pression horizontales s'exerçant à travers la même section verticale, comme leurs sommes, pour toute l'épaisseur, sont nulles quand la plaque horizontale n'est sollicitée que par des forces verticales, les développements de ces forces manquent du premier terme; et M. Poisson les réduit au second terme, ce qui revient à les supposer (comme dans la théorie de la flexion des simples tiges ou lames) proportionnels à la petite ordonnée  $z$ , distance de chaque

(<sup>1</sup>) L'annulation nécessaire, pour  $z = \pm \xi$ , de ces composantes  $p_{xz}$  et  $p_{yz}$ , représentées approximativement par

$$p = p_0 + z \left( \frac{dp}{dz} \right)_0 + \frac{z^2}{2} \left( \frac{d^2p}{dz^2} \right)_0.$$

donne  $\left( \frac{dp}{dz} \right)_0 = 0$ ,  $p_0 = -\frac{\epsilon^3}{2} \left( \frac{d^2p}{dz^2} \right)_0$ , et réduit leurs expressions à la forme

$p = \left( \frac{d^2p}{dz^2} \right)_0 \cdot \frac{\epsilon^3}{2} \left( 1 - \frac{z^2}{\epsilon^2} \right)$  analogue à celle qu'on a trouvée; en ce qui est relatif à une simple tige, pages 244, 392, 394, pour le glissement qui leur est proportionnel, ce qui fournit

$$-\frac{2\epsilon^3}{3} \left( \frac{d^2p_{xz}}{dz^2} \right)_0, \text{ et } -\frac{2\epsilon^3}{3} \left( \frac{d^2p_{yz}}{dz^2} \right)_0.$$

pour les sommes de ces réactions sur l'unité de longueur de sections perpendiculaires aux  $x$  et aux  $y$  respectivement. Et comme les deux premières des trois équations d'équilibre intérieur, rapportées tout à l'heure dans une note, donnent

$$\left( \frac{d^2p_{xz}}{dz^2} \right)_0 = - \left( \frac{d^2p_{zx}}{dzdx} \right)_0 - \left( \frac{d^2p_{xy}}{dzdy} \right)_0; \quad \left( \frac{d^2p_{yz}}{dz^2} \right)_0 = - \left( \frac{d^2p_{xy}}{zdx} \right)_0 - \left( \frac{d^2p_{yy}}{zdy} \right)_0.$$

on peut, au moyen des relations entre les déplacements  $u$ ,  $v$ ,  $w$  données à la fin de cette même note, exprimer facilement ces deux sommes de forces en fonction du seul déplacement  $w_0$ , et arriver, pour celle qui agit sur l'unité de longueur horizontale d'une section verticale dont la normale fait l'angle  $\alpha$  avec l'axe des  $x$ , à l'expression de M. Poisson

$$F = -\frac{2\epsilon^3}{3} \cdot \frac{4e(0 + e')}{2e + e'} \left[ \left( \frac{d^2w_0}{dz^2} + \frac{d^2w_0}{dx dy^2} \right) \cos \alpha + \left( \frac{d^2w_0}{dx^2 dy} + \frac{d^2w_0}{dy^3} \right) \sin \alpha \right].$$

point au plan moyen, dont les dimensions restent invariables; et il détermine facilement, en fonction des dérivées des déplacements verticaux  $w_0$  des points de ce plan, l'expression de leurs moments, qu'il égale aux moments des forces extérieures agissant sur le contour, ces moments étant pris comme les autres autour de parallèles aux coordonnées horizontales  $x$  et  $y$  <sup>(1)</sup>.

Poisson en fait une belle application aux vibrations d'une plaque circulaire sollicitée d'une manière égale à égale distance de son centre, et détermine, lorsqu'elle est libre, ses vibrations et ses lignes nodales circulaires concentriques.

Mais M. Kirchhoff a montré qu'au lieu de ces trois équations de condition aux limites il n'en fallait que deux, dans un mémoire des plus dignes d'attention, dont un extrait a paru d'abord aux Comptes rendus en 1848 <sup>(2)</sup>, et qui a été imprimé in

<sup>(1)</sup> On a ainsi (même notations)

$$p_{xx} = z \left( \frac{dp_{xx}}{dz} \right), p_{yy} = z \left( \frac{dp_{yy}}{dz} \right), p_{xy} = z \left( \frac{dp_{xy}}{dz} \right),$$

donnant pour moments, sur l'unité de longueur des sections verticales, ces mêmes expressions multipliées par  $z dx \cos \alpha$  ou  $z dz \sin \alpha$  et intégrées de  $-e$  à  $e$ , c'est-à-dire  $\frac{2e^3}{3}$  multiplié par les mêmes trois dérivées  $\left( \frac{dp_{xx}}{dz} \right)$ , etc. par  $\cos \alpha$  ou  $\sin \alpha$ .

Mettant dans ces dérivées, pour  $p_{xx}, p_{yy}, p_{xy}$  leurs valeurs  $(2e + e') \frac{du}{dx} + \dots$ ,

etc., en fonction des déplacements  $u, v, w$ , on a  $\frac{2e^3}{3} (2e + e') \left( \frac{d^2 u}{dx dz} \right) + \dots$ ,

etc., où les dérivées des déplacements seront, comme aux deux autres notes, exprimées facilement au moyen de celles de  $w_0$  seul. D'où facilement aussi, les expressions suivantes (se confondant avec celles de M. Poisson quand on fait  $e = e'$ ) des moments, autour de parallèles aux  $x$  et aux  $y$ , des forces s'exerçant à travers l'unité de longueur de la face dont la normale fait avec les  $x$  l'angle  $\alpha$  :

$$M' = \frac{k}{3} \frac{ce^3}{2e + e'} \left\{ \left[ e' \frac{d^2 w_0}{dx^2} + 2(e + e') \frac{d^2 w_0}{dy^2} \right] \sin \alpha + (2e + e') \frac{d^2 w_0}{dx dy} \cos \alpha \right\},$$

$$M = \frac{k}{3} \frac{ce^3}{2e + e'} \left\{ (2e + e') \frac{d^2 w_0}{dx dy} \sin \alpha + \left[ 2(e + e') \frac{d^2 w_0}{dx^2} + e' \frac{d^2 w_0}{dy^2} \right] \cos \alpha \right\}.$$

<sup>(2)</sup> 16 octobre. *Note relative à la théorie de l'équilibre et du mouvement d'une plaque élastique*, t. XXVII, p. 394. Il est essentiel, à la page 396, au lieu

*extenso* en 1850 au journal de Crelle (1). Ces deux équations sont :

1° Celle qu'on peut tirer des deux dernières de Poisson, par le principe de la composition des moments de rotation, en égalant entre eux les moments des forces extérieures et des forces intérieures *autour d'une tangente* au contour.

2° La première de Poisson, relative aux forces verticales, mais additionnée, comme cela paraît nécessaire à M. Kirchhoff, avec

des deux équations  $N + (N) = 0$ ,  $G + \frac{dG}{ds} + (F) + \frac{d(G)}{ds} = 0$ , d'écrire  $G + (G) = 0$ ,  $V + \frac{dN}{ds} + (F) + \frac{d(N)}{ds} = 0$ ; et, à la 4<sup>e</sup> ligne en remontant, de mettre  $F$  et  $N, N$ , au lieu de  $G, C, G$ .

(1) 40<sup>e</sup> volume, 4<sup>me</sup> livraison, p. 51. *Ueber das Gleichgewicht und Bewegung einer elastischen schiebe.*

Il commence par prouver, dans ce mémoire, que le principe de Mademoiselle Germain, qui donne une équation différentielle indéfinie exacte, conduit à des conséquences fausses quant aux conditions aux limites. En effet, en faisant  $\frac{d^2\zeta}{dx^2} + \frac{d^2\zeta}{dy^2} = U$ , l'intégration par partie de  $\iint dx dy U \delta U$ , dont on a parlé à une note ci-dessus, p. cclvj, donne, pour les intégrales simples qu'elle détache, en désignant par  $[ ]^1$  des différences entre les valeurs de leurs limites qui sont relatives aux points où le contour est percé par une parallèle aux  $x$  ou par une parallèle aux  $y$

$$\left[ \int U \frac{d\zeta}{dx} dy \right]_0^1 + \left[ \int U \frac{d\zeta}{dy} dx \right]_0^1 - \left[ \int \frac{dU}{dx} \zeta \cdot dy \right]_0^1 - \left[ \int \frac{dU}{dy} \zeta \cdot dx \right]_0^1$$

réductibles, par une transformation connue (Appendice complémentaire, p. 793-794) à cette somme plus simple de deux intégrales relatives à tout le contour dont nous appelons  $ds$  l'élément et  $l$  la longueur, et où les différentielles sur  $du$  sont ce dont  $\zeta$  et  $U$  augmenteraient en cheminant sur une normale  $n$  au contour

$$- \int_0^l U \frac{d\zeta}{dn} ds + \int_0^l \frac{dU}{dn} \zeta \cdot ds.$$

Or, dit-il, si le contour est libre, il y aurait ainsi à remplir, pour ses divers points, deux conditions  $U = 0$ ,  $\frac{dU}{dn} = 0$ . Comme la première suffit pour déterminer complètement la solution de l'équation indéfinie, qui peut être écrite  $\kappa \left( \frac{d^2U}{dx^2} + \frac{d^2U}{dy^2} \right) = \zeta$ , la deuxième condition ne pourrait être remplie en général, et le problème de l'équilibre de la plaque serait sans solution possible.

ce qui résulte de la différentiation, par rapport à l'arc  $s$  du contour, de celle qu'on déduirait encore des deux dernières de M. Poisson pour l'égalité des moments de rotation des forces intérieures et extérieures autour d'une normale au même arc, et qui tendraient à produire, au contour, des espaces de torsions <sup>(1)</sup>.

Il regarde, au reste, comme exacte l'application, faite par Poisson, de ses équations à une plaque circulaire, sollicitée d'une manière égale aux points à égale distance du centre; mais c'est parce qu'alors une de ses trois conditions-limite devient identique. M. Kirchhoff donne une magnifique solution du problème des vibrations de la même plaque dans le cas où cette égalité de sollicitation n'existe pas, et où les lignes nodales sont à la fois des cercles concentriques et des rayons <sup>(2)</sup>. Ses résultats s'accordent avec des expériences de M. Strehlke.

Dans ce beau mémoire de 1848-1850, M. Kirchhoff déduit l'équation indéfinie du quatrième ordre, et ses deux équations définies, de la supposition, suffisamment approchée, que les lignes matérielles primitivement normales aux faces de la plaque leur restent normales, de même que dans la théorie de la flexion des tiges, et pour le cas ordinaire où les glissements sont négligeables, on déduit les formules de la supposition que les sections restent planes et normales aux arêtes. Mais, dans une note d'un mémoire ultérieur, non moins remarquable, relatif aux tiges infiniment minces, et dont nous donnons un extrait à la fin de notre Appendice complémentaire (p. 830 à 848), il annonce qu'une analyse semblable à celle dont il fait usage pour les tiges, et qui est exempte de toute hypothèse de ce genre, peut être employée pour une plaque aussi infiniment mince. Cette analyse a été donnée par un de ses élèves, M. Gehring, dans

---

<sup>(1)</sup> Le même reproche n'atteint pas Cauchy, qui n'a considéré que le cas où les bords ou contours de la plaque seraient sollicités normalement au cylindre tournant, en sorte que la force appelée  $F$  par Poisson et qui agit dans le sens des arêtes de ce cylindre, soit nulle. Il fait lui-même (Exercices, 3<sup>e</sup> année, 1828, p. 346) une objection contre une des équations de Poisson quand la plaque a une autre forme que le cercle.

<sup>(2)</sup> Comptes rendus, 17 décembre 1849, t. XXIX, p. 753. Ou même Mémoire, au t. 40 de Crelle.

une thèse <sup>(1)</sup> de doctorat, où il l'étend à une plaque dont la matière n'est pas isotrope : elle est fondée sur un artifice consistant à diviser la plaque, comme on a fait pour la tige, en éléments rectangulaires infiniment petits, dans chacun desquels on imagine une origine et trois axes de coordonnées pour leurs seuls points, et à évaluer la dérivée des coordonnées dans l'espace, d'un point quelconque, par rapport à l'une de ces coordonnées infiniment petites parallèles à la plaque, à la dérivée par rapport à la coordonnée finie, de même direction, de l'origine particulière des petites coordonnées en question. Un des points de doctrine que soutient le jeune savant contre les argumentateurs qu'on lui oppose, est que la théorie des corps élastiques ne peut être traitée convenablement que par le calcul des variations ; il le fonde surtout sur ce que son maître n'a réduit et rectifié les équations aux limites de Poisson, qu'en posant l'équation d'équilibre au moyen du potentiel des forces tant intérieures qu'extérieures, et en faisant par conséquent usage, suivant la méthode de Lagrange, de cette sorte de calcul ; méthode qui seule conduirait pour chaque question au nombre justement nécessaire et suffisant de conditions à remplir <sup>(2)</sup>.

(1) *De Equationibus differentialibus quibus æquilibrium et motus lamina cristallina definiuntur, dissertatio inauguralis.* M. Clebsch a reproduit cette analyse dans son beau livre *Théorie der Elasticität fester Körper*. Il y considère, ailleurs, une plaque dont l'épaisseur n'est pas infiniment petite.

(2) En attendant la publication des Notes à l'article XII du présent ouvrage, on nous saura gré d'indiquer ici succinctement en quoi consiste l'analyse de M. Kirchhoff, de 1848, fondée sur la conservation, toujours très-approchée, de la normalité des petites lignes primitivement normales aux faces de la plaque.

Le potentiel des forces intérieures, que nous appelons  $\Phi^1$  à l'Appendice complémentaire et dont nous donnons l'expression générale (199) à la p. 788, se réduit, quand la matière est isotrope (§ 26 p. 584 de l'Appendice III) et en appelant  $\partial', \partial'', \partial'''$  les trois dilatations principales (App. compl. § 82, p. 784) ou dans les directions suivant lesquelles il n'y a pas de glissements, à

$$\Phi^1 = e(\partial'^2 + \partial''^2 + \partial'''^2) + \frac{e'}{2}(\partial' + \partial'' + \partial''')^2.$$

Or, en supposant que toute normale matérielle reste normale à la surface qui divise en deux parties égales l'épaisseur de la plaque, et que cette surface moyenne ne change pas de grandeur en se courbant, les dilatations, à une distance  $x$  de cette même surface, dans les sens des deux courbures principales

Ce sujet est délicat. Nous ne doutons pas que les équations aux limites de M. Kirchhoff ne soient les véritables; mais en

$\frac{4}{\rho}$ ,  $\frac{4}{\rho'}$  et dans le sens normal, ont les valeurs suivantes, dont la troisième  $\partial_x$  se déduit des deux premières en égalant à zéro la valeur (35)  $p_{xx} = e'\partial_x + e'\partial_y + (2e + e')\partial_x$  de la page 584 après avoir mis celles-ci pour  $\partial_x, \partial_y$ :

$$\partial' = \frac{x}{\rho}, \partial'' = \frac{x}{\rho'}, \partial''' = -\frac{e'z}{2e + e'} \left( \frac{4}{\rho} + \frac{4}{\rho'} \right).$$

Substituant à  $\partial', \partial'', \partial'''$  dans  $\Phi^1$ , puis multipliant par  $dx dy dz$  et intégrant pour toute la plaque, on a en effectuant l'intégration de  $-e$  à  $e$  par rapport à  $z$

$$\frac{2ee^3}{3} \iint dx dy \left[ \frac{4}{\rho^2} + \frac{4}{\rho'^2} + \frac{e'}{2e + e'} \left( \frac{4}{\rho} + \frac{4}{\rho'} \right)^2 \right]$$

On voit de suite, en différenciant par  $\delta$  le trinôme entre crochets, quelle est la vraie forme du moment virtuel des réactions élastiques par unité superficielle de la plaque, et qu'il n'est pas proportionnel à  $\left( \frac{4}{\rho} + \frac{4}{\rho'} \right) \delta \left( \frac{4}{\rho} + \frac{4}{\rho'} \right)$  résultant de l'hypothèse ou de l'intuition de Sophie Germain, qui a pourtant si bien fait découvrir la véritable équation différentielle indéfinie du 4<sup>e</sup> ordre.

Or on sait que les deux valeurs principales  $\frac{4}{\rho}, \frac{4}{\rho'}$  de la courbure  $\frac{4}{\rho}$  sont données par les racines de l'équation du second degré suivantes, où  $w$  représente la petite ordonnée de la surface moyenne devenue courbe

$$\left( \frac{4}{\rho} - \frac{d^2w}{dx^2} \right) \left( \frac{4}{\rho} - \frac{d^2w}{dy^2} \right) = \left( \frac{d^2w}{dxdy} \right)^2.$$

Substituant, et appelant  $\Pi$  le potentiel des forces extérieures, on a pour l'équation d'équilibre ou des travaux virtuels

$$0 = \delta\Pi + \frac{2ee^3}{3} \iint dx dy \cdot \delta \left[ \left( \frac{d^2w}{dx^2} \right)^2 + 2 \left( \frac{d^2w}{dxdy} \right)^2 + \left( \frac{d^2w}{dy^2} \right)^2 + \frac{e'}{2e + e'} \left( \frac{d^2w}{dx^2} + \frac{d^2w}{dy^2} \right)^2 \right]$$

Effectuant la différentiation par  $\delta$  du crochet, puis les intégrations par parties; puis, en appelant  $\alpha$  l'angle que fait avec les  $x$  la normale  $u$  à l'élément  $ds$  du contour, mettons, dans les intégrales simples détachées,  $\pm ds \sin \alpha, \pm ds \cos \alpha$  pour  $dx$  et  $dy$  de manière à transformer les différences de ces intégrales en des intégrales  $\int_0^l ds$  pour tout le contour dont nous appelons  $l$  la longueur développée; enfin remplaçons

$$\frac{d\delta x}{dx} \text{ par } \frac{d\delta x}{ds} \sin \alpha + \frac{d\delta z}{dn} \cos \alpha, \text{ et } \frac{d\delta x}{dy} \text{ par } -\frac{d\delta z}{ds} \cos \alpha + \frac{d\delta z}{dn} \sin \alpha;$$

et, en appelant, avec M. Kirchhoff,  $p$  la force agissant verticalement sur la plaque par unité de la superficie,  $F$  la force agissant aussi verticalement par unité



quoi celles de Poisson sont-elles fausses? C'est ce que nous n'avons pas encore eu le loisir d'étudier à fond. Est-ce, comme

de longueur du contour,  $G$  et  $N$  les moments de rotation, autour de la tangente et autour de la normale  $n$ , de toutes les forces qui agissent sur la même unité de longueur, remplaçons  $\delta\Pi$  par sa valeur, qu'il est facile de reconnaître égale à

$$\iint dx dy p \delta z + \int_0^l ds F \delta z + \int_0^l ds G \frac{d\delta z}{dn} + \int_0^l ds N \frac{d\delta z}{ds};$$

nous trouverons, en faisant en outre, pour abrégé, avec M. Kirchhoff

$$\begin{aligned} -\frac{2e\epsilon^3}{3} \frac{1}{2e+e'} \left[ \left( \frac{d^2w}{dx^2} + \frac{d^2w}{dxdy^2} \right) \cos \alpha + \left( \frac{d^2w}{dy^2} + \frac{d^2w}{dx^2dy} \right) \sin \alpha \right] &= (F), \\ -\frac{2e\epsilon^3}{3} \left[ \left( \frac{d^2w}{dx^2} - \frac{d^2w}{dy^2} \right) \sin 2\alpha - 2 \frac{d^2w}{dxdy} \cos 2\alpha \right] &= (N), \end{aligned}$$

$$\frac{2e\epsilon^3}{3} \left[ \frac{e+e'}{2e+e'} \left( \frac{d^2w}{dx^2} + \frac{d^2w}{dy^2} \right) - 2 \left( \frac{d^2w}{dx^2} \sin^2 \alpha + \frac{d^2w}{dy^2} \cos^2 \alpha \right) + 2 \frac{d^2w}{dxdy} \sin 2\alpha \right] = (G),$$

l'équation d'équilibre suivante

$$\begin{aligned} 0 = \iint dx dy \left[ \frac{e+e'}{2e+e'} \frac{2e\epsilon^3}{3} \left( \frac{d^4w}{dx^4} + 2 \frac{d^4w}{dx^2dy^2} + \frac{d^4w}{dy^4} \right) + p \right] \delta z + \\ + \int_0^l ds [F + (F)] \delta z - \int_0^l ds [N + (N)] \frac{d\delta z}{ds} + \int_0^l ds [G + (G)] \frac{d\delta z}{dn}. \end{aligned}$$

En égalant à zéro le premier polynôme entre crochets on a l'équation différentielle *indéfinie* connue.

En égalant séparément à zéro les trois binômes contenus dans les autres crochets, le premier donnerait la première équation *définie* de Poisson, qui revient à  $F + (F) = 0$  (note ci dessus p. cclxiv), et les derniers donneraient les deux autres par une transformation facile, en déduisant les moments autour de parallèles aux  $x$  et aux  $y$  des moments autour de la normale et de la tangente.

Mais on n'est point autorisé à opérer ainsi, car le second  $\int_0^l$  peut être intégré par parties et peut fournir un terme en  $\int_0^l \delta z$  qui se réunira au premier. La partie détachée ou mise hors du  $\int$  est nulle *puisque, sur le contour, les limites  $s = 0$  et  $s = l$  se confondent*; on a ainsi, au lieu des trois dernières intégrales  $\int_0^l$ :

$$\int_0^l ds \left[ F + (F) + \frac{dN}{ds} + \frac{d(N)}{ds} \right] \delta z + \int_0^l ds [G + (G)] \frac{d\delta z}{dn}.$$

Égalant à zéro les deux quantités entre crochets, on a les deux équations-limite de M. Kirchhoff, à substituer aux trois équations de M. Poisson.

paraît le penser M. Kirchhoff, parce que les séries entières dont il a fait usage sont divergentes? Nous avons de la peine à le croire; car, de même qu'il arrive pour les simples tiges ou lames dont une des deux courbures reste nulle, il doit arriver pour une plaque que les pressions normales à travers le bord varient à peu près linéairement d'une face à l'autre, et les pressions tangentielles, qui sont nulles à la rencontre de ces deux faces, doivent varier à peu près paraboliquement de chacune d'elles à la surface moyenne; et, d'ailleurs, les deux équations de M. Kirchhoff contiennent précisément les expressions (F), (G), (N), dont M. Poisson a fondé le calcul sur l'emploi de ces séries, emploi qui revient jusqu'à un certain point à la supposition qui a été faite de la normalité conservée par les petites lignes matérielles primitivement normales, et qui doit se retrouver sous une autre forme dans l'analyse de M. Gehring relative à une plaque d'une épaisseur supposée infiniment petite. La matière demande donc un examen approfondi, et c'est pour y convier les géomètres que nous en avons développé ici les éléments avec quelque détail.

**LXI. Expériences et observations sur la résistance et l'élasticité des corps solides.** — Outre les calculs théoriques, la résistance et l'élasticité des solides ont été, dès le premier moment où on les a fait entrer dans le domaine scientifique, l'objet de nombreuses recherches expérimentales.

Les premières que l'on mentionne (sans indiquer où l'on en trouve le détail) sont celles du physicien suédois Wurtius, cité au n° III ci-dessus.

Robert Hooke, peu d'années après, appuya de quelques expériences, principalement sur les ressorts en hélice, son prin-

M. Kirchhoff justifie cette réduction des conditions limites à deux de cette forme par un raisonnement direct, mentionné à l'article cité du *Compte rendu* de 1848, mais non développé.

On reconnaît par là l'utilité de l'emploi, dans les questions de l'élasticité, de la méthode de Lagrange, perfectionnée par l'usage du potentiel, et par cette substitution des dérivées sur  $s$  et sur  $n$  aux dérivées sur  $x$  et  $y$  pour le contour, qui paraît due à Poisson comme fournie implicitement par son *Mémoire sur le calcul des variations* du 40 novembre 1834 (tome XII de l'Institut); bien qu'il ne soit pas encore parfaitement prouvé qu'on ne peut pas se passer de cette méthode.

cipe de proportionnalité des efforts exercés aux allongements et aux flexions qui en résultent <sup>(1)</sup>.

Vers le même temps, Mariotte ayant étudié les lois du choc des corps et observé la *flexibilité* dont il les regarde comme tous doués *avec* ou *sans ressort* <sup>(2)</sup>, fut conduit, comme nous avons dit (n° IV), à baser la théorie de leur rupture sur la considération des modifications qui la précèdent. Il fit sur de petites tiges de bois, de métal, de verre, des expériences qui infirment une des conclusions de Galilée, en vérifiant les autres <sup>(3)</sup>. Il a reconnu le premier, sur une lame de verre, qu'un solide horizontal était capable de supporter, au milieu, une charge deux fois plus grande lorsque ses deux extrémités sont encastées que lorsqu'elles sont simplement posées, et qu'il pouvait rompre alors aussi bien vers les encastements qu'au point où la charge est suspendue. Il a aussi montré qu'un prisme, ou bien un ressort en hélice, éprouvait toujours longitudinalement, sous le même poids, la même extension proportionnelle quelle que fut sa longueur; et il a fait aussi, sur la résistance des tuyaux aux pressions intérieures, quelques expériences, mais dans des conditions qui les rendent peu concluantes.

Au commencement du siècle suivant, Parent fit sur la rupture de barreaux de bois de chêne et de sapin, tant soutenus qu'encastés des deux côtés, diverses expériences qui lui servirent à dresser les premières tables destinées à la pratique <sup>(4)</sup>. Musschenbroek, en 1729, en publia de plus précises et de bien plus variées <sup>(5)</sup>,

<sup>(1)</sup> Philosophical Tracts and Collections, 1676 et 1678.

<sup>(2)</sup> De la percussion ou du choc des corps; dont la troisième édition est de 1679 (avis en tête de ses œuvres complètes); p. 4.

<sup>(3)</sup> Traité du mouvement des eaux, deuxième Discours.

<sup>(4)</sup> Académie des Sciences, 1707, et 1708, p. 516. Il paraît que de la Hire, Couplet, Pilot, ont fait aussi quelques expériences vers le même temps.

<sup>(5)</sup> *Introductio ad coherentiam corporum firmiterum*, faisant partie de ses *Dissertationes physicae experimentales et geometricae*, Lugduni Batavorum (Leyde) 1729, in-4°. Il les a reproduites en partie, avec quelques autres, à son ouvrage *Introductio ad philosophiam naturalem*, traduit en hollandais; puis du hollandais en français en 1739, sous le titre *Essais de physique* par Pierre Massuet; traduction où elles occupent le chap. XIX intitulé *De la cohésion ou de l'adhérence des corps*. Elles occupent le chap. XXI de la traduction faite en 1769 par Sigaud de la Fond sous le titre *Traité de physique*. Les premières expériences sur les plaques de verre sont au *Compendium physicae experimentalis*, 1762 cap. XVIII, § 369.

qui comprennent la rupture par extension, par flexion et par compression, des bois d'un grand nombre d'essences, pris dans diverses parties des arbres; du fer de diverses provenances, de la fonte et de divers autres métaux, ainsi que de leurs alliages; et du verre, même en plaques rondes et carrées. Il reconnut un fait alors nouveau, à savoir que les pièces d'une certaine longueur, pressées *debout* ou longitudinalement, offrent une résistance en raison inverse du carré de cette longueur, ce qu'expliquèrent et confirmèrent en 1747 les recherches théoriques d'Euler (n° XIII).

C'est aussi dans la première moitié du XVIII<sup>e</sup> siècle que furent faites, avant d'entourer de cercles de fer le dôme de Saint-Pierre de Rome, les expériences sur la résistance de ce métal à la traction, du marquis Poleni (plus connu comme hydraulicien célèbre) appelé vers 1742 pour donner son avis sur les crevasses qui s'étaient manifestées dans cet édifice et sur les moyens de prévenir la chute de sa coupole (1).

Belidor publia vers le même temps (2), sur des barreaux de bois de 27 et de 54 millimètres d'écartissage, sollicités transversalement, ses essais destinés à dresser des tables de résistance qui le satisfissent mieux que celles de Parent.

Mais bientôt furent faites par Buffon les premières expériences en grand sur la rupture des bois par effort transversal (3). Il put observer plus complètement que Musschenbroek les différences de force résultant de l'âge des arbres, de la densité de leur bois, de leur croissance lente ou tardive, du choix des échantillons depuis le cœur jusqu'à l'aubier, depuis le tronc jusqu'à la cime. Et comme le degré de dessiccation lui parut avoir aussi une grande influence sur la résistance, et être du reste difficile à constater, il se décida, pour rendre ses principales expériences comparables, à ne les exécuter que sur des arbres qu'on venait d'abattre et d'équarrir. Il se contenta d'essayer des pièces simplement posées, en remarquant très-bien

(1) *Memorie istoriche della gran cupola del tempio Vaticano.*

(2) *Science des Ingénieurs*, 1729, liv. IV. ch. III pour les bois, et IV pour les fers.

(3) Publiées d'abord aux volumes de 1740 et 1741 des *Mémoires de l'Académie*, puis insérées au t. VIII de ses œuvres, sous ce titre *Partie expérimentale; onzième Mémoire; Expériences sur la force des bois.*

qu'à cause de l'imperfection des encastremens qu'offrent les maçonneries ordinaires, il ne fallait guère compter, dans les bâtimens, sur l'augmentation de résistance qu'ils ont donnée dans les expériences de Mariotte et de Musschenbroek. Après avoir fait, comme ses prédécesseurs, quelques expériences sur de simples barreaux, qui le convainquirent de la grande variabilité de leur force et du peu de confiance que méritent les conclusions qu'on tire de ce qui leur est relatif, il se décida à opérer sur des pièces comparables à celles qu'on emploie dans les constructions, ayant des équarrissages depuis 0<sup>m</sup>,14 sur 0<sup>m</sup>,14 jusqu'à 0<sup>m</sup>,32 sur 0<sup>m</sup>,32, et des longueurs de 3<sup>m</sup>,30 à 9<sup>m</sup>,40 (qu'il faut, dans les calculs, diminuer d'un douzième pour avoir leur portée entre les tréteaux où on les posait). Il observa, le premier, les flèches de flexion, mais seulement au moment où les pièces élaient. Le résultat principal de ses 81 expériences est la presque-proportionnalité des charges de rupture immédiate (Voyez n° 151 ci-après, et § 1 de sa Note, p. 173) aux largeurs, aux carrés des épaisseurs et aux inverses des longueurs, ou la presque-constance du nombre appelé R (du § 12 de la note du n° 113, p. 107); mais, comme le remarque Navier, en ayant soin toutefois de faire, aux formules dont on tire ce nombre, les corrections indiquées au n° 128 pour prendre en considération le poids propre de la pièce et l'inclinaison de ses extrémités, résultant de sa flèche finale, bien qu'on sache que la formule n'a tout à fait cette forme que dans les limites de la proportionnalité des efforts aux effets produits (1).

Buffon observa aussi l'accroissement progressif, en quelques mois, et quelquefois jusqu'à rupture, des flexions des pièces déjà fortement chargées.

Il fit aussi quelques expériences sur les fers (2), et observa un rapport considérable, de 10 ou 12 à 1, entre la tenacité du fil

(1) Il serait possible de tenir compte de ces éléments d'une manière plus approchée, au moyen des formules (1), p. 176, au § 2 de la note du n° 151, surtout avec  $m_1 = 1$ , ou en remplaçant la seconde par  $p_1 = P_1 \frac{R}{V}$  comme au § 2.

(2) Œuvres, t. VII, Introduction à l'histoire des métaux, partie expérimentale, 4<sup>e</sup> Mémoire. Les résultats sont rapportés au t. II de Gauthey, p. 483.

de fer et celle de *boucles* de gros échantillon, pour même superficie de section.

Duhamel du Monceau fit aussi, sur la résistance transversale des bois <sup>(1)</sup>, diverses expériences où fut mesurée pour la première fois la flèche de flexion avant la rupture, de manière à pouvoir évaluer leur *élasticité*; et d'autres parmi lesquelles on doit remarquer <sup>(2)</sup> celles des traits de scie transversaux, pratiqués du côté devenant concave, et qui prouvent, en ne diminuant point la résistance, que les fibres comprimées sont plus nombreuses au moment de la rupture que les fibres étendues (Voir aussi n° XXIII, et § 45 de la note du n° 156, p. 391).

Vinrent ensuite trois séries d'expériences de M. Aubry, inspecteur général des ponts et chaussées <sup>(3)</sup>, sur les flexions de trois pièces de chêne sous diverses charges.

C'est vers ce même temps qu'à l'occasion des doutes élevés sur la suffisante solidité des piliers destinés à soutenir le dôme de l'église de Sainte-Geneviève, furent entreprises par Gauthey, au moyen d'une machine à levier, les premières expériences sur la force que les pierres peuvent soutenir sans être écrasées <sup>(4)</sup>. Soufflot, architecte de cet édifice, en fit un grand nombre d'autres en commun avec Perronet, en opérant de même l'écrasement de petits échantillons parallépipèdes. Mais, une double et grave défectuosité ayant été reconnue dans la machine à charnière employée, Rondelet <sup>(5)</sup> fit construire une machine

(1) Mémoire de l'Académie, pour 1767 (ou 1768), et, ensuite : Chapitre III du Traité du transport et de la conservation et de la force des bois, 1780.

(2) Même Traité, livre V, p. 446.

(3) Mémoire sur différentes questions de la science des constructions publiques et économiques. Lyon, 1790, p. 55 et 66. M. Aubry a fait aussi une expérience sur une pièce composée de plusieurs parties assujéties entre elles par des armatures en fer.

(4) Publiées en novembre 1774 dans le Journal de physique de l'abbé Rozier.

(5) Art de bâtir, tome I de la 4<sup>e</sup> édition, p. 268; reproduite à la p. 210 de la 6<sup>e</sup> édition.

C'est en comparant le résultat d'une expérience sur la pierre des deux colonnes de l'église de Joussaint d'Angers, avec le poids des voûtes qu'elles supportaient, que Rondelet a donné pour règle de faire porter aux soutiens le dixième de la charge capable de les écraser pour même section en les réduisant en cubes de 5 centimètres de côté. Cet édifice hardi, qui appartenait autrefois aux Bénédictins, n'est plus qu'une ruine magnifique, servant de musée d'antiquités en plein air.

où le levier était à couteaux et à appui mobile, et à l'aide de laquelle il écrasa un très-grand nombre d'échantillons de pierres; en sorte qu'il donna, de leur résistance, des mesures qui sont encore adoptées, et dont plusieurs ne s'élevèrent qu'aux deux tiers ou à la moitié de celles que la première sorte de machine avait fournies à ses prédécesseurs <sup>(1)</sup>.

Rondelet a fait d'autres expériences sur la résistance des mortiers et du plâtre <sup>(2)</sup>, et aussi, sur la diminution notable de résistance qui lui paraît résulter de la superposition de plusieurs cubes.

Depuis, on a eu sur les pierres et les briques une expérience de White <sup>(3)</sup>, et un grand nombre de M. Georges Rennie <sup>(4)</sup>. Mais M. Vicat pense que les résultats de ces dernières, comme ceux des expériences de Gauthey et de Soufflot, auraient besoin d'être réduites de plus d'un tiers à cause des dispositions de la machine employée <sup>(5)</sup>.

M. Vicat lui-même en a fait un certain nombre, sur les mortiers d'abord <sup>(6)</sup>, puis sur diverses pierres, celles-ci dans le but surtout de mieux déterminer qu'on n'avait fait, les lois de ce qu'il appelle leur *force portante*. Il a prouvé, en prévenant les porte-à-faux ou l'inégale répartition des charges, au moyen de rondelles de carton interposées, que les échantillons les plus minces étaient ceux qui résistaient le mieux, etc., etc. <sup>(7)</sup>.

D'autres expériences du même genre ont été faites dans ces

On a conservé quelques tronçons de ses deux colonnes, de 44 pouces (environ 0<sup>m</sup>,30) de diamètre, retirés du milieu des décombres par M. Godard-Faultrier, conservateur du musée d'Angers.

Les piliers de Sainte-Geneviève sont plus hardis. Ils supportent jusqu'à un huitième ou un neuvième.

<sup>(1)</sup> Rondelet, Mémoire historique sur le Panthéon français.

<sup>(2)</sup> Art de bâtir, t. 1, 4<sup>re</sup> édit., p. 309, ou 6<sup>e</sup> édit., p. 218 à 223.

<sup>(3)</sup> Philosophical Magazine, avril 1832.

<sup>(4)</sup> Philosophical Transactions, 1818. Traduit et inséré la même année en septembre aux Annales de chimie et de physique.

<sup>(5)</sup> Mêmes Annales, t. IX, 1818.

<sup>(6)</sup> Recherches expérimentales sur le chaux de construction, les bétons et les mortiers, 1818. Et Résumé des connaissances positives sur les mortiers, etc., 1838.

<sup>(7)</sup> Recherches expérimentales sur les phénomènes qui précèdent et accompagnent la rupture d'une certaine classe de solides (Annales des Ponts et Chaussées, 1833, 2<sup>e</sup> semestre).

derniers temps en Angleterre ; elles sont disséminées dans divers recueils.

Pour terminer ici ce que nous avons à dire sur les charges que les pierres sont capables de porter, nous citerons les expériences récentes, très-variées et très-bien faites, de M. l'ingénieur en chef Paul Michelot. Leur but et la haute utilité des recherches statistiques dont elles font partie, ont été caractérisés en 1855 dans un lumineux rapport de M. Belgrand <sup>(1)</sup> ; et un premier résumé de plus de trois mille expériences sur les pierres de taille non-seulement du bassin dit de Paris, mais de toutes les carrières dont les produits sont employés aux constructions dans cette capitale, a été récemment publié <sup>(2)</sup>. La machine, exécutée sur les dessins de M. Michelot, se compose principalement d'un grand levier gradué à couteaux, à une extrémité duquel on suspend un poids plus petit que celui que l'échantillon pourra supporter, et l'écrasement est déterminé par un second poids soutenu par un plateau mobile à roulettes, qu'on éloigne graduellement du point d'appui. Toutes les précautions sont prises pour éviter les porte-à-faux et pour obtenir des résultats justes et comparables. Ces expériences se continuent de manière à pouvoir résoudre plusieurs des questions soulevées par Rondelet, sur l'influence de la hauteur, de la superposition de plusieurs assises, etc.

D'autres expériences de Rondelet (même ouvrage), de Renie (mémoire cité), de Reynolds <sup>(3)</sup>, de MM. Minard et Desormes <sup>(4)</sup> antérieures à 1833, ont été faites sur l'écrasement de petits cubes de bois, de fer, de fonte et d'autres métaux. On a eu aussi, sur la résistance de pièces de bois, de fer et de fonte d'une certaine longueur à la rupture par compression ou plutôt par la flexion que détermine un effort longitudinal, les expériences de MM. Aubry (ouvrage cité), Girard (faites au Havre avec une machine que Lamblardie avait destinée à cet usage) <sup>(5)</sup>,

<sup>(1)</sup> Annales des ponts et chaussées, 1855, 2<sup>e</sup> semestre, p. 489.

<sup>(2)</sup> *Idem*, 1863, 4<sup>er</sup> semestre, p. 485.

<sup>(3)</sup> Tredgold. A practical Essay on the Strength of cast Iron, p. 438.

<sup>(4)</sup> Édition de 1833 des Leçons de Navier.

<sup>(5)</sup> Traité de la résistance des solides, p. 438 et Tables.



Lattandé (faites à l'occasion de l'établissement des cintres du pont d'Iéna) <sup>(1)</sup>, Rondelet (Art de bâtir), Reynolds <sup>(2)</sup>. Celles de Girard surtout sont nombreuses; mais il est difficile d'en tirer aucune règle sûre, car on n'a pas assez de détails sur les conditions dans lesquelles elles ont été exécutées pour savoir si la résultante des efforts exercés aux extrémités passait au milieu des bases ou plus ou moins près des bords; et si ces bases étaient, ou non; assez bien posées et appliquées pour que leur assiette fit l'effet d'un encastrement; circonstances qui ont été les résultats une influence considérable. Aussi, des expériences plus récentes, dont nous parlerons, paraissent devoir remplacer avec avantage les expériences anciennes sur la compression longitudinale des pièces de bois et de fer.

On a aussi une expérience de Guyton de Morveau sur la ténacité d'un fil de fer de 0<sup>m</sup>,0023 de diamètre <sup>(3)</sup>.

Diverses expériences furent faites aussi à la fin du siècle dernier et au commencement de celui-ci sur la résistance à la rupture par extension des pierres, de la brique, du plâtre, des mortiers, du bois et du fer, par Rondelet (*idem*), Vicat <sup>(4)</sup>; d'autres sur la flexion, que nous citerons plus loin <sup>(5)</sup>.

On doit aussi à M. Pictet, de Genève, physicien très-connu, quelques expériences sur l'allongement des barres de fer dans les limites de sa proportionnalité aux charges qui le produisent <sup>(6)</sup>.

Mais les premières expériences sur la flexion, dirigées dans un esprit réellement scientifique et de manière à pouvoir en déterminer les lois, sont celles qui ont été faites sur les bois dans l'île de Corcyre en 1811 par M. Charles Dupin, à la suite d'une mission comme ingénieur de la marine française <sup>(7)</sup>; et, pour

(1) Gauthey, t. II, p. 48.

(2) Traité on the Power of Machines, by John Banks Kendall, 1803, p. 89.

(3) Mémoire lu les 29 mai et 19 juin 1809, aux Mém. de l'Institut.

(4) Recherches sur les chaux, etc, 1818, ou Résumé des connaissances, etc. 1828.

(5) Young lui-même en a fait quelques-unes sur le cuivre jaune afin de déterminer son module d'élasticité. (Natural Philosophy, vol. II, p. 86.)

(6) Bibliothèque universelle de Genève, t. I, p. 171 à 200.

(7) Expériences sur la flexibilité, la force et l'élasticité des bois, faites dans l'arsenal de la marine à Corcyre en 1811. Premier mémoire, présenté le 12 avril 1813. (Journal de l'école Polytechnique, 1817).

les fers, à Cubzac en 1819 par M. Duleau <sup>(1)</sup>, comme ingénieur chargé en 1819 de l'étude du projet d'un pont sur la Dordogne, qu'on se proposait d'exécuter en voûtes métalliques analogues à ceux du pont d'Austerlitz de Paris; mais de fer forgé et composés de huit barres et de croisillons:

Dans son premier Mémoire, M. Dupin expose qu'ayant mesuré à deux dixièmes de millimètre près les augmentations successives des flèches de courbure prises par des pièces horizontales sous des charges croissantes agissant au milieu, il les a trouvées proportionnelles aux charges tant qu'elles sont restées dans certaines limites. Il a trouvé que la même charge répartie faisait prendre moyennement une flèche des  $\frac{2}{3} = 0,66$  environ de ce qu'elle produirait étant concentrée au milieu, ce qui se rapproche suffisamment du rapport théorique  $\frac{5}{8} = 0,625$  <sup>(2)</sup>; que, pour mêmes largeur et longueur, les flèches étaient en raison inverse des cubes des épaisseurs, et que, pour mêmes dimensions transversales, elles étaient comme les cubes des longueurs, ou plutôt des portées ou des distances des appuis. Toutes les conclusions de la théorie de la flexion sont donc confirmées, pour les bois, par ces expériences de M. Dupin, qui a vérifié aussi les fondements de cette théorie en constatant que la face devenant concave s'accourcissait autant que la face devenant convexe s'allongeait; que les fibres qu'il appelle *invariables* restaient au milieu de l'épaisseur dans ses expériences sur de petites flexions éloignées de celle de rupture, enfin que les sections transversales des pièces fléchies circulairement restaient normales aux faces et aux fibres. M. Dupin remarque aussi que les cohésions n'ont aucune relation nécessaire avec les élasticités.

Duleau soumit à la flexion, sous diverses charges, des pièces

(1) Recherches théoriques et expérimentales sur la résistance du fer forgé, présentées au Conseil général des ponts et chaussées en 1813, et imprimées en 1820, in-4<sup>e</sup>.

(2) M. Dupin a mentionné dans son Cours de Mécanique des Solides et Méliors, 1<sup>er</sup> énoncé, d'autres expériences, faites par lui en 1813, à Toulon, et en 1816, à Dunkerque. Les résultats, dont il ne rapporte pas le détail, confirment ceux de 1811, et donnent même  $\frac{19}{30}$ , bien plus rapproché du rapport théorique  $\frac{5}{8}$ .

droites à section soit rectangulaire, soit circulaire, encastrées à un bout et sollicitées transversalement au bout opposé; d'autres, qui étaient posées sur deux appuis et chargées soit au milieu soit uniformément sur toute la longueur, soit encastrées aux deux bouts, ou bien à un bout et appuyées à l'autre, enfin chargées *debout* ou parallèlement à leur longueur, avec extrémités tantôt libres, tantôt encastrées ou astreintes à rester dans leur direction primitive; puis des cylindres creux, des tuyaux carrés ou ronds, puis une pièce composée de deux autres séparées et rendues solidaires, et une pièce cintrée en arc invariablement retenu aux extrémités. Il mesura, aussi, comparativement, les flexions d'une pièce carrée posée successivement à plat et sur une arête, et, aussi, celles d'une pièce ayant une section en forme de triangle équilatéral, en tournant successivement en haut la base et le sommet de ce triangle. Il soumit ensuite à la torsion diverses barres rondes, carrées et rectangulaires.

Il reconnaît avoir été aidé des conseils de M. Bernard, plus ancien que lui d'un ou deux ans, et alors ingénieur à Bordeaux.

Duleau résume ses résultats en vingt-cinq lois. Les neuf premières sont relatives à la flexion de pièces pleines, et la 17<sup>e</sup> à la flexion d'un tuyau sous un effort transversal : elles sont exactement en rapport avec ce qu'indique la théorie. Les lois 10<sup>e</sup> à 15<sup>e</sup> sont relatives aux pièces sollicitées debout, dont les longueurs ont excédé presque constamment cent fois l'épaisseur ou le plus petit côté de la base; elles montrent que la charge qui détermine la flexion est bien, conformément à la formule d'Euler (n° XIII), modifiée par Lagrange (n° XIV) quand la flexion a lieu avec une ou deux inflexions, proportionnelle au moment d'inertie de la base et à l'inverse du carré des longueurs, mais qu'elle est moyennement plus forte d'un septième ou d'un huitième que ce qu'on aurait en substituant, dans cette formule, le coefficient d'élasticité déterminé par les expériences de flexion des mêmes pièces par un effort transversal; ce que Duleau attribue à un frottement considérable de son appareil, car il manquait de ressources pour en faire construire de mieux constitués. La pièce cintrée et la pièce en deux parties sépa-

rées (lois 16, et 18 à 21) ont donné aussi des flexions qu'il serait facile de faire rentrer dans la théorie. Enfin la torsion comparative des pierres rondes, carrées et rectangulaires (lois 22 à 25) ont donné des résultats qui ont étonné Navier (comme nous avons dit n° XXXVI, p. clxxxj), mais qui rentrent, avec toute l'approximation désirable, dans les formules que nous avons données depuis lui pour ce genre de déformation des prismes ayant des sections de diverses formes <sup>(1)</sup>.

On voit que Duleau s'est proposé surtout de déterminer les lois de l'élasticité, et n'a poussé jusqu'à rupture ou forte flexion que les pièces debout, ce qui était la chose importante pour le genre de construction auquel ses fers étaient destinés.

Vers le même temps furent faites au Creusot, par M. Ramus, quelques expériences destinées à comparer entre elles diverses espèces de fonte <sup>(2)</sup>. Elles avaient été précédées de quelques autres faites en petit à Saint-Gervais en Dauphiné <sup>(3)</sup>.

Des expériences remarquables de traction ou d'extension furent faites peu de temps après (1815) à Verbery, par M. Minard, depuis inspecteur général des ponts et chaussées, et par M. Desormes, connu comme physicien et manufacturier distingué <sup>(4)</sup>. Les unes eurent pour objet la cohésion longitudinale ou transversale du chêne et du tremble, les autres l'allongement progressif, sous des charges croissantes, d'un barreau de chêne, qui est revenu à sa longueur primitive tant que cet allongement n'a pas dépassé une proportion de 1/629; d'autres, en grand nombre, sur la rupture par extension de barres et de fils de fer ou de cuivre, de diverses qualités et contextures, et sur l'allongement progressif d'autres barres sous des charges qu'on augmentait. Cet allongement, passé une certaine charge, et surtout lorsqu'on approche de celle qui produit la rupture,

<sup>(1)</sup> *Mémoire sur la torsion des prismes*. Savants étrangers, t. XIV, art. 78.

<sup>(2)</sup> Publiées aux *Annales de chimie*, t. VII, sous le nom de *Gazetas* (alors directeur de l'usine du Creusot). On peut voir aussi *Sidérotechnie* d'Hassenfratz, t. 1, p. 47.

<sup>(3)</sup> Rapportées dans les *Recherches sur l'Artillerie* de Tessier de Norbeck.

<sup>(4)</sup> Elles ont été communiquées à Navier et insérées par extrait à l'édition 1833 de ses *Leçons*. D'autres, encore inédites, seront insérées à une autre partie de celle-ci.

devient relativement fort considérable, comme le prouvent aussi d'autres expériences que nous citerions plus loin. Des barres de fonte furent également rompues par extension.

Mais la publication, en 1817, de l'ouvrage de M. le professeur Peter Barlow, intitulé : *Essai sur l'élasticité et la force des bois, fondé sur les expériences exécutées à l'Académie royale militaire avec des pièces prises dans l'arsenal maritime de Woolwich* (1), fit connaître un grand nombre d'autres expériences non-seulement sur les bois, mais encore sur les métaux.

Celles qui sont particulières à l'auteur furent entreprises sur l'invitation du colonel Mudge, sous-gouverneur de cette Académie, destinée surtout à l'instruction des officiers de l'artillerie et du génie de l'Angleterre.

Barlow en fait connaître diverses autres ; d'abord d'Emerson sur la résistance de diverses espèces de bois à la rupture par traction, et qui paraissent avoir été faites il y a environ un siècle (2) ; puis celles du docteur Robison (3) ; puis celles qui venaient d'être exécutées à l'arsenal de marine de Deptford, près Londres, par le colonel Beaufoy (4), et qui donnent une suite de mesures exactes des flèches de courbure prises sous diverses charges par des pièces de chêne et de pin, de 5 centimètres d'équarrissage environ ; puis celles de MM. Peake et Barailler sur des pièces encastrées à un bout et sollicitées transversalement à l'autre, et sous l'encastrement desquelles ils avaient fixé un corps saillant semi-cylindrique pour éviter l'altération que le bord tranchant inférieur de l'enclave fait subir aux pièces ; puis celles de M. Benjamin Couch, maître de mâts dans l'arsenal de Plymouth, sur des pièces aussi encastrées tantôt à une extrémité, tantôt aux deux, ayant des sections en forme de triangle et de trapèze, qu'il ployait, comme Duleau, en tournant en haut tantôt la grande base, tantôt le sommet ou la petite base, et, aussi, sur de longues perches rondes de sapin, d'in-

(1) *An Essay on the Strength of Timber, etc.*, London, 1817.

(2) Emerson's *Mechanics*. (Nous n'avons pu nous procurer cet ouvrage.)

(3) Ses articles ont été réunis après sa mort sous le titre *A System of mechanical Philosophy*.

(4) Publiées vers 1816 dans les *Annals of Philosophy* du Dr Thomson, vol. IX.

gale grosseur ou en forme de tronc de cône, sollicitées au bout le plus mince.

Celles de M. Barlow lui-même ont eu d'abord pour objet la *cohésion*, ou le poids capable de rompre, par *traction* tantôt parallèle, tantôt *perpendiculaire* aux fibres naturelles du bois, des blocs longs de 30 centimètres dont le milieu, sur 4 à 5 centimètres de longueur, était réduit, sur le tour, à un diamètre de 8 millimètres environ. Ensuite il rompit par flexion des barreaux de 25 millimètres d'équarrissage, en notant les flèches, tantôt seulement à l'instant qui précède la rupture, tantôt graduellement à mesure qu'on les chargeait de poids croissants. Puis il entailla des pièces, comme autrefois Duhamel, dans le but de déterminer, à l'instant de la rupture, la position de l'*axe neutre* (qu'il trouva en général placé aux  $\frac{5}{8}$  de l'épaisseur); puis il encastra ses barres à un seul bout *sous diverses inclinaisons*, etc.

De ses observations des flèches de courbure, il déduit (comme Duleau et comme M. Dupin) qu'elles suivaient indubitablement la raison inverse des cubes des épaisseurs, et non celle des carrés comme l'avait dit Girard (n° VIII), dont les erreurs et les contradictions, non aperçues par l'auteur du Rapport approubatif de son ouvrage, furent en grande partie l'occasion des expériences du savant professeur de Woolwich, que l'Institut a inscrit depuis au nombre de ses correspondants. On lui doit d'autres séries d'expériences sur le point où les flexions commencent à devenir permanentes, et le mesurage, après la rupture, des parties de la section où les fibres se sont séparées. D'autres expériences sont relatives aux *bois tendus* (bent timber), c'est-à-dire courbés par une machine (1), ou bien ployés après un sciage longitudinal suivi de l'introduction de clefs, et, aussi, à des pièces juxtaposées, fortement unies par des cordes.

Deux autres sont intitulées *on the Momentum*, c'est-à-dire sur la force vive ou le choc que des fils déjà tendus peuvent

(1) De M. Hoskey, décrite au t. XXXII des Transactions de la Société des Arts, et dont l'emploi était précédé d'une immersion de plusieurs heures dans l'eau bouillante, que Barlow reconnaît ne point diminuer la force des bois.

supporter sans se rompre. Elles ont été faites sur un long fil de fer tendu horizontalement, au milieu duquel était attachée une corde verticale de 3<sup>m</sup>,20<sup>e</sup>, portant un poids. En élevant ce poids et en le laissant retomber, tantôt il n'endommageait pas le fil de fer, tantôt il le rompait (1).

Dans un appendice, M. Barlow rapporte les expériences de Telford, de Banks (2) et de Sickingen sur la ténacité du fil de fer et sur la résistance des barres de fonte à la rupture par flexion.

Dans la 3<sup>e</sup> édition de son ouvrage, publiée en 1837 sous le titre *Traité de la force des bois, du fer coulé et autres matières, etc* (3), il ajoute des expériences de M. Hodgkinson dont nous parlerons tout à l'heure; celles qui ont été faites à l'arsenal de Woolwich par ordre de l'amirauté, sur le cuivre, par M. Kingston avec une machine à levier construite par M. Bramah, et, aussi, par le capitaine Brown, le célèbre inventeur des câbles en chaînes de fer pour la marine, et le premier constructeur de ponts suspendus en Angleterre; enfin des expériences faites par lui-même en 1805 sur l'allongement progressif et la flexion graduelle des barres de fer forgé et les limites de leur élasticité si l'on entend par là leur faculté de retour à la longueur ou à la forme primitive; mais les conclusions qu'il en tire quant à la position de l'axe neutre à l'instant qu'il caractérise par *Elasticity injured* ou *destroyed* n'ont rien d'assuré.

Cette nouvelle édition se termine par la relation de plusieurs séries d'expériences sur la flexion de rails de diverses formes, tant au repos que sous l'action d'une charge roulante.

Une partie de ces expériences se trouve citée également aux *Principes de charpente* publiés vers 1817 par M. Tredgold (4), qui contiennent aussi celles de Fincham (5) pour la résistance des bois à la rupture par traction et par flexion, de Rumford

(1) Cette expérience, comme plusieurs autres, est citée à l'ouvrage de Navier sur les ponts suspendus.

(2) John Banks Kendall. *Treatise on the Power of Machines*, 1803.

(3) *Treatise on the Strength, etc.*, by Peter Barlow, member of Institute of France, etc. (*Mahogany Hispaniola* doit être traduit par *Acajou de Saint-Domingue*).

(4) *Elementary Principles of Carpentry*.

(5) *Papers on naval Architecture*, published by Morgan and Crouse, vol. I.

pour la traction du fer. Une seconde édition, de 1828, en contient d'autres, de M. Bevan <sup>(1)</sup>, sur la rupture des bois par traction et par flexion, et aussi par *detrusion* ou glissement des parties, genre de rupture qui s'opère, par exemple, lors de l'arrachage des vis à bois.

Mais un grand nombre d'autres expériences furent bientôt entreprises sur les métaux, à l'occasion de l'établissement des ponts suspendus, ou de la substitution des chaînes de fer au chanvre dans le gréement des navires, ou à la suite de l'élan que la paix de 1814 imprima à la métallurgie et aux constructions. L'usage de la fonte (*cast iron*, fer coulé) attira surtout l'attention. Employée depuis longtemps pour divers ustensiles, et aussi pour l'artillerie, elle paraît avoir été introduite dans les bâtiments seulement en 1755 par Smeaton, dont la hardiesse à cet égard fut l'objet d'un étonnement général <sup>(2)</sup>. M. Tredgold, par son traité spécial sur la force de cette matière <sup>(3)</sup>, et M. Duverne par la traduction française qu'il en fit en 1826 sur la 2<sup>e</sup> édition, contribuèrent beaucoup à en étendre l'usage. Après avoir rapporté les expériences de Banks <sup>(4)</sup>, d'Ebbels, etc., il donne les siennes, faites sur des solives ayant une forme longitudinale parabolique comme celles d'égale résistance, et une section transversale en double T; puis sur des barreaux de fonte de diverses provenances, de 25 millimètres d'écartissage. Il remarqua que malgré la dureté et l'aigreur qu'on attribue à la fonte elle prend comme le fer, passé certaines charges, des flexions permanentes. Il fit aussi quelques expériences d'extension et de compression sans rupture. Il cite aussi celles de *résilience* de M. Bevan, de pénétration du bois debout dans le bois à plat, et celles de l'auteur de l'article *Bridge* du Supplément à l'*Encyclopédie britannique* de Napier, qui a observé la compression d'un prisme rectangle suivant une de ses diagonales, etc.

<sup>(1)</sup> *The philosophical Magazine*, october 1827, vol. I.

<sup>(2)</sup> *Smeaton's Reports*, vol. I, p. 440-444.

<sup>(3)</sup> *Practical Essay upon Strength of cast Iron and others Metals*. Cet essai avait été précédé d'un mémoire inséré aux *Philosophical Transactions*, 1824, t. II.

<sup>(4)</sup> Ouvrage cité. Ces expériences ont été faites dans une fonderie de Wakefield.



Des expériences non moins intéressantes étaient faites en France.

M. Seguin, qui y construisit, en 1824, le premier pont suspendu, sur le Rhône entre Tain et Tournon, après avoir établi avec une étonnante économie une passerelle devant son établissement d'Annonay, en fit un grand nombre sur l'allongement et la ténacité du fil de fer <sup>(1)</sup>, et quelques-unes aussi sur des barres de fonte <sup>(2)</sup>. L'allongement, d'abord proportionnel à la charge, augmente ensuite dans un bien plus grand rapport, et devient en partie persistant <sup>(3)</sup>. Le recuit du fil diminue beaucoup la ténacité en augmentant la ductilité,

D'autres expériences sur le fil de fer furent faites à Genève par M. Dufour, colonel du génie <sup>(4)</sup>; il reconnut en éprouvant, comme MM. Minard et Desormes, des fils de cuivre et de laiton (dont il avait été question de faire le pont de Genève), que le recuit diminuait aussi beaucoup leur ténacité.

On doit à M. Lamé, alors ingénieur au service de la Russie, quelques expériences sur la force du fil de fer de cette contrée; elle paraît considérable <sup>(5)</sup>. Il en fit aussi sur des barres <sup>(6)</sup>,

M. Lagerhjelm, ingénieur des mines de Suède, voulant réduire à sa juste valeur l'opinion qui fait préférer, dans plusieurs pays, les fers laminés anglais aux fers forgés suédois, entreprit à Stockholm en 1826 un très-grand nombre d'expériences avec une machine de l'invention de M. Hammarschield, se composant d'une presse hydraulique qui tirait, par un bout, des barres horizontales, dont l'autre bout était attaché au petit bras d'un

<sup>(1)</sup> Des ponts en fil de fer, 1823, in-8°. Et deuxième édition in-4°, 1826.

<sup>(2)</sup> M. Seguin rapporte aussi un fait observé par M. de Montgolfier fils; c'est le peu de durée du fer exposé, dans une presse à papier, à un effort de traction modéré, mais intermittent. Les pièces sont hors de service après quatre ou cinq mille de ces alternatives.

<sup>(3)</sup> Cet allongement persistant, nommé *Set* par les Anglais, était signalé dès 1815 à l'article *Strength of Materials* de l'Encyclopédie britannique.

<sup>(4)</sup> Description d'un pont suspendu construit à Genève en 1824. On *Annales des Ponts et Chaussées*, 1832, pour une analyse de cet ouvrage et de celui que le même officier a publié en 1831 sur les ponts suspendus en général.

<sup>(5)</sup> Journal des voies et communications, 1828.

<sup>(6)</sup> Lettre à M. Baillet, *Annales des Mines*, t. X, p. 329.

fort levier coudé que l'on chargeait de poids, de manière à maintenir son grand bras horizontal, et qui accusait ainsi les tensions. Les résultats ont été consignés en 1827 aux *Annales du bureau des mines de fer de Suède (Jern-Kontorets Annaler)* et publiés à part <sup>(1)</sup>. Il a remarqué, comme d'autres expérimentateurs, que la section se rétrécit considérablement à l'endroit de la rupture. L'ouvrage a été traduit en allemand en 1829 par le D<sup>r</sup> Pfaff <sup>(2)</sup>; il est regrettable qu'on ne le connaisse en France que par une courte analyse <sup>(3)</sup>, indiquant les propriétés générales constatées, sans donner aucun chiffre.

Navier fit aussi, sur la traction de la tôle, du cuivre rouge et du plomb laminé, quelques expériences dont on trouve les résultats aux n<sup>os</sup> 52, 70, 72 de l'édition 1833 de ses *Leçons*, où il a rapporté aussi le résultat moyen de l'épreuve des barres destinées au pont des Invalides, et dont on trouve la détail à la 2<sup>e</sup> édition de son ouvrage sur les ponts suspendus, avec diverses expériences qui lui ont été communiquées par le capitaine Brown et par M. Brunel.

M. Vicat, après avoir fait vers 1827 quelques expériences d'allongement des fils de fer, de 2  $\frac{2}{3}$  à 3 millimètres employés au pont suspendu d'Argentat <sup>(4)</sup>, donna en 1831, à la suite du compte rendu d'un examen de ceux du Rhône <sup>(5)</sup>, d'autres expériences où il compara les allongements permanents des fils non recuits et recuits <sup>(6)</sup>. Depuis, l'illustre ingénieur a fait plusieurs expériences remarquables, où quatre brins de fil de fer ont supporté des poids pendant plusieurs années, et où il a noté l'accroissement que le temps apporte à l'allongement passé le 1/4

<sup>(1)</sup> *Forsök af bestamma, etc.* Essai pour déterminer la densité, la ductilité, la malléabilité, l'élasticité du fer en barre passé au cylindre et forgé, 2 vol. in-8<sup>o</sup> et atlas.

<sup>(2)</sup> Sous le titre *Peter Lagerhjelm versuch zur Bestimmung der Dichtigkeit, Gleichartigkeits, etc.*

<sup>(3)</sup> Bulletin technologique (Férussac), 1829, t. XI, n<sup>o</sup> 46, p. 44. Voir aussi t. XIII, n<sup>o</sup> 423, p. 304.

<sup>(4)</sup> *Description du pont suspendu construit sur la Dordogne à Argentat, 1828.*

<sup>(5)</sup> *Rapport, etc.* aux Annales des ponts et chaussées, 1831, 4<sup>o</sup> semestre, p. 444.

<sup>(6)</sup> M. Vicat a proposé de préférer le fil de fer aux barres à la suite d'autres remarques.

ou le  $\frac{1}{3}$  de la charge capable de rompre <sup>(1)</sup>; effet qu'il compare à celui qu'offrent certaines matières bitumineuses qui se brisent en éclats lorsqu'on les frappe, mais qui, abandonnées à leur propre poids, s'affaissent peu à peu sur elles-mêmes; et d'où il conclut que pour employer des matériaux quelconques avec sécurité il conviendrait de les soumettre à des épreuves de plusieurs mois au moins.

C'est une des conclusions que le même M. Vicat avait tirées, en 1833, d'expériences relatives à de tout autres matériaux (les pierres, les briques, le plâtre, le mortier) dans un mémoire célèbre <sup>(2)</sup> dont nous avons déjà plusieurs fois parlé (n° XVIII, et note du 152, § 1 et 10) et où il fait une distinction des forces tirante, portante ou transverse *instantanées* et des mêmes forces *permanentes*. Nous avons dit (V. ci-après, p. 473) que la manière dont il mesure la force *transverse* ou la résistance au glissement ou cisaillement, était propre à la faire évaluer beaucoup trop haut, et qu'il valait mieux, pour comparer cette force à la force *tirante*, s'en rapporter à des expériences récentes (§ 9 de la note du n° 152, p. 203; Voir aussi p. ccxcviiij). Dans ce mémoire il se trouve, du reste, bien des choses précieuses à enregistrer, entre autres ce qu'il dit sur les encastremens parfaits et imparfaits (ci-après notes des n° 152, 154, 156) etc., etc. Mais le but en étant surtout polémique, il convient d'étudier comme réponse le *Rapport* de MM. de Prony et Girard <sup>(3)</sup>, qui suffit, même après la réplique de M. Vicat, pour venger la théorie de ses attaques, portant d'ailleurs sur d'autres points que ceux où elle pose des affirmations, puisqu'elle ne prétend pas que ses formules s'appliquent jusqu'à l'instant où il y a rupture.

Pour en revenir aux fers, l'augmentation de leur allongement, dans une plus forte proportion que la charge par unité de section passé une certaine tension, fut encore plus mise en lumière

<sup>(1)</sup> *Note sur l'allongement progressif du fil de fer soumis à diverses tensions.* Annales des ponts et chaussées, 1834, 1<sup>er</sup> semestre, p. 40.

<sup>(2)</sup> *Recherches expérimentales sur les phénomènes physiques qui précèdent et accompagnent la rupture ou l'affaissement d'une certaine classe de solides.* Ann. des ponts et chaussées, 1833, 2<sup>e</sup> semestre.

<sup>(3)</sup> *Annales des ponts et chaussées, 1834, 1<sup>er</sup> semestre, p. 293.*

par des expériences de M. Bornet faites à la presse hydraulique aux forges de la marine à Guérigny (Nièvre) (1). La ligne dont les abscisses sont les forces et dont les ordonnées sont les allongements, après être restée droite jusqu'à une certaine charge, se relève tout d'un coup avec rapidité, surtout pour les fers doux et ductiles; mais, alors, les allongements sont pour la plus grande partie persistants.

Du reste, en retranchant la partie persistante, on trouve que les parties *élastiques* ou qui disparaissent quand on soustrait les charges, restent assez sensiblement proportionnelles à celles-ci, rapportées à l'unité superficielle de la section en ayant égard au besoin à la petite diminution progressive qu'éprouve celle-ci, ou que *le coefficient d'élasticité reste à peu près constant*.

C'est ce qu'on appelle la loi de M. de Gerstner (2), déduite par ce célèbre ingénieur allemand d'expériences sur des fils de fer très-fins. Elle a été remarquée aussi par le physicien Leslie (3) sur des barres. Mais on pourrait l'appeler aussi la loi de Coulomb, car le physicien français a remarqué, dans ses expériences sur la torsion des fils de métal et la flexion des lames (voir ci-après), le même fait, qui prouve que l'élasticité *reste entière* dans le nouvel état que déterminent les torsions, extensions ou flexions permanentes. (Voir § 8 de la Note du n° 21, p. 22.)

Cette loi, au reste, n'est qu'approchée, et ne s'observe pas d'une manière tout à fait exacte, comme on voit par les expériences sur le fer recuit ou non recuit, et l'acier, faites par M. Ardan; et il y a, à cet égard, des effets un peu différents selon qu'on laisse ou non le fil en repos un certain temps sous sa dernière charge, car il en résulte un écrouissage (voir p. 4 et p. 22)

(1) *Du fer dans les ponts suspendus*, par M. Émile Martin, br. in 4°, 808; ou *Annales des ponts et chaussées*, 1834, 2<sup>e</sup> semestre, p. 457.

(2) *Manuel de Mécanique*, t. I, p. 280. Ou *Mémoire* (allemand) *sur la force des matériaux*, par M. Adam Burg, 1833. Ou *Extrait du Journal de l'Institut polytechnique de Vienne*, t. XIX. — On trouve aussi un certain nombre d'expériences de Von Gerstner aux *Annales der Physik und Chemie von Poggendorff*, 1832, t. XXVI.

(3) Leslie. *Elements of natural Philosophy*. Edinburg, 1823.

qui donne aux fils sous une certaine roideur <sup>(1)</sup>. Réciproquement on peut, par le recuit, leur rendre la ductilité que cette longue charge ou bien l'étirage leur avait ôtée au profit de leur résistance élastique.

On doit à ce savant Général, qu'un accident funeste a enlevé au corps du génie, d'autres expériences sur les fils de laiton, de plomb, etc., et un grand nombre de remarques précieuses que lui ont suggérées leurs résultats comparés.

Nous avons déjà eu l'occasion (n° XLIX, note p. cxxj) de parler de ses recherches sur les systèmes de charpente <sup>(2)</sup>. On y trouve un grand nombre d'expériences sur des formes composées de diverses manières.

Au reste il ne faut pas compter, à un instant quelconque des expériences, sur une constitution bien homogène des corps. Sans parler des bois, qui offrent à cet égard des inégalités prononcées (voir plus loin), l'allongement sous une tension donnée n'est pas toujours la même dans les différentes parties d'un fil de fer, comme l'a reconnu le même M. Ardent. Et la surface, l'épiderme, comme dit M. Girard, est évidemment d'une autre texture que le centre. Savart, par des expériences délicates sur les vibrations de plaques même de métaux fondus, ainsi que de verre, de résine, etc., a observé des faits nombreux qui ne peuvent s'expliquer que par des différences de texture non-seulement dans les divers sens mais aussi aux divers points <sup>(3)</sup>.

Après les ingénieurs, qui visent à obtenir des données pratiques, ce champ devait être parcouru par les physiciens, qui observent de plus près et par des moyens précis les circonstances, dans le but d'en déduire des lois dont la science puisse s'enrichir.

Déjà, comme nous avons dit (n° LIX), vers 1785, Chladni, en Allemagne, avait non-seulement observé les vibrations longitu-

(1) Introduction à la Mécanique industrielle, de M. Poissonet.

(2) Etudes théoriques et expérimentales sur l'établissement des charpentes à grande portée. Metz, in-4°, 1840.

(3) Annales de chimie et de physique, de 1802 à 1827.

dinales et transversales des verges élastiques, et, aussi, leurs vibrations normales et leurs vibrations tournantes, sur lesquelles il a le premier appelé l'attention, mais, encore, fait des expériences nombreuses et curieuses sur les vibrations des plaques et sur leurs singulières lignes nodales (<sup>1</sup>). Savart continua et varia considérablement ces expériences, en révélant aussi des faits nouveaux et importants sur les vibrations longitudinales, susceptibles par exemple d'être énergiquement provoquées par un simple frottement s'il est continué ou renouvelé.

Un des résultats les plus remarquables des recherches de cet habile expérimentateur fut la vérification de plusieurs lois de vibration découvertes analytiquement par M. Cauchy, et, aussi, de sa formule du moment de torsion pour les prismes rectangulaires, quand ils sont plats ou minces, cas où la formule, comme nous avons dit (n° XXXVI), est exacte; et ses deux expériences sur des prismes où le rapport des deux dimensions transversales était de 1 à 3,3 et de 1 à 3,9, vérifient notre formule, dont Cauchy a approuvé la substitution à la sienne.

C'est dans cet esprit scientifique qu'ont été faites les nombreuses et consciencieuses expériences de Wertheim, exécutées en observant avec un cathétomètre très-sensible les allongements ou les flexions les plus imperceptibles, et en comptant par des moyens aussi très-exacts les nombres de vibrations. On lui doit des *Recherches sur l'élasticité et la cohésion des métaux* (<sup>2</sup>) (platine, or, argent, plomb, cuivre, zinc, fer, acier, etc.), étirés, écrouis, recuits, à l'état pur ou légèrement alliés, à diverses températures de  $-15^{\circ}$  à  $+300^{\circ}$  (<sup>3</sup>). Les modules d'élasticité furent mesurés par lui tant par l'extension statique que par la vitesse du son dans les tiges, ou bien par les vibrations transversales. Il a vérifié la loi de Gertsner. Il a cru trouver que la partie persis-

(<sup>1</sup>) *Traité d'acoustique.*

(<sup>2</sup>) Présenté le 8 juillet 1842. *Annales de ch. et de ph.*, 2<sup>e</sup> série, t. XII.

(<sup>3</sup>) On sait que MM. Tremery et Poirier-Saint-Brice ont fait aussi des expériences tendant à évaluer l'influence des hautes températures pour modifier les coefficients d'élasticité (*Ann. des Mines*, 2<sup>e</sup> série, t. 3).

tante des allongements se manifestait dès le commencement de l'extension : c'est la seule conclusion qu'on puisse lui contester. (Voir § 40 de la Note du n° 21, p. 23.)

Wertheim présenta bientôt une suite à ce travail, intitulé *Recherches sur l'élasticité*, où il examine d'abord (2<sup>e</sup> mémoire) les alliages (1); puis, dans un troisième mémoire, l'influence d'un courant électrique.

Le même physicien, dont les premières études avaient porté sur l'anatomie, a présenté un nouveau mémoire, le 28 décembre 1846, sur l'élasticité et la cohésion des principaux tissus du corps humain (2).

Vers le même temps, les *Annales de chimie et de physique* donnèrent un mémoire fait en commun par lui et par M. Chevandier sur l'élasticité et la cohésion des différentes espèces de verre (3). Ils remarquèrent que, comme pour les métaux, le coefficient d'élasticité calculé par les allongements statiques est constamment moindre que celui qu'on déduit des vibrations.

Mais le travail le plus considérable, le plus complet et le plus entouré de toutes les précautions propres à garantir l'exactitude des résultats est celui qui a été présenté encore en commun le 5 octobre 1846 par MM. Chevandier et Wertheim sous le titre *Mémoire sur les propriétés mécaniques des bois* (4). Il est précédé d'un historique qui fait connaître encore quelques expérimentateurs, savoir M. Wheatstone (5), qui a taillé des plaques de bois de forme rectangulaire, en réglant le grand côté, parallèle aux fibres, et le petit côté, de telle sorte qu'en les mettant en vibration on ait des lignes nodales diagonales, ce qui permet de déduire le rapport des élasticités dans les deux sens; M. Hagen (6), dont il est question à l'Appendice complémentaire § 92;

(1) 8 mai 1843, même tome.

(2) Nous avons cité, au § 74 du 5<sup>e</sup> Appendice, les expériences de M. Weber (Ann. de Poggendorff, t. LIV) sur les fils de soie, se comportant d'une manière analogue.

(3) 2 juin 1845, 3<sup>e</sup> série, t. XIX.

(4) In-8°, 1848, chez Bachelier.

(5) *Philosophical Transactions*, 1833, p. 606.

(6) *Annales de Poggendorff*, t. LVIII, p. 425.

et MM. Pacinotti et Peri <sup>(1)</sup> dont les expériences de flexion ont été faites en posant les barres de bois tantôt sur deux appuis à faces horizontales et verticales, tantôt sur des rouleaux, tantôt sur des poulies. Ces derniers auteurs ont trouvé qu'en défalquant les parties persistantes, les extensions et flexions restaient proportionnelles aux charges, même en approchant du point de rupture (loi de Gertsner), et que le coefficient d'élasticité  $E$  est presque proportionnel à la densité dans les diverses variétés d'un même bois, ce qui rendrait sensiblement constante la *hauteur du module* de Young. Les expériences de MM. Chevandier et Wertheim, faites dans les Vosges, ont porté sur des échantillons de dix-sept espèces de bois, tirés de quatre-vingt-quatorze arbres. Les barreaux ont été extraits dans diverses orientations, ils ont été éprouvés à divers degrés de dessiccation; on a déterminé les allongements, les flexions statiques, les cohésions ou charges de rupture, le nombre des vibrations; et on a comparé les résultats des expériences sur les tringles et les barreaux avec celles qui ont été faites sur les pièces entières débitées dans les dimensions ordinaires du commerce et des constructions. On a noté les densités, la nature du sol. On a mesuré les allongements élastiques et les allongements persistants. On a éprouvé des tringles taillées dans le sens des fibres, dans le sens des rayons des couches concentriques et dans le sens de leurs tangentes. Ce grand et beau travail sera toujours consulté avec fruit.

On doit aussi à M. Wertheim des expériences sur la vitesse du son dans le fer, faites en commun avec M. Breguet <sup>(2)</sup>; et une dernière note <sup>(3)</sup> présentée à l'occasion d'expériences de M. Kirchhoff sur la comparaison de la flexion avec la torsion dans les verges rondes d'acier trempé et de cuivre <sup>(4)</sup>.

M. Wertheim a inséré aussi aux *Annales de chimie et de physique* (3<sup>e</sup> série, t. XXV) une *Note sur la torsion des verges homo-*

<sup>(1)</sup> *Il Cimento*, 3<sup>e</sup> année, 1845.

<sup>(2)</sup> *Comptes rendus*, t. XXXII.

<sup>(3)</sup> *Comptes rendus*, t. LI, p. 969.

<sup>(4)</sup> *Annales de Poggendorff*; ou l'extrait publié par M. Verdet aux *Ann. de ch. et de ph.*, 3<sup>e</sup> série, t. LIX.



général, une autre sur la vibration des plaques circulaires (t. XXXI) et une autre (présentée le 10 décembre 1849) sur la propagation du mouvement dans les corps solides et dans les fluides. Le premier de ces trois mémoires avait pour but de justifier, par la comparaison des résultats de flexion avec ceux de torsion, sa modification aux formules que nous avons longuement discutées à notre Appendice V. Le mémoire sur l'équilibre des solides homogènes, présenté le 10 février 1848 (\*), où il propose cette modification peu heureuse, contient un assez grand nombre d'expériences sur des tubes en verre et en laiton, mais qui peuvent, comme nous avons dit (même Appendice) être interprétées autrement qu'il ne fait (\*\*).

Un des travaux les plus considérables de Wertheim est son mémoire de 1855 sur la torsion (†).

Ce sujet a été, comme nous l'avons dit, traité pour la première fois par Coulomb (‡) avec sa supériorité ordinaire. Son mémoire contient, avec une théorie saine mais s'appliquant uniquement aux fils ou aux cylindres à section circulaire, des expériences à l'appui, dans une partie desquelles la résistance est évaluée en comptant le nombre des vibrations tournantes. On y trouve (XX à XXV, seconde section) la première remarque qui ait été faite des parties persistantes n'empêchant pas, quand on les défalque, l'élasticité de se conserver, ou les parties non-persistantes de rester proportionnelles aux efforts. Depuis, M. Banks (§),

(\*) *Ann. de chimie et de physique*, 3<sup>e</sup> série, t. XXIII.

(§) Au nombre des travaux de physiciens nous ne devons pas oublier de mentionner celui de M. Person (*Comptes rendus*, 4 septembre 1848, t. XXVII, p. 258), dans lequel il trouve pour la chaleur latente  $l$  de fusion de divers métaux dont  $E$  représente le coefficient d'élasticité, et  $\Pi$  le poids spécifique (celui du mètre cube sans doute), une formule  $l = KE \left( 1 + \frac{\alpha}{\sqrt{\Pi}} \right)$ . Le coefficient  $K$  est

trouvé le même pour le zinc, le plomb, le bismuth, l'argent, etc. Il se sert des expériences de M. Wertheim sur les élasticités.

(†) Présenté le 49 février 1855. *Annales de ch. et de ph.* Juin 1855, p. 495.

(‡) *Recherches théoriques et expérimentales sur la force de torsion et sur l'élasticité des fils de métal*, Mém. de l'Académie pour 1784... Observations sur les lois de l'élasticité et de la cohérence.

(§) *Treatise on the Power of Machines*.

M. Dulong <sup>(1)</sup>, M<sup>r</sup> Henne <sup>(2)</sup>, M. Bramah <sup>(3)</sup> et M. Bevan <sup>(4)</sup>, ont fait diverses expériences; surtout de rupture par torsion. Nous avons parlé de celles de Duleau et de Savart pour le simple torsion sans rupture.

Bien que plusieurs passages du mémoire de Wertheim sur la torsion aient été rédigés dans un esprit évident de polémique, et qu'on ne puisse lui accorder ni le retour à une formule de Cauchy à laquelle ce géomètre avait renoncé, ni l'évaluation du coefficient d'élasticité de torsion, en le déduisant, par ses formules théoriques modifiées, du coefficient d'élasticité d'extension, seul mesuré; les expériences consciencieusement et soigneusement faites, comme toutes celles de ce regretté physicien, et qui ont porté sur des prismes ou cylindres circulaires, rectangulaires, elliptiques, en verre, cristal, fer, acier fondu, laiton, tôle, bois de chêne et de sapin, ne donnent pas moins une suite de résultats précieux.

Des expériences récentes sur la torsion des bois ont été faites aussi par M. Bouniceau, ingénieur en chef des ponts et chaussées <sup>(5)</sup>. Les torsions sont proportionnelles aux efforts tant que ceux-ci ne dépassent pas une certaine limite; les angles de torsion sont bien en raison inverse des quatrièmes puissances des côtés de la base supposée carrée; et les efforts qui rompent sont comme les cubes.

D'autres expériences sur la torsion, qui paraissent très-précises, avaient été publiées en 1842 par M. Giulio <sup>(6)</sup>. Il déduit la torsion des fils métalliques de l'allongement des ressorts en hélice que l'on en compose, car, lorsque le pas de l'hélice est très-peu considérable, la torsion se trouve seule en jeu, et peu

(1) *D' Thomson's Annals of Philosophy*, t. XIII, p. 200.

(2) *Philosophical Transactions*, 1818; ou *Annales de ch. et de ph.*, 1818.

(3) *Practical Essay on the Strength of cast Iron*, by Tredgold,

(4) *Experiments of the Modulus of Torsion by Benjamin Bevan*. *Trans. phil.*, 1829; faites sur 47 espèces de bois et 46 espèces de métaux.

(5) *Annales des ponts et chaussées*, 1864, 4<sup>e</sup> semestre.

(6) *Académie de Turin*, 1842; lu le 4 juillet 1844. Deux autres mémoires du même expérimentateur, lus le 5 juillet et le 20 décembre 1840; figurent au tome de 1841. L'un est relatif à la flexion des fers; l'autre est relatif à l'extension des fils de fer.

ou point la flexion. Ses expériences sur le fer, le cuivre, l'argent, l'étain, le plomb, lui paraissent confirmer la loi de Gertner <sup>(1)</sup>.

On trouve aussi dans la *Bibliothèque universelle de Genève*, t. V, n° 20, 20 août 1859 (Archives, p. 294) l'extrait d'un mémoire de M. G. Wiedeman sur la torsion des fils <sup>(2)</sup>. Elles ont rapport surtout aux lois des torsions et détorsions permanentes, successivement imprimées.

Enfin, en 1862, le numéro de mars du *Civil Engineer and Architect's Journal* contient, p. 85, quelques expériences faites à Glasgow par M. Rankine sur la résistance des barres à la rupture par torsion.

La résistance à la torsion dérive, comme nous avons vu, de la *résistance au glissement*. Mais celle-ci peut être mise aussi en jeu sans qu'il y ait torsion, à savoir lorsque l'action extérieure contre laquelle elle réagit s'exerce dans un sens transversal aux pièces, ou dans une direction tangentielle aux sections ou faces de rupture, qui soit sensiblement la même sur tous leurs éléments, en sorte que cette action tende à trancher, cisailer, détruire l'adhérence; tendance qui a plus ou moins lieu dans toute flexion qui ne s'opère pas d'une manière *égale* d'un bout à l'autre ou en arc de cercle. Avant que M. Vicat ait appelé l'attention sur cette force *transverse*, et basé sur son omission la principale accusation qu'il porte contre la théorie ordinaire de la résistance des pièces solides aux efforts perpendiculaires à leur longueur <sup>(3)</sup>, cette espèce de force ou de résistance avait été l'objet de diverses expériences. On peut en effet y rattacher celles de M. Boitard <sup>(4)</sup>, sur l'adhérence des mortiers et sur la résistance que leur interposition entre les pierres de taille op-

<sup>(1)</sup> Le glissement transversal doit avoir aussi une influence (Mémoire du 6 novembre 1843 aux *Comptes rendus*, t. XVII, p. 4020).

<sup>(2)</sup> Le mémoire complet se trouve dans les *Verhandlungen der Naturforschenden Gesellschafft in Basel*, II<sup>e</sup> Heft., 2, 1859.

<sup>(3)</sup> Ce reproche de M. Vicat se trouve formulé pour la première fois à sa *Description d'un pont suspendu construit sur la Dordogne à Argentat*, in-4°, 1830, p. 2 et 3. Il cite les *corbeaux*, les *tourillons*, les *goujons* et autres pièces courtes, comme se soustrayant à cette théorie.

<sup>(4)</sup> Elles sont décrites au t. I du *Traité des ponts*, de Gauthey, p. 263.

pose au glissement de celles-ci l'une devant l'autre. Perronet avait fait aussi diverses expériences sur le frottement mutuel des pierres. On en doit aussi à M. Morin <sup>(1)</sup> sur l'adhérence des pierres avec mortier interposé, indépendamment de leur *frottement* qui ne résiste que lorsqu'il y a mouvement commencé ou que l'*adhérence* est déjà vaincue. Enfin nous avons déjà parlé (p. 473) de celles de cisaillement de tringles de fer, qui ont été faites par MM. Gouin et C<sup>e</sup>, et d'autres plus récentes, sur des rivets d'acier, faites par MM. Combes, Lorieux et Couche <sup>(2)</sup>, qui ont montré que cette sorte de résistance, au lieu de s'élever, comme pensait M. Vicat, à cinq ou six fois la résistance à la rupture par extension, restait un peu au-dessous de celle-ci et pouvait être regardée comme en étant les *quatre cinquièmes*, conformément à la théorie, qui, cependant, est donnée comme ne s'appliquant à la rigueur que pour des corps non-seulement isotropes, mais encore restant dans les limites de la conservation intacte de leur contexture moléculaire.

A mesure que nous avançons les expériences se multiplient, surtout au point de vue d'une application pratique immédiate <sup>(3)</sup>. Presque aucun pont suspendu ou autre ouvrage de fer, fil de fer ou fonte, ne s'exécute sans éprouver préalablement les pièces, indépendamment de l'épreuve totale à laquelle ces ouvrages sont finalement soumis <sup>(4)</sup>. Toutes les usines, tous les entrepôts de pièces de fer, essayent leurs produits.

Ainsi, les fils de 3 millimètres de diamètre du pont de Fribourg, d'une portée de 300 mètres, l'ouvrage le plus hardi qui ait été construit, ont été reconnus par l'ingénieur, M. Chaley,

<sup>(1)</sup> *Nouvelles expériences sur l'adhérence des pierres et des briques posées à bain de mortier, etc.*, 1828, et, aussi, *Leçons sur la résistance des matériaux*.

<sup>(2)</sup> Mêmes Leçons de M. Morin, 3<sup>e</sup> édit. (1862), t. I, n<sup>o</sup> 70.

<sup>(3)</sup> M. Wiesbach (*Lehrbuch der Ingenieur und Maschinen Mechanik*) cite encore d'autres expérimentateurs tant anciens que récents : S<sup>r</sup> Gravesande, Erir, Mosley, Hüll, Bornemann, Etelwein ; puis M. Kamarch, avec une commission nommée en Hanovre ; et, aussi, M. Ernest Lamarle, dont nous avons eu occasion de parler ailleurs, et qui a confirmé les formules de flexion, comme Duleau, en y soumettant des règles à section triangulaires posées alternativement sur leur plat et sur leur arête.

<sup>(4)</sup> La plus ancienne épreuve peut-être est celle du *Pont des Arts*, à Paris : on en voit la relation au *Bulletin de la Société philomathique*, 1803, p. 154.

supporter, avant de rompre, 82 kilogrammes par millimètre carré. Ils sont soumis à un effort permanent de 17<sup>m</sup>,53, et, lors de la charge maximum, à un effort de 26<sup>m</sup>,88. Le pont a résisté à toutes les épreuves, même de pas cadencés, au son de la musique militaire, et malgré de fortes oscillations (1).

Après avoir présenté, en 1835 (2), diverses observations comparatives sur l'emploi des fils et des barres de fer, M. Leblanc, qui avait conclu à l'adoption des fils, a présenté, en 1839, plusieurs séries d'expériences; accompagnées d'importantes remarques sur ceux qu'il a employés au grand pont de la Roche-Bernard (3); et, ensuite, il en a publié le complément (4), où il remarque que les allongements augmentent avec rapidité après une tension des deux tiers de celle de la rupture; mais que, soumise pendant cent jours à un effort considérable, les fils ont offert ensuite une résistance plutôt supérieure qu'inférieure à la résistance primitive, etc.

On trouve aussi diverses expériences sur les barres et sur les fils aux pages 295 et 334-336 d'une notice sur le pont suspendu de Saint-Christophe, près Lorient, par MM. Leclerc et Noyon (5).

Dans le même recueil (*Annales des ponts et chaussées*) on trouve, jusqu'à l'époque actuelle, les résultats d'un certain nombre d'autres expériences sur la force ou la flexion des matériaux. — En 1842 (1<sup>er</sup> semestre, p. 336) un mémoire de MM. Flachât et Petiet sur les ponts suspendus avec câbles en *rubans de fer laminé*, employés à la passerelle d'Abainville et au pont de Suresnes. (Voir aussi p. 394, le rapport de M. Baude sur les épreuves.) — En 1850 (1<sup>er</sup> semestre, p. 309), des recherches expérimentales de M. Chevallier sur la construction des grandes portes d'écluses; ses expériences vérifient la théorie connue et le conduisent à établir, sur la répartition des charges, quelques principes qui auraient besoin

(1) *Annales des ponts et chaussées*, 1835, 1<sup>er</sup> semestre, p. 4.

(2) *Idem*, 2<sup>e</sup> semestre, p. 345.

(3) *Idem*, 1839, 2<sup>e</sup> semestre, p. 300.

(4) *Description du pont suspendu de la Roche-Bernard*, 1844.

(5) *Ann. des p. et ch.*, 1850, 1<sup>er</sup> semestre.

d'être examinées. — En 1852 (1<sup>er</sup> semest., p. 253), le résultat, obtenu par M. Féburier, des épreuves d'une entretoise destinée aux portes de la grande écluse de Saint-Malo. — En 1853 (1<sup>er</sup> semestre, p. 78), une note de M. Brême sur l'application de la tôle à quelques ponts du chemin de fer de ceinture de Paris; ce mémoire renferme la relation de plusieurs épreuves auxquelles ces ponts en tôle ont été soumis, et de quelques expériences inédites faites aux forges d'Imphy, près Nevers, sur les tôles, par MM. Gouin et C<sup>o</sup>. — En 1854 (1<sup>er</sup> semestre, p. 257), un rapport, par MM. Collet-Meygret et Desplaces, sur les épreuves faites à l'occasion de la réception du viaduc en fonte construit sur le Rhône à Tarsaçon, et sur les mouvements des arches par l'influence de la température et des charges, etc. A la suite du compte rendu des observations précises dont ces mouvements ont été l'objet, se trouvent les résultats d'un assez grand nombre d'expériences sur des barres de fonte de 3 mètres de long, de 5 et 10 centimètres de côté, faites aux ateliers du chemin de fer à Arles. — En 1855 (1<sup>er</sup> sem., p. 192), des expériences de M. Pirel, sur la flexion des arcs et poutres en fonte de Lormont et de Chauvin au moment du passage des convois, et sur les mouvements que leur font éprouver les variations de température. — Même volume, p. 225, des expériences sur le coefficient d'élasticité de la fonte par M. Baumgarten. — En 1857 (2<sup>e</sup> sem., p. 257), un mémoire de M. Decomble sur la meilleure forme à donner aux poutres droites en fonte; on y trouve plusieurs expériences, et un grand nombre d'utiles considérations basées sur des faits de la pratique du coulage des pièces. — En 1859 (1<sup>er</sup> sem., p. 129), un mémoire de M. Ploeg sur les épreuves d'un pont tournant en tôle de Dunkerque. — Même année (2<sup>e</sup> sem., p. 326), les expériences faites par M. Noyon sur les fils des câbles du pont de la Roche-Bernard, après l'accident causé en 1853 par des oscillations horizontales pendant une violente tempête. — En 1860 (2<sup>e</sup> sem., p. 113), des remarques de M. le colonel russe Jouravski sur les poutres en treillis et les poutres pleines en tôle, suivies de quelques épreuves et expériences. — En 1864 (2<sup>e</sup> sem., p. 1), un rapport de MM. Combes, Lenoir et Conche sur les conditions d'épaisseur pour les tôles d'acier fondu employées dans la construction des chaudières à

vapeur. On y trouve un certain nombre d'essais d'extension et de rupture de la tôle à froid et à chaud, et les avis de divers ingénieurs, offrant comme le résumé de ce que leur expérience leur a appris à ce sujet.

Cette commission avait exprimé l'avis que de nouvelles expériences étaient nécessaires. Elles furent faites (même volume de 1860) par M. Tresca, sous-directeur du Conservatoire des arts et métiers; son procès-verbal en contient aussi sur diverses barres d'acier vif.

Les Annales des mines (où l'on trouve déjà, en 1826, un article de M. d'Aubuisson sur les limites d'élasticité) ont enregistré également diverses expériences qui sont consignées, entre autres, dans des mémoires de M. Couche, de 1852 et 1854, principalement sur les rails de différentes formes. On y trouve aussi (1852), à la suite du *Mémoire sur les ressorts* en acier employés dans le matériel du chemin de fer, par M. Phillips, un certain nombre d'expériences sur l'élasticité de l'acier.

M. Ferdinand Zorès, dans une notice jointe à son Recueil de fers spéciaux, dont il était entrepositaire (quai Jemmapes, 242), a donné les résultats d'un certain nombre d'expériences sur la flexion et la rupture de ses échantillons à double T (p. 113 ci-après).

Depuis 1852, il se fait à Saint-Petersbourg, dans l'Observatoire de physique central, des expériences dont il est rendu un compte annuel au ministre des finances. Les comptes ainsi rendus de 1852, 1853, 1855 en contiennent sur l'élasticité des métaux, déterminée tant par leurs flexions ou torsions statiques que par leurs vibrations transversales ou tournantes. Le compte de 1856 en contient qui sont relatives à l'influence de la chaleur sur l'élasticité.

Mais les principales expériences du milieu du siècle où nous sommes ont été faites en Angleterre, et quelques-unes sur une échelle presque gigantesque.

Depuis longtemps, le célèbre M. Fairbairn (aujourd'hui correspondant de l'Institut de France) qui, le premier, a construit pour la marine anglaise des navires de grande dimension tout en fer, avait entrepris dans son bel établissement de Manchester une suite d'expériences sur la résistance des matériaux,

et il avait, pour en étendre le cadre, mis à la disposition de son savant ami M. Eaton Hodgkinson, professeur de physique, les moyens dont il disposait. Dès 1830, M. Hodgkinson s'était fait avantageusement connaître par divers beaux mémoires, dont cinq insérés au volume de 1831 de ceux de la *Société littéraire et philosophique de Manchester*; quatre d'entre eux étaient relatifs aux ponts suspendus; l'autre, qui doit fixer davantage notre attention, était intitulé : *Recherches théoriques et expérimentales pour déterminer la force et la meilleure forme des poutres en fer* (1). Devenu collaborateur de M. Fairbairn, il entreprit d'abord avec lui diverses séries d'expériences ayant surtout pour objet la *comparaison des fontes fabriquées à l'air froid et à l'air chaud*; et ces deux habiles expérimentateurs publièrent, dans deux mémoires séparés, au même volume de l'*Association britannique pour l'avancement des sciences* (2), les résultats que chacun avait plus particulièrement recueillis. Ces expériences furent suivies d'autres non moins précieuses, dues à M. Hodgkinson, sur la résistance des colonnes (*pillars*) de fonte, et qui donnèrent lieu à la présentation d'un mémoire du 22 avril, lu le 14 mai 1840 devant la Société royale de Londres, et inséré au volume de la même année 1840 des *Philosophical Transactions* (3), p. 385.

Les divers mémoires dont nous venons de parler furent réunis de manière à former la matière d'un supplément à une nouvelle édition du *Cast Iron* de Tredgold, supplément publié à part en 1846.

Cet ouvrage plein de faits, dont M. Combe avait donné quelque idée dès 1844 en publiant le premier volume de son

(1) *Memoirs of literary and philosophical Society of Manchester*, vol. V, 1834, p. 407-544.

(2) *Report of the seventh meeting of the British association for the advancement of Science, held at Liverpool, sept. 1837*, vol. VI. Page 337, On the relative strength and other mechanical Properties of cast Iron obtained by hot and cold blast by Eaton Hodgkinson. Page 377, On the strength and other Properties from the hot and cold blast, by W. Fairbairn.

(3) *Experimental researches of the strength of Pillars of cast iron and other materials*.



Traité de l'exploitation des Mines, a été traduit presque entièrement en français vers 1850 et inséré aux Annales des ponts et chaussées seulement en 1855 (1), par M. Pirel, à qui il avait été prêté à Bordeaux par un ingénieur suédois.

Les expériences de M. Hodgkinson sur la fonte fabriquées tant à l'air chaud qu'à l'air froid, portent d'abord sur la résistance à l'extension de pièces de fonte à section en croix d'équerre, et en opérant quelquefois la traction dans une direction qui n'était pas suivant l'axe mais suivant une arête; dans ce dernier cas la résistance était réduite au tiers. Il en a fait beaucoup aussi sur la résistance à la flexion et à la rupture par flexion des poutres en fonte.

Celles de M. Fairbairn (même ouvrage traduit, et tirées du même volume VI de l'Association britannique) sont relatives en grande partie à des pressions longtemps continuées, transversalement et au milieu, et voisines de celles de rupture, faites sur des barres de fonte. Trois de ces neuf barres furent trouvées rompues au bout de cinq ans. D'autres expériences de M. Fairbairn sont relatives aux flèches non permanentes ou permanentes, etc., et ont porté sur des fontes de tous les fourneaux de la Grande-Bretagne. Beaucoup furent faites sur des poutres à section transversales en T et à section longitudinale doublement parabolique comme celle des pièces qui sont d'égale résistance pour une largeur constante. La séparation d'une sorte de coin du côté devenu concave a été plusieurs fois observée lors de la rupture.

Les nombreuses expériences (*idem*, tirées des *Trans. phil.* 1840)

(1) *Recherches sur la résistance et les diverses propriétés de la fonte de fer*, par Eaton Hodgkinson, traduites par M. Pirel (1<sup>er</sup> semestre, page 4).

Les figures 53 et 54 de la planche 74 des Annales, jointes à cette traduction de M. Pirel, ont été copiées sur des figures dans le texte avec traits épais, qui ont fait juger à tort au dessinateur qu'elles représentaient des pièces creuses, tandis que ce sont des pièces pleines, ayant même d'autres proportions.

M. Pirel n'a pas traduit le dernier article (sur la torsion) qui, en effet, n'offre pas d'intérêt, et l'avant-dernier intitulé *Theoretical inquiries with regard to the strength of Beams*, où il m'a paru qu'il y avait une idée propre à résoudre approximativement le problème de la résistance à la rupture immédiate. C'est cette idée que j'ai développée, en la modifiant d'une manière essentielle, à la note du n° 454 ci-après.

faites par M. Hodgkinson sur les résistances à la compression, portant d'abord sur des prismes courts (de bois, puis de fonte) qui cédaient par écrasement, en se disjoignant latéralement de diverses manières, puis de colonnes (pillars) qui cédaient d'une manière intermédiaire entre celle qui consiste à s'écraser et celle qui consiste à fléchir latéralement comme les pièces dites *debout*. M. Hodgkinson représente empiriquement les résultats par une formule comme celle d'Euler, relative à celles-ci (n° XII) excepté qu'au lieu de la puissance 4 du diamètre il y a au numérateur une puissance 3,6, et qu'au lieu de la puissance 2 de la longueur il y a au dénominateur la puissance 1,7 (4).

Enfin les expériences de 1830 de M. Hodgkinson, pour déterminer la meilleure forme à donner à la section des poutres en fonte, sont fort nombreuses. Cette forme à double T est, suivant lui, celle où la semelle inférieure a une superficie qui est à celle de la semelle supérieure dans le rapport de 6 à 4 des résistances à l'écrasement des pièces courtes, et à la rupture par extension. En supposant cette conclusion exacte pour la rupture immédiate, rien ne dit qu'on doive l'adopter pour la rupture éloignée; aussi les constructeurs s'accordent-ils généralement à préférer les semelles égales. (Voyez les discussions aux §§ 13 et 17, 18 des Notes des n° 113 et 120, p. 108 et 146.)

(4) M. Love, que nous citerons de nouveau tout à l'heure, a représenté les mêmes expériences par une formule plus facile à calculer et qui donne en même temps des résultats plus rapprochés, où la 4<sup>e</sup> puissance du diamètre est laissée au numérateur, mais où il y a, au dénominateur, deux termes, savoir un affecté de la puissance 3 de la longueur, et un affecté de la puissance 2 du diamètre. Ces deux formules ne satisfont point aux deux cas extrêmes de pièces très-courtes, où la force qui fait rompre est simplement proportionnelle au carré du diamètre et à peu près indépendante de la longueur, et de pièces ayant des longueurs pour lesquelles Duleau a reconnu que la formule d'Euler s'observait. Une formule telle que  $\left(\frac{l}{P}\right)^n = \left(\frac{l}{R'\omega}\right)^n + \left(\frac{l^2}{\pi^2 E I}\right)^n$  aurait l'avantage de donner, pour la force qui fait rompre,  $P =$  la formule d'écrasement  $R'\omega$  ( $\omega$  étant l'aire de la section) quand la longueur  $l$  est extrêmement petite, et  $P =$  l'expression d'Euler quand la longueur est extrêmement grande. Il n'y aurait qu'à déterminer l'exposant  $n$  de manière à satisfaire le mieux possible aux intermédiaires.

M. Hodgkinson renvoie, pour les résistances au choc et aux vibrations, à son *cinquième rapport*, inséré aux Mémoires de l'association britannique en 1835.

Il cite aussi des expériences inédites d'autres auteurs, entre autres de M. Bramah et de M. Thomas Cubbitt, que nous allons retrouver membre d'une commission célèbre; expériences dont quelques-unes avaient été faites en commun avec M. Henri de la Bèche pour s'acquitter d'une mission du gouvernement ayant pour objet de rechercher les causes de la chute de deux bâtiments d'usines; elles portent sur diverses longues poutres en double T.

On trouve aussi, dans un ouvrage plus récent de M. Fairbairn, intitulé *De l'application de la fonte, du fer et de la tôle dans les constructions*, traduit en 1857 par E. Perret-Porta, et réuni en un même volume avec la traduction ci-dessus de M. Pirel, quelques expériences sur les poutres en T et à double T, et, aussi, sur les poutres en treillis; mais, surtout, un grand nombre de conseils et d'indications pour leur emploi dans des planchers, et la construction « d'entrepôts incombustibles. »

**LXII. Suite des expériences.** — Mais, en 1845, l'illustre ingénieur Stephenson, chargé de la construction du chemin de fer qui aujourd'hui longe la côte nord du pays de Galles en se prolongeant à travers l'île d'Anglesey jusqu'au port le plus rapproché de l'Irlande, s'étant décidé, afin de satisfaire aux exigences de l'amirauté, à construire sur de très-hautes culées, pour la traversée du détroit de Menai et pour celle de la baie de l'embouchure de la rivière de Conway, des ponts composés de poutres droites et creuses d'une grande portée, dans l'intérieur desquelles les trains pussent passer, pria M. Fairbairn d'entreprendre une suite d'expériences sur la force de la tôle, matière dont il se proposait de construire ces ponts *tubulaires*, d'un genre aussi hardi que nouveau.

Les expériences à ce sujet ont été publiées, ainsi que tout ce qui se rapporte à la construction de ces deux grands ponts, et aux incidents instructifs qui s'y sont passés, dans

un ouvrage de son collaborateur M. Edwin Clarke <sup>(1)</sup>, qui a été traduit en partie par M. Yvert <sup>(2)</sup>.

Les expériences consistèrent d'abord à soumettre à la rupture par flexion, au moyen d'un poids suspendu au milieu, divers tuyaux de tôle rivée, posés horizontalement sur deux appuis. On reconnut qu'une section elliptique posée de champ était préférable à une section circulaire, et qu'une section rectangulaire, plus haute que large, valait encore mieux. Et comme on aperçut que la rupture avait presque toujours lieu par l'écrasement ou plutôt le ploiement ou le *soulèvement* de la partie devenue concave, c'est-à-dire de la partie supérieure, sous l'effort de compression longitudinale qu'elle avait à supporter, on se décida à donner à cette partie supérieure une coupe transversale *cellulaire*, ou à la composer, dans un premier essai, de deux tuyaux ovoïdes, puis ensuite d'un plus grand nombre de tuyaux, à section rectangle et juxtaposés. On fit quelques expériences sur la résistance, à la compression longitudinale, d'un tuyau de cette forme rectangle; puis les expériences portèrent sur un modèle, au sixième, du grand tube projeté en tôle. Ce modèle avait environ 23 mètres de portée, et sa partie supérieure était, en coupe transversale, divisée en six cellules rectangles. Chaque fois qu'il a été rompu, ce qui a eu lieu désormais par déchirement de la partie inférieure, on le réparait en renforçant cette partie; on a reconnu aussi par expérience le rapport à donner aux forces respectives des deux parties. Puis, comme le pont devait être un grand ouvrage de chaudronnerie, on s'est livré à plusieurs séries d'expériences sur la résistance, à la traction, des tôles simples ou assemblées, et de leurs rivets d'assemblages, placés de diverses manières et unissant deux, trois, quatre feuilles, et sur la part

(1) *The Britannia and Conway tubular Bridge, with general Inquiries of Beams and on the Properties of material used in Construction.* London, 1850, published with the sanction and under the supervision of Robert Stephenson. 2 vol. in-8° and Atlas in-8°.

On peut consulter aussi : *On Account of the Construction of the Britannia and Conway Bridge*, by Stephenson.

(2) *Notice sur les ponts avec poutres tubulaires en tôle*, par L. Yvert, avec une introduction par E. Flachet, et un atlas très-détaillé.

d'influence du frottement mutuel des feuilles dans les résistances.

Dans les dernières expériences on mesura les flèches ou flexions prises sous diverses charges graduées.

La mise au levage des immenses tubes, la liaison ensemble des quatre de Menai, au-dessus de trois piles (dont l'une était fondée sur le rocher BRITANNIA qui se trouve à peu près au milieu du détroit), de manière à ne former qu'une seule poutre, donnèrent lieu à d'autres observations curieuses; et un accident, qui heureusement n'eut pas de suites fâcheuses, donna lieu à d'autres remarques sur les forts cylindres de presses hydrauliques et sur ce qu'il y a de mieux à observer en les fabriquant.

Mais une autre circonstance, vers le même temps et dans le même royaume, fut l'occasion d'expériences précises, plus nombreuses et plus variées, et de la réunion d'un grand nombre de documents et d'avis, résumant le savoir pratique de ses constructeurs les plus distingués. Un accident grave étant survenu, en 1847, par la rupture d'une poutre en fonte d'un pont de chemin de fer, une commission fut nommée par la Reine, le 27 août de cette même année, pour faire une enquête sur l'emploi du fer et de la fonte dans les constructions dépendant des chemins de fer, surtout dans les parties exposées à des secousses et à des vibrations. Le rapport de la commission, du 26 juillet 1849, a été imprimé avec des *Appendix* étendus contenant tout le détail des expériences, et les procès-verbaux de l'audition des personnes appelées à lui donner des renseignements, ainsi que les calculs qui ont été faits par M. Willis, de l'université de Cambridge, l'un des membres de la commission, secondé par M. Stokes, membre éminent du Collège de Pembroke de la même ville<sup>(1)</sup>.

---

(1) *Report of the Commissioners appointed to inquire into the Application of Iron to Railway structures*; signé : lord Wrotlesley, Willis, Henri James, Rennie, Cubbitt, Hodgkinson, Douglas Galton (lieutenant du génie, secrétaire), 1849.

Ce rapport, sans les appendices ni les planches, a été traduit par M. Busche, et inséré aux *Annales des ponts et chaussées*, 1851, 4<sup>re</sup> semestre, p. 493.

Les dépositions, quoique pas toujours concordantes, de divers constructeurs, ont paru cependant établir que les pièces de fer exposées à des vibrations se rompent souvent après un long usage et présentent alors une structure cristalline. C'est aussi l'état auquel le filetage amène souvent le fer fibreux, au moins dans la partie filetée, à cause de l'ébranlement qui accompagne toujours cette opération.

Les expériences sur les barres de fonte ont été de divers genres. Les unes ont été soumises jusqu'à 4,000 fois au *choc horizontal* d'un boulet suspendu au bout d'un fil comme un pendule; les autres jusqu'à 100,000 fois à la flexion intermittente produite par une came tournante; d'autres barres horizontales ont été heurtées *verticalement*. Elles ne se brisaient que lorsque la flexion, répétée ainsi un grand nombre de fois, excédait sensiblement le tiers de celle de rupture sous une charge statique.

D'autres barres ont été soumises à l'action lente et continue d'un poids presque égal à celui de rupture statique, promené d'un bout à l'autre alternativement en avant et en arrière jusqu'à 96000 mille fois.

Ces expériences ont confirmé divers résultats de la théorie; elles ont montré par exemple, que la flèche dynamique est à peu près proportionnelle à la vitesse d'impulsion (n° L, LI, LVI); qu'il faut un choc de même force pour rompre une barre rectangulaire et même plate soit qu'on la frappe sur le plus grand côté ou sur le plus petit, et qu'une barre carrée de même *volume* rompt sous le même choc (*idem*); que des poids additionnels, également répartis sur une barre, de manière à augmenter la masse à mouvoir sans augmenter la résistance statique, la rendent capable de résister à des chocs plus forts (*idem*). Les flèches sont alors assez exactement représentées par la formule où l'on tient compte (*idem*) du partage de la vitesse entre la masse heurtante et la masse heurtée réduite aux  $\frac{17}{35}$  environ.

A Portsmouth, des chariots ont été abandonnés à leur poids au sommet de plans inclinés de manière à passer, avec diverses vitesses acquises, sur des barres faisant rails au bas: on mesurait les flèches dynamiques, etc.; et, comme nous avons déjà eu

occasion de le dire (n° LVII), on disposait, dans des expériences plus en petit, un appareil pour augmenter artificiellement à volonté l'inertie de la barre.

Deux expériences de charge voyageuse en grand ont été aussi exécutées en faisant passer rapidement une locomotive et son tender sur les ponts d'ewel et de Godstone, et les flexions ou dépressions en divers points des poutres ont été observées au moyen de styles faisant leurs traces sur une planchette fixe, appuyée de part et d'autre sur les culées.

Enfin, des expériences d'effets statiques ont été faites avec précision et en grand pour connaître les allongements et les raccourcissements de longues barres de fonte ou de fer tirées ou pressées longitudinalement. Les effets, passé une certaine grandeur, ont crû plus rapidement que les causes, en sorte que M. Hodgkinson, auteur de ces expériences, les représente en égalant la charge à une expression binôme dont le premier terme, positif, est proportionnel à la dilatation ou à la contraction, et le second, négatif, est proportionnel à son carré. M. Hodgkinson fait le coefficient du premier terme moindre d'un quatorzième dans la formule des pressions que dans la formule des tractions; mais les chiffres même fournis par les expériences prouvent pour le principe de l'égalité des extensions et des compressions produites par des charges égales suffisamment petites, surtout si l'on défalque les petits effets permanents, attribuables à un léger écrouissage.

Le même expérimentateur a fait à cette occasion de nouvelles expériences d'écrasement des prismes courts.

Des barres ont été aussi soumises, à Portsmouth, en grand nombre, à des flexions transversales statiques.

Les *Appendix* du même ouvrage reproduisent, en en faisant connaître de nouvelles, des résultats d'expériences précédemment exécutées; celles par exemple qui l'ont été sous la direction de M. Stephenson sur la résistance des poteaux creux en tôle; des détails nouveaux sur les ponts de Conway et de Menai (ou Britannia); celles de M. Fairbairn, etc. Parmi le grand nombre d'ingénieurs dont les interrogatoires détaillés figurent à l'enquête, plusieurs ont inséré des tableaux d'expériences qui

leur sont propres : ce sont MM. Barlow, Rastrick, Stephenson et Hosking, W. Fairbairn, Hawkskaw, Gooch, Moris Stirling : elles portent principalement sur des fontes et sur les divers mélanges qu'on en opère pour compenser mutuellement leurs défauts ou augmenter leurs qualités.

D'utiles et intelligents extraits ont été faits des résultats de ces diverses expériences par M. Love, dont l'écrit de 1852 <sup>(1)</sup>, réédité avec des additions considérables en 1859, contient, avec quelques accusations non fondées contre la théorie, un grand nombre de vues utiles. La deuxième édition <sup>(2)</sup> relate un grand nombre d'expériences encore peu connues. Telles sont celles de M. Brottier, de M. Faure, de M. Houlbrat, sur la traction des fontes ; de MM. Ernest Gouin et Lavalley sur la tôle d'acier fondu, sur les fers spéciaux de la Moselle, etc. ; du même M. Lavalley sur des fontes de mélange, sur les tôles d'Imphy et de la Moselle, et sur le cisaillement des rivets ; de M. Tenbrink (chef des ateliers de Montigny-lès-Metz, chemin de fer de l'Est) sur l'allongement des barreaux du même métal, etc. ; de M. Delaporte sur les fontes de Mazières (Cher) ; de M. Lainé sur les fontes de Torteron (au bois et au coke) ; de M. Faure sur les fers dont on fait les boulons et les rivets, etc. Plusieurs des faits nouveaux cités par M. Love paraissent de nature à amener des économies notables dans les poids de métal à donner aux conduites d'eau et aux chaudières à vapeur.

Ces résultats divers se trouvent aussi résumés dans ce qu'ils ont de plus propre à éclairer la pratique, et discutés de manière à fournir les coefficients numériques de ses formules, dans les *Leçons sur la résistance des matériaux* de M. le général Morin, où l'on trouve aussi des expériences récentes et nombreuses de M. Fairbairn sur l'écrasement des tubes en tôle par pression

---

(1) *Mémoire sur la résistance du fer et de la fonte*, 1852, in-8°.

(2) *Des diverses résistances et autres propriétés de la fonte, du fer et de l'acier*, 1859, in-8°.



extérieure sur leur surface latérale; une expérience analogue faite à Montluçon; des expériences inédites de M. Pronier sur les bandages en fer et en acier, de M. Guettier sur des poutres en fonte à T, de MM. Hick sur la résistance au *découpage*; de M. Carillion et de la Société de l'Expansion de Mulhouse sur la torsion des cylindres de fonte. Mais la dernière édition <sup>(1)</sup> contient en outre les résultats d'un grand nombre d'expériences nouvelles faites par lui ou bien sous ses yeux au Conservatoire des Arts et Métiers, surtout par M. Tresca, sous-directeur, ancien élève de l'école polytechnique et de l'école des ponts et chaussées. Ces diverses expériences, comparables à celles des constructeurs quant à l'échelle, ou à la dimension des pièces sur lesquelles elles portent, le sont à celles des physiciens quant aux précautions dont elles sont entourées, et à la précision des résultats, obtenus avec des cathétomètres très-sensibles. Plusieurs ont eu pour objet, et ont aussi eu pour conséquences, de confirmer les formules de la théorie, attaquées par divers expérimentateurs, parmi lesquels se sont trouvés quelquefois des savants qui ne s'étaient pas suffisamment pénétrés de leur vrai sens. Ainsi, elles ont prouvé que les allongements et accourcissements permanents qui empêchaient M. Hodgkinson de souscrire au principe de proportionnalité des petits effets aux efforts, étaient extrêmement faibles, comparables aux changements de longueur produits par de petits changements de température, et attribuables d'ailleurs à des circonstances de l'opération, etc.; que la proportionnalité et les autres lois admises s'observaient aussi dans les flexions, etc. D'autres, dont nous parlons ailleurs (Appendice complémentaire, n° 78, p. 766), ont eu rapport aux poutres en fer à double T des planchers, et à leurs assemblages. D'autres ont été faites sur des barreaux de bronze, sur des rails de chemin de fer de diverses formes et provenances; d'autres l'ont été sur des fermes en fer et ont confirmé à peu près les formules établies comme nous avons dit au n° XLIX, p. ccx, ccxj. D'autres,

---

(1) *Cours de Mécanique pratique. Résistance des matériaux.* 3<sup>e</sup> édit., 2 vol.

en grand nombre, l'ont été sur l'acier et sur ses tôles, qui fixent de plus en plus l'attention depuis que la métallurgie est parvenue à les donner à un plus bas prix, etc.

Espérons que grâce à ces observations multipliées, faites dans un esprit à la fois scientifique et pratique, les points encore incertains pourront s'éclaircir, et que, la théorie ne restant point en arrière de l'expérience, mais, au contraire, fournissant des formules pour des problèmes qui se sont longtemps soustraits à ses calculs, on pourra un jour donner des règles et des chiffres plus sûrs et plus propres à faire remplir aux constructions la double condition de solidité et d'économie, surtout si des expériences prolongées, ou dans les résultats desquels le temps entre comme élément, permettent d'arriver à ces nombres et à ces *proportions de réduction* des résultats de rupture immédiate, que jusqu'à présent on ne fait presque que conjecturer. (I. n° XLIX.)

FIN DE L'HISTORIQUE.



# RÉSUMÉ DES LEÇONS

DONNÉES

A L'ÉCOLE DES PONTS ET CHAUSSÉES

SUR

## L'APPLICATION DE LA MÉCANIQUE

A L'ÉTABLISSEMENT DES CONSTRUCTIONS

ET DES MACHINES.

---

### PREMIÈRE PARTIE.

CONTENANT LES LEÇONS SUR LA RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX  
ET SUR L'ÉTABLISSEMENT DES CONSTRUCTIONS.

---

#### PREMIÈRE SECTION.

**De la résistance des corps solides.**

---

1. Un corps solide oppose de la résistance à un effort qui tend à le fléchir ou à le rompre. En recherchant les lois auxquelles cette propriété est assujettie, on peut se proposer deux objets principaux : 1° étant donnés la figure d'un corps et les efforts qu'il doit supporter, reconnaître si ce corps doit fléchir (\*), et de quelle quantité, ou s'il doit rompre; 2° déterminer la

---

(\*) Dans l'acception générale que Navier donne ici au mot *fléchir*, on peut dire que le corps *fléchit* toujours; car, dans la nature, tout corps, quelle qu'en soit la rigidité, *cède* ou change un peu de figure sous tout effort, même minime.

figure d'un corps de manière qu'il présente sous le moindre volume la plus grande résistance possible à un effort donné.

Les corps paraissent être composés de parties ou molécules, maintenues à certaines distances les unes des autres par des forces opposées qui se font mutuellement équilibre. L'une de ces forces est une attraction propre aux molécules des corps ; l'autre est une force de répulsion due au principe de la chaleur (\*). Le jeu de ces forces d'attraction et de répulsion rend raison des principaux phénomènes qui ont lieu quand on entreprend de changer la figure d'un corps. C'est évidemment dans la considération des forces dont il s'agit qu'il faut chercher la solution directe des problèmes relatifs à la résistance des solides.

Les recherches générales, fondées sur ces notions, sont trop compliquées pour qu'on puisse les présenter dans un cours élémentaire. On se bornera à déduire des résultats simples et applicables, d'hypothèses dont la justesse ait été vérifiée par des comparaisons nombreuses avec les effets naturels (\*\*).

(\*) Ampère objecte (*Bibliot. univ. de Genève*, 1832, p. 225) que si toute répulsion était due à la chaleur, il faudrait renoncer à expliquer la chaleur par des vibrations, comme on explique si bien la lumière, car les vibrations supposent des actions répulsives. La répulsion mutuelle est une propriété probablement aussi primitive et inhérente aux molécules, si ce n'est plus, que l'attraction.

(\*\*) § 1. *Recherches générales dont parle l'auteur.* — Ces recherches de mécanique dite moléculaire, dont la première idée lui appartient (1), se trouvent résumées d'une manière élémentaire dans les premières *Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité*, de M. Lamé, 1852, et aussi au commencement de deux mémoires que nous avons publiés, l'un sur la *Torsion des prismes* (1855, in-4°, ou *Savants étrangers*, t. XIV), l'autre sur leur *Flexion* (*Journal de mathématiques de M. Liouville*, 1856).

§ 2. *Hypothèses citées. Possibilité de s'en passer.* — Quant aux

(1) *Mémoire sur l'équilibre et le mouvement des solides élastiques*, lu à l'Académie le 4 mai 1824, t. VII (1827) des *Mémoires de l'Institut*.

(Du n° 1).

hypothèses auxquelles Navier fait aussi allusion, et qui consistent principalement à admettre que les sections transversales des prismes restent planes après la flexion, l'extension ou la torsion de ceux-ci, et que leurs *fibres* longitudinales résistent tout à fait indépendamment les unes des autres, elles ont été reconnues inexactes et conduisant à plusieurs résultats ou faux ou incomplets. Nous montrerons dans les notes qu'on peut s'en passer sans cesser de raisonner d'une manière élémentaire.

§ 3. *Principe des actions attractives et répulsives, fonctions continues des distances moléculaires.* — C'est uniquement sur ce principe que nous nous appuyerons pour cela. Il consiste en ce que les actions mutuelles entre molécules, ou entre points matériels, dépendent de leurs distances; qu'elles en sont fonctions *continues*, en sorte que leurs variations très-petites sont proportionnelles aux variations des distances supposées très-petites aussi; et que ces actions, répulsives pour les distances les moindres, et indéfiniment croissantes à mesure que celles-ci diminuent (ce qui remplace l'*im-pénétrabilité des anciens*), changent de signe et deviennent attractives pour des distances plus grandes, en croissant d'abord avec ces distances, mais pour décroître bientôt en sorte qu'elles n'ont plus qu'une intensité relativement insensible dès que les distances deviennent perceptibles.

§ 4. *Premières conséquences. Élasticité.* — Il en résulte immédiatement que les molécules d'un corps solide se maintiennent naturellement les unes relativement aux autres dans un état d'équilibre stable; que lorsqu'une action extérieure les en dérange très-peu, le changement des distances fait naître des actions nouvelles qui s'opposent plus ou moins énergiquement à la continuation des déplacements commencés, et qui font revenir les molécules à leurs premières positions relatives lorsque la force extérieure a cessé d'agir; ce qui constitue le ressort ou l'*élasticité*.

§ 5. *Vibrations. Ébranlements. Effets de l'inertie.* — Lorsque le retour est prompt, il est aussitôt outre-passé en vertu des vitesses acquises, et c'est après plusieurs oscillations et l'extinction de ces vitesses par communication aux corps environnants que l'équilibre se

2. Nous considérerons, pour fixer les idées, un corps prismatique. Ce corps peut être soumis à divers efforts, parmi lesquels on distingue principalement :

1° Un effort dirigé dans le sens de la longueur du solide, de manière à le comprimer. Le solide peut céder en s'écrasant, ou bien en pliant et en se rompant, si la longueur est suffisamment grande par rapport aux dimensions de la section transversale.

2° Un effort dirigé dans le sens de la longueur du solide, de manière à l'étendre. Le corps peut céder en s'allongeant et en se rompant, par la séparation des parties dans une des sections transversales.

3° Un effort dirigé perpendiculairement à la longueur du corps. Le corps cède en pliant, de manière que les parties voisines de la face convexe sont étendues et les parties voisines de la face concave comprimées. La rupture a lieu si l'extension ou la compression est assez grande pour déterminer la séparation ou l'écrasement des parties.

rétablit. Toute action intermittente ou seulement variable engendre aussi des oscillations; tout choc ou ébranlement, en donnant de la vitesse à certains points du corps relativement à d'autres, produit des flexions ou autres déformations comme les efforts statiques ou pressions; ce qu'on exprime en mettant l'*inertie* au nombre des forces capables de déformer un système moléculaire.

§ 6. *Écrouissage. Énervation. Rupture.* — Si les écartements ou rapprochements moléculaires produits par l'action constante ou variable des forces ont été jusqu'à franchir les limites de stabilité des arrangements primitifs, le corps ne peut plus revenir de lui-même à son premier état, et les molécules prennent d'autres arrangements, *persistants* comme les premiers. Ces arrangements nouveaux sont d'abord ordinairement plus stables que les arrangements primitifs, ce qui constitue l'*écrouissage*. Mais si les efforts croissent, les arrangements deviennent moins stables, ce qui produit l'*énervation* qui est suivie finalement d'une désagrégation et d'une *rupture*. On y reviendra aux notes des n<sup>os</sup> 3, 21, 113.

## 4° Un effort qui tend à tordre le corps (\*).

## ARTICLE PREMIER.

DE LA RÉSISTANCE DES CORPS A UN EFFORT QUI TEND A PRODUIRE  
L'ÉCRASEMENT.

3. Les notions que l'on peut présenter sur cette matière consistent principalement dans l'exposition des résultats des expériences faites sur divers corps. Les résultats suivants conviennent seulement aux corps dont la longueur est trop petite, par rapport aux dimensions de la section transversale, pour qu'ils puissent céder en pliant (\*\*).

(\*) On considère aujourd'hui (voyez notes des n° 152 à 155) une cinquième sorte d'effort, qui tend à faire *glisser* les parties les unes devant les autres. Ce *glissement* est à la torsion ce que l'extension est au *plioement*; mais le glissement a quelquefois lieu sans torsion, par exemple dans le *cisaillement* d'une pièce solide sous l'action d'une force transversale s'exerçant parallèlement au plan où la séparation s'opère.

(\*\*) § 1. *Théorie de l'écrasement ou de la rupture des prismes courts par compression.*— Les recherches faites depuis 1833 permettent d'en établir une qui peut être utile dans plusieurs circonstances. En général une théorie, si elle est judicieuse, sert tout au moins à combler les lacunes des expériences, qui ne peuvent jamais embrasser tous les cas.

Celle qu'on va donner est très-simple, puisqu'elle se réduit, comme on verra, à ramener en définitive la rupture par compression longitudinale à la rupture par *extension transversale*, supposée déjà étudiée expérimentalement (note du n° 21 ci-après). Mais nous devons montrer d'abord comment cette extension est une suite nécessaire de la compression quand les faces latérales sont libres; indiquer déjà la méthode générale d'établissement des conditions de *non-rupture* ou de stabilité de la cohésion des solides, et



(Du n° 3).

anticiper un peu sur ce que nous aurons à dire plus tard de la rupture par glissement (aux notes des n° 152 à 155), afin de discuter ici une théorie de Coulomb, admise encore par quelques ingénieurs, et par laquelle il a essayé de ramener l'écrasement à ce dernier genre de rupture.

§ 2. *La compression toute seule n'est pas une cause de désagrégation.* — Lorsqu'un corps est comprimé, on ne voit pas au premier abord comment il se fait que ses parties puissent être disjointes; et, ainsi que le fait remarquer M. le capitaine du génie Michon dans une excellente *Instruction sur la résistance des matériaux*, rédigée en partie sur des notes de M. Poncelet et lithographiée en 1848 à l'école de l'Artillerie et du Génie de Metz, « le rapprochement des molécules ne peut être une cause d'instabilité, et il est bien évident que si un prisme était comprimé de toute part avec une égale force il ne se romprait jamais. »

A l'appui de cette assertion du savant officier, on peut citer les effets de la machine si remarquable de M. Blanchard, de Boston, dont un modèle a figuré à Paris, à l'exposition universelle de 1855, et qui ploie en quart de cercle d'un petit rayon des pièces de bois d'un fort équarrissage, sans rien faire perdre de leur résistance, en empêchant de s'étendre longitudinalement les fibres du côté devenant convexe, et de se séparer transversalement les fibres fortement comprimées du côté devenant concave (*Moniteur* du 13 juin 1855, et rapport de M. Mangon aux *Annales des ponts et chaussées*, novembre et décembre 1856, p. 388).

Aussi, dès le commencement du siècle dernier, Muschenbroek avançait qu'un pilier serait capable de supporter tous les fardeaux s'il ne se courbait pas <sup>(1)</sup>.

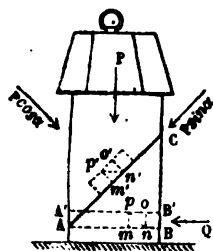
§ 3. *Essai de théorie de Coulomb.* — Coulomb a combattu cette assertion de Muschenbroek dans ce qu'elle avait d'absolu <sup>(2)</sup>, et tenté d'expliquer l'écrasement des massifs de maçonnerie (ci-après, 2<sup>e</sup> section, n° 197) et aussi celui des prismes solides trop

<sup>(1)</sup> *Essai de physique*, § 685, page 358 de la traduction française de Massuet.

<sup>(2)</sup> *Essai sur l'application des règles de maxims et minims à quelques problèmes relatifs à l'architecture*. Savants étrangers, 1773, volume publié en 1776.

(Du n° 3).

courts pour fléchir, en disant que leur partie supérieure peut glisser obliquement sur leur partie inférieure, ce qui est ramener la résistance à l'écrasement à cette résistance à la rupture par glissement transversal dont nous nous occuperons particulièrement plus loin (notes des n° 152 à 155). Soit, par unité superficielle,  $T$  la grandeur de cette dernière résistance supposée déjà connue par des expériences spéciales et s'exerçant ici parallèlement à une face de séparation  $AC$ ; et soit  $\alpha$  l'angle inconnu de cette face avec la base ou la section droite  $AB = \omega$  du prisme dont la tête est chargée d'un poids  $P$ . Comme



l'aire de  $AC$  est  $\frac{\omega}{\cos \alpha}$ , et comme la composante de  $P$  suivant cette face inclinée est  $P \sin \alpha$ , Coulomb pose, pour l'instant de la rupture, l'équation  $P \sin \alpha = T \frac{\omega}{\cos \alpha}$ , d'où

$P = \frac{2T\omega}{\sin 2\alpha}$ , expression dont le minimum, répondant à  $\alpha$  demi-droit, est  $P = 2T\omega$ . D'où

l'illustre physicien-ingénieur concluait qu'une pression longitudinale  $P$  disjoindrait le prisme par glissement oblique si elle était seulement double de la force  $Q = T\omega$  capable de le disjoindre suivant  $BA$  par glissement perpendiculaire à ses arêtes, ou de la force capable de le rompre par extension, car quelques expériences lui faisaient juger ces deux dernières forces à peu près égales. Et l'on aurait, aujourd'hui, seulement 1<sup>fois</sup>,6 au lieu de 2 fois la force  $R\omega$  rompant par extension en mettant pour  $T$ , dans  $P = 2T\omega$ , la valeur comparative plus approchée 0,8R qui lui sera assignée aux notes des n° 152 à 155.

A l'appui de cette théorie ingénieuse on a cité quelquefois diverses expériences où des prismes soit de pierre, soit de fonte de fer, d'une hauteur comprise entre 1 et 3 fois la largeur, se sont partagés par la compression en pyramides ou en coins qui s'écartaient mutuellement en glissant l'un contre l'autre.

Mais les résultats qu'elle fournit sont beaucoup trop faibles, car les expériences sur l'écrasement de la fonte, par exemple, ont

(Du n° 3).

donné de 4 à 9 fois la force  $R\omega$  qui rompt par extension, et non pas 1<sup>fois</sup>, 6.

On peut aujourd'hui reconnaître en quoi elle pêche, et en substituer une autre à la fois plus simple et plus proche des faits.

§ 4. *Cause générale assignable aux ruptures ou aux éneruations. Dilatations, et limites à leur imposer.* — Disons d'abord ici, en général, que lorsque des forces appliquées à un corps et y produisant de petits écartements moléculaires viennent à le rompre, ou seulement à énerver sa contexture de manière à préparer une rupture prochaine ou éloignée, c'est (dernière note du n° 1) parce que les dilatations ou les rapports des écartements aux distances primitives entre molécules sont arrivés à excéder, dans un sens ou dans un autre, un certain taux qui est relatif au mode de contexture du corps dans ce sens (voyez le § 8 ci-après et le § 16 de la note du n° 113). C'est ce que l'on conçoit de suite lorsque les forces agissent par traction longitudinale sur un prisme ou un fil solide. On peut le concevoir encore facilement lorsqu'une force  $Q$  agit transversalement très-près d'une de ses sections droites, telle que  $BA$  (même figure), pour faire glisser devant elle une section  $B'A'$  très-voisine; car cette force change en losanges les petits carrés  $mnp$  ayant leurs côtés parallèles et perpendiculaires à sa direction, ce qui dilate nécessairement les diagonales  $np$ ; et c'est à ces dilatations à 45 degrés qu'on doit attribuer la rupture par glissement sur  $BA$  lorsqu'elles viennent à excéder une certaine proportion, ou lorsque la force  $Q$  qui les produit vient à dépasser la valeur  $T \times \omega$  pour laquelle cette proportion des dilatations obliques est atteinte.

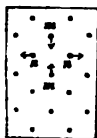
§ 5. *Effets contraires des deux composantes obliques du poids comprimant, et nécessité de renoncer au raisonnement du § 3.* — D'après cela, si la composante  $P \sin \alpha$  du poids supérieur  $P$  existait seule, et agissait directement contre la face  $AC$  de rupture hypothétique, on comprend qu'il faudrait l'égaliser, avec Coulomb, au produit  $T \times AC = T \frac{\omega}{\cos \alpha}$  pour exprimer la condition de juste résistance à la rupture par glissement le long de cette face; cela reviendrait à imposer aux dilatations des diagonales  $n'p'$  de petits carrés

(Du n° 3).

$m'n'o'p'$ , produites par un commencement de glissement, de ne pas dépasser la limite reconnue dangereuse. Mais il y a, en outre, une composante  $P \cos \alpha$  perpendiculaire à AC, dont Coulomb ne tient pas compte; son action diminue (si même elle ne l'annule) la dilatation des petites lignes  $n'p'$ , due à la composante  $P \sin \alpha$ . On conclut donc que le poids comprimant P ait besoin d'être beaucoup plus fort, pour amener une disjonction, que s'il était réduit à une de ses deux composantes comme dans le raisonnement du § 3.

Il convient donc d'abandonner la considération des glissements obliques, et d'imposer directement une limite aux dilatations qui peuvent accompagner la compression exercée par la force P tendant à écraser le prisme.

§ 6. *Dilatations ou contractions transversales qui accompagnent les contractions ou dilatations longitudinales des prismes lorsque leurs faces latérales sont libres.* — Ces effets trans-



saux résultent nécessairement du jeu des actions moléculaires répulsives et attractives, fonctions des distances, dont il a été parlé au n° 1 et à sa dernière note; car tout rapprochement de deux molécules  $m, m$ , situées sur une même parallèle aux arêtes du prisme, tend à écarter l'une de l'autre deux molécules telles que  $n, n$ , situées sur une même perpendiculaire, puisque, comme les distances de celles  $m$  à celles  $n$  diminuent, elles les repoussent plus ou les attirent moins ensuite qu'elles ne faisaient avant. Et si toutes se rapprochent longitudinalement, toutes aussi s'écarteront transversalement, en supposant que les faces latérales du prisme soient libres ou que rien ne les contienne ou ne les comprime elles-mêmes.

Il y a donc une *dilatation transversale* par suite de la *contraction longitudinale*, dont elle est une certaine fraction; fraction que nous supposerons moyennement égale à

$$\frac{1}{4},$$

comme nous dirons au § 5 de la note du n° 21. De même toute dilatation longitudinale très-petite produira une contraction transversale, aussi d'un quart pour le même prisme.

(Du n° 8).

§ 7. *Condition théorique de la résistance à la rupture par compression, en supposant connue la résistance à la rupture par extension.* — Un prisme courra ainsi le danger de rompre par compression longitudinale lorsque sa contraction, ou le quotient, par sa longueur, de son accourcissement *supposé uniformément réparti d'un bout à l'autre* (voyez à cet égard la démonstration du § 3 de la note du n° 21), sera arrivé au quadruple de la dilatation reconnue dangereuse, ou sous laquelle il romprait par extension s'il est de même contexture longitudinalement et transversalement.

Donc, si les contractions et les dilatations ont un même rapport constant avec les charges qui les déterminent (même paragraphe de la note du n° 21), on voit qu'un *prisme d'égale contexture en tous sens, et dont les faces latérales sont libres, rompra par compression longitudinale*, ou éprouvera ce commencement de désagrégation qui amène la séparation et l'écrasement, *sous une charge quatre fois plus grande que celle qui le romprait par extension.*

§ 8. *Modifications à y apporter. Diminution des dilatations latérales par suite de ce que les bases pressées ne peuvent s'étendre. Influence possible de la dilatation ou contraction cubique ou de volume. Corps fibreux.* — Cette théorie fort simple, due à M. Michon, est ce qui a été proposé de plus satisfaisant sur la résistance à l'écrasement.

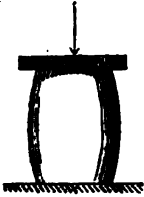
Un grand nombre d'expériences y sont favorables, car (voyez, après le n° 168, le complément de l'article I) les pierres *dures* et compactes se divisent en lames ou aiguilles verticales avant de se réduire en poussière par la compression; les fibres longitudinales des bois se désunissent, et les pièces de fonte très-courtes se gercent sur les bords de manière à prendre en s'aplatissant la forme d'une rosette; faits annonçant bien des séparations transversales, qui se manifestent aussi dans les pièces de fonte *fléchies*, puisqu'il s'en détache latéralement, comme on verra (complément de l'art. IV) une sorte de coin du côté concave qui est comprimé longitudinalement.

Les forces qui écrasent la fonte de fer et les mortiers ont été trouvées, il est vrai, moyennement 6 fois et demie et 8 ou 10 fois (au

(Du n° 3).

lieu de 4 fois) les forces qui produisent la rupture par extension.

Mais, outre que la constance du rapport entre la dilatation latérale et la contraction longitudinale ne subsiste, ainsi que la proportionnalité des accroissements ou allongements aux efforts, que pour des tractions ou pressions beaucoup au-dessous de celles qui font rompre (voyez § 8 de la note du n° 21 et § 3 de la note du n° 113), il faut remarquer, avec M. Michon, que lorsque le prisme est court et comprimé par l'intermédiaire de deux faces planes solides qui débordent ordinairement ses bases, le frottement empêche



celles-ci de s'étendre, et, suivant l'observation déjà faite par M. Poncelet <sup>(1)</sup>, cet empêchement diminue de proche en proche l'extension latérale du reste du prisme; en sorte que, malgré le bombement pris au milieu, la plus grande dilatation transversale ne saurait atteindre la même proportion que dans les prismes longs. Il y a lieu de penser même, avec M. Vicat <sup>(2)</sup>, que la résistance d'une plaque mince à la rupture par compression, sous l'action d'une force bien également répartie sur sa surface, et sans porte-à-faux, serait bien plus grande encore, et en quelque sorte indéfinie; comme on voit par les grandes masses schisteuses.

Il est possible aussi que la limite à imposer aux dilatations longitudinales soit un peu plus petite que celle dans laquelle il faut renfermer les dilatations transversales, parce que les premières sont accompagnées d'une dilatation du volume ou d'une diminution de la densité, tandis que les secondes le sont d'une contraction de volume ou d'une augmentation de densité : on rapporte à même, au § 16 de la note du n° 113, une expérience remarquable où un cylindre creux de fonte a subi à l'intérieur, sans se désagréger, une dilatation considérable dans le sens de circonférence, moyennant une forte compression éprouvée simultanément dans le sens du rayon.

<sup>(1)</sup> *Introduction à la Mécanique industrielle, physique ou expérimentale*, 1839, n° 240.

<sup>(2)</sup> *Recherches sur les phénomènes physiques qui précèdent et accompagnent la rupture ou l'affaissement d'une certaine classe de solides*. Annales des ponts et chaussées, 1833, 2<sup>e</sup> semestre, p. 201.

(Du n° 3).

D'un autre côté, dans les corps fibreux, tels que les bois, et généralement dans les corps dont la matière n'est pas d'égale texture en tous sens, le rapport entre les dilatations transversales et les compressions longitudinales dont elles proviennent peut différer sensiblement de  $1/4$ , sans toutefois excéder jamais  $1/2$  (voyez § 5 de la note du n° 21). De plus, le taux de la dilatation dangereuse ou susceptible d'amener une désagrégation peut être considérablement moindre dans un sens transversal ou perpendiculaire aux fibres que dans le sens des fibres ou de leur longueur. Il n'est donc pas étonnant que la résistance des bois à l'écrasement, ou à la disjonction latérale des fibres qui ensuite *fléchissent en détail*, soit souvent moindre que leur résistance à la rupture par extension, au lieu de surpasser celle-ci.

§ 9. *Observation des constructions éprouvées. Expériences directes d'écrasement pour établir des comparaisons. Distinction de la rupture immédiate ou prochaine et de la rupture éloignée. Usage de la théorie, au moins dans les règles de prudence qu'elle conseille.* — Aussi, pour déterminer la résistance des *prismes courts* (voyez 4<sup>e</sup> section, n° 383 à 414, pour la compression des autres) de matières quelconques à la rupture immédiate ou prochaine produite par une compression longitudinale, il est généralement préférable de partir d'expériences directes d'écrasement (voyez complément de l'article I) sur des échantillons de même matière ou de matières analogues, et aussi d'une forme à peu près pareille; car on verra que c'est seulement pour des solides semblables que les résistances à l'écrasement immédiat sont proportionnelles aux sections transversales.

Et, pour assigner leur résistance à une action indéfiniment prolongée d'une force comprimante  $P$  qui ne devra jamais aller jusqu'à *énerv* la matière (3<sup>e</sup> note du n° 1), et qui pour cela restera assez petite pour ne pas cesser d'être sensiblement proportionnelle aux contractions, ainsi qu'aux superficies  $\omega$  des bases, quelle que soit leur forme (démonstration du § 3 de la note du n° 21), il faudra prendre

$$P = \text{ou} < R'_{\omega},$$

## 4 à 20 (\*).

R'. étant un coefficient tiré, pour quelques matières, de l'observation de constructions déjà anciennes, unissant la hardiesse à la solidité (voyez article VII, et déjà les notes des n<sup>os</sup> 21 et 113), en se servant des expériences d'écrasement immédiat, seulement pour établir des comparaisons d'autres matières avec celles-ci (voyez *idem*).

La théorie que nous venons de présenter, et qui déduit la résistance *permanente* à la compression des prismes courts de la résistance aussi permanente à l'extension, n'en est pas moins utile, non-seulement comme explication simple des faits, mais aussi comme fournissant, pour la pratique, une limite en deçà de laquelle il convient de se tenir, quand bien même des expériences d'écrasement auraient été faites et sembleraient indiquer d'aller au delà. En effet, comme nous venons de dire, ce n'est pas une rupture immédiate ou prochaine qu'il s'agit de prévenir en réglant les dimensions des solides à employer dans les constructions, c'est leur *rupture éloignée*, déterminée par une charge indéfiniment supportée et quelquefois intermittente, à laquelle viennent se joindre des vibrations et diverses autres causes de désagrégation (voyez § 12 de la note n<sup>o</sup> 21 et § 10 de la note du n<sup>o</sup> 113). Or, pour cela, la prudence ne prescrit pas moins d'imposer une limite fort resserrée aux dilatations latérales provenant de la compression qu'aux dilatations longitudinales provenant de l'extension, et il y aurait inconséquence à modérer les unes sans songer aux autres. Cette observation trouvera son application, surtout (note du n<sup>o</sup> 120) pour la flexion des pièces de fonte dites en T simple ou double, qui se dilatent d'un côté et se contractent de l'autre.

(\*) On renvoie plus loin ces numéros de 4 à 20, contenant des résultats d'expériences auxquels on joindra ceux, fort nombreux, qui ont été obtenus depuis 1833, tant pour la rupture par écrasement que pour les petites *compressions sans rupture* (voyez, après le n<sup>o</sup> 168, le complément des articles I à VI).

De cette manière, la suite des raisonnements de la *partie théorique*, dont nous nous occupons ici, ne sera pas interrompue, et



## ARTICLE II.

DE LA RÉSISTANCE DES CORPS A UN EFFORT DIRIGÉ DANS LE SENS DE LA LONGUEUR, QUI TEND A PRODUIRE L'EXTENSION ET LA RUPTURE.

**21.** En considérant un corps tiré dans le sens de la longueur, on peut se demander de connaître deux choses : 1° la quantité dont ce corps s'allongera pour un effort donné ; 2° l'effort nécessaire pour séparer les parties et opérer la rupture. Il existe peu d'expériences directes, faites dans la vue de déterminer la quantité dont un corps s'allonge sous un effort donné ; mais, comme on le verra dans la suite, cette détermination peut être conclue des expériences faites sur la flexion. La résistance à la rupture des corps tirés dans le sens de la longueur est l'objet dont on s'est le plus occupé, et le seul dont il s'agira dans cet article. Les notions que nous présenterons sur ce sujet se bornent encore ici à l'exposition des résultats obtenus par l'expérience<sup>(\*)</sup>.

---

les tableaux d'expériences propres à fixer les valeurs numériques des coefficients des formules seront présentés immédiatement avant l'article VII, où Navier propose les nombres à adopter pour ces coefficients, et les règles pratiques qui en découlent.

(\*) § 1. *Résultats généraux des expériences.* — Elles ont appris que les efforts capables de rompre les prismes par traction sont sensiblement proportionnels aux superficies de leurs sections transversales pour même matière.

Elles ont aussi montré (car il en a été fait beaucoup depuis 1833, sur les allongements ou accourcissements sans rupture) que les dilatations extrêmement faibles, ou les allongements très-petits par unité de longueur des prismes, sont constants d'un bout à l'autre et proportionnels aux forces de traction par unité superficielle des sections ; qu'une même force, appliquée successivement comme traction et comme pression, produit le même changement de longueur, pourvu toujours qu'il soit fort petit ; enfin que toute dila-

(Du n° 21).

tation longitudinale est accompagnée de contractions latérales d'une proportion moindre, ce qui est analogue à ce que nous avons vu pour les contractions longitudinales au § 6 de la note du n° 3.

Pour nous préparer surtout à reconnaître rationnellement une loi analogue dans un cas plus composé (celui de la flexion), et à préciser la condition sous laquelle elle est tout à fait exacte, nous allons montrer comment on peut déduire théoriquement celle-ci du seul principe (dernière note du n° 1) des actions attractives et répulsives *continues* des distances entre molécules très-proches.

§ 2. *Proportionnalité des efforts aux effets très-petits, obtenus également dans deux sens opposés. Théorème de superposition ou de composition géométrique correspondante des forces et des petits déplacements qu'elles engendrent.*—Considérons pour cela qu'il résulte d'abord, de cette *continuité* des fonctions, que lorsqu'on augmente très-peu les distances, les molécules exercent les unes sur les autres, en sus de leurs actions primitives se faisant équilibre sur chacune, des actions nouvelles *proportionnelles à ces petites augmentations*, et que d'égales diminutions des distances développent des actions égales, mais de sens opposé. Comme les forces extérieures, dont l'application a modifié les distances, font équilibre aux résultantes des actions intérieures ainsi développées, il est facile de conclure immédiatement :

1° Que les dilatations, flexions, torsions très-petites, par lesquelles se manifestent les changements des distances, sont proportionnelles aux forces extérieures qui les amènent ;

2° Que des forces extérieures qui ne diffèrent que par le sens de l'action amènent des modifications égales et opposées, comme par exemple des contractions au lieu de dilatations de même grandeur ;

3° Que si des déplacements très-petits sont *résultants* géométriques de plusieurs autres, ou ont, sur les lignes de jonction des molécules, des projections sommes algébriques des projections de ceux-ci, ils développent des actions intérieures dont chacune est aussi somme algébrique de celles que développeraient les déplacements composants, puisque ces projections donnent les petits chan-

(Du n° 21).

gements de longueur dont dépendent les actions développées. Par suite, réciproquement, *les petits déplacements dus à diverses forces extérieures se superposent, ou se composent géométriquement ensemble lorsque ces forces s'exercent simultanément sur un corps.*

§ 3. *Démonstration de la proportionnalité des forces de traction longitudinale aux superficies des bases des prismes ainsi qu'aux dilatations, et de l'égalité de celles-ci dans toute l'étendue du prisme quand les forces sont appliquées et également réparties sur les bases. Contractions transversales aussi égales partout dans chaque sens.*—Soit maintenant un corps prismatique. Partageons-le en fibres très-minces et égales par deux systèmes de plans orthogonaux parallèles à ses arêtes, puis ces fibres en éléments parallépipèdes par des plans transversaux équidistants. Si l'on étend tous ces



éléments dans le sens longitudinal AB, les molécules  $m, m$  de chacun d'eux s'éloigneront de celles  $m', m'$  des éléments qui les touchent par leurs bases, ce qui, en augmentant les attractions et diminuant les répulsions, engendrera des actions attractives totales d'un élément sur l'autre à travers ces bases. Les molécules  $m, m$  s'éloigneront aussi, *mais moins*, de celles  $n, n$  des éléments latéralement contigus, ce qui développera à travers les faces latérales des actions résultantes aussi attractives, mais moindres. D'où il suit immédiatement que pour que les éléments dilatés longitudinalement n'exercent transversalement l'un sur l'autre aucune action, *il faut que leurs dimensions transversales se contractent, mais moins que leur longueur n'a été dilatée.*

Ceci établi, supposons que tous les éléments aient éprouvé ainsi la même déformation ou les mêmes altérations de dimensions, dans des proportions telles que leurs actions les unes sur les autres soient nulles à travers leurs faces latérales, tandis qu'à travers leurs bases les actions mutuelles résultantes, dirigées longitudinalement, soient mesurées par les superficies très-petites de ces bases multipliées par une constante  $p$ . L'ensemble sera en équilibre si, les faces latérales du prisme n'éprouvant aucune action extérieure, ses deux bases extrêmes sont soumises à des tractions

(Du n° 21).

opposées  $p\omega$ , également réparties sur les divers éléments de leurs superficies  $\omega$ .

Or un système de points matériels ne peut se comporter que d'une seule manière sous l'action de forces qu'on y applique; et le problème de ses petits déplacements est tout à fait déterminé lorsque ces forces sont données. Donc, réciproquement, *tout prisme homogène dont les faces latérales sont libres et dont les bases sont tirées, en sens opposé, par des forces normales, égales et également réparties sur leurs superficies, éprouvera, dans toutes ses fibres et dans toutes les parties de chacune d'elles, des dilatations égales, et en même temps des contractions transversales moindres et dans un rapport déterminé avec les dilatations longitudinales. Et ces dilatations seront proportionnelles aux forces par unité des bases, même lorsqu'elles changeront de signe et deviendront des contractions, sous l'action de forces pressant les bases au lieu de les tirer.*

§ 4. *Expression de cette loi.* — Il en résulte que si :

$\omega$  est l'aire de la section ou base de prisme ;

L sa longueur ;

$l$  l'augmentation positive ou négative que cette longueur a subie ;

$i = \frac{l}{L}$  l'allongement proportionnel supposé très-petit, que nous

avons aussi appelé la *dilatation* positive ou négative ( $-i$  étant ce qu'on appelle aussi la *contraction*) ;

P la force qui aura produit l'extension  $l$  (ou la compression  $-l$ ), et qui est supposée appliquée longitudinalement et uniformément répartie sur chacune des deux bases ;

E,  $\eta$ ,  $\eta'$  des coefficients qui dépendent de la matière du prisme et de sa texture en divers sens ;

L'allongement  $l$  sera proportionnel à la longueur L et à l'effort  $\frac{P}{\omega}$  par unité superficielle de la section  $\omega$ , ce qui s'exprime par l'égalité

$$P = E\omega \frac{l}{L} = E\omega i, \quad \text{d'où} \quad i = \frac{P}{E\omega}.$$

Et les contractions latérales, aussi positives ou négatives, pourront être représentées, dans deux sens transversaux rectangulaires, par

(Du n° 31).

$$\eta, \eta' \text{ ou } \eta \frac{P}{E\omega}, \quad \eta' \frac{P}{E\omega}.$$

§ 5. *Coefficient ou module d'élasticité E. Rapports  $\eta, \eta'$  des contractions latérales aux dilatations longitudinales.*—La constante E, rapport de l'effort  $\frac{P}{\omega}$  exercé sur l'unité de surface des bases du prisme, à l'allongement ou raccourcissement  $i = \frac{l}{L}$  par unité de longueur, est ce qu'on appelle le *Coefficient ou Module d'élasticité d'extension* de la matière du prisme, pour la direction où elle se trouve sollicitée (1). On en verra, au n° 77, une autre définition qui y est équivalente. Son unité est le quotient d'une force (soit le kilogramme) par une surface (soit le mètre carré, et quelquefois le centimètre ou le millimètre carré).

Quant aux deux constantes  $\eta, \eta'$ , qui sont des fractions purement numériques, elles sont égales entre elles quand la texture de la matière est la même dans tous les sens *transversaux*, comme il arrive ordinairement, par exemple, dans les barres métalliques rondes. Nous donnerons aux notes des n° 152 et 153 les considérations théoriques qui ont porté à adopter

$$\eta = 1/3$$

quand cette texture est égale dans tous les sens, même le sens longitudinal ou les sens obliques. Des expériences de M. Wertheim ont donné à peu près 1/3, mais pour des tiges de métal qui pouvaient ne pas remplir tout à fait cette condition d'égalité. En tous cas, et quelle que soit la texture, ces coefficients  $\eta, \eta'$  ne sauraient atteindre 1/2; on peut remarquer déjà ici que le volume

(1) Thomas Young, qui a, le premier, considéré le module d'élasticité (*A course of Lectures on natural Philosophy and the Mechanical arts*, London, 1807, vol. I, p. 437, et vol. II, p. 46, art. 349), le définit: « Une colonne ayant un poids qui soit au poids capable de donner une certaine compression à un prisme de même matière et de même base (prise pour unité) comme la longueur de ce dernier prisme est à la diminution de sa longueur. »

La hauteur du module revient évidemment, d'après cela, au quotient de notre coefficient E par le poids de l'unité de volume de la matière; quotient qui varie bien moins que le nombre E, car celui-ci, pour diverses variétés d'une même matière, augmente avec la densité.

(Du n° 21).

ancien est au volume nouveau du prisme dilaté longitudinalement dans la proportion  $i$ , comme 1 est à  $(1 + i)(1 - \eta)(1 - \eta') = 1 + (1 - \eta - \eta')i$  à peu près, en sorte que si l'on avait  $\eta$  et  $\eta'$  supérieurs à  $1/2$ , une traction longitudinale diminuerait le volume, ce qui n'est pas supposable.

§ 6. *Conditions de la parfaite exactitude de la formule de l'extension. Observations sur le mode d'application et de répartition des actions longitudinales exercées.* — La démonstration précédente

(§ 3) de la formule fondamentale  $i = \frac{P}{E\omega}$  de l'extension des prismes

exige que les forces  $P$  s'exercent sur leurs bases même, qu'elles y soient également réparties et qu'elles y agissent normalement partout. *C'est qu'en effet elle n'est tout à fait exacte qu'à ces conditions.* L'analyse n'a encore pu déterminer jusqu'à quel degré la formule est approchée lorsqu'elles ne sont pas remplies.

Mais des faits nombreux prouvent que la manière dont des forces sont appliquées et distribuées à chaque extrémité de prismes d'une certaine longueur n'influe que dans une étendue fort petite sur leur extension, ou sur leur flexion ou leur torsion, qui ne dépendent, ainsi, dans tout le reste des solides, que des résultantes et des moments résultants de ces mêmes forces. Des expériences spéciales prouvent même que les forces qui sont en équilibre sur de petites portions des corps, et dont l'addition peut ramener les uns aux autres les systèmes ayant même résultante et même moment, ne produisent pas d'impressions sensibles au delà de ces petites portions. Les formules ci-dessus peuvent donc servir avec toute l'approximation désirable pour la pratique, quel que soit le mode d'application et de distribution des forces de traction, par exemple lorsqu'elles agissent, comme à l'ordinaire, latéralement auprès des extrémités, pourvu que leur résultante soit parallèle aux arêtes et passe bien par le centre de gravité de chaque base; car, autrement, il y aurait un couple et une petite flexion qu'on apprendra à calculer à la section IV, n° 409.

Cette démonstration s'étend, au reste, au cas où la matière homogène du prisme offrirait, en chaque point, une contexture non

(Du n° 21).

symétrique par rapport aux plans de sa division en éléments rectangles (comme lorsqu'elle a, par exemple, des clivages obliques aux arêtes), car on pourra toujours, en supposant leurs angles légèrement altérés en même temps que leurs dimensions, faire en sorte que les faces latérales ne supportent rien et que les bases soient sollicitées longitudinalement ou parallèlement aux arêtes de ces parallélépipèdes devenus légèrement obliquangles.

§ 7. *Cas où la matière n'est pas de même nature dans l'étendue d'une même section. Conditions pour que les formules s'y appliquent en faisant simplement varier E.* — Quand la matière du prisme varie de nature d'une fibre à l'autre, M. l'ingénieur Bresse, professeur à l'École des ponts et chaussées, pose <sup>(1)</sup>, au lieu de  $P = i E \omega$ , une équation

$$P = i f E d \omega,$$

l'intégrale étant prise pour tous les éléments  $d\omega$  de la section  $\omega$ . La démonstration précédente peut facilement s'étendre à ce cas; mais les  $E$  ne peuvent représenter, dans cette équation, les coefficients d'élasticité d'extension (§ 5) des diverses fibres supposées extraites de la masse et étendues séparément, qu'autant que les fractions que nous avons appelées  $\eta$  et  $\eta'$  soient les mêmes pour toutes; car si ces fibres, isolées et dilatées toutes également, se contractent inégalement dans le sens latéral, elles ne peuvent pas rester contiguës. Il faut aussi, pour que l'équation  $P = i f E d \omega$  ait lieu exactement, que les tractions  $P$  soient distribuées sur les éléments  $d\omega$  des bases, non pas également, mais proportionnellement aux nombres  $E$  relatifs à chacun.

Il résulte des expériences de la commission anglaise d'enquête sur l'emploi du fer et de la fonte <sup>(2)</sup>, et aussi des observations et essais faits en France par MM. les ingénieurs Collet-Meygret et Des-

<sup>(1)</sup> *Recherches analytiques sur la flexion et la résistance des pièces courbes*, 1854, chap. L.

<sup>(2)</sup> *Report of the Commissioners appointed to inquire into the application of iron to Railway structures*. London, 1849. Une traduction française du *Rapport*, faite par M. l'inspecteur général Busche, sans les Appendices qui contiennent le détail des expériences (voyez ci-après le *Complément* des articles I à VI), a paru aux *Annales des ponts et chaussées*, 1851, 4<sup>or</sup> semestre, p. 193.

(Du n° 21).

places (1) que, pour les métaux coulés ou laminés, c'est tout auprès des faces latérales que la contecture varie d'une manière notable (2). Il convient donc, pour ces sortes de matériaux, de réduire l'équation précédente à :

$$P = i (E_0 \omega + e \chi)$$

$\chi$  étant le périmètre de la section supposée diminuée d'un à deux millimètres tout autour, afin de représenter le développement moyen de la croûte douée généralement de plus de roideur et de nerf que le reste; et  $E_0$  et  $e$  étant deux coefficients à déterminer par les méthodes connues de compensations d'anomalies (voyez ci-après § 7 de la note du n° 80 et § 15 de la note 113) en faisant des expériences d'extension sur des barres ayant des grosseurs ou des formes sensiblement différentes. Cette formule pourra évaluer utilement l'effet des tractions de barres ayant des formes ou des dimensions intermédiaires.

§ 8. *Dilatations qui ne sont pas très-petites. Déformations permanentes. L'élasticité subsiste malgré ces déformations.* — Lorsque les dilatations  $i$  dépassent une certaine proportion généralement fort petite, les considérations théoriques précédentes cessent de s'appliquer exactement; car ces dilatations ne sont plus proportionnelles aux efforts. Elles croissent en général dans un rapport plus grand que ceux-ci (voy. les expériences au Complément des art. I à VI), parce qu'ordinairement les molécules prennent entre elles de nouveaux arrangements stables (fin de la dernière note du n° 1). En sorte que les dilatations ont, avec la partie élastique ou temporaire, une partie persistante ou permanente, qui croît bien plus rapidement que la charge.

(1) Rapport sur les épreuves du viaduc de Tarascon, aux Annales des ponts et chaussées, 1854, 4<sup>or</sup> semestre, pages 329 et 340-344.

(2) Cela se déduit également de diverses expériences antérieures de M. Eaton Hodgkinson sur les résistances comparées de barres de fonte de diverses grosseurs, nonobstant le résultat non confirmatif qu'a donné une expérience spéciale, mais unique (voyez pages 75-76 de la traduction libre, faite par M. l'ingénieur Pirel, et insérée aux Annales des ponts et chaussées, 1855, 4<sup>or</sup> semestre, des Recherches expérimentales sur la résistance et les autres propriétés de la fonte de fer, par M. Hodgkinson, 1846).



(Du n° 21).

M. Tredgold et d'autres auteurs disent que le corps a éprouvé alors une *perte d'élasticité*, ou que cette propriété a été amoindrie, *altérée*, en partie détruite. Il est bien vrai que le corps ne reprend pas tout à fait la même force de ressort en repassant par les mêmes longueurs (1). Mais, malgré cela, il est de fait que *son élasticité subsiste entière*; il y a eu seulement *changement du point à partir duquel ses effets doivent être comptés*, et, en même temps, augmentation légère de son coefficient E; car le corps revient à sa nouvelle forme lorsque d'autres efforts l'en ont dérangé dans certaines limites. M. de Gertsner a même observé sur des fils de fer que, dans ces limites, il y a proportionnalité des effets aux efforts; ce qui a été reconnu aussi pour l'allongement des tringles de bois (2). Déjà Coulomb l'avait remarqué pour la torsion des fils métalliques et la flexion des lames (3). Nous dirons donc simplement qu'alors *la contexture a été modifiée*.

§ 9. *Caractères de l'écroutissage et de l'énerivation. Cause présumable de celle-ci. Rupture finale par traction ou extension.* — Lorsque les allongements cessent de s'accroître sous l'action continue et prolongée de la même charge, en sorte qu'il faille ensuite des efforts plus considérables pour produire, *dans le même sens*, des modifications permanentes nouvelles, le nouvel état moléculaire doit être regardé comme plus stable que le premier, et l'on peut dire d'après ce qu'on a vu à la fin de la note du n° 1) que le corps a été *écroui dans ce sens*. Mais lorsque les allongements continuent de s'opérer, même sous une charge moindre, l'état est devenu moins stable, et le corps a été *énervé* ou sa cohésion a diminué.

L'énerivation tient, probablement, à une désagrégation partielle et latente, ou à une multitude de disjonctions intérieures et non apparentes qui ouvrent des pores et diminuent la superficie de la section résistante réelle.

(1) M. Poncelet, *Introduction à la Mécanique industrielle*, art. 47, p. 43.

(2) Mémoire de MM. Chevandier et Wertheim *Sur les propriétés mécaniques des bois* (4<sup>e</sup> partie, p. 43). Ces habiles expérimentateurs citent (1<sup>re</sup> partie, p. 44-42) des travaux de MM. Pacinotti et Peri, qui ont donné la même loi de proportionnalité en défalquant les parties permanentes des allongements (*Ann. de chimie et de physique*, 1848).

(3) *Mémoires de l'Académie des sciences*, 1784, p. 229.

(Du n° 31).

Si, lorsqu'elle est commencée, les mêmes forces extérieures continuent d'agir, elles finiront par amener une rupture apparente et totale, qui est précédée de déformations permanentes, tantôt considérables comme dans les corps très-ductibles, tantôt à peine sensibles (mais jamais nulles) comme dans les corps rigides et aigres.

§ 10. *Les déformations persistantes n'accompagnent pas toujours les déformations élastiques ou temporaires.* — A l'opinion abandonnée que toute déformation permanente dénote une énervation et équivaut à un commencement de rupture <sup>(1)</sup> a succédé depuis peu une opinion tout opposée <sup>(2)</sup>, consistant à penser que toute dilatation ou contraction, quelque petite qu'elle soit, a une partie persistante. Je suppose un instant (quoique rien ne le prouve) que cela soit vrai de tous les corps dans l'état où ils se trouvent naturellement après leur solidification ; toujours est-il que ces effets permanents de petits efforts extérieurs n'ont plus lieu lorsqu'on en a exercé pendant quelque temps dans le même sens, ou, si l'on veut, lorsque la matière a été écroulée dans ce sens. M. Poncelet cite judicieusement à l'appui, avec quelques expériences spéciales, l'exemple des constructions anciennes qui supportent une même charge depuis des siècles et qui restent cependant dans le même état <sup>(3)</sup> ; à quoi l'on pourrait ajouter l'exemple non moins évident des roches et autres masses minérales grandes ou petites, qui finiraient par s'affaisser sous leur propre poids, et par prendre un même niveau comme un fluide, indépendamment de toute dégradation de leur surface, si l'action continuée de toute force devait changer indéfiniment l'arrangement intérieur de leurs parties.

§ 11. *Le calcul théorique est toujours applicable pour limiter*

<sup>(1)</sup> Young ne dirait probablement plus aujourd'hui « une altération permanente de forme limite la force des matériaux, en ce qui a rapport à leur emploi dans la pratique, presque autant que la fracture, puisque la force qui est capable de produire cet effet est en général suffisante, avec une légère addition, pour l'accroître jusqu'au point où la fracture arrivera. » (*Lectures of natural Philosophy*, London, 1807, vol. I, *On passive Strength*, p. 141).

<sup>(2)</sup> Surtout depuis les expériences de M. Hodgkinson sur la fonte, et les expériences de MM. Wertheim et Chevandier sur les bois (citées ci-dessus), ainsi que sur les métaux, le verre, etc. (*Ann. de chim. et de phys.*, 1843 à 1846).

<sup>(3)</sup> *Introduction à la Mécanique industrielle*, n° 251, p. 297-298.

(Du n<sup>o</sup> 21).

*Les dilatations et établir les conditions de résistance à la rupture éloignée.* — Quoiqu'il en soit, quand les déformations sont très-faibles, les parties persistantes sont négligeables devant les parties élastiques ou non persistantes, en sorte que la théorie de l'élasticité, dont ce qui précède est comme un premier chapitre, est applicable, avec toute l'approximation désirable, à la détermination des plus grandes dilatations, dans les limites que la prudence conseille d'y imposer.

Cette observation trouvera son application dans toute la suite du livre, pour l'établissement des conditions de stabilité de la cohésion, ou de résistance des matériaux à la *rupture éloignée*.

§ 12. *Condition de la résistance à la rupture par extension, immédiate ou éloignée. Expériences désirables du point qui sépare l'écroutissage de l'énervation pour diverses matières. Circonstances accidentelles auxquelles on fait une part en bloc. Double effet des vibrations ou des intermittences d'action.* — Dans le cas simple que nous considérons ici, la condition de résistance est exprimée, si l'on veut seulement prévenir la rupture immédiate ou prochaine, comme dans le cas d'une construction temporaire et bien surveillée, telle qu'un échafaudage, par (§ 1) :

$$P = \text{ou} < R\omega$$

où  $\omega$  est la section du prisme,  $P$  la traction longitudinale résultant de forces dirigées suivant l'axe ou passant par les centres de gravité des sections, comme on a dit (§ 6), et où le coefficient  $R$  sera fourni par les expériences où cette rupture aura été opérée, en se tenant un peu au-dessous.

Mais si l'on veut prévenir même la *rupture éloignée* (fin du § 9 de la note du n<sup>o</sup> 3) d'une construction destinée à durer indéfiniment, la condition sera

$$P = \text{ou} < R_0\omega, \text{ ou } P = \text{ou} < E\omega i';$$

dans laquelle le coefficient  $R_0$ , beaucoup moindre que  $R$ , ou bien la petite dilatation  $i' = \frac{R_0}{E}$ , limite de celles qui n'offrent aucun danger, même après un temps considérable, devrait se déterminer par des

(Du n° 21).

expériences d'une longue durée, faites non pas sur le point où l'élasticité est, comme on dit, altérée (§ 8 et 10), et où il y a des allongements permanents, mais sur le point où la matière cesse de s'écrourir et commence à s'énerver, ce qui se manifeste (§ 9) par la marche des allongements persistants.

Et il conviendra, même si ces expériences désirables et difficiles sont faites, de rester encore bien en deçà de leur résultat (voyez art. VII, et, déjà au § 11 de la note 113 relative à la rupture par flexion), afin de faire largement une part en bloc aux causes accidentelles de désagrégation, telles que les ébranlements non calculables, les altérations physiques et chimiques, les différences de qualité, les défauts cachés, ainsi que les porte-à-faux et autres malfaçons difficiles à prévenir.

A cet égard, il est bon d'observer que les vibrations, qui sont inévitables, ont deux effets bien distincts; l'un, pouvant jusqu'à un certain point être calculé, et susceptible d'être assimilé aux effets statiques, consiste à accroître périodiquement le degré des dilatations et compressions des solides à la fois chargés et ébranlés. L'autre effet, sur la nature duquel tous les praticiens ne sont pas d'accord, serait de changer peu à peu l'état d'agrégation et de groupement des molécules en les présentant l'une à l'autre dans des situations diverses comme ferait une fusion ou plutôt un *recuit*. C'est ainsi que des ébranlements longtemps répétés font perdre aux barres de fer, suivant la plupart des ingénieurs, leur nerf ou l'état d'enchevêtrement fibreux dû au laminage, et leur font reprendre, d'après eux, l'état cristallin où chaque petit groupe peut être plus stable, mais où l'ensemble l'est beaucoup moins.

Il suffit même de simples intermittences ou alternatives d'action pour amener des désagrégations, en produisant, sans doute, à chaque extension, des arrangements moléculaires un peu différents. Tout le monde sait que l'on rompt facilement un fil de fer en le ployant successivement plusieurs fois en des sens opposés, et, comme disent quelquefois les ouvriers, « les ressorts les plus parfaits sont susceptibles de se fatiguer à la longue <sup>(1)</sup> ». On

(1) M. Poncelet, *Introd. à la Méc. ind.*, n° 249, p. 295.



## 22 à 75 (\*).

a vu des poutres en fonte rompre par cela seul qu'un réservoir d'eau qu'elles supportaient était alternativement plein et vide (1). M. Fairbairn a été même jusqu'à avancer qu'une charge constante purement statique ne produirait à la longue aucun accroissement d'allongement ou de flexion, même si elle était rapprochée de la charge de rupture (2); mais qu'une charge si faible qu'elle soit, qui produirait une déformation permanente, « finirait par rompre si on l'enlevait et la replaçait un nombre de fois suffisant ». Les expériences entreprises par la commission d'enquête anglaise, citée au § 7, prouveraient qu'il faut pour cela que l'extension ou la flexion atteigne au moins le tiers de celle qui précède la rupture. On conçoit que les variations de température peuvent avoir une influence de ce genre sur toute espèce de construction.

Il en résulte que pour déterminer la valeur de R, relative à une matière, il faut, ou soumettre les pièces à de longues épreuves statiques et dynamiques, ou bien (§ 9 de la note du n° 3) se servir de l'examen des constructions anciennes et hardies soumises aux mêmes ébranlements et aux mêmes autres circonstances que les édifices qu'on veut ériger.

Et on ne consultera les expériences de rupture immédiate que pour établir approximativement des rapports entre les diverses variétés d'une même espèce de matière (ci-après § 12 de la note du n° 113).

(\*) Par la même raison qu'à la note des n° 4 à 20, on renvoie après le n° 168, au Complément des art. I à VI, ces numéros de 22 à 75, contenant des résultats d'expériences, auxquels on joindra ceux fort nombreux obtenus depuis 1833, tant sur la rupture par extension que sur les dilatations longitudinales produites par des tractions plus faibles que celles qui font rompre.

(1) Note de M. Braitwaite au *Journal of Arts*. London, 1854.

(2) Page 72 de la traduction française faite par M. Perret-Porta, en 1857, du mémoire de M. Fairbairn, *De l'application de la fonte, du fer et de la tôle aux constructions*.

## ARTICLE III.

DE LA RÉSISTANCE D'UN CORPS PRISMATIQUE A LA FLEXION PRODUITE PAR UN EFFORT DIRIGÉ PERPENDICULAIREMENT A LA LONGUEUR DE CE CORPS.

76. Quand un corps prismatique est tiré dans le sens de la longueur, tous les éléments longitudinaux, ou fibres, s'allongent. Si le même corps est comprimé, et qu'il ne puisse céder en pliant, les fibres s'accourcissent. Lorsque les allongements ou accourcissements sont très-petits, ils sont proportionnels à l'effort qui les produit. La variation de longueur d'un corps, pour un effort donné, est d'ailleurs évidemment proportionnelle à la longueur de ce corps (\*).

77. Quand un corps prismatique est fléchi, les fibres situées du côté de la face convexe sont allongées; les fibres situées du côté de la face concave sont accourcies; certaines fibres, situées dans l'intérieur du corps, conservent une longueur invariable. En admettant, conformément à ce qui a été dit ci-dessus, que les fibres opposent à l'allongement et à l'accourcissement des résistances proportionnelles aux quantités dont les longueurs de ces fibres varient, on peut se rendre compte de la manière dont un corps résiste à la flexion.

Soit un solide prismatique droit (fig. 1 des planches à la fin du volume) encastré horizontalement à l'extrémité A, et fléchi par l'action d'un poids P suspendu à l'autre extrémité B. Considérons une section transversale quelconque *mana'*. Soit *aa'* la ligne horizontale qui est la section des fibres dont la longueur n'a pas varié (\*\*). Il est nécessaire, pour l'équilibre de la partie

---

(\*) Ces principes ont été déduits mathématiquement, à la note du n° 21, de celui des actions moléculaires fonctions continues des distances.

(\*\*) L'auteur suppose cette ligne *aa'* perpendiculaire au plan

du corps située à droite de *mana'* : 1° que les extensions et compressions des fibres aient fait naître, dans cette section, des forces verticales dont la somme égale le poids P (\*); 2° que la somme des forces horizontales produites par ces extensions et compressions soit nulle; 3° que la somme des moments des forces verticales et horizontales dont il s'agit, et du poids P, pris par rapport à l'axe fixe *aa'*, soit nulle.

On nommera

E la force nécessaire pour allonger ou pour accourcir un prisme dont la section transversale est l'unité superficielle, d'une quantité égale à la longueur de ce prisme.

$\rho$  le rayon du cercle osculateur de la courbe du solide, au point où est faite la section transversale *mana'*.

$w$  l'abscisse d'un point quelconque de la section *ama'n*, comptée sur *aa'*.

$v$  l'ordonnée d'un point quelconque de cette section, prise perpendiculairement à *aa'*.

$b$  la plus grande valeur de  $u$ .

$f_1u$  l'ordonnée  $pm$  de la courbe qui termine la partie de la section transversale où les fibres s'allongent.

$f_2u$  l'ordonnée  $pn$  de la courbe qui termine la partie où les fibres s'accourcissent.

$x$  la distance de la section transversale *ama'n* à l'extrémité encastree.

$a$  la distance du point d'application du poids P à l'extrémité

vertical de sollicitation ABP. Cela n'a pas toujours lieu. (Voyez ci-après la note du n° 83).

(\*) On montrera, aux notes des n° 152 à 155, que ce ne sont pas les extensions et compressions des fibres longitudinales, mais l'inclinaison qu'elles prennent sur la section, ou ce qu'on a déjà appelé le *glissement* (note du n° 3) qui fait naître les forces transversales ou verticales dont la somme égale le poids P,

encastrée, qui ne diffère pas sensiblement de la longueur AB du solide.

Dans l'état naturel du corps,  $dx$  est la longueur de la portion infiniment petite de la fibre dont les coordonnées sont  $u, v$ .

Après la flexion, cette longueur a augmenté de  $\frac{dx}{\rho}v$ , parce que

l'angle des deux normales consécutives est  $\frac{dx}{\rho}$ . La proportion suivant laquelle cette fibre s'est allongée est donc

$$\frac{\frac{dx}{\rho}v}{dx}, \quad \text{ou} \quad \frac{v}{\rho}.$$

L'aire de la section transversale de la fibre étant  $dudv$ , la résistance qu'elle oppose à l'allongement est

$$E \cdot dudv \cdot \frac{v}{\rho};$$

et le moment de cette résistance, pris par rapport à l'axe  $aa'$ , est

$$E \cdot dudv \cdot \frac{v^3}{\rho}.$$

Par conséquent les sommes des résistances des fibres étendues et comprimées sont respectivement

$$\frac{E}{\rho} \int_0^b du \int_0^u f_1^u dv \cdot v, \quad \frac{E}{\rho} \int_0^b du \int_0^u f_2^u dv \cdot v,$$

et la somme des moments de ces résistances, pris par rapport à l'axe  $aa'$ , est

$$\frac{E}{\rho} \left( \int_0^b du \int_0^u f_1^u dv \cdot v^2 + \int_0^b du \int_0^u f_2^u dv \cdot v^2 \right)$$

78. On aura donc pour exprimer l'équilibre des forces horizontales, condition qui détermine la situation de l'axe  $aa'$ ,

$$\int_0^b du \int_0^u f_1^u dv \cdot v = \int_0^b du \int_0^u f_2^u dv \cdot v.$$



L'axe  $ad'$  passe par le centre de gravité de la section transversale  $mana'$ .

79. On aura ensuite, pour exprimer l'équilibre de rotation autour de cet axe,

$$\frac{E}{\rho} \left( \int_0^b du \int_0^{f_1^u} dv \cdot v^3 + \int_0^b du \int_0^{f_2^u} dv \cdot v^3 \right) = P(a-x).$$

On néglige les moments des forces verticales, ce qui est permis quand l'épaisseur du corps est petite par rapport à sa longueur (\*). Il est nécessaire d'ailleurs que l'épaisseur du corps soit petite par rapport à sa longueur pour que les allongements et raccourcissements des fibres, et les forces intérieures qui en résultent, soient telles qu'on le suppose ici; et les résultats suivants ne peuvent être appliqués lorsque cette condition n'est pas satisfaite.

80. La quantité

$$E \left( \int_0^b du \int_0^{f_1^u} dv \cdot v^3 + \int_0^b du \int_0^{f_2^u} dv \cdot v^3 \right)$$

a, pour chaque corps, une valeur qui dépend de la nature de ce corps et de la figure de la section transversale. Cette quantité est *le moment de la résistance à la flexion*, ou plus simplement *le moment de flexion* du corps. Nous la représenterons ci-après par la lettre  $\varepsilon$ . Quand la figure de la section peut être partagée par une ligne horizontale en deux parties symétriques, cette ligne est l'axe d'équilibre qui contient les fibres invariables, et à partir de laquelle il faut prendre la valeur de l'intégrale

$$E \int_0^b du \int_0^{f_1^u} dv \cdot v^3,$$

---

(\*) Ces forces verticales dont la somme, comme on a dit, égale le poids  $P$ , se compensent d'ailleurs, quant au *moment*, comme tendant à faire tourner également dans les deux sens. Il n'en faudra pas moins tenir compte (voyez notes des n<sup>os</sup> 152 à 155), soit dans le calcul complet de la flèche ou ordonnée extrême, soit dans l'équation exprimant la condition de non-rupture, des *glissements* qui engendrent ces forces.

dont le double est alors la valeur du moment de résistance à la flexion. Dans le cas contraire, il faut déterminer d'abord la position de l'axe d'équilibre, au moyen de la condition exprimée n° 78, et calculer ensuite séparément les valeurs des deux intégrales qui entrent dans l'expression de ce moment (\*).

(\*) § 1. *Notations et démonstrations plus simples. Moments d'inertie des sections.* — La quantité entre parenthèses des n° 77, 79 et 80, ou celle  $\varepsilon$  dégagée du facteur  $E$ , n'est autre chose que le *moment d'inertie de la section ma'na* (supposée avoir l'unité de masse par unité superficielle) autour de la *ligne des fibres invariables aa'*, ainsi que l'a remarqué le premier M. Persy, dans son cours de stabilité des constructions, lithographié en 1831 à l'École de Metz. Aussi, dans les cours faits à l'École des ponts et chaussées depuis novembre 1837, on a simplifié les notations en

mettant  $\int_0^{\omega} v^2 d\omega$  ou bien une seule lettre pour ce moment d'inertie

$\int_0^b du \int_0^u dv.v^2 + \int_0^b du \int_0^u dv.v^2$ ;  $\int_0^{\omega}$  désignant une intégrale relative à toute la section  $\omega$ . En appelant donc, comme M. Poncelet,

I ce moment d'inertie  $\int v^2 d\omega$ ,

M le moment, autour de la même ligne des fibres invariables tracée sur la section quelconque  $\omega$ , de la force ou des forces extérieures en nombre quelconque qui sollicitent le prisme *entre cette section  $\omega$  et la deuxième extrémité du solide* ;

L'équation d'équilibre de rotation entre les forces extérieures et intérieures autour de cette même ligne, s'écrit simplement

$$M = \frac{E}{\rho} \int_0^{\omega} v^2 d\omega = \frac{EI}{\rho};$$

et celle d'équilibre de translation longitudinale du n° 78

$$\int_0^{\omega} v d\omega = 0,$$

où les  $v$  sont les distances positives ou négatives des diverses fibres à cette ligne.

On a, ainsi, renoncé à appeler *moment d'élasticité*, comme faisait

(Du n° 80).

Navier en 1826, ce produit  $EI$  qu'il désigne par  $s$  et qu'il propose, en 1833, d'appeler *moment de flexion*; et l'on applique plutôt cette dernière dénomination au moment  $M = \frac{EI}{\rho}$  des forces qui produisent la flexion ou des forces qui l'arrêtent, de même que nous appellerons plus loin moment de torsion le moment des forces extérieures qui produisent la torsion, ou le moment égal des forces intérieures qui résistent à ce qu'elle augmente.

On appelle aussi maintenant, d'une manière plus précise,  $\rho$  le rayon de courbure, non pas de la *courbe du solide* ou d'une quelconque de ses fibres, mais de son *axe*, ou de la fibre qui passe par les centres de gravité de ses sections, et qui est aussi, dans le présent exemple, l'une de celles dont la longueur n'a pas varié. On peut dire, ainsi, très-simplement et élémentairement (sans parler de l'angle infinitésimal  $\frac{dx}{\rho}$  de deux normales consécutives) que l'arc de fibre invariable et l'arc de fibre quelconque, compris entre deux sections très-voisines, sont entre eux comme leurs rayons  $\rho$  et  $\rho + v$ , ce qui montre de suite que la proportion de l'excès du second arc sur le premier, ou la *dilatation* de la fibre, a pour mesure  $\frac{v}{\rho}$ .

Ou bien, pour représenter aux yeux ce qui se passe, on figure comme ci-contre, dans les cours d'Arts et métiers, la coupe *longitudinale* de la portion du prisme comprise entre deux sections  $dmo$ ,  $d'm'o'e'$ , par un plan qui contient la fibre quelconque  $km'm'$  et qui est perpendiculaire à la ligne  $o$  des fibres invariables; car si  $C$  est le point de rencontre des coupes  $de$ ,  $d'e'$  des deux sections, on a  $Co = Co' = \rho$ ,  $om = o'm' = v$ , en sorte que,  $o'k$  étant une parallèle menée à  $od$ , comme la longueur primitive de la fibre était  $oo' = mk$ ,

la *dilatation* qu'elle a éprouvée est  $\frac{km'm'}{oo'}$ , égal à  $\frac{o'm'}{Co'} = \frac{v}{\rho}$  d'après la similitude des triangles isocèles  $m'o'k$ ,  $oCo'$ .

§ 2. *Hypothèses tacitement invoquées. Elles ne sont point néces-*

( Du n° 30 ).

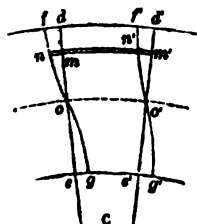
*saires.* — Mais cette démonstration, comme celle du texte, se fonde sur deux hypothèses, savoir :

1° Que les sections primitivement planes et normales aux fibres rectilignes du prisme sont encore planes après la flexion, et normales à ces fibres devenues courbes ;

2° Que les fibres se comportent comme feraient de petits prismes isolés, ou comme si elles étaient sans action les unes sur les autres.

Or, malgré quelques expériences qui paraissent favorables à la première, on peut tenir pour certain et nous montrerons qu'elles sont toutes deux fausses, excepté dans le cas très-particulier de la flexion égale ou en arc de cercle, qui est celui où les forces agissant aux extrémités n'ont pas de composante totale transversale. Dans tout autre cas, les sections planes se changent en surfaces légèrement courbes, sur lesquelles toutes les fibres, hors celles des faces latérales, prennent une petite inclinaison, et ces fibres en glissant un peu l'une devant l'autre se sollicitent alors mutuellement dans le sens de la longueur par une sorte de frottement.

Heureusement qu'on peut obtenir les formules sans ces deux hypothèses, au moins pour les prismes dont la matière a une contexture symétrique par rapport aux sections perpendiculaires à leurs arêtes ; cela tient à ce qu'alors le glissement relatif des fibres n'influe pas sur les tensions longitudinales de chacune d'elles, et à ce que toutes les sections planes se changent, comme on verra, en une même



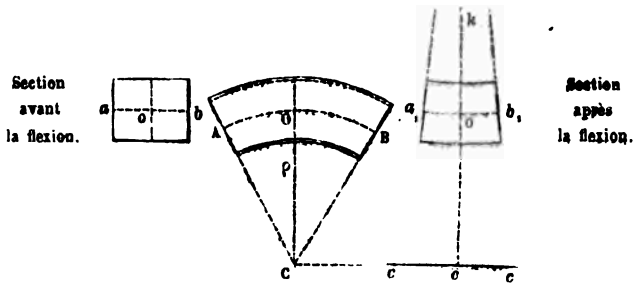
surface courbe, de sorte que les portions de fibre  $nn'$  qu'interceptent ces sections figurées par les coupes infléchies  $fog$ ,  $f'o'g'$  ont les mêmes longueurs et par conséquent se sont dilatées dans les mêmes proportions  $\frac{v}{\rho}$  que si les sections étaient restées planes et normales aux fibres. D'où nous pourrions conclure que les formules ci-dessus, bien qu'incomplètes ou ne

donnant pas tout, sont toujours exactes dans ce qu'elles donnent, sous la condition, toutefois, comme pour la formule  $P = E\omega \frac{l}{L}$  d'ex-

(Du n° 80).

tension simple (§ 6 de la note du n° 21), que les forces sollicitantes soient appliquées et distribuées d'une certaine manière sur les bases extrêmes du prisme.

§ 3. *Démonstration des formules de la flexion dans le cas où elle a lieu d'une manière égale ou en arc de cercle. Modifications transversales.* — Pour le faire voir, et démontrer ainsi exactement ces formules en même temps que ce qui devra les compléter, prouvons d'abord qu'elles sont vraies dans le cas le plus simple, celui où un prisme AOB, d'égale contexture dans les sens transversaux, a été fléchi comme nous avons dit d'une manière égale, toutes les fibres s'étant courbées en arcs de cercle dont nous supposons les centres sur une même droite C, intersection commune des sections restées



normales à ces fibres dont chacune a éprouvé d'un bout à l'autre une même dilatation ou contraction, nulle pour celle AOB qui passe par les centres de gravité. Il nous suffira de généraliser la démonstration *à posteriori* donnée de la formule de l'extension au § 3 de la note du n° 21, en montrant que les fibres peuvent encore ici, sans perdre leur contiguïté, éprouver toutes ensemble des contractions latérales positives ou négatives qui soient à leurs diverses dilatactions longitudinales dans le rapport constant  $\eta$  (soit  $1/4$ ), qui est tel qu'elles ne se pressent pas l'une l'autre normalement (§ 5 de la note du n° 21). Or cela est facile. En effet, si la fibre centrale AOB est restée de même longueur, celles situées au-dessus et au-dessous, dans le même plan  $co k$ , et dont les rayons excèdent celui  $\rho$  de quantités positives ou négatives  $v$ , se sont trouvées dilatées longitudina-

(Du n° 50).

lement de  $\frac{v}{\rho}$ ; or contractons-les d'abord transversalement dans les proportions  $\eta \frac{v}{\rho}$ , suivant ces rayons  $\rho + v$ ; puis changeons la ligne  $qob$  tirée sur la section par son centre de gravité parallèlement à la droite  $C$  ou  $ccc$ , en un arc de cercle  $a_1ob_1$  de même longueur, ayant son rayon  $o_1b_1$  égal à  $\frac{\rho}{\eta}$  (soit  $\lambda\rho$  si  $\eta = 1/\lambda$ ), dans le prolongement du rayon de courbure  $oc = \rho$ , et changeons enfin, sur la section, toutes les lignes matérielles parallèles à  $qob$  en arcs concentriques dont les lignes perpendiculaires sont devenues les rayons. I en résultera (quelle que soit la forme du contour des sections, que nous avons figuré rectangulaire pour fixer les idées) que les fibres auront été contractées, dans le sens parallèle à  $ccc$ , de  $\frac{v}{\rho} = \eta \frac{v}{\rho}$

comme elles le sont déjà dans le sens perpendiculaire. Comme leurs dilatations longitudinales positives ou négatives sont représentées par  $\frac{v}{\rho}$ , on voit (§ 6 de la note du n° 3 et § 3 de la note du n° 21) qu'elles ne se presseront ni ne s'attireront l'une l'autre normalement et que leurs tensions longitudinales seront bien  $E \frac{v}{\rho}$  par unité de leurs sections  $d\omega$ , comme si elles étaient isolées.

Donc le prisme fléchi, dont les points ont éprouvé les déplacements longitudinaux et transversaux ainsi supposés, qui sont, comme on voit, possibles et compatibles sans disjonction, est en équilibre si, ses faces latérales ne supportant rien, l'on applique aux divers éléments  $d\omega$  des deux bases des tractions longitudinales  $E \frac{v}{\rho} d\omega$ .

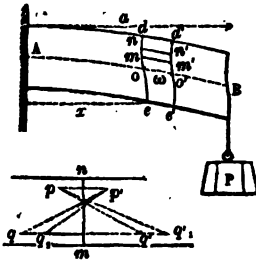
Réciproquement, comme un système de points matériels dérangés très-peu de leurs positions ne peut prendre qu'un seul état d'équilibre sous l'action de forces données, ou comme le problème des petits déplacements des points d'un corps élastique est complètement déterminé quand on donne les forces extérieures qui les produisent, on voit que : Lorsqu'un prisme dont les faces latérales ne supportent aucune action aura ses bases extrêmes  $\omega$  sollicitées nor-

(Du n° 80).

malement par des tractions  $E d\omega \frac{v}{\rho}$  (tant positives que négatives) proportionnelles aux distances  $v$  des éléments  $d\omega$  à des droites tracées de la même manière sur les deux bases par leurs centres de gravité, il éprouvera précisément les déplacements tant longitudinaux que transversaux que nous venons de supposer, c'est-à-dire une incurvation en arc de cercle dans un plan parallèle aux arêtes et à la coordonnée  $v$ , avec des dilatations longitudinales  $\frac{v}{\rho}$  partout, des contractions latérales  $\gamma \frac{v}{\rho}$ , et, aussi partout dans l'intérieur, les mêmes tractions longitudinales  $\frac{E}{\rho} v d\omega$  que si les fibres étaient isolées.

§ 4. *Cas général de la flexion inégale ou non circulaire. Glissements qui l'accompagnent nécessairement. Inflexion des sections primitivement planes.* — Passons au cas plus général, et le plus ordinaire, de la flexion non circulaire, dans laquelle l'inégalité de la courbure d'un bout à l'autre du prisme est déterminée par des forces transversales dont nous désignerons, comme dans le texte, par  $P$  la

composante totale dans un sens parallèle à celui de flexion ou à la coordonnée que nous avons appelée  $v$ , en supposant comme Navier (uniquement pour fixer les idées), que le prisme d'une longueur  $AB=a$  est encastré à l'extrémité  $A$  opposée à celle où agissent les forces qui produisent ainsi un moment  $M=P(a-x)$  autour de la ligne  $v=0$  tracée sur la section quelconque  $\omega$  dont l'abscisse est  $A\omega=x$ .



Observons d'abord (comme nous avons avancé) que si la matière du prisme a une contexture symétrique par rapport aux diverses sections  $\omega$  perpendiculaires à ses arêtes avant la flexion, le petit glissement relatif qui peut avoir lieu entre les files longitudinales de molécules n'influe aucunement sur la tension aussi longitudinale des fibres : car si la file comprenant les molécules  $q, q'$  a glissé de  $qq_1 = q'q'_1$ , devant la file comprenant celles  $p, p'$  supposées symétriquement placées, comme les premières, par rapport au plan

( Du n° 30 ).

$mn$  d'une section transversale  $\omega$ , il en résultera, dans la composante longitudinale de l'action de  $p$  sur  $q'$ , une petite augmentation ou diminution exactement compensée par la diminution ou l'augmentation de la composante de l'action, sur  $p'$ , de  $q$  devenu  $q_1$ ; d'où il suit que la résultante des actions des molécules de la gauche sur les molécules de la droite de la face  $mn$ , ou la tension de la fibre dont l'élément  $mn = d\omega$  est la base, ne dépendra toujours que des dilatactions ou contractions longitudinales et transversales de cette fibre, et nullement des glissements.

Or supposons, aux points du prisme, les mêmes déplacements que s'il avait d'abord été fléchi comme tout à l'heure (§ 3), ou que ses sections fussent restées planes et normales aux fibres étendues longitudinalement dans des proportions  $\frac{v}{\rho}$  et contractées latéralement dans des proportions  $\gamma \frac{v}{\rho}$ , mais avec une courbure uniformément variable  $\frac{1}{\rho} = \frac{P(a-x)}{EI}$ ; puis, ensuite, que les fibres invariables ou répondant à  $v=0$  étant restées à la même place, on eût fait glisser très-peu toutes les autres fibres les unes contre les autres sans en changer la longueur, en transformant ainsi les sections planes en surfaces  $d'oe$ , d'o'e' légèrement courbes, mais coupant toujours normalement les faces latérales du prisme. Ces surfaces auront toutes sensiblement la même forme ainsi que la même inclinaison sur une même fibre quelconque, car les différences qui existent dans les contractions latérales successives  $\gamma \frac{v}{\rho}$  de cette fibre, en raison de la variabilité de  $\frac{1}{\rho}$ , n'exerceront sur ces inclinaisons qu'une influence négligeable. Or les inclinaisons, sur les sections, des fibres ou files de molécules qui leur étaient primitivement normales, ou ce qui revient au même, les glissements des sections les unes devant les autres, engendrent des actions tangentielles (note du n° 3 ou notes ci-après des n° 152 à 155); ces actions auront donc, pour toutes les sections, les mêmes grandeurs et la même somme de composantes dans le sens  $v$ . Comme la forme courbe des sections, qui détermine la grandeur des glissements, est du reste



(Du n° 30).

arbitraire, choisissons-la telle : 1° que cette somme des composantes d'actions dans le sens transversal  $v$  soit égale à la force  $P$  qui, ainsi, ne produira pas de translation latérale, dans ce sens, de la portion quelconque  $\omega B$  du prisme ; portion dont l'équilibre de rotation est déjà assuré autour de la ligne  $v = 0$  tracée sur  $\omega$  par la supposition

$\frac{E}{\rho} \int v^2 d\omega = P(a-x)$ , faite sur le mode de variation de la courbure  $\frac{1}{\rho}$  puisque la traction ou tension d'une fibre quelconque à travers la section  $\omega$  a pour valeur  $E d\omega \frac{v}{\rho}$ , vu la dilatation  $\frac{v}{\rho}$  et les contrac-

tions  $\eta \frac{v}{\rho}$  qu'on lui suppose (§ précédent) ; 2° que la différence des actions longitudinales des fibres environnantes sur les diverses faces latérales  $mm'$ ,  $nn'$  d'un même élément de fibre  $mm'n'n$ , compris entre deux sections voisines, en raison de ce que les inclinaisons des arêtes sur les bases ne sont pas les mêmes en  $m$  qu'en  $n$ , en  $m'$  qu'en  $n'$ , se trouve justement contre-balancée par la différence, due à la variation de  $\frac{1}{\rho}$ , des actions aussi longitudinales et opposées

$E d\omega \frac{v}{\rho}$ , s'exerçant sur les deux bases  $mn = m'n' = d\omega$  du même élément ; ce qui assure l'équilibre de détail ou l'équilibre des divers éléments, chacun en particulier (1).

Des déplacements ainsi supposés, il résultera, comme au paragraphe précédent, que les faces latérales du prisme ne supporteront aucune pression ou traction normale. Elles ne supporteront, non plus, aucune action extérieure, analogue à des frottements longitudinaux, puisque les sections, en se courbant, leur sont restées normales. Enfin ses bases, ou plus généralement deux sections quelconques, situées à une distance arbitraire  $L$  l'une de l'autre, supporteront, sur leurs éléments  $d\omega$ , avec des actions tangentielles ou transversales ayant  $P$  pour composante totale dans le sens  $v$ , des tractions longi-

(1) Un exemple simple prouvera, si l'on en doute, aux notes des nos 452 à 455, sans avoir besoin de recourir à la solution analytique de notre Mémoire sur la flexion (Journal Liouville, 1856), que ce problème de la ferme à assigner ainsi à la surface courbe des sections pour chaque figure du contour, n'impose pas plus de conditions qu'il n'est possible d'en remplir.

( Du n° 30 ).

tudinales  $Ed\omega \frac{v}{\rho_0}$ ,  $Ed\omega \frac{v}{\rho_1}$ ,  $\frac{1}{\rho_0}$  et  $\frac{1}{\rho_1}$  étant les valeurs particulières correspondantes de la courbure  $\frac{1}{\rho} = P \frac{\alpha - x}{EI}$  relative à ces sections, en sorte qu'on a leur différence  $\frac{1}{\rho_0} - \frac{1}{\rho_1} = \frac{PL}{EI}$ .

D'où l'on conclura réciproquement, comme au § 3 précédent, qu'un prisme dont les faces latérales ne sont soumises à aucune action et dont les deux bases  $\omega$ , situées à une distance  $L$ , supportent à la fois : 1° dans le sens longitudinal, des tractions qui varient comme une coordonnée transversale  $v$  ou qui sont exprimables par  $Ed\omega \frac{v}{\rho_0}$ ,  $Ed\omega \frac{v}{\rho_1}$ ; 2° dans le sens transversal ou tangentiel, des actions qui ont les mêmes grandeurs et directions aux points homologues de ces bases, et une composante totale  $P = \frac{EI}{L} \left( \frac{1}{\rho_0} - \frac{1}{\rho_1} \right)$ , dans le sens  $r$ , avec un mode de distribution qui dépend de la forme du contour des sections ; ce prisme, dis-je, fléchira en prenant dans toutes ses parties des dilatations longitudinales  $\frac{v}{\rho}$  (positives ou négatives avec  $r$ ), avec des tractions transversales  $\eta \frac{v}{\rho}$ ,  $\frac{1}{\rho}$  variant uniformément ou linéairement d'un bout à l'autre entre ses valeurs extrêmes  $\frac{1}{\rho_0}$ ,  $\frac{1}{\rho_1}$  et représentant la courbure de l'axe ; et les éléments  $d\omega$  de chaque section intérieure supporteront des actions normales ou longitudinales  $Ed\omega \frac{v}{\rho}$ , avec les mêmes actions tangentielles que ceux homologues des bases. Ce qui est ce qu'on voulait démontrer.

§ 5. *Cas d'une contexture inégale transversalement.* Nous ne nous arrêterons pas à faire voir que la conclusion sera la même si la contexture, au lieu d'être la même dans tous les sens transversaux, est simplement symétrique dans deux sens rectangulaires, suivant lesquels il faudra en conséquence contracter les fibres dans des rapports différents  $\eta \frac{v}{\rho}$ ,  $\eta' \frac{v}{\rho}$  ; ou si, plus généralement, il n'y a de symétrie de contexture que de part et d'autre des sections trans-

(Du n° 80).

versales, en sorte que, comme on a dit à la fin du § 6 de la note du n° 21, les sections  $d\omega$  des fibres doivent éprouver de petites déformations transversales outre les contractions pour qu'elles ne se pressent pas l'une l'autre, ce qui est encore possible sans qu'elles cessent de se toucher. (Mémoire cité sur la flexion.)

§ 6. *Observation sur le mode d'application et de distribution des forces qui font fléchir.* Cette démonstration des expressions connues :

$\frac{v}{\rho}$  de la dilatation (positive ou négative avec  $v$ ) d'une fibre,

$E \frac{v}{\rho}$  de sa tension par unité de section, d'où  $\frac{E}{\rho} \int v d\omega = M$  ou  $P(a-x)$  pour l'équation de moments autour de la ligne  $v = 0$ , (équation à poser seulement lorsque cette ligne est *axe principal* et à remplacer par deux autres dans tout autre cas comme on le verra à la note du n° 83),

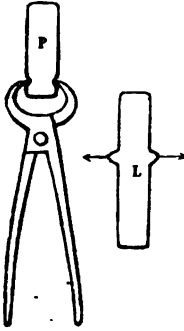
Ne convient, comme l'on voit, que pour un mode particulier d'application et de distribution, aux extrémités du prisme, des forces extérieures qui ont un moment  $M$ , avec une composante transversale  $P = -\frac{dM}{dx}$  (qui est zéro dans le cas du § 3 ou de la flexion circulaire).

C'est qu'elle ne démontre *que ce qui est*, et que ces expressions ne sont exactes que pour le mode d'application et de distribution supposé au paragraphe précédent.

Mais, par les motifs déduits au § 6 de la note du n° 21, elles peuvent être employées avec toute l'approximation désirable dans la pratique, pour tout autre mode d'application et de distribution, aux extrémités, des forces dont il n'y a ainsi à considérer que la résultante et le moment résultant. Des expériences spéciales prouvent même, à défaut du calcul, que les systèmes de forces se faisant équilibre par l'intermédiaire d'une petite portion d'un prisme, ne produisent de déplacements sensibles que sur une très-faible étendue en deçà et au delà, comme tout le monde peut voir en pŕŕchant avec des tenailles un prisme de caoutchouc  $P$ , ou en dilatant *transversalement* une lanière mince  $L$  de même matière,

(Du n° 80).

car on remarquera que l'impression ou l'élargissement ne se fera point sentir à des distances excédant la profondeur ou l'amplitude. Aussi les constructeurs ne tiennent aucun compte de ces systèmes de forces en équilibre, lorsqu'ils règlent les dimensions à donner aux pièces, et ils se bornent à prendre quelques précautions, telles que l'interposition de coins ou de fourrures, contre les impressions que pourrait produire leur application trop directe et trop concentrée. D'où il résulte bien que des forces quelconques agissant vers les extrémités des pièces peuvent être remplacées très-approximativement, quant à leur effet sur tout le reste, par des systèmes de forces *équivalentes*, ou ayant même moment et même résultante, appliquées et distribuées comme on a dit aux §§ 3 et 4.



On ne doit pas s'étonner, au reste, ni trouver regrettable que cette démonstration soit plus longue que la démonstration ordinaire des formules de la flexion ; car, indépendamment de l'exactitude, et de l'abstention de toute hypothèse fautive ou gratuite, elle oblige à reconnaître des circonstances ordinairement omises, à savoir, les contractions et dilatations transversales qu'il est bon quelquefois de prendre en considération (voy. § 13 de la note du n° 113), et aussi l'inclinaison nécessaire des fibres sur les sections quand les forces sollicitantes ont une composante transversale, ce qui produit les glissements des sections les unes devant les autres ou des fibres les unes contre les autres ; circonstances dont l'influence n'est pas toujours négligeable, comme nous verrons, quand il s'agit soit de calculer les flèches de courbure, soit de passer des *équations d'élasticité* aux *équations de cohésion* fournissant les conditions de résistance à la rupture prochaine ou éloignée des solides soumis à des forces extérieures données (voyez notes des n° 152 à 155 et déjà § 5 de la note du n° 113).

§ 7. *Cas où l'on suppose que l'élasticité varie dans l'étendue d'une même section. Condition sous laquelle on peut alors poser des expressions analogues. Pièces de métal. Pièces de bois non homo-*

(Du n° 80).

*gènes.*— La démonstration des §§ 3 et 4 s'applique au cas, considéré par M. Bresse (§ 7 de la note du n° 21), de variation de l'élasticité d'une fibre à l'autre, mais sous la condition que nous avons déjà énoncée à propos de l'extension ou traction longitudinale simple, à savoir que, pour toutes les fibres du solide on ait les mêmes rapports  $\eta$ ,  $\eta'$  entre les contractions transversales et les dilatations longitudinales correspondantes; car sans cela les fibres agiraient normalement l'une sur l'autre et l'on n'aurait pas  $E \frac{v}{\rho} d\omega$  pour la tension de celle dont la dilatation est  $\frac{v}{\rho}$ ,  $E$  étant le coefficient d'élasticité de cette fibre supposée isolée ou extraite de la masse.

Si cette condition de  $\eta$  et  $\eta'$  constants est remplie, l'équation d'équilibre de translation propre à la détermination de la ligne des fibres invariables est  $\int E v d\omega = 0$  au lieu de  $\int v d\omega = 0$ , et l'équation d'équilibre de rotation autour de cette ligne est  $\frac{1}{\rho} \int E v^2 d\omega = M$  au lieu de  $\frac{E}{\rho} \int v^2 d\omega = M$ . Cette ligne passe toujours, comme l'observe M. Bresse, par le *centre de gravité* de la section  $\omega$ , et  $\int E v^2 d\omega$  est encore le *moment d'inertie* de celle-ci, mais moyennant qu'on attribue aux divers éléments  $d\omega$  des densités  $E$  variant de l'un à l'autre.

M. Bresse donne un exemple (*Recherches sur la flexion des pièces courbes*, chap. 1<sup>er</sup>, n° 26, p. 39) de calcul de  $\int E v^2 d\omega$ , où il suppose, pour une section rectangle, que  $E$  varie *linéairement* entre une valeur centrale  $E_0$  et une valeur  $E_1$  sur les bords, en conservant la même valeur  $E_0$  sur une partie de la grande médiane égale à la différence des côtés. Mais il en résulterait, que ce moment d'inertie  $\int E v^2 d\omega$  serait égal au moment d'inertie ordinaire  $\int v^2 d\omega$  multiplié par une certaine valeur moyenne de  $E$ , entre  $E_0$  et  $E_1$ , qui ne dépendrait que du rapport des deux côtés, et non pas de leur grandeur absolue comme cela doit être d'après les expériences (§ 7 de la note du n° 21), qui montrent que les pièces métalliques à petite section ont une résistance relative très-sensiblement différente de celle des grosses pièces. Nous avons donc modifié son calcul en supposant que la zone dont la résistance élastique  $E$  diffère de celle du centre (et peut être supposée varier *paraboliquement* dans cette zone), a une épais-

(Du n° 30).

seur absolue constante et non pas proportionnelle à l'une des deux dimensions. On simplifie quand on suppose cette épaisseur petite, car alors on peut prendre sensiblement,  $I$  étant le moment d'inertie ordinaire de la surface de la section,  $j$  celui de son contour, ou plutôt de la ligne moyenne de la zone dont l'élasticité est différente du reste (ligne qu'on peut placer à 1 ou à 2 millimètres à l'intérieur),

$$\int E v^3 d\omega = E_0 I + e j, \quad \text{d'où} \quad M = \frac{E_0 I + e j}{\rho},$$

où  $E_0$  et  $e$  sont des coefficients à déterminer par plusieurs expériences de flexion de pièces de même matière, mais de formes ou de dimensions transversales sensiblement différentes <sup>(1)</sup>.

Cette expression peut convenir pour les pièces en métal.

Mais, pour les pièces de bois, l'augmentation ou la diminution de force élastique ne se fait pas sentir seulement auprès du contour, elle commence au centre de l'arbre d'après les belles expériences de MM. Wertheim et Chevandier (*Mémoire sur les propriétés mécaniques des bois*, *Ann. de ch. et de phys.*, 1848, tableaux VIII et XII). Si, alors, on suppose empiriquement (comme nous avons fait dans une lettre écrite en 1845 à l'un de ces deux savants expérimentateurs) une loi de variation parabolique ou comme les carrés des rayons des couches ligneuses, on obtient des expressions simples; car si  $E_0$  et  $E_1$  sont les valeurs de  $E$  au centre de l'arbre et à sa circonférence dont on appelle  $r_1$  le rayon, l'on a,  $u$ , et  $v$ , étant les coordonnées  $u$ ,  $v$  de ce centre des couches par rapport à des axes passant par le centre de gravité de la pièce qui en est extraite,

<sup>(1)</sup> Pour cela on tirera de cette équation,  $f$  étant la flèche de courbure d'une pièce horizontale de longueur  $2a$ , chargée au milieu d'un poids  $2P$  (n° 87 ci-après),

$$\frac{Pa^3}{31f} = E_0 + e \frac{j}{I}.$$

Construisant la suite des points ayant pour abscisses les valeurs de  $\frac{j}{I}$  et pour ordonnées celles de  $\frac{Pa^3}{31f}$ , la ligne droite qui s'en rapprochera le plus donnera  $E_0$  et  $e$ . On peut déterminer cette droite soit par tâtonnement visuel, soit par les méthodes dont nous parlerons au § 45 de la note du n° 443 pour la rupture par flexion.

(Du n° 88).

$$E = E_0 - (E_0 - E_1) \frac{(u - u_0)^2 + (v - v_0)^2}{r_1^2},$$

d'où

$$\int E d\omega v^3 = \left[ E_0 - (E_0 - E_1) \frac{u_0 + v_0^2}{r_1^2} \right] \int v^3 d\omega - \\ - \frac{E_0 - E_1}{r_1^2} (\int u^2 v^2 d\omega + \int v^4 d\omega - 2u_0 \int u v^2 d\omega - 2v_0 \int v^3 d\omega).$$

Quand la section est un rectangle dont les côtés sont  $b$  dans le sens  $u$ , et  $c$  dans le sens  $v$ , les deux derniers termes entre parenthèses sont nuls, et les deux autres se réduisent à  $\frac{b^3 c^3}{144} + \frac{bc^3}{80}$ , ce qui donne, vu que  $\frac{bc^3}{12} = I$ , et en faisant la distance  $\sqrt{u_0 + v_0^2} = r$ ,

$$\int E v^2 d\omega = E_0 I \left[ 1 - \frac{E_0 - E_1}{E_0} \left( \frac{1}{3} \frac{b^3}{4r_1^2} + \frac{3}{5} \frac{c^2}{4r_1^2} + \frac{r_0^2}{r_1^2} \right) \right],$$

formule qui pourra rendre compte des différences offertes par les élasticités moyennes de pièces extraites d'un même arbre dans diverses positions par rapport à l'axe des couches ligneuses. On pourra déterminer  $E_0$ , et  $E_0 - E_1$  ou  $E_1 - E_0$ , par plusieurs expériences de flexion, comme nous venons de dire dans une sous-note pour  $E$ , et  $e$ .

§ 8. *Les moments peuvent être pris autour de lignes ne passant pas par le centre de gravité. Cas où les forces ont une composante longitudinale totale.* — Observons encore (en revenant au cas d'homogénéité) que l'équation des moments est la même en prenant ceux-ci autour d'une ligne quelconque tracée sur la section  $\omega$  parallèlement à celle des fibres invariables; car soit  $d$  la distance de ces deux lignes, on a  $M = \int E \frac{v}{\rho} (v \pm d) d\omega$ , qui, eu égard à la propriété  $\int v d\omega = 0$  du centre de gravité, se réduit bien à

$$M = \frac{EI}{\rho}.$$

Et l'on a encore la même équation lorsque les forces extérieures ont une somme  $Q$  de composantes longitudinales; car, soit toujours appelé  $M$  le moment du couple qui résulte du transport de ces forces extérieures au centre de gravité de la section  $\omega$ , il faudra ajouter

81. Si la figure de la section est un rectangle (Fig. 2), dont  $b$  et  $c$  soient la largeur et la hauteur, la valeur du moment de résistance à la flexion est

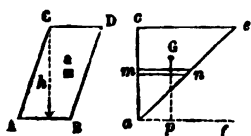
$$s = 2E \int_0^b du \int_0^{\frac{1}{2}c} dv \cdot v^2 = E \frac{bc^3}{12}.$$

Ainsi la résistance à la flexion est proportionnelle à la largeur et au cube de la hauteur du solide (\*).

(note du n° 21) une dilatation générale  $\frac{Q}{E\omega}$  des fibres à leurs dilatations individuelles  $\frac{v}{\rho}$ , ce qui donnera pour l'équilibre de rotation l'équation  $M \pm Qd = \int E \left( \frac{v}{\rho} + \frac{Q}{E\omega} \right) (v \pm d) d\omega$  se réduisant toujours à  $M = \frac{EI}{\rho}$ .

(\*) § 1. *Démonstration élémentaire. Méthode de M. Poncelet qui ramène les moments d'inertie à des moments statiques.*— La théorie de la résistance des solides a une telle importance pratique qu'elle est aujourd'hui enseignée dans les cours destinés à des ouvriers intelligents ayant seulement des notions de géométrie et de statique.

Aussi M. Poncelet a rendu élémentaire la détermination du moment



d'inertie d'une portion quelconque ABDC d'une section d'un solide, en remarquant que si, par l'axe AB du moment, supposé se projeter en  $a$  sur un plan qui lui est perpendiculaire, on fait passer un plan  $ae$  incliné à 45 degrés

sur celui  $ac$  de la figure ABDC, le moment d'inertie de celle-ci autour de AB ne sera autre chose que le moment ordinaire ou statique de l'onglet ou prisme tronqué  $ace$  que ces deux plans séparent du prisme droit élevé sur ABDC, ce moment statique étant pris par rapport au plan  $af$  perpendiculaire à la même figure et passant par l'axe AB ou  $a$ . En effet, le moment statique de chaque fibre  $mn = a \times v$  ayant pour base l'élément  $a$  de la section et pour hauteur  $mn = am = v$ , sera  $a \times v \times am = av^2$ , et leur somme est bien,



(Du n° 81).

si les accents désignent les autres éléments et leurs ordonnées,  $av^2 + a'v'^2 + \dots$  ou le moment d'inertie  $I$  que désigne aussi, dans le langage de l'analyse, l'intégrale  $\int v^2 d\omega$ , On n'a donc, pour obtenir le moment d'inertie  $I$ , qu'à multiplier le volume de l'onglet *ace* par la distance  $Gp$  de son centre de gravité au plan *ac* mené par l'axe perpendiculairement à la figure.

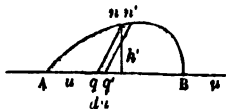
C'est aussi le double moment statique du même onglet par rapport au plan *ac* de la figure *ABCD* elle-même; car celui de la fibre *mn* est son volume  $av$  multiplié par la distance  $\frac{v}{2}$  de son centre de gravité au plan en question.

Or, quand la figure est un parallélogramme ayant une base  $b$  et une hauteur  $h$ , l'onglet *ace* est un prisme triangulaire ayant pour volume  $\frac{h^2}{2} b$ , et la distance  $Gp$  est  $= \frac{2}{3} h$ . On a donc bien, pour le moment  $I$  d'un parallélogramme  $b \times h$  autour de son côté  $b$ :

$$\frac{h^2}{2b} \cdot \frac{2}{3} h = \frac{bh^3}{3} = \omega \frac{h^2}{3};$$

d'où, pour le rectangle  $b \times c$  autour de sa médiane,  $I = \frac{b}{8} \left(\frac{c}{2}\right)^3 + \frac{b}{3} \left(\frac{c}{2}\right)^3 = \frac{bc^3}{12}$  comme au texte.

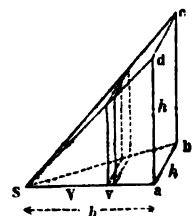
*Corollaire.* Toute figure *Ann'BA* terminée à l'axe *ABu* du moment, et par conséquent divisible par des parallèles très-rapprochées en petits trapèzes *qnn'q'* qu'on peut prendre pour des parallélogrammes  $du \times h'$  dont  $h'$  est la hauteur perpendiculaire répondant à l'ab-



cisse  $u$ , a pour moment d'inertie  $\int du \frac{h'^3}{3}$ .

§ 2. *Autre méthode.* — On peut encore, d'une manière très-élémentaire, sans invoquer les théorèmes de la statique, et en appelant, comme fait le même savant dans d'autres parties de ses cours,  $v$  l'élément ou accroissement infiniment petit de l'ordonnée, qu'il désigne alors (au lieu de  $v$ ) par une grande lettre  $V$ , dire que le moment d'inertie autour du côté  $AB = b$  (1<sup>re</sup> figure du § précédent) du parallélogramme *ABCD* supposé partagé en zones

( Du n° 81 ).



étroites  $b \times v$  parallèles à ce côté, sera  $b$  multiplié par la somme, des produits  $V^2v$  depuis  $V = 0$  jusqu'à  $V = h$ ; puis remarquer qu'une pareille somme n'est autre chose que celle des tranches ou le volume total d'une pyramide  $Sabcd$  ayant  $h$  pour hauteur  $Sa$  et pour base un carré dont le côté  $ad = ab$  est aussi  $h$ . Ce volume est  $\frac{1}{3} h^2 \cdot h$ , ce qui donne bien  $b \frac{h^3}{3}$  pour le moment d'inertie.

Lorsqu'on a à déterminer une somme de produits  $V^2v$  au lieu de  $V^3v$ , on peut prendre la somme des moments statiques  $V^2v \cdot V$  des tranches de la même pyramide par rapport à un plan mené au sommet parallèlement à la base, somme qui est égale au volume  $\frac{1}{8} h^2 h$  de la pyramide multiplié par la distance  $\frac{3}{4} h$  du centre de gravité à ce plan, ce qui donne  $\frac{h^4}{4}$ .

§ 8. Recherche élémentaire de la somme des produits des puissances d'une quantité variable par les accroissements successifs qu'elle prend entre deux valeurs extrêmes. — Le secours des théorèmes de géométrie ou de statique fait défaut lorsqu'on a à déterminer (comme nous serons dans le cas de faire pour des questions de torsion) une somme de produits  $V^{n-1}v$  où l'exposant  $n - 1$  excède 3. Mais on peut démontrer, d'une manière toujours assez élémentaire pour être donnée dans des cours d'arts et métiers, que cette somme est  $\frac{V_1^n}{n} - \frac{V_0^n}{n}$ ,  $V_0$  et  $V_1$  étant les valeurs initiale et finale de la quantité  $V$ : car, si l'on multiplie successivement  $(V + v)^2 - V^2 = 2Vv \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v}{V}\right)$ , qui se réduit à  $= 2Vv$  en négligeant  $\frac{1}{2} \frac{v}{V}$  devant 1, par  $V + v$ , on a, en faisant de semblables suppressions,  $(V + v)^3 - V^3 = 3V^2v$ , et ainsi de suite, en sorte que, généralement, l'accroissement de  $\frac{V^n}{n}$ , quand  $V$  s'accroît de  $v$ , est

82. Si cette figure (Fig. 3) est formée de deux triangles égaux, dont les côtés soient  $p$  et  $q$ , la valeur du moment dont il s'agit est

$$z = 2E \int_0^p du \int_0^q dv \cdot v^2 = E \frac{pq^3}{6} (*).$$

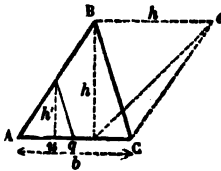
$V^{n-1}v$ ; et la somme de semblables accroissements successifs, lorsque  $V$  croît de  $V_0$  à  $V_1$ , ne peut-être que l'excès de la valeur finale  $\frac{V_1^n}{n}$  sur la valeur initiale  $\frac{V_0^n}{n}$  de cette quantité  $\frac{V^n}{n}$ .

§ 4. *Théorème général donnant le moment d'inertie  $I_1$  d'une figure quelconque  $\omega$  autour d'une droite quand on connaît le moment  $I$  autour de sa parallèle menée par le centre de gravité, ou réciproquement.* — Soit  $d$  la distance à laquelle la première droite passe du centre de gravité dans le plan de la figure dont l'aire est  $\omega$ , on a, comme on sait, la relation

$$I_1 = I + \omega d^2,$$

qui n'est autre chose que l'égalité  $\int (v \pm d)^2 d\omega = \int v^2 d\omega \pm 2d \cdot \int v d\omega + \omega \cdot d^2$ , eu égard à ce qu'on a  $\int v d\omega = 0$  si les ordonnées  $v$  sont les distances positives et négatives des éléments  $d\omega$  à la droite passant par le centre.

(\*) § 1. *Moment d'inertie d'un triangle quelconque ABC d'une hauteur  $h$  autour de sa base  $b$ .* — Ce sera, en



faisant  $h' = h \frac{u}{b}$  dans l'expression  $\int du \frac{h'^3}{3}$  du corollaire du § 1 de la note précédente,

$$I = \frac{h^3}{3b^3} \int_0^b u^3 du \quad \text{ou} \quad I = \frac{bh^3}{12} = \omega \frac{h^2}{6}$$

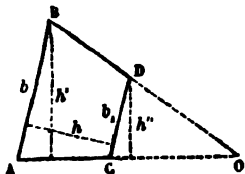
ou le produit de l'aire  $\omega$  par le sixième du carré de la hauteur  $h$ ; expression qui pouvait être trouvée sans parler d'intégration, d'après ce qu'on a dit aux §§ 2 et 3 de la même note.

On l'obtient encore, à la manière de M. Poncelet, en remarquant que l'onglet du § 1 de cette note du n° 81 est alors une pyramide eABC d'une hauteur eB =  $h$ , ou d'un volume  $\omega \frac{h}{3}$ , dont le centre de

(Du n° 52).

gravité, situé, comme on sait, au milieu de la droite qui joint les milieux de l'arête Be et de son opposée AC, est à une hauteur  $\frac{h}{2}$  au-dessus du plan mené par AC perpendiculairement au plan du triangle ABC, ou à une distance  $\frac{h}{4}$  de ce dernier plan, ce qui, en prenant les moments statiques des deux manières que nous avons dites, donne également  $\omega \frac{h}{3} \times \frac{h}{2}$  ou  $2 \cdot \omega \frac{h}{3} \times \frac{h}{4} = \omega \frac{h^2}{6}$  pour le moment d'inertie cherché.

§ 2. *Moment d'inertie d'un trapèze ABCD autour d'un de ses côtés non parallèles, les distances des deux sommets opposés B, D à ce côté AC étant h', h'' :*



$$I = \omega \frac{h'^2 + h''^2}{6}.$$

En effet, en prolongeant le côté BD jusqu'à sa rencontre en O avec celui AC aussi prolongé, et désignant par  $\omega'$ ,  $\omega''$  les aires des triangles OAB, OCD, on a  $\omega = \omega' - \omega''$  et  $I = \omega' \frac{h'^2}{6} - \omega'' \frac{h''^2}{6}$ ; or la similitude de ces deux triangles donne

$$\frac{\omega'}{\omega''} = \frac{h'^2}{h''^2}; \text{ d'où } \omega' = h'^2 \frac{\omega}{h'^2 - h''^2}, \omega'' = h''^2 \frac{\omega}{h'^2 - h''^2};$$

d'où, en substituant,  $I = \frac{\omega}{6} \frac{h'^4 - h''^4}{h'^2 - h''^2}$  ou l'expression qu'on a écrite ci-dessus.

§ 3. *Idem du même trapèze autour d'un de ses côtés parallèles AB = b, l'autre CD étant = b<sub>1</sub>, et leur distance = h. — Idem autour d'une parallèle passant par le centre de gravité. — Comme on peut le décomposer en un parallélogramme b<sub>1</sub> × h et en un triangle (b - b<sub>1</sub>) ×  $\frac{h}{2}$ , on aura (§ 1), autour de AB,  $I = b_1 h \frac{h^2}{3} + (b - b_1) \frac{h^3}{2 \cdot 6}$ ;*  
ou, comme  $\omega = \frac{b + b_1}{2} h$  :

$$I = \frac{b + 3b_1}{4} \frac{h^3}{3} = \omega \frac{h^2}{3} \cdot \frac{b + 3b_1}{2b + 2b_1}.$$

(Du n° 53).

Si l'on appelle  $k$  la distance, à la même base  $b$ , du centre de gravité du trapèze, on a, en posant une équation de moments statiques par rapport à cette base AB,

$$\omega k = b_1 h \cdot \frac{h}{2} + (b - b_1) \frac{h}{2} \cdot \frac{h}{3};$$

d'où

$$k = \frac{h^2}{\omega} \cdot \frac{b + 2b_1}{6} = h \frac{b + 2b_1}{3b + 3b_1}.$$

Le moment d'inertie autour d'une parallèle aux bases, menée par le centre de gravité, sera ainsi, en vertu du théorème général de la fin de la note du n° 81 :

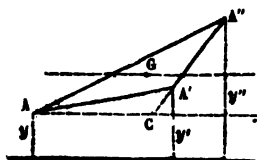
$$= \omega \frac{h^3}{3} \frac{b + 3b_1}{2b + 2b_1} - \omega k^2 = \frac{\omega h^3}{48} \left[ 1 + \frac{2bb_1}{(b + b_1)^2} \right] = \frac{h^3}{36} \frac{b^2 + 4bb_1 + b_1^2}{b + b_1}.$$

§ 4. *Moment d'inertie d'un triangle AA'A' autour d'une droite AC tracée dans son plan par un de ses angles, x' et x'' étant les distances des deux autres angles A', A'' à cette droite AC.*

On aura

$$I = \frac{\omega}{6} (x'^2 + x'x'' + x''^2);$$

car si C est le point de rencontre de cette droite avec le côté A''A' prolongé, et si AC = b, on a pour



l'aire du triangle  $\omega = b \frac{x''}{2} - b \frac{x'}{2}$ , d'où

$$b = \frac{2\omega}{x'' - x'}, \text{ et (§ 1) } I = b \frac{x''^2}{12} - b \frac{x'^2}{12} =$$

$$= \frac{2\omega}{12} \frac{x''^2 - x'^2}{x'' - x'}, \text{ expression identique}$$

avec l'autre.

§ 5. *Moment d'inertie du même triangle AA'A' autour d'une ligne menée dans son plan par son centre de gravité G.* — En vertu du théorème général de la fin de la note du n° 81, on aura le moment autour d'une parallèle à AC, menée par le centre, en retranchant  $\omega \left( \frac{x' + x''}{3} \right)^2$ , ce qui donne

$$\frac{\omega}{48} (x'^2 - x'x'' + x''^2).$$

(Du n° 50).

D'où l'on déduit, en faisant  $x' = y' - y$ ,  $x'' = y'' - y$ , pour le moment d'inertie d'un triangle autour d'une ligne menée par son centre de gravité parallèlement à une autre ligne quelconque qui passe dans son plan à des distances  $y, y', y''$  des trois sommets :

$$\frac{\omega}{18} (y^2 + y'^2 + y''^2 - y'y'' - y''y - yy').$$

§ 6. *Idem* autour de cette ligne tirée d'une manière quelconque dans son plan. — On l'aura en ajoutant  $\omega \left( \frac{y + y' + y''}{3} \right)^2$ , ce qui donne

$$\frac{\omega}{6} (y^2 + y'^2 + y''^2 + y'y'' + y''y + yy'),$$

expression qui se réduit à

$$\frac{\omega}{12} (y^2 + y'^2 + y''^2), \text{ si } y + y' + y'' = 0$$

ou si la ligne dont les distances aux sommets sont  $y, y', y''$  passe par le centre de gravité; et à

$$\frac{\omega}{2} h^2 \text{ si } y = 0, y' = y'' = h$$

ou si l'on prend le moment autour d'une parallèle à la base, menée par le sommet opposé.

§ 7. *Applications.* — Ces formules donnent des éléments de calcul commodes pour les moments d'inertie de figures polygonales en les divisant en triangles et en parallélogrammes ou en trapèzes.

Ce serait naturellement le lieu d'en donner l'application aux diverses formes de sections à côtes ou à nervures, etc. Nous préférons en renvoyer le tableau, raisonné et comparé, à la note du n° 120, art. IV, où il sera question de la résistance à la rupture par flexion.

83. Si la figure de la section transversale est un rectangle dont les côtés soient  $b$ ,  $c$ , et si l'axe horizontal contenant les fibres invariables forme l'angle  $\varphi$  avec le côté  $b$ , on aura pour le moment de la résistance à la flexion

$$\epsilon = E \frac{b^3 c \sin^3 \varphi + bc^3 \cos^3 \varphi}{12}.$$

Ainsi, une pièce à base carrée résiste également dans tous les sens à la flexion. De plus, la base étant rectangulaire, et  $b$  étant le plus grand côté, la moindre valeur du moment a lieu lorsque la pièce fléchit dans le sens du côté  $c$  (\*).

(\*) § 1. *Erreur où conduirait la formule du n° 83. Condition pour que le plan de flexion soit le même que le plan de sollicitation à fléchir.* — Cette formule  $\epsilon = \dots$  du texte non-seulement est sans usage, mais même, bien qu'exprimant exactement le produit de  $E$  par le moment d'inertie du rectangle autour d'une droite oblique à ses côtés, elle doit être regardée comme fautive si l'on entend qu'elle donne une valeur à mettre à la place de  $\epsilon$  dans les formules des n° 86 à 90 pour avoir la courbe du solide et sa flèche de flexion  $f$ .

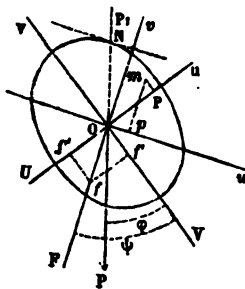
L'erreur à laquelle elle prête et où sont tombés plusieurs auteurs consiste à penser que le *plan de flexion*, auquel la ligne des fibres invariables est perpendiculaire, coïncide toujours avec le *plan où la pièce est sollicitée à fléchir*, c'est-à-dire le plan du plus grand moment  $M$  (§ 1 de la note du n° 80) des forces extérieures autour de droites tracées sur les sections, ou le plan qui passe par l'axe de la pièce et par celle des normales autour de laquelle le moment est nul.

C'est donc ici le lieu de montrer ce que nous avons dû énoncer d'avance à une note du n° 77 et au commencement du § 6 de la note du n° 80, à savoir que, pour que ces deux plans de *flexion* effective et de *sollicitation* à fléchir aient la même direction, une condition est nécessaire, celle que le *plan de sollicitation* soit *parallèle à l'un des axes principaux d'inertie des sections du prisme*. En effet, pour qu'il y ait équilibre de rotation entre les forces intérieures longitudinales  $Ed\omega \frac{v}{\rho}$  (note du n° 80) s'exerçant à travers la section  $\varphi$ , et les forces extérieures sollicitant la partie du prisme entre

( Du n° 33 ).

cette section et une extrémité, il ne suffit pas qu'on ait l'équation  $M = \frac{E}{\rho} \int v^2 d\omega$ , exprimant que leurs moments autour de la ligne des fibres invariables sont égaux, il faut encore, au moins, comme l'a remarqué le premier M. Persy (*Cours à l'École d'artillerie et du génie*, lithographié à Metz en 1834, n° 41 et 42, p. 24), une équation entre les moments autour d'une perpendiculaire à cette ligne, tracée aussi sur la section  $\omega$ , c'est-à-dire autour du rayon  $\rho$  prolongé. Or si le moment des forces extérieures est supposé nul autour de cette perpendiculaire ou de ce rayon, on doit avoir,  $u$  étant les distances des éléments  $d\omega$  à cet axe des  $v$ ,  $\int \frac{E}{\rho} v d\omega \cdot u = 0$ , d'où  $\int_0^\omega u v d\omega = 0$ , ce qui caractérise les axes principaux d'inertie.

§ 2. Détermination de la grandeur et de la direction de la flexion lorsque cette condition de parallélisme du plan de sollicitation à l'un des axes principaux d'inertie des sections n'est pas remplie. — Alors il n'y a pas lieu de chercher à poser une équation de moments autour de la ligne des fibres invariables, qui n'est pas connue *a priori*. C'est (comme on l'a montré pour la première fois à un mémoire inséré aux *Comptes rendus de l'Académie* les 30 octobre et 6 novembre 1843, t. XVII, p. 946 et 1024) autour des deux axes principaux d'inertie de la section  $\omega$  qu'il convient d'exprimer l'équilibre de rotation pour arriver à déterminer la grandeur du rayon de courbure  $\rho$ , ainsi que sa direction ou celles de la ligne des fibres invariables et du plan de flexion, et par suite, les conditions de résistance.



Prenons pour coordonnées  $u, v$  d'un point ou élément  $m$  quelconque de la section ses distances  $Op = u, mp = v$  à ces axes  $VOv, UOu$  passant par le centre de gravité  $O$ ; et soient

$I' = \int v^2 d\omega, I'' = \int u^2 d\omega$  ses moments d'inertie principaux, ou autour de ces deux axes; on supposera généralement  $I' > I''$ ;

$\varphi$  l'angle aigu  $POV$  qui fait le plan de sollicitation  $P_1OP$ , avec l'axe  $Ov$  prolongé;



(Du n° 33).

$\psi$  celui  $vOv$  que fait aussi, avec l'axe  $Ov$ , le plan encore inconnu de flexion  $FOt$ , ou l'angle égal  $uOz$  de la ligne des fibres invariables  $Oz$  avec l'axe principal  $Ou$  ;

$v$ , comme ci-dessus, les distances  $mp$  des points ou éléments  $m$  à cette ligne  $Oz$  des fibres invariables ;

Nous avons  $mp = mp \cos \psi + Op \sin \psi$ , d'où pour la tension de la fibre ayant sa base en  $m$ ,

$$\frac{E}{\rho} v d\omega = \frac{E}{\rho} (v \cos \psi + u \sin \psi) d\omega,$$

Multipliant successivement par les bras de levier  $v$  et  $u$ , pour substituer dans les équations  $M \cos \varphi = \int \frac{E}{\rho} v d\omega \cdot v$ ,  $M \sin \varphi = \int \frac{E}{\rho} v d\omega \cdot u$  de l'équilibre de rotation autour des axes principaux  $Ou$ ,  $Ov$ , on a, en effectuant et ayant égard à  $\int v u d\omega = 0$  :

$$M \cos \varphi = \frac{EI'}{\rho} \cos \psi, \quad M \sin \varphi = \frac{EI''}{\rho} \sin \psi.$$

Si l'on divise ces deux équations l'une par l'autre on obtient une nouvelle équation, et l'on en a encore une en ajoutant les carrés après les avoir divisées respectivement par  $I'$  et  $I''$ . On trouve ainsi les expressions

$$\tan \psi = \frac{I'}{I''} \tan \varphi, \quad \frac{1}{\rho} = \frac{M}{E} \sqrt{\frac{\cos^2 \varphi}{I'^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{I''^2}},$$

dont la première donne la direction du plan de flexion affective ou celle de la ligne des fibres invariables, perpendiculaire à ce plan ; la seconde donne la courbure prise par l'axe du prisme.

§ 3. Construction au moyen de l'ellipse d'inertie. — Si l'on trace dans le plan de la section l'ellipse connue dont les demi-axes, portés sur  $Ou$ ,  $Ov$ , sont proportionnels aux inverses  $\frac{1}{\sqrt{I'}}$ ,  $\frac{1}{\sqrt{I''}}$  des racines carrées des moments d'inertie autour de ces lignes, et dont l'équation est par conséquent  $I'u^2 + I''v^2 =$  une constante quelconque, et si l'on y mène une tangente par le point  $N$  où elle est rencontré

(Du n° 88).

par le plan  $PP_1$ , cette tangente sera parallèle à la ligne des fibres invariables  $Ou$ , car l'équation de l'ellipse donne le coefficient différentiel  $\frac{dv}{du} = -\frac{I'}{I''} \frac{u}{v}$  qui est égal à  $-\tan \psi$  au point  $N$  pour lequel on a le rapport  $\frac{u}{v} = \tan \varphi = \frac{I''}{I'} \tan \psi$ . La ligne des fibres invariables est donc le diamètre conjugué à celui suivant lequel le plan de sollicitation coupe le plan de l'ellipse; théorème qui a été trouvé en 1854 par M. Bresse à peu près en même temps que par nous, sous deux formes différentes (1).

La déviation  $\psi - \varphi$  du plan de flexion, ou son angle avec le plan de sollicitation, est à son maximum quand ce dernier plan passe par l'une des diagonales du rectangle circonscrit à l'ellipse d'inertie; et alors la ligne des fibres invariables est l'autre diagonale.

La même chose a lieu lorsque le contour de la section est le rectangle lui-même.

§ 4. Détermination de la courbe d'axe ou de la flèche de flexion (comme complément anticipé aux n° 86 à 89). — La courbe d'axe s'obtiendra, comme dans le cas simple de flexion non déviée supposé tacitement aux n° 86 à 89 ci-après, soit en égalant l'expression de  $\frac{1}{\rho}$  du § 2 à  $\frac{d^2y'}{dx^2}$ ,  $y'$  étant une coordonnée transversale prise dans le plan de flexion qu'on a déterminé et intégrant après avoir mis pour le moment  $M$  sa valeur en fonction de la coordonnée longitudinale  $x$ ; soit, plus simplement, en appelant  $y, z$ , deux coordonnées transversales perpendiculaires aux axes des moments principaux  $I'$  et  $I''$  et posant  $\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{M \cos \varphi}{EI'}$ ,  $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M \sin \varphi}{EI''}$  pour les courbures  $\frac{\cos \psi}{\rho}$ ,  $\frac{\sin \psi}{\rho}$  des projections de la courbe d'axe sur les plans  $xz, xy$  de plus difficile et de plus facile flexion; ce qui, en intégrant, donnera les équations de ces projections, qui seront semblables à celles des n° 86 et 89, sauf les facteurs  $\cos \varphi$  et  $\sin \varphi$  dont on affectera le poids  $P$  ou  $p$ .

(1) Recherches sur la flexion des pièces courbes, 1854. — Bulletin de la Société philomathétique, addition à la séance du 8 juillet 1854, p. 74; ou Journal l'Institut, 16 novembre.

(Du n° 83).

La flèche de courbure  $f$  est résultante de celles que feraient prendre séparément, à la pièce, les charges  $P \cos \varphi$ ,  $P \sin \varphi$  agissant perpendiculairement aux axes principaux de la section ; c'est donc (n° 86 ci-après), si la longueur de la pièce est  $a$  et si elle est encastree au bout opposé à celui où la charge  $P$  est supposée agir transversalement, la diagonale du rectangle formé sur les flèches composantes

$$f' = \frac{P \cos \varphi \cdot a^3}{3EI'}, \quad f'' = \frac{P \sin \varphi \cdot a^3}{3EI''}$$

respectivement perpendiculaires aux axes des moments  $I'$  et  $I''$ , ce qui donne :

$$\text{Une flèche } f = \frac{Pa^3}{3E} \sqrt{\frac{\cos^2 \varphi}{I'^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{I''^2}} = \frac{a^2}{3\rho_m}, \quad (\rho_m \text{ étant } \rho \text{ pour } x=0),$$

$$\text{Une descente verticale } f' \cos \varphi + f'' \sin \varphi = \frac{Pa^3}{3E} \left( \frac{\cos^2 \varphi}{I'} + \frac{\sin^2 \varphi}{I''} \right),$$

$$\text{Une déviation horizontale } f'' \cos \varphi - f' \sin \varphi = \frac{Pa^3 \sin \varphi \cos \varphi}{3E} \left( \frac{1}{I''} - \frac{1}{I'} \right).$$

On étendra facilement ces formules au cas d'une pièce posée sur deux appuis, et sollicitée à la fois comme aux n° 87 et 90.

§ 5. *Application à une section rectangle. Évaluation des erreurs auxquelles donnerait lieu l'usage de la formule  $\epsilon = \dots$  du texte du n° 83.* — Pour une section rectangle  $b \times c$ , où  $I' = \frac{bc^3}{12}$ ,  $I'' = \frac{b^3c}{12}$ , le rapport de la flèche effective  $f$  à celle qu'on aurait par la formule  $\frac{Pa^3}{3E}$

avec la valeur de  $\epsilon$  du texte, est  $\left( \frac{\cos^2 \varphi}{b^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{c^2} \right) \sqrt{b^2 \cos^2 \varphi + c^2 \sin^2 \varphi}$ , ou  $\frac{(b^2 + c^2) \sqrt{2b^2 + 2c^2}}{4b^2c^2}$  si l'angle  $\varphi$  est demi-droit. Ce rapport est res-

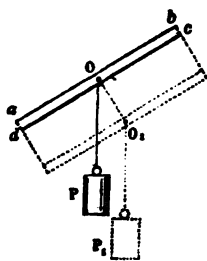
pectivement 1,257, 1,822, 3,557, lorsque l'un des côtés est 1 fois 1/2, 2 fois, 3 fois l'autre, en sorte que notre formule révèle des flexions contre lesquelles on ne serait point en garde d'après celles du texte.

§ 6. *Observation pour les pièces droites non prismatiques. Double courbure et torsion prises.* — On verra à l'article VII de la section IV

(Du n° 88).

(surtout aux n° 498-507) que l'on peut appliquer approximativement les formules fondamentales relatives aux prismes à des pièces allongées non prismatiques. Mais si les sections transversales n'ont pas leurs axes principaux tous compris dans deux plans rectangulaires passant par l'axe longitudinal de la pièce, le plan de flexion effective changera d'une section à l'autre. L'axe de la pièce, bien que supposé primitivement rectiligne, prendra une double courbure, et il y aura, en même temps, torsion, quoique la pièce ne soit sollicitée en quelque sorte qu'à la flexion, ou par une force n'ayant de moment qu'autour de droites transversales. On a traité ce cas général aux *Comptes rendus de l'Académie*, 30 octobre et 6 novembre 1843, 1<sup>er</sup> et 15 juillet 1844, (t. XVII, p. 951, 1020, et XVIII, p. 40 et 135) ou à des *Mémoires sur la résistance des solides*, in-4°, 1844.

§ 7. On peut présenter d'une manière très-élémentaire la théorie ci-dessus de la flexion oblique ou déviée. — Pour cela, une expérience bien simple convaincra d'abord que la flexion ne s'opère pas toujours dans le plan de sollicitation à fléchir. Qu'une pièce très-



mince, telle qu'une lame de fer-blanc, dont l'axe horizontal se projette en O et dont les faces sont inclinées à l'horizon, soit sollicitée, à l'extrémité opposée à celle qui est encastree, par une force OP verticale et agissant par conséquent dans un sens oblique aux côtés de la section *abcd*; l'axe O ne s'infléchira pas dans le plan OP passant par sa direction primitive et par celle de la force, mais sensiblement dans le plan OO<sub>1</sub>, perpendiculaire aux grands côtés *ab*, *dc*, comme si la force P avait agi dans la direction OO<sub>1</sub>, perpendiculaire au plan de la lame.

La raison de ce fait se conçoit facilement en général.

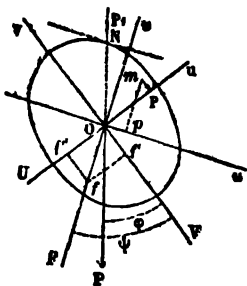
Dans tout prisme dont la section transversale n'a pas, comme le cercle et le carré, des moments d'inertie égaux autour de toutes les droites qu'on y trace par son centre de gravité, il y a un plan de plus facile flexion et un plan de plus difficile flexion. Ce sont les plans perpendiculaires respectivement aux axes autour desquels le mo-

(Du n° 83).

ment d'inertie est le plus petit et le plus grand. Si le plan de sollicitation passe entre les deux, la flexion effective s'opère aussi dans un plan intermédiaire, mais, on le comprend, *plus rapproché du plan de plus facile flexion* que n'était le plan de sollicitation ; en sorte que la ligne des fibres invariables ne sera point perpendiculaire à celui-ci comme elle l'est quand la pièce est sollicitée à *plat* ou *de champ*, c'est-à-dire dans le plan de plus facile ou le plan de plus difficile flexion.

§ 8. *Démonstration simple des propriétés des axes principaux.*—

On peut prouver d'une manière facile, sans parler d'ellipse ni de lignes trigonométriques, que ces deux plans, ou les deux axes de plus grand et de plus petit moment d'inertie sont perpendiculaires entre eux et donnent  $\int uvdw = 0$ , ou (élémentairement) une somme nulle  $auv + a'u'v' + \dots = 0$  des produits des éléments  $a$  de la section  $A$  par les coordonnées qui leur sont parallèles. En effet, si l'on prend d'abord quelconques les deux axes rectangulaires des coordonnées  $u$  et  $v$  et si on les fait tourner autour de l'origine  $O$ , cette somme  $auv + \dots$  reprendra évidemment la même valeur avec signe contraire après chaque rotation d'un quart de circonférence, d'où il suit qu'elle passe par zéro pour une certaine position de ces axes rectangulaires ainsi que pour celle qui résulte de leur simple permutation dans les mêmes directions. Or si  $l'$ ,  $l''$



sont les moments d'inertie relatifs aux axes ainsi dirigés, et  $I_1$  le moment autour d'une autre droite dont une longueur  $r$  a pour projections  $y$  et  $z$  sur ces axes particuliers des  $u$  et des  $v$ , la distance  $mp$  d'un élément  $m$  à cette droite  $Ou$  est  $v \frac{y}{r} + u \frac{z}{r}$ ; d'où, en faisant la somme des produits des éléments par les carrés  $\left( v \frac{y}{r} + u \frac{z}{r} \right)^2$  développés, et

en ayant égard à  $auv + a'u'v' + \dots = 0$  :

$$I_1 = l' \frac{y^2}{r^2} + l'' \frac{z^2}{r^2}$$

(Du n° 33).

ou  $I_1 = I'' + (I' - I'') \frac{y^2}{r^2} = I' - (I' - I'') \frac{z^2}{r^2}$  qui montre bien : 1° que l'et l''

sont nécessairement l'un le plus petit, l'autre le plus grand moment; 2° que dans le cas particulier où ces deux *moments principaux* ont la même grandeur, tous les autres leur sont aussi égaux.

§ 9. *Direction et grandeur de la courbure, déterminés élémentairement.* — Les axes principaux étant ainsi reconnus (voir §§ 10 et 11), on peut déterminer *élémentairement* la grandeur et la direction de la courbure  $\frac{1}{\rho}$  en appelant  $M'$ ,  $M''$  les moments des forces extérieures autour de ces axes, ce qui donne ces deux équations d'équilibre avec les forces intérieures  $aE \frac{v}{\rho} = a \frac{E}{\rho} \left( v \frac{y}{r} + u \frac{z}{r} \right)$  s'exerçant à travers les éléments  $a$ ,  $a' \dots$  de la section :

$$M' = \frac{E}{\rho} \left[ \frac{y}{r} (av^2 + a'v'^2 + \dots) + \frac{z}{r} (auv + a'u'v' + \dots) \right],$$

$$M'' = \frac{E}{\rho} \left[ \frac{y}{r} (auv + a'u'v' + \dots) + \frac{z}{r} (au^2 + a'u'^2 + \dots) \right],$$

se réduisant à  $M' = \frac{EI'}{\rho} \frac{y}{r}$ ,  $M'' = \frac{EI''}{\rho} \frac{z}{r}$ ; d'où  $\frac{z}{y} = \frac{I'}{I''} \frac{M''}{M'}$

et

$$\frac{E}{\rho} = \sqrt{\left(\frac{M'}{I'}\right)^2 + \left(\frac{M''}{I''}\right)^2}.$$

On fait encore mieux sentir la raison de ce qui se passe en considérant le prisme comme éprouvant simultanément deux flexions sous l'action des moments composants  $M'$ ,  $M''$ ; l'une donnant une courbure  $\frac{1}{\rho'} = \frac{M'}{EI'}$  autour d'un des deux axes principaux de la section, l'autre une courbure  $\frac{1}{\rho''} = \frac{M''}{EI''}$  autour du second axe, et produisant ainsi des déplacements à composer géométriquement ensemble d'après le principe de superposition du § 2 de la note du n° 21. Il est évident ainsi que le plan de la courbure résultante  $\frac{1}{\rho}$  devra se rapprocher plus de celui du moment  $M''$  que ne faisait le plan du

(Du n° 63).

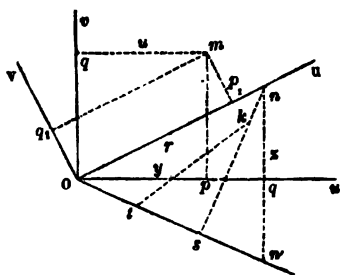
moment résultant  $M$  si l'on a  $I'' < I'$ . On obtient cette courbure résultante et son plan en considérant qu'en général le déplacement transversal  $BB_1$  de l'extrémité  $B$  d'une très-petite ligne  $AB$  qui s'est courbée en arc de cercle  $AB_1$  tangent en  $A$  à sa direction primitive, s'obtient en divisant le carré de sa longueur par le double  $AD$  du rayon, à cause des deux triangles rectangles semblables  $ABB_1$ ,  $AB_1D$ ; d'où il suit que si une petite longueur  $s$  de l'axe de la pièce (voyez fig. p. 58), se projetant en  $O$  avant la flexion, s'est courbée de manière que sa deuxième extrémité se soit déplacée de  $Oj' = \frac{s^2}{2\rho'}$  dans le sens  $OV$ , et de  $Oj'' = \frac{s^2}{2\rho''}$  dans le sens  $OU$ , on aura

pour le déplacement résultant la diagonale  $Oj = \frac{s^2}{2} \sqrt{\frac{1}{\rho'^2} + \frac{1}{\rho''^2}}$  d'où, comme ci-dessus, pour la *grandeur* et la *direction* de la courbure

$$\frac{1}{\rho} = \sqrt{\frac{1}{\rho'^2} + \frac{1}{\rho''^2}} = \frac{1}{E} \sqrt{\left(\frac{M'}{I'}\right)^2 + \left(\frac{M''}{I''}\right)^2}, \quad \text{tang FOV} = \frac{Oj''}{Oj'} = \frac{M''}{M'} \frac{I'}{I''}$$

Cette théorie sera complétée à la note du n° 417, en ce qui regarde l'établissement des conditions de résistance à la rupture éloignée.

§ 10. *Détermination des axes et des moments principaux des figures planes.* — On voit toujours qu'il importe de savoir trouver



les directions des axes principaux d'inertie d'une figure donnée. Rapportons pour cela ses éléments  $m$  ou  $d\omega$  à deux axes rectangulaires coordonnés quelconques  $Ou$ ,  $Ov$ , et calculons pour ces axes,  $\int v^2 d\omega = I_1$ ,  $\int u^2 d\omega = I_2$ ,  $\int uv d\omega = K$ ; on aura, en raisonnant comme au § 8, pour le moment  $I$  autour

d'une droite inclinée  $Ou$ , dont une portion  $On = r$  a pour projections  $Oq = y$ ,  $qn = z$  sur ces axes,  $I = \int \left( v \frac{y}{r} - u \frac{z}{r} \right)^2 d\omega$ , ou

(Du n° 53).

$$I = I_1 \frac{y^2}{r^2} - 2K \frac{yz}{r^2} + I_2 \frac{z^2}{r^2} = \frac{I_2 + I_1}{2} - \left( \frac{I_2 - I_1}{2} \frac{y^2 - z^2}{r^2} + K \frac{2yz}{r^2} \right).$$

Or, si l'on prolonge  $nq$  de  $qn' = nq$ , la perpendiculaire  $ns$  abaissée de  $n$  sur  $On'$  a pour longueur 2 fois la projection de  $nq = z$  sur sa direction, et la distance  $Os$  de son pied à l'origine a pour longueur la projection de  $y$  moins la projection de  $z$  sur  $On'$ ; d'où l'on conclut que  $Os = y \frac{y}{r} - z \frac{z}{r}$ ,  $ns = 2z \frac{y}{r}$ , ou

$$\frac{Os}{On} = \frac{y^2 - z^2}{r^2}, \quad \frac{ns}{On} = \frac{2yz}{r^2};$$

en sorte que la parenthèse de l'expression de  $I$  représente la somme des projections, sur  $Onu$ , de deux longueurs  $st = \frac{I_2 - I_1}{2}$ ,  $sk = K$  portées respectivement sur  $sO$  et sur  $sn$ . Cette somme est la plus grande possible quand l'hypoténuse  $tk$  est parallèle à  $On$ , et sa grandeur est alors  $tk$  elle-même. On a donc, en vertu de ce raisonnement tout élémentaire (où l'on peut se passer de signe d'intégration comme au § 8), pour déterminer la direction d'un axe principal  $Ou$  et la grandeur d'un des deux moments d'inertie principaux, qui serait ici le plus petit :

$$\frac{ns}{Os} = \frac{2K}{I_2 - I_1}, \quad I = \frac{I_2 + I_1}{2} - \sqrt{\left[ \frac{I_2 - I_1}{2} \right]^2 + K^2}.$$

En donnant le signe + au radical, on a l'autre moment principal; car, pour un axe  $Ov$  perpendiculaire à  $Ou$  on aurait des rapports  $\frac{y}{r}$ ,  $\frac{z}{r}$  égaux respectivement aux valeurs des rapports  $\frac{-z}{r}$ ,  $\frac{y}{r}$  relatifs à  $Ou$ , ce qui simplement change le signe de la parenthèse. On reconnaît, au reste, dans le rapport  $\frac{ns}{Os}$  la tangente du double de l'angle que fait soit  $Ou$  soit  $Ov$  avec l'axe primitif  $Ou$ .

§ 11. *Théorèmes pour le calcul facile de  $K = \int uv dw$ .* — Il faut, comme on voit, pour déterminer ces directions et grandeurs des moments principaux, savoir calculer l'intégrale  $\int_0^\omega uv dw$  pour une figure quelconque. On y parviendra facilement en la décomposant



(Du n° 33).

en rectangles et en triangles rectangles et se servant des trois théorèmes suivants, analogues à ceux que nous avons donnés pour le calcul facile des moments d'inertie (1).

1°. L'intégrale  $K = \int uv d\omega$ , pour des axes et pour une figure quelconques, est égale à la même intégrale pour la même figure et pour des axes parallèles dont un au moins passe par son centre de gravité, plus le produit  $\omega u_0 v_0$  de son aire  $\omega$  par les coordonnées  $u_0, v_0$  de ce centre rapporté aux anciens axes (2).

2°. Cette intégrale  $K$  est nulle pour un rectangle ayant ses côtés parallèles à des axes des  $u, v$  dont un au moins passe par son centre et, plus généralement, pour toute figure symétrique par rapport à l'un des deux axes (3).

3°. Pour un triangle rectangle dont l'aire est  $\omega$  et dont le centre de gravité est sur l'un des deux axes supposés parallèles aux côtés de l'angle droit, on a

$$K = \mp \frac{\omega^2}{18},$$

le signe — devant être pris quand les sens des  $u, v$  positifs sont ceux des côtés de l'angle droit pris à partir de cet angle, ou leur sont tous deux opposés, et le signe inférieur + devant être adopté quand un seul des deux demi-axes positifs a le même sens que le côté qui lui est parallèle (4).

(1) Société philomathique, 13 déc. 1856, ou Journal *l'Institut*, 31 décembre.

(2) Car si  $u', v'$  sont les coordonnées par rapport à des axes parallèles passant tous deux par le centre de gravité, on a  $K = \int (u' + u_0)(v' + v_0) d\omega$  qui, en vertu de  $\int u' d\omega = 0, \int v' d\omega = 0$ , est bien égal à  $\int u'v' d\omega + \omega u_0 v_0$ ; et on a la même chose si un seul des deux axes parallèles passe par le centre, puisque  $\int u'v' d\omega$  ne change pas lorsqu'on ajoute une constante, soit à  $u'$ , soit à  $v'$ .

(3) Car elle se compose de termes  $uv d\omega$  égaux deux à deux au signe près.

(4) Car si l'on prend d'abord pour origine l'un des deux angles aigus, pour axe des  $u$  le côté adjacent tiré de là à l'angle droit, et pour axe des  $v$  une parallèle à l'autre côté tiré à partir de l'angle droit, l'intégrale  $K$  relative au triangle est évidemment moitié de celle relative au rectangle double, ayant l'hypoténuse pour diagonale. Or celle-ci, en vertu des 1<sup>er</sup> et 2<sup>o</sup> théorèmes, aura pour grandeur,  $b$  et  $c$  étant les côtés,  $bc \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{c}{2} = \left(\frac{bc}{2}\right)^2$ . Donc, pour le triangle, on a

$K = \frac{\omega^2}{2}$ . D'où, par le 1<sup>er</sup> théorème, en prenant des axes parallèles dont un au moins passe par son centre,  $K = \frac{\omega^2}{2} - \omega \cdot \frac{2b}{3} \cdot \frac{c}{3} = \pm \frac{\omega^2}{18}$ , expression dont il faudra changer évidemment le signe quand on changera le sens d'un des deux axes.

84. Lorsque la figure de la section transversale (Fig. 4) est un cercle dont  $r$  est le rayon, l'expression générale du moment  $s$  devient

$$\begin{aligned} s &= 2E \int_{-r}^r du \int_0^{\sqrt{r^2-u^2}} dv \cdot v^2 = 2E \int_{-r}^r du \cdot \frac{1}{3} (r^2 - u^2)^{\frac{3}{2}} = \\ &= 2E \cdot 2 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} dx \cdot \frac{r^3}{3} \sin^3 x = E \frac{\pi r^4}{4}. \end{aligned}$$

On conclut de ce qui précède que les résistances à la flexion du carré et du cercle qui lui est inscrit sont entre elles dans le rapport de 1 à  $\frac{3\pi}{16}$  (\*).

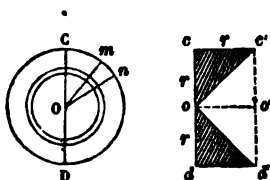
(\*) § 1. *Détermination plus simple du moment d'inertie du cercle.*

— On obtient plus facilement ce résultat en remarquant, avec feu M. l'ingénieur en chef de Guillebon (Cours lithographié, 1840-1841), que les moments d'inertie autour de tous les diamètres sont égaux et qu'on a ainsi, pour le cercle,  $\int v^2 d\omega = \frac{1}{2} \int (u^2 + v^2) d\omega =$  la moitié du moment d'inertie dit *polaire* (M. Persy)  $\int z^2 d\omega$  de la section autour de son centre,  $z$  étant la distance du centre à l'élément  $d\omega$ . Or ce dernier moment, en réunissant ensemble tous les éléments pour lesquels  $z$  est le même et qui forment une couronne d'épaisseur  $dz$  et de superficie  $2\pi z dz$ , peut être mis sous la forme  $2\pi \int_0^r z^2 dz$  et est égal à  $2\pi \frac{r^3}{3}$ . On a donc pour le moment autour d'un diamètre

$$I = \frac{\pi r^4}{4}.$$

§ 2. *Sa détermination élémentaire.* — Bien que l'intégrale  $\int z^2 dz$  puisse être présentée et calculée élémentairement comme nous avons dit au § 2 de la note du n° 81, on peut aussi, et d'une manière plus complètement géométrique, appliquer à la détermination du moment d'inertie autour du centre une méthode analogue à celle qu'emploie M. Poncelet (même note) pour les moments autour de

(Du n° 84).



droites. On n'a qu'à imaginer qu'en chaque point de la section l'on ait élevé sur son plan une perpendiculaire égale à la distance de ce point au centre; on aura ainsi formé un solide dont la coupe, par un plan COD, est  $cc'od'd$  et qui, pour le cercle, n'est autre chose qu'un cylindre droit évidé

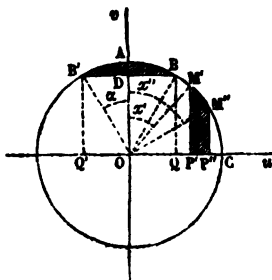
par un cône  $c'o'd'$  de même base et de même hauteur. La somme des produits des éléments de ce solide par leurs distances à son axe  $oo'$  sera le moment d'inertie polaire cherché; or il est divisible en autant de pyramides  $Omn$  à base rectangulaire  $mn \times cc' = mn \times r$  que la circonférence contient d'arcs élémentaires  $mn$ . La somme des produits dont on vient de parler, pour les éléments de cette petite pyramide, n'est autre chose que son moment statique par rapport à un plan mené par O parallèlement à sa base; elle a donc pour valeur le volume  $mn \times r \cdot \frac{r}{3}$  multiplié par la distance  $\frac{3}{4}r$  de son centre de gravité à ce plan, ou

$$\frac{1}{4} r^3 \times mn;$$

et tel est le moment polaire du petit secteur dont l'arc est  $mn$ .

Ajoutant ceux de tous les secteurs, on a pour tout le cercle  $\frac{1}{4} r^3 \times 2\pi r$ , comme ci-dessus.

§ 3. Moment d'inertie, moment statique et aire de portions d'un cercle de rayon  $r$ . On les obtient par une intégration comme celle du texte.



1° Soit la portion  $P'M'M''P''$  comprise entre l'arc  $M'M'' = r(x'' - x')$  et les deux ordonnées

$$M'P' = r \cos x', \quad M''P'' = r \cos x''$$

perpendiculaires au diamètre  $OCu$  par rapport auquel on prend les moments, On aura

(Du n° 84).

$$\text{Aire } \omega = \int_{r \sin x'}^{r \sin x''} d(r \sin x) \cdot r \cos x = r^2 \int_{x'}^{x''} dx \cdot \cos^2 x = r^2 \left( \frac{\sin x'' \cos x''}{2} + \frac{x''}{2} - \frac{\sin x' \cos x'}{2} - \frac{x'}{2} \right),$$

$$\begin{aligned} \text{Moment statique} \int d(r \sin x) \frac{(r \cos x)^2}{2} &= \frac{r^3}{2} \int_{x'}^{x''} dx \cdot \cos^3 x = \\ &= \frac{r^3}{2} \left( \frac{\sin x'' \cos^2 x''}{3} + \frac{2 \sin x''}{3} - \frac{\sin x' \cos^2 x'}{3} - \frac{2 \sin x'}{3} \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Moment d'inertie} \int d(r \sin x) \frac{(r \cos x)^3}{3} &= \frac{r^4}{3} \int_{x'}^{x''} dx \cdot \cos^4 x = \\ &= \frac{r^4}{3} \left( \frac{\sin x'' \cos^3 x''}{4} + \frac{3 \sin x'' \cos x''}{4} + \frac{3}{4 \cdot 2} x'' - \frac{\sin x' \cos^3 x'}{4} - \frac{3 \sin x' \cos x'}{4} - \frac{3}{4 \cdot 2} x' \right) = \\ &= \frac{r^4}{3} \left[ \frac{3}{8} (x'' - x') + \frac{1}{4} (\sin 2x'' - \sin 2x') + \frac{1}{32} (\sin 4x'' - \sin 4x') \right]. \end{aligned}$$

2° Même portion lorsque les extrémités M', M'' de l'arc sont à égale distance de celles A, C du quart de cercle AC. Alors

$$x'' = \frac{\pi}{2} - x', \quad \sin x'' = \cos x', \quad \cos x'' = \sin x' \quad \sin 2x'' = \sin 2x'.$$

$$\text{Aire } \omega = \frac{r^2}{2} \left( \frac{\pi}{2} - 2x' \right).$$

$$\text{Moment statique} = \frac{r^3}{6} (2 - \sin x' \cos x') (\cos x' - \sin x'),$$

$$\text{Moment d'inertie } I = \frac{r^4}{8} \left( \frac{\pi}{2} - 2x' - \frac{\sin 4x'}{6} \right).$$

3° Portion QBAB'Q' où l'arc est BAB' = 2α qui a sa corde parallèle à l'axe OCα. Alors x' = -α, x'' = α.

$$\text{Aire } \omega = \frac{r^2}{2} (2\alpha + \sin 2\alpha).$$

$$\text{Moment statique} \frac{r^3}{8} \sin \alpha (2 + \cos^2 \alpha) = \frac{r^3}{6} \sin \alpha (5 + \cos 2\alpha).$$

$$\text{Moment d'inertie } I = \frac{r^4}{3} \left( \frac{3}{4} \alpha + \frac{\sin 2\alpha}{2} + \frac{\sin 4\alpha}{16} \right).$$

4° Segment BAB'D dont l'angle au centre est 2α et dont la corde est c = 2r sin α.

En retranchant des trois expressions (3°) qu'on vient d'obtenir ce qui est relatif au rectangle QBB'Q dont l'aire et les moments sont

(Du n° 84).

$$2r \sin \alpha \cdot r \cos \alpha, \quad 2r \sin \alpha \frac{(r \cos \alpha)^2}{2}, \quad 2r \sin \alpha \frac{(r \cos \alpha)^3}{3},$$

on a pour le segment

$$\begin{aligned} \text{Aire } \omega &= \frac{r^2}{2} (2\alpha - \sin 2\alpha) = \frac{2}{3} r^2 \alpha^3 \left( 1 - \frac{\alpha^2}{5} + \frac{2\alpha^4}{105} - \dots \right) = \\ &= r^2 \left( \arcsin \frac{c}{2r} - \frac{c}{2r} \sqrt{1 - \frac{c^2}{4r^2}} \right). \end{aligned}$$

Moment statique =  $\frac{2}{8} (r \sin \alpha)^3 = \frac{c^3}{12}$  autour du diamètre *parallèle à la corde*.

$$\begin{aligned} \text{Moment d'inertie autour de idem, } I &= r^4 \left( \frac{\alpha}{4} - \frac{\sin 4\alpha}{16} \right) = \frac{2r^4 \alpha^5}{8} \left( 1 - \frac{4}{5} \alpha^2 + \frac{32}{105} \alpha^4 - \dots \right) = \\ &= r^4 \left[ \frac{1}{4} \arcsin \frac{c}{2r} - \frac{c}{8r} \left( 1 - \frac{c^2}{2r^2} \right) \sqrt{1 - \frac{c^2}{4r^2}} \right]. \end{aligned}$$

5° Même segment. Moment d'inertie autour du diamètre *perpendiculaire à sa corde*. On l'obtient en faisant  $x' = \frac{\pi}{2} - \alpha$ ,  $x'' = \frac{\pi}{2} + \alpha$  dans l'expression générale du 1°, ce qui donne

$$\begin{aligned} I &= r^4 \left( \frac{\alpha}{4} - \frac{\sin 2\alpha}{6} + \frac{\sin 4\alpha}{48} \right) = \frac{2r^4 \alpha^5}{15} \left( 1 - \frac{10}{21} \alpha^2 + \frac{1}{9} \alpha^4 - \dots \right) = \\ &= r^4 \left[ \frac{1}{4} \arcsin \frac{c}{2r} - \frac{c}{8r} \left( 1 + \frac{c^2}{6r^2} \right) \sqrt{1 - \frac{c^2}{4r^2}} \right]. \end{aligned}$$

§ 4. Moments d'inertie d'une ellipse autour de ses axes ou diamètres principaux  $b$ ,  $c$ . — Son moment  $I'$  autour de  $b$  se déduit facilement de celui du cercle ayant pour diamètre  $c$ ; car, comme les deux figures peuvent être décomposées, par des ordonnées parallèles à  $c$ , en un même nombre de rectangles élémentaires de même hauteur chacun à chacun, ayant des bases comme  $b$  est à  $c$ , on obtiendra  $I'$  en multipliant par  $\frac{b}{c}$  le moment  $\frac{\pi}{4} \left( \frac{c}{2} \right)^4$  du cercle autour de son diamètre, et on aura de même  $I''$ , moment de l'ellipse autour du second axe  $c$ , en multipliant par  $\frac{c}{b}$ . Donc ces moments principaux de l'ellipse ont pour valeurs

$$I' = \frac{\pi b c^3}{64} = \frac{\omega c^3}{16}, \quad I'' = \frac{\pi b^3 c}{64} = \frac{\omega b^3}{16}.$$

85. Le moment de flexion d'un tuyau est la différence des moments de flexion de deux cylindres ;  $r'$  et  $r''$  étant les rayons extérieur et intérieur du tuyau, le moment sera

$$c = E \frac{\pi(r'^4 - r''^4)}{4} (*).$$

Les moments d'inertie d'un segment d'ellipse ayant sa corde parallèle à l'un des deux axes, autour de cet axe et autour de l'autre, se déduiraient de la même manière, en multipliant par  $\frac{b}{c}$  ou par  $\frac{c}{b}$ , les moments d'inertie des segments de cercle du paragraphe précédent.

(\*) § 1. *Méthode de quadrature pour le calcul approximatif des moments d'inertie de figures quelconques.*—Nous renvoyons, comme nous avons dit, à la note du n° 120, le tableau des moments d'inertie des diverses autres figures usitées pour les pièces métalliques, etc.

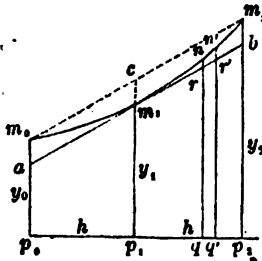
Mais c'est ici le lieu d'indiquer le calcul approximatif des moments de figures quelconques par la méthode dite de *quadrature*, trouvée par Thomas Simpson (*Mathematical dissertations*, 1743, p. 109), et qui est plus usuelle et aussi exacte que celle de Legendre, rapportée par Navier ci-après n° 352 à propos des voûtes.

§ 2. *Démonstration élémentaire de la formule de Simpson.*—Élémentairement, cette méthode générale d'évaluation d'une intégrale définie représentée par une aire comprise entre une portion de courbe, ses deux ordonnées extrêmes et l'axe des abscisses, peut être considérée comme substituant à cette courbe, au lieu d'une suite de très-petites lignes droites ou de *pente uniforme* sur l'axe des abscisses, une suite moins nombreuse de lignes un peu plus longues et de *pente uniformément croissante ou décroissante* qu'on peut astreindre toujours à passer, chacune, par trois points de la courbe, en disposant à la fois de la valeur initiale de leur pente et de la rapidité plus ou moins grande de sa variation.

Soit  $m, m_1, m_2$  une pareille ligne,  $p, p_2$  la partie correspondante de l'axe des abscisses,  $p_0 m_0 = y_0$ ,  $p_1 m_1 = y_1$ ,  $p_2 m_2 = y_2$ , les ordonnées de ses trois points  $m_0, m_1, m_2$ , et  $p_0 p_1 = p_1 p_2 = h$ , les parties de l'axe des abscisses répondant à leurs intervalles *supposés égaux*. Nous appelons sa *pente*, en un point quelconque  $n$ , la tangente de

(Du n° 85).

l'angle que fait avec l'axe des abscisses son élément  $nn'$ , ou le rapport de l'accroissement de l'ordonnée à l'accroissement de l'abscisse quand on passe de ce point à un autre très-voisin  $n'$ , rapport qui est aussi celui des projections de l'élément sur les deux axes coordonnés. Cette pente de la courbe, en  $n$ , surpassera par hypothèse sa pente en  $m_1$ , ou la pente de sa tangente  $m_1r'r'b$ , d'une



quantité proportionnelle à l'abscisse  $p_1q$  de  $n$  comptée depuis  $p_1$ ; en sorte qu'en considérant les portions  $nr$ ,  $n'r'$  des deux ordonnées voisines  $nq$ ,  $n'q'$ , prises seulement jusqu'à la tangente, la seconde  $n'r'$  excédera la première  $nr$  d'une quantité proportionnelle à  $qq'$  et à l'abscisse  $p_1q$  dont  $qq'$  est l'incrément. Chaque portion semblable d'ordonnée, par exemple  $nr$  elle-même

ou bien  $m_2b$ , résulte de l'accumulation, depuis  $m_1$ , de pareils excédants, proportionnels comme on voit aux produits des abscisses antérieures par leurs incréments successifs; ces portions d'ordonnées, comprises entre la moitié de courbe  $m_1m_2$  et sa tangente en  $m_1$ , sont donc comme les aires des triangles rectangles qui auraient pour bases et pour hauteurs leurs abscisses respectives, et, par conséquent, sont comme les carrés de ces abscisses. De même les portions d'ordonnées de la partie de courbe  $m_2m_0$ , où la pente décroît à compter de  $m_1$ , comme croît celle de  $m_1m_2$ , seront proportionnelles aux carrés des portions d'abscisses correspondantes, comptées en arrière depuis  $p_1$ , en sorte qu'on aura la portion extrême d'ordonnée  $m_2a$  égale à celle  $m_2b$ .

Ayant ainsi établi cette propriété dont jouit notre courbe de pente uniformément croissante ou décroissante, d'avoir ses portions d'ordonnées jusqu'à une même tangente, proportionnelles aux carrés des abscisses rectangulaires ou obliques comptées depuis le point de tangence, nous pouvons conclure avec Simpson (qui la suppose à priori dans la courbe qu'il choisit) que les aires  $m_1bm_2$ ,  $m_1am_2$  seront le tiers des parallélogrammes égaux circonscrits  $m_1bm_2c$ ,  $m_1am_2c$ , « par la même raison », dit-il, « que la pyramide,

(Du n° 85).

dont les sections faites par un plan parallèle à la base sont comme les carrés de leurs distances au sommet, est le tiers de son prisme circonscrit » (voyez d'ailleurs ce qu'on a démontré des sommes de produits appelés  $Vv$ ,  $V^2v$  à la note du n° 84). Donc, continue Simpson, vu que l'aire du trapèze  $p.m.m_2p_2$  est

$$\frac{p.m. + p_2.m_2}{2} \times p_2p_2 = (y_0 + y_2)h,$$

et que l'aire du trapèze  $p.abp_2$  est  $p.p_2 \times p_1m_1 = 2hy_1$ , la première de ces deux quantités excède l'aire curviligne cherchée  $p.m.m_1m_2p_2$  du double de ce dont cette aire excède la seconde; donc « deux fois la seconde  $2hy_1$ , ajouté à une fois la première  $h(y_0 + y_2)$  fera justement trois fois l'aire, » et par conséquent on aura pour cette aire elle-même comprise entre l'axe des abscisses, les deux ordonnées extrêmes  $y_0$ ,  $y_2$  distantes de  $2h$ , et la portion de courbe passant aux points  $m_0$ ,  $m_1$ ,  $m_2$ :

$$p.m.m_1m_2p_2 = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2).$$

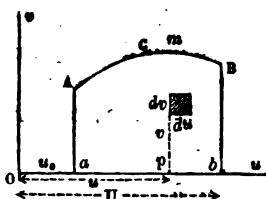
§ 3. *Sa forme générale.* — D'où l'on conclut facilement, avec le même géomètre, en partageant une aire comprise entre une courbe et trois lignes droites, ou, plus généralement, entre deux courbes quelconques et deux lignes droites parallèles de longueurs  $y_0$ ,  $y_{2n}$ , en un nombre pair  $2n$  de zones par des ordonnées ou lignes équidistantes  $y_1$ ,  $y_2$ ... parallèles à celles-ci, dont elles sont distantes de  $h$  ainsi qu'entre elles, que si l'on substitue approximativement, aux courbes, des suites de lignes ayant une pente uniformément croissante sur les droites qui coupent toutes les ordonnées orthogonalement (ou des suites de *paraboles ordinaires à axe parallèle aux ordonnées*), on a pour l'aire, ou pour l'intégrale définie à laquelle elle revient,

$$\int_{x_0}^{x_0+2nh} y dx = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \dots + 2y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n}).$$

§ 4. *Deux manières de l'employer pour le calcul des moments d'inertie.* — En appliquant cette formule d'approximation au moment d'inertie d'une aire autour d'une ligne  $Ou$ , on peut prendre à volonté l'intégrale double  $\int v^2 d\omega = \int v^2 du dv$ , d'abord par rapport à  $v$ , ou d'abord par rapport à  $u$ .



(Du n° 65),



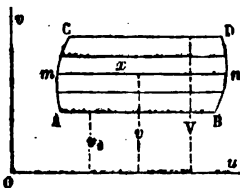
Prise d'abord par rapport à  $v$ , elle revient, pour la ligne comprise entre la courbe ACB et sa projection  $ab$  sur l'axe des abscisses  $u$ , en désignant par  $u_0, U$  les abscisses extrêmes  $Oa, Ob$ , et par  $y$  l'ordonnée  $pm$  du contour répondant à l'abscisse quelconque  $Op = u$ , à

$$I = \int_{u_0}^U \frac{y^3}{3} du.$$

M. Poncelet donne, en conséquence, en divisant la projection  $U - u_0$  en  $2n$  parties  $h$  et en appelant  $y_0, y_1 \dots$  les coordonnées aux points de division,  $y$  compris les ordonnées extrêmes, cette formule d'approximation

$$I = \frac{h}{3} \left( \frac{y_0^3}{3} + 4 \frac{y_1^3}{3} + 2 \frac{y_2^3}{3} + 4 \frac{y_3^3}{3} + \dots + 4 \frac{y_{2n-1}^3}{3} + \frac{y_{2n}^3}{3} \right).$$

Prise d'abord par rapport à  $u$ , l'intégrale  $I$ , pour une figure généralement comprise entre deux courbes AC, BD et deux parallèles AB, CD à l'axe des  $u$  (parallèles qui peuvent être nulles l'une ou l'autre ou toutes deux), en désignant par  $v_0, V$  les distances de ces parallèles à cet axe, et par  $x$  une parallèle quelconque  $mn$  à la distance  $v$  :



$$I = \int_{v_0}^V v^2 x dv.$$

M. Belanger donne en conséquence (Cours lithographié de Mécanique à l'école des ponts et chaussées, 1848-1849, n° 28, p. 17), en divisant la hauteur  $V - v_0$  en  $2n$  parties  $k$  et en appelant  $x_0, x_1 \dots$  les parallèles aux points de division,  $y$  compris celles extrêmes AB, CD :

$$I = \frac{k}{3} [v_0^2 x_0 + 4(v_0 + k)^2 x_1 + 2(v_0 + 2k)^2 x_2 + \dots + 4(v_0 + 2n - 1 \cdot k)^2 x_{2n-1} + (v_0 + 2nk)^2 x_{2n}].$$

La première de ces deux formules sera préférable à la seconde lorsque, d'après la forme du contour de la figure, les diverses parties de la ligne ayant pour coordonnées  $u$  et  $\frac{y^3}{3}$  seront plus assis-

86. Considérons, comme dans le n° 77, un solide prismatique droit (Fig. 5) encastré horizontalement d'une extrémité A, et chargé à l'autre extrémité d'un poids.

Nommons :

$x$  l'abscisse Ap d'un point  $m$  de la courbe du solide comptée sur l'horizontale AB;

$y$  l'ordonnée  $pm$ ;

$\rho$  le rayon du cercle osculateur de la courbe du solide en  $m$ ;

$P$  le poids placé à l'extrémité M du solide;

$a$  la distance horizontale AB des deux extrémités du solide;

$f$  l'ordonnée BM de l'extrémité de la courbe;

$s$  la longueur AmM du solide;

$\alpha$  l'angle formé avec l'horizon par la tangente de la courbe du solide à l'extrémité M;

$c$  la valeur du moment de la résistance à la flexion du solide, dont l'expression générale est donnée n° 80.

L'équation d'équilibre du n° 79 est

$$\frac{c}{\rho} = P(a - x),$$

milables à des paraboles à axe perpendiculaire aux  $u$ , que celles de la ligne ayant pour coordonnées  $v$  et  $xv^2$  ne le seront à des paraboles à axe perpendiculaire aux  $v$ , ou quand les pentes de la première sur les  $u$  varieront plus régulièrement que les pentes de la seconde sur les  $v$ . On prendra la seconde formule dans le cas contraire.

Quand il y aura incertitude, ou quand on ne se sera pas donné la peine de faire une pareille comparaison, on pourra contrôler ces deux formules l'une par l'autre. Ou bien, on se contentera de contrôler le résultat de l'une des deux avec un certain nombre d'ordonnées, par celui qu'on obtient avec un nombre double.

Tout ceci se dirait également d'autres formules de quadrature que celle de Simpson, par exemple de celle que M. Poncelet a proposée il y a peu d'années, et qui se trouve exposée au *Traité élémentaire de Mécanique* de M. Bonnet, 1851.

c'est-à-dire

$$\varepsilon \frac{d^2y}{dx^2} = P(a-x);$$

et, dans le cas où la flexion est très-petite, ce qui permet de négliger le carré de  $\frac{dy}{dx}$ , on a

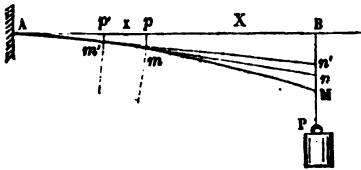
$$\varepsilon \frac{d^2y}{dx^2} = P(a-x),$$

$$\varepsilon \frac{dy}{dx} = P \left( ax - \frac{x^2}{2} \right),$$

$$\varepsilon y = P \left( \frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right),$$

$$f = \frac{P a^3}{\varepsilon 3}, \quad s = a + \frac{3f}{5a}, \quad \text{tang } \alpha = \frac{3f}{2a} \quad (*).$$

(\*) § 1. *Démonstration élémentaire de l'expression  $f = \frac{Pa^3}{3\varepsilon}$  de la flèche de courbure.*—Menons, à la courbe, deux tangentes infiniment voisines  $mn$ ,  $m'n'$ . Elles intercepteront sur cette flèche



ou ordonnée MB, qui leur est sensiblement perpendiculaire, une portion

$$nn' = mn \cdot \frac{mm'}{\rho}$$

puisque leur angle est égal à celui des normales en  $m$ ,  $m'$ . Appelant  $X$  la projection  $Bp$  de  $mn$  sur l'horizontale  $Bpp'A$ , et  $x$  son incrément  $pp'$ , on aura  $mn = X$ ,  $mm' = x$  à cela près de quantités négligeables comme infiniment plus petites que  $mm'$ ,  $nn'$ ; donc comme  $\frac{1}{\rho} = \frac{PX}{\varepsilon}$ , on a  $nn' = \frac{P}{\varepsilon} X^2x$ . La somme de toutes ces quantités depuis  $X = 0$  jusqu'à  $X = a$ , ou la flèche  $MB$ , sera bien  $f = \frac{Pa^3}{3\varepsilon}$ , soit qu'on intègre, soit qu'on assimile, comme on a dit dans la note

(Du n° 80).

du n° 81, la somme des  $X^2x$  au volume d'une pyramide ayant une base  $a^2$  et une hauteur  $a$ .

§ 2. *La courbe élastique est une parabole du troisième degré avec inflexion en M.* — En effet, en faisant dans son équation

$$x = a - x' \cos \alpha, \quad y = y' + f - x' \sin \alpha,$$

ce qui est rapporter cette courbe à sa tangente en M prise pour axe oblique des  $x'$  et à MP pris pour axe des  $y'$ , elle se réduit à

$$y' = \frac{f}{2} \left( \frac{x' \cos \alpha}{a} \right)^2.$$

La courbure est nulle au point M d'application de la force P.

§ 3. *Flèche et arc déterminés plus exactement. Expressions applicables quand la flexion n'est pas très-petite.* — On ramène, du reste, dans le cas général où la flexion est quelconque, la détermination de la courbe aux quadratures, ainsi que l'ont remarqué depuis longtemps Jacques Bernoulli <sup>(1)</sup> et Euler <sup>(2)</sup>; et l'on peut obtenir son équation, soit par les transcendentes elliptiques <sup>(3)</sup>, soit, comme on va le voir, en série ordinairement convergente.

Remarquons pour cela qu'en appelant  $s$  la longueur de l'arc de courbe  $\Delta m$ , on a  $ds^2 = dx^2 + dy^2$ ,  $\frac{\epsilon}{\rho} = \frac{d\left(\frac{dy}{ds}\right)}{dx}$ , d'où, pour première

intégrale de l'équation  $\frac{\epsilon}{\rho} = P(a - x)$ ,

$$\frac{dy}{ds} = \frac{P}{\epsilon} \left( ax - \frac{x^2}{2} \right);$$

valeur qui, substituée dans

<sup>(1)</sup> *Curvatura laminae elasticae*. Acta eruditorum, Lipsia, 1694, juin, p. 262, ou Oeuvres, p. 576. Et, aussi, *Véritable hypothèse de la résistance des solides*, aux Mémoires de l'Académie, 1705.

<sup>(2)</sup> *Methodus inveniendi lineas curvas*, etc. Additamentum de *Curvis elasticis*, 1744.

<sup>(3)</sup> *Note sur les flexions considérables des verges élastiques*, au Journal de M. Liouville, 1844.

(Du n° 30).

$$dy = dx \frac{\frac{dy}{ds}}{\sqrt{1 - \left(\frac{dy}{ds}\right)^2}}, \quad ds = \frac{dx}{\sqrt{1 - \left(\frac{dy}{ds}\right)^2}}$$

donnera, si l'on intègre, les valeurs de

 $y$  et  $s$  en  $x$ .Or si nous remplaçons  $\left[1 - \left(\frac{dy}{ds}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}$  par son développement

$$1 + \frac{1}{2} \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \frac{1.3}{2.4} \left(\frac{dy}{ds}\right)^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6} \left(\frac{dy}{ds}\right)^6 + \dots,$$

l'intégration devient facile, et les termes des séries suivent une loi simple en faisant  $a - x = x'$ , d'où  $\frac{dy}{ds} = \frac{P}{2\epsilon} (a^2 - x'^2)$ . On a ainsi

$$\frac{f-y}{a} = \frac{Pa^2}{2\epsilon} \left(\frac{x'}{a} - \frac{1}{3} \frac{x'^3}{a^3}\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{Pa^2}{2\epsilon}\right)^2 \left(\frac{x'}{a} - \frac{3x'^3}{3a^3} + \frac{3x'^5}{5a^5} - \frac{1x'^7}{7a^7}\right) +$$

$$+ \frac{1.3}{2.4} \left(\frac{Pa^2}{2\epsilon}\right)^3 \left(\frac{x'}{a} - \frac{5x'^3}{3a^3} + \frac{10x'^5}{5a^5} - \frac{40x'^7}{7a^7} + \frac{5x'^9}{9a^9} - \frac{1x'^{11}}{11a^{11}}\right) + \dots;$$

$$\frac{s-s}{a} = \frac{x'}{a} + \frac{1}{2} \left(\frac{Pa^2}{2\epsilon}\right)^2 \left(\frac{x'}{a} - \frac{2}{3} \frac{x'^3}{a^3} + \frac{1}{5} \frac{x'^5}{a^5}\right) +$$

$$+ \frac{1.3}{2.4} \left(\frac{Pa^2}{2\epsilon}\right)^3 \left(\frac{x'}{a} - \frac{4}{3} \frac{x'^3}{a^3} + \frac{6}{5} \frac{x'^5}{a^5} - \frac{4}{7} \frac{x'^7}{a^7} + \frac{1}{9} \frac{x'^9}{a^9}\right) + \dots$$

D'où l'on tire, en faisant  $x' = a$ ,  $y = 0$ ,  $s = 0$ , pour la flèche  $f$  et pour la longueur totale  $s$  de l'arc de la courbe

$$\frac{f}{a} = \frac{1}{3} \cdot \frac{Pa^2}{\epsilon} + \frac{1}{5.7} \left(\frac{Pa^2}{\epsilon}\right)^2 + \frac{3}{7.9.11} \left(\frac{Pa^2}{\epsilon}\right)^3 + \frac{5}{11.13.15} \left(\frac{Pa^2}{\epsilon}\right)^4 + \dots$$

$$\frac{s}{a} = 1 + \frac{1}{3.5} \left(\frac{Pa^2}{\epsilon}\right)^2 + \frac{1.3}{5.7.9} \left(\frac{Pa^2}{\epsilon}\right)^3 + \frac{1.3.5}{7.9.11.13} \left(\frac{Pa^2}{\epsilon}\right)^4 + \dots$$

Et comme la valeur de  $\frac{dy}{ds}$  pour  $x = a$  ou  $x' = 0$  est  $\sin \alpha$ , on a

$$\sin \alpha = \frac{Pa^2}{2\epsilon},$$

d'où

$$\tan \alpha = \frac{Pa^2}{2\epsilon} + \frac{1}{2} \left(\frac{Pa^2}{2\epsilon}\right)^3 + \frac{1.3}{2.4} \left(\frac{Pa^2}{2\epsilon}\right)^5 + \frac{1.3.5}{2.4.6} \left(\frac{Pa^2}{2\epsilon}\right)^7 + \dots$$

87. Quand le solide est posé horizontalement par deux appuis (Fig. 6), les équations précédentes conviennent à la courbe formée par chacune des moitiés. Nommant :

- $f$  la flèche AC de la courbe du solide ;
- $2P$  le poids suspendu au milieu du solide ;
- $2a$  la distance MM' des appuis ;
- $2s$  la longueur MAM' du solide entre les appuis ;
- $\alpha$  l'inclinaison de la courbe à l'extrémité M' ;

on a, en supposant la courbure du solide très-petite,

$$f = \frac{P a^3}{\epsilon \cdot 3} = \frac{2P (2a)^3}{\epsilon \cdot 48}$$

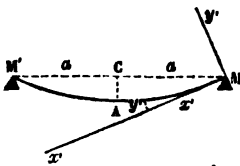
$$s = a + \frac{3f^2}{5a}, \quad \text{tang} \alpha = \frac{3f}{2a}.$$

La flèche de courbure est proportionnelle au poids  $2P$  et au cube de la distance des appuis (\*).

La courbe complète infléchié en M a sa tangente parallèle à l'axe des  $x$  ou  $x'$  aux points  $x' = \pm a$ , et parallèle à l'axe des  $y$  aux points  $x' = \pm a \sqrt{1 + \frac{2\epsilon}{Pa^2}}$  quand  $\frac{Pa^2}{2\epsilon}$  reste plus petit que 1. Elle présente alors une infinité de circonvolutions égales entre les deux droites que déterminent ces dernières valeurs de  $x'$ , et offrant une symétrie alterne par rapport à la direction de la force  $P$ . C'est la quatrième des neuf espèces de courbes élastiques planes d'Euler.

(\*) § 1. Calcul d'une valeur plus approchée de la flèche d'une pièce posée.—Pour l'obtenir, il faut, comme quelques auteurs anglais (mais avec plus d'exactitude), avoir égard à ce que la réaction des appuis M, M' n'est pas verticale. Nous la regarderons comme normale à la pièce fléchie ; car il n'est pas nécessaire de faire entrer en considération le frottement qui agit tantôt dans un sens tantôt dans le sens opposé pour peu que la pièce et le poids suspendu  $2P$  oscillent. Cette réaction normale est, pour chaque appui,  $\frac{P}{\cos \alpha}$  puisque sa composante verticale est  $P$  ; et elle a une composante horizontale  $\frac{P}{\cos \alpha} \sin \alpha$ , en sorte que l'équation complète des moments est

Du n° 37).



$\frac{\varepsilon}{\rho} = P(\alpha - x) + P \tan \alpha (f - y)$ . Mais on n'a plus de terme en  $y$  au second membre et on rend l'équation intégrable par quadratures en prenant d'autres coordonnées  $x'$ ,  $y'$ , dont les axes sont la tangente et la normale au point M, ce qui

donne pour équation,  $s'$  étant l'arc à partir de ce point :

$$\frac{\varepsilon}{\rho} = \varepsilon \frac{d\left(\frac{dy'}{ds'}\right)}{dx'} = \frac{P}{\cos \alpha} x'; \quad \text{d'où} \quad \frac{dy'}{ds'} = \frac{P}{\varepsilon \cos \alpha} \frac{x'^2}{2}.$$

Cette intégrale première donne une relation entre les inconnues  $f$  et  $\alpha$  en faisant  $x' = a \cos \alpha + f \sin \alpha$ , qui est sa valeur au point milieu A de la pièce posée, et  $\frac{dy'}{ds'} = \sin \alpha$ ; on a ainsi

$$2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{P}{\varepsilon} (a \cos \alpha + f \sin \alpha)^2;$$

$$\text{d'où} \quad \frac{f}{a} = -\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \mp \sqrt{\frac{2\varepsilon \cos \alpha}{Pa^2 \sin \alpha}}.$$

différence de deux quantités très-grandes.

On obtient une seconde relation entre  $f$  et  $\alpha$  en mettant pour  $\frac{dy'}{ds'}$  sa valeur  $\frac{Px'^2}{2\varepsilon \cos \alpha}$  dans la série obtenue à la note précédente

$$\frac{dy'}{dx'} = \frac{dy'}{ds'} + \frac{1}{2} \left(\frac{dy'}{ds'}\right)^3 + \frac{1.3}{2.4} \left(\frac{dy'}{ds'}\right)^5 + \frac{1.3.5}{2.4.6} \left(\frac{dy'}{ds'}\right)^7 + \dots,$$

et intégrant de manière que  $y' = 0$  pour  $x' = 0$ ; ce qui donne

$$y' = \frac{P}{2\varepsilon \cos \alpha} \frac{x'^3}{3} + \frac{1}{2} \left(\frac{P}{2\varepsilon \cos \alpha}\right)^3 \frac{x'^7}{7} + \frac{1.3}{2.4} \left(\frac{P}{2\varepsilon \cos \alpha}\right)^5 \frac{x'^{11}}{11} + \dots;$$

puis, en remarquant que cette équation de la courbe élastique doit être satisfaite, pour le point A, par

$$x' = a \cos \alpha + f \sin \alpha = \sqrt{\frac{2\varepsilon \sin \alpha \cos \alpha}{P}}, \quad y' = a \sin \alpha - f \cos \alpha.$$

On tire ainsi

$$\frac{f}{a} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - \sqrt{\frac{2\varepsilon \sin \alpha}{Pa^2 \cos \alpha}} \cdot \left(\frac{1}{1} \frac{\sin \alpha}{3} + \frac{1}{2} \frac{\sin^3 \alpha}{7} + \frac{1.3}{2.4} \frac{\sin^5 \alpha}{11} + \dots\right).$$

( Du n° 87 ).

Pour avoir  $\alpha$ , on n'a qu'à éliminer  $\frac{f}{\alpha}$ , ou à égaler les deux valeurs de ce rapport, ce qui fournit :

$$\sqrt{\frac{Pa^3}{2\varepsilon \sin \alpha \cos \alpha}} = \cos \alpha + \frac{1}{1} \frac{\sin^2 \alpha}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin^4 \alpha}{7} + \frac{1.3 \sin^6 \alpha}{2.4 \cdot 11} + \dots \\ + \frac{1.3.5 \sin^8 \alpha}{2.4.6 \cdot 15} + \dots,$$

ou, en élevant au carré :

$$\frac{Pa^3}{2\varepsilon} = \sin \alpha \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} \left( \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} + \frac{\sin^2 \alpha}{3} + \frac{\sin^4 \alpha}{14} + \frac{3 \sin^6 \alpha}{88} + \dots \right)^2 = \\ = \sin \alpha - \frac{5}{6} \sin^3 \alpha - \frac{19}{504} \sin^5 \alpha - \frac{223}{11088} \sin^7 \alpha + \dots;$$

d'où, par la formule générale de retour des suites

$$x = \frac{Y}{A} - \frac{C}{A} \left( \frac{Y}{A} \right)^3 + \left[ 3 \left( \frac{C}{A} \right)^2 - \frac{E}{A} \right] \left( \frac{Y}{A} \right)^5 - \left[ 12 \left( \frac{C}{A} \right)^3 + 2 \frac{CE}{AA} + \frac{G}{A} \right] \left( \frac{Y}{A} \right)^7 + \dots,$$

qu'on tire, par coefficients indéterminés, de  $Y = AX + CX^3 + EX^5 + GX^7 + \dots$ ,

$$\sin \alpha = \frac{Pa^3}{2\varepsilon} + \frac{5}{6} \left( \frac{Pa^3}{2\varepsilon} \right)^3 + \frac{1069}{504} \left( \frac{Pa^3}{2\varepsilon} \right)^5 + \dots$$

et, par conséquent,

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha = \frac{Pa^3}{2\varepsilon} + \frac{4}{3} \left( \frac{Pa^3}{2\varepsilon} \right)^3 + \frac{236}{63} \left( \frac{Pa^3}{2\varepsilon} \right)^5 + \dots$$

Substituons dans la seconde valeur de  $\frac{f}{\alpha}$ , nous trouvons, tout calcul fait, cette expression pour la flèche  $f$  de la pièce  $2a$  posée sur deux appuis et chargée au milieu d'un poids  $2P$  :

$$\frac{f}{\alpha} = \frac{1}{3} \frac{Pa^3}{\varepsilon} + \frac{2}{21} \left( \frac{Pa^3}{\varepsilon} \right)^3 + \frac{349}{5376} \left( \frac{Pa^3}{\varepsilon} \right)^5 + \dots,$$

légèrement différente, dès le second terme, de celle de  $\frac{1}{3} \frac{Pa^3}{\varepsilon} + \frac{1}{35} \left( \frac{Pa^3}{\varepsilon} \right)^3 + \frac{1}{231} \left( \frac{Pa^3}{\varepsilon} \right)^5 + \dots$ , trouvées à la note précédente pour le cas d'encastrement.

§ 2. Expression de la plus grande dilatation en fonction de la



83. En considérant toujours, comme dans le n° 86, un solide prismatique droit (Fig. 7), encastré horizontalement à une extrémité, on peut le supposer chargé, dans tous les points de sa longueur, de poids distribués d'une manière quelconque. Nommant :

$x, y$  les coordonnées horizontale et verticale d'un point quelconque  $m$  de la courbe du solide;

$x'$  l'abscisse d'un point quelconque  $m'$  situé entre  $m$  et l'extrémité  $M$ ;

$a$  la distance  $AB$ ;

$p'$  la valeur du poids suspendu en  $m'$ , rapporté à l'unité de longueur de l'abscisse, en sorte que  $p'dx'$  est le poids supporté par l'élément dont la projection est  $dx'$  (la quantité  $p'$  est censée donnée en fonction de  $x'$ );

$f$  l'ordonnée  $BM$  de l'extrémité de la courbe;

on aura

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= \int_0^a dx' \cdot p'(x'-x), \\ \frac{dy}{dx} &= \int_0^x dx \int_x^a dx' \cdot p'(x'-x), \\ ey &= \int_0^x dx \int_0^x dx \int_x^a dx' \cdot p'(x'-x). \end{aligned}$$

*flèche.* — En appelant (comme on fera au n° 113)  $v'$  la distance, à la ligne des fibres invariables, de la fibre qui en est le plus éloignée, et  $i$  sa dilatation ou contraction pour la section  $x = a$  où la courbure est la plus grande, on a

$$i = \frac{v'}{\rho}, \quad \frac{1}{\rho} = \frac{Pa}{\epsilon}.$$

Or, l'expression précédente de  $\frac{f}{a}$  donne, par retour des suites,

$$\frac{Pa^3}{\epsilon} = \frac{3f}{a} - \frac{2}{7} \left(\frac{3f}{a}\right)^3 + \frac{629}{12544} \left(\frac{3f}{a}\right)^5 + \dots$$

On a donc la plus grande dilatation des fibres :

$$i = \frac{3fv'}{a^3} \left( 1 - \frac{18}{7} \frac{f^2}{a^2} + \frac{50949}{12544} \frac{f^4}{a^4} - \dots \right).$$

89. Si les poids portés par chacun des éléments de la longueur du solide sont égaux, ce qui comprend le cas où ces poids seraient ceux mêmes des éléments,  $p'$  aura une valeur constante  $p$ , et l'on aura

$$\begin{aligned}\varepsilon \frac{d^2y}{dx^2} &= p \left( \frac{a^2}{2} - ax + \frac{x^2}{2} \right), \\ \varepsilon \frac{dy}{dx} &= p \left( \frac{a^2x}{2} - \frac{ax^2}{2} + \frac{x^3}{6} \right), \\ \varepsilon y &= p \left( \frac{a^2x^2}{4} - \frac{ax^3}{6} + \frac{x^4}{24} \right), \\ f &= \frac{p}{\varepsilon} \frac{a^4}{8}, \quad \text{tang} \alpha = \frac{4f}{3a}.\end{aligned}$$

$pa$  est le poids total reporté sur la longueur du solide. D'après le n° 86, si ce poids était appliqué en  $M$ , l'abaissement de ce point serait plus grand, dans le rapport de 8 à 3 (\*).

(\*) § 1. *Observation générale.* — L'équation  $\varepsilon \frac{d^2y}{dx^2} = \dots$  posée aux n° 88 et 89 n'est autre chose que celle  $\frac{EI}{\rho} = M$  démontrée, dans la note du n° 81, seulement pour des forces agissant aux extrémités d'une portion finie d'un prisme. On peut l'étendre approximativement au cas, ici considéré, de forces agissant d'une manière continue sur sa longueur, par une raison semblable à celles qui ont été données au § 6 de la note du n° 80 pour appliquer la même équation à un mode de distribution quelconque des forces dont le moment est  $M$ .

§ 2. *Manière plus simple de poser l'équation du n° 89.* — Elle consiste à remarquer que les forces agissant sur la partie  $mM$  dont la longueur est  $a-x$ , peuvent être remplacées par une force unique égale à leur somme  $p(a-x)$  appliquée au milieu de cette partie, en sorte que son bras de levier est  $\frac{a-x}{2}$ , et, en égalant leur moment à celui des forces intérieures, on a  $\frac{\varepsilon}{\rho}$  ou  $\varepsilon \frac{d^2y}{dx^2} = p \frac{(a-x)^2}{2}$ .

§ 3. *Flèche  $f = \frac{pa^4}{8\varepsilon}$  déterminée d'une manière élémentaire.* — On

90. Lorsqu'un solide, posé horizontalement sur deux appuis (Fig. 8), est chargé par des poids distribués uniformément sur sa longueur, chaque moitié est dans le même cas que si, étant encastrée horizontalement à une extrémité, elle était fléchie à la fois par des poids distribués uniformément sur sa longueur, et par une force égale à la somme de ces poids, et agissant en sens contraire à l'autre extrémité. On a donc

$$y = pa \left( \frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) - p \left( \frac{a^2x^2}{4} - \frac{ax^3}{6} + \frac{x^4}{24} \right),$$

$$f = \frac{p}{\epsilon} \frac{5a^4}{24}, \quad \text{tang} \alpha = \frac{8f}{5a}.$$

D'après le n° 87, si le poids  $2pa$  était suspendu au milieu du so-

y arrive comme au § 1 de la note du n° 86, en mettant  $pX \frac{X}{2}$  au lieu de  $PX$ , d'où l'élément  $nn'$  de la flèche =  $\frac{p}{2\epsilon} X^2 x$  dont la somme, de  $X=0$  à  $X=a$ , est bien (§§ 2 et 3 de la note du n° 84)  $\frac{pa^4}{8\epsilon}$ .

§ 4. *Expression analytique plus approchée de cette flèche f et de l'angle  $\alpha$ .* — On les obtient, principalement pour le cas où la flexion n'est pas très-petite, en posant, comme à la note du n° 86,

$$\epsilon \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{ds} \right) = p \frac{(a-x)^2}{2}, \quad \text{ce qui, en faisant } a-x=x', \quad \frac{dy}{ds} = \frac{p}{6\epsilon} (a^3 - x'^3),$$

substituant dans  $dy = dx \left[ \frac{dy}{ds} + \frac{1}{2} \left( \frac{dy}{ds} \right)^2 + \frac{1.3}{2.4} \left( \frac{dy}{ds} \right)^3 + \dots \right]$ , et intégrant, donne une expression de  $f-y$  en série; sa valeur pour  $x'=a$  ou  $x=0$ ,  $y=0$ , est, en divisant par  $a$ :

$$\frac{f}{a} = \frac{1}{2} \frac{pa^3}{4\epsilon} + \frac{3}{35} \left( \frac{pa^3}{4\epsilon} \right)^2 + \frac{9}{364} \left( \frac{pa^3}{4\epsilon} \right)^3 + \dots$$

Et l'on a  $\sin \alpha$  égal à la valeur de  $\frac{dy}{ds}$  pour  $x'=0$ , d'où

$$\sin \alpha = \frac{pa^3}{6\epsilon}, \quad \text{tang} \alpha = \frac{pa^3}{6\epsilon} + \frac{1}{2} \left( \frac{pa^3}{6\epsilon} \right)^2 + \frac{3}{8} \left( \frac{pa^3}{6\epsilon} \right)^3 + \dots$$

lide au lieu d'être répartie uniformément sur toute sa longueur, la flèche serait plus grande dans le rapport de 8 à 5. Ces résultats sont confirmés par l'expérience (\*).

(\*) § 1. *L'équation de la courbe s'étend à ses deux moitiés dans ce cas, mais non lorsqu'il y a un poids 2P suspendu au milieu.* —

On voit en effet que l'équation, qui se réduit à  $\varepsilon y = p \left( \frac{ax^2}{4} - \frac{x^4}{24} \right)$  donne des valeurs de  $y$  égales lorsqu'on change  $x$  en  $-x$ . Mais il n'en est pas de même de l'équation  $\varepsilon y = P \left( \frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right)$  du n° 86; les deux moitiés, quand il y a un poids suspendu au milieu, sont deux courbes différentes, qui ne font que se raccorder ou qui ont une tangente commune et le même rayon de courbure à leur jonction.

§ 2. *Raccordements à tous les points où il y a des forces isolées, ou discontinuité d'action. Petits angles résultant des glissements à ces points.* — La même chose s'observera constamment par la suite. En tous les points des prismes fléchis où il y a des forces extérieures isolées, comme en tous ceux où les forces réparties changent d'intensité par unité de longueur, la courbe change aussi. Il n'est pas nécessaire, pour avoir la suite de ces changements, de recourir aux formules de *discontinuité*, employées par Poisson, principalement au n° 324 de la deuxième édition (1833) de son *Traité de mécanique*; on peut établir successivement les équations des diverses parties, en déterminant les constantes de manière qu'à leurs jonctions elles aient, avec le même rayon de courbure, une tangente commune, à moins qu'on ne tienne compte des glissements, car alors (voyez notes des n° 152 à 155) les deux tangentes doivent faire entre elles un petit angle.

§ 3. *Approximation un peu plus grande de la flèche de courbure  $f$  et de l'angle  $\alpha$  des inclinaisons extrêmes pour la pièce posée et chargée uniformément, avec un poids additionnel au milieu.* — En raisonnant comme au § 1 de la note du n° 87, et en supposant que la pièce supporte, outre la charge 2P au milieu, le poids 2pa réparti uniformément sur sa longueur, on peut poser une équation d'équilibre (dont le dernier terme n'est qu'approché).

84. Pour appliquer les résultats précédents à un corps donné, il faudra substituer à la place de  $\epsilon$  l'expression du moment de flexion qui convient à la figure de la section transversale de ce corps, conformément aux n<sup>os</sup> 80 et suivants. On attribuera à la constante E (n<sup>o</sup> 77) la valeur qui convient à la nature du corps et qui doit être déterminée par l'observation.

Les expériences les plus propres à déterminer cette valeur consistent à placer horizontalement un solide prismatique sur deux appuis, à le charger au milieu d'un poids et à observer la flèche de la courbure produite par ce poids. Si la section transversale du solide est un rectangle (Fig. 2) dont les côtés soient  $b$  et  $c$ , on a (n<sup>o</sup> 81),  $\epsilon = E \frac{bc^3}{12}$ , et (n<sup>o</sup> 87)  $f = \frac{8P}{\epsilon} \frac{(2a)^3}{4^4}$  : donc

$$\epsilon \frac{d \left( \frac{dy'}{ds'} \right)}{dx'} = \frac{P + pa}{\cos \alpha} x' - pa' \frac{x'}{2 \cos \alpha}$$

et en tirant, de même, deux équations entre les inconnues  $\alpha$  et  $\frac{f}{a}$ .

Elles sont compliquées et ne peuvent se résoudre que par tâtonnement en attribuant des valeurs numériques à  $\frac{Pa^3}{\epsilon}$  et  $\frac{pa^3}{\epsilon}$ . Mais nous pouvons nous contenter, pour avoir une formule générale donnant une approximation, de retrancher les valeurs

$$\frac{f}{a} = \frac{1}{2} \frac{pa^3}{4\epsilon} + \frac{3}{35} \left( \frac{pa^3}{4\epsilon} \right)^3 \text{ et } \tan \alpha = \frac{pa^3}{6\epsilon} + \frac{1}{2} \left( \frac{pa^3}{6\epsilon} \right)^3$$

obtenues, à la fin du § 4 de la note du n<sup>o</sup> 89, pour une pièce encastree et uniformément chargée, des valeurs des mêmes quantités obtenues à la fin du § 1 de la note du n<sup>o</sup> 87, en mettant, dans celles-ci,  $P + pa$  au lieu de  $P$ , réaction verticale de chaque appui; ce qui donne

$$\frac{f}{a} = \frac{8P + 5pa}{24} \frac{a^3}{EI} + \left[ \frac{2}{24} (P + pa)^3 - \frac{3}{2240} (pa)^3 \right] \left( \frac{a^3}{EI} \right)^3$$

$$\tan \alpha = \frac{3P + 2pa}{6} \frac{a^3}{EI} + \left[ \frac{1}{6} (P + pa)^3 - \frac{1}{432} (pa)^3 \right] \left( \frac{a^3}{EI} \right)^3$$

$$f = \frac{2P}{E} \frac{(2a)^3}{4 \cdot bc^3}, \quad E = 2P \frac{(2a)^3}{4 \cdot bc^3 \cdot f}$$

$2a$  étant l'intervalle des appuis et  $2P$  le poids placé au milieu de la longueur du solide.

Si la section transversale est un cercle, on a

$$f = \frac{2P}{E} \frac{(2a)^3}{12\pi \cdot r^4}, \quad E = 2P \frac{(2a)^3}{12\pi r^4 \cdot f},$$

$r$  désignant le rayon du cercle.

92. On doit quelquefois tenir compte de l'action du poids du solide. On y parviendra, d'après le n° 90, en ajoutant à  $2P$  les  $5/8$  de ce poids. Ainsi, en le désignant par  $2\Pi$ , on a pour le cas d'une section rectangulaire

$$f = \frac{2P + \frac{5}{8} \cdot 2\Pi}{E} \frac{(2a)^3}{4 \cdot bc^3}, \quad E = \left(2P + \frac{5}{8} \cdot 2\Pi\right) \frac{(2a)^3}{4bc^3 \cdot f},$$

et pour le cas d'une section circulaire

$$f = \frac{2P + \frac{5}{8} \cdot 2\Pi}{E} \frac{(2a)^3}{12\pi \cdot r^4}, \quad E = \left(2P + \frac{5}{8} \cdot 2\Pi\right) \frac{(2a)^3}{12\pi r^4 \cdot f} (*).$$

(\*) § 1. *Généralisation et approximation plus grande.* — Quelle que soit la section dont nous appellerons  $I$  le moment d'inertie, et qu'on suppose sollicitée parallèlement à l'un de ses axes principaux (note du n° 83), on a

$$f = \left[2P + \frac{5}{8}(2pa)\right] \frac{(2a)^3}{48EI}, \quad \text{d'où} \quad E = \left[2P + \frac{5}{8}(2pa)\right] \frac{(2a)^3}{48If}.$$

Plus approximativement, en se servant de la valeur développée de  $\frac{f}{a}$  en  $\frac{a^3}{EI}$  de la fin du § 3 de la note du n° 90, et en se fondant sur ce qu'en général, par le retour des restes suivi d'une division :

$$\text{expression } Y = AX + CX^3 + \dots \text{ donne } \frac{1}{X} = \frac{A}{Y} \left[1 + \frac{C}{A} \left(\frac{Y}{A}\right)^2 + \dots\right]$$

on tirera la valeur de  $\frac{EI}{a^3}$ , d'où

93. On remarquera enfin qu'il n'est pas nécessaire de connaître les valeurs absolues du poids placé au milieu du solide et de la flèche de courbure correspondante, mais seulement l'accroissement de la flèche de courbure correspondant à un accroissement donné de ce poids. En effet, nommant  $P', P''$  deux valeurs successives de  $P$ , et  $f', f''$  les deux valeurs correspondantes de  $f$ , l'une ou l'autre des équations précédentes donne pour une section rectangulaire

$$E = (2P'' - 2P') \frac{(2a)^3}{4bc^3(f'' - f)}$$

Nous allons maintenant exposer les résultats des expériences connues, d'après lesquelles on peut déterminer les valeurs de la constante  $E$  qui conviennent à divers corps. Ces valeurs ne peuvent être données exactement qu'au moyen d'expériences

$$E = \left( 2P + \frac{5}{8} 2pa \right) \frac{(2a)^3}{48.1f} \left[ 1 + \frac{72}{7} \frac{(2P + 2pa)^3 - \frac{9}{640} (2pa)^3}{\left( 2P + \frac{5}{8} 2pa \right)^3} \left( \frac{f}{2a} \right)^2 \right]$$

§ 2. *Emploi de la flexion circulaire.* — M. Ernest Lamarle a fait, à Gand (1), des expériences sur lesquelles nous reviendrons, où des pièces horizontales étaient fléchies par deux poids égaux  $P$  suspendus à des distances égales  $k$  des extrémités soutenues; en sorte que le moment de flexion  $\frac{EI}{\rho}$ , entre les deux points de suspension des poids, était constant et égal à celui  $Pk$  de chacun des couples qui agissaient de part et d'autre. En appelant  $2a$  la distance de ces points,  $f$  la flèche au-dessous de leur niveau, on a  $a^2 + f^2 = 2pf$ , d'où l'expression  $E = Pk \frac{a^2 + f^2}{2lf}$  qui est exacte et non pas simplement approximative. M. Lamarle observe que puisque toute la partie  $2a$  de la pièce a une égale courbure, ce mode d'expérimentation est plus propre à donner la valeur moyenne du coefficient  $E$  pour toute la pièce, ainsi que celle de la limite des dilatations sans

(1) *Premier mémoire sur la flexion du bois*, Bruxelles, 1844. Extrait des *Annales des travaux publics de la Belgique*.

dans lesquelles la flexion est fort petite. Quand l'extension ou la compression des fibres approchent du terme où la rupture doit avoir lieu, la résistance de ces fibres cesse ordinairement d'être exactement proportionnelle à l'extension ou à la compression, comme on l'a supposé n° 76 et 77; ce que l'on exprime en disant que l'élasticité est altérée (\*).

94 à 111 (\*\*).

partie permanente, que les expériences ordinaires où le poids  $2P$  est au milieu et où la courbure est nulle aux extrémités.

(\*) § 1. *Observation relative à l'élasticité.*—Nous avons dit au § 8 de la note du n° 21, que cette propriété subsistait entière après que la contecture a été modifiée, et que si l'on défalquait, après chaque mesure, les parties permanentes ou persistantes des extensions, compressions, flexions ou torsions, le reste était encore trouvé proportionnel aux efforts, avec des coefficients de proportionnalité ou d'élasticité généralement peu ou point différents de ce qu'ils étaient primitivement.

§ 2. *Approximation plus grande pour E.*—De la différence de deux expressions  $\frac{f''}{a}$ ,  $\frac{f'}{a}$  comme celle de  $\frac{f}{a}$  de la fin du § 3 de la note du n° 90 on tirera, en opérant comme au § 1 de celle du n° 92.

$$E = \frac{(2P'' - 2P')(2a)^3}{48 \cdot l(f'' - f')} \left[ 1 + \frac{72(2P'' + 2pa)^3 - (2P' + 2pa)^3}{(2P'' - 2P')^3} \left( \frac{f'' - f'}{2a} \right)^2 \right].$$

Par exemple si le rapport  $\frac{f'' - f'}{2a}$  de la flèche additionnelle à la longueur est  $1/30$ , et si  $P' = 0$ , la quantité entre crochets, par laquelle il faut multiplier la formule du texte, est

$$1 + \frac{8}{700} \left[ \left( 1 + \frac{2pa}{2P''} \right)^3 - \left( \frac{2pa}{2P''} \right)^3 \right],$$

ou

$$1,037 \text{ si } \frac{2pa}{2P''} = 1/2, \text{ et } 1,027 \text{ si } \frac{2pa}{2P''} = 1/3.$$

(\*\*) Par la même raison qu'aux notes des n° 4 à 20 et des n° 22 à 75, relatives à la compression et à l'extension, on renvoie après le



## ARTICLE IV.

DE LA RÉSISTANCE D'UN SOLIDE PRISMATIQUE A LA RUPTURE PRODUITE PAR UN EFFORT DIRIGÉ PERPENDICULAIREMENT A LA LONGUEUR DE CE SOLIDE.

**112.** Les fibres des corps, quand on les soumet à des extensions ou à des accourcissements très-petits, s'étendent ou s'accourcissent de la même quantité sous un même poids, comme on l'a dit n° 76 et 77. Alors, si la section transversale est rectangulaire, les fibres dont la longueur ne varie pas lors de la flexion du corps sont au milieu de la hauteur de cette section. Quand les variations de longueur des fibres sont plus considérables, ces fibres peuvent, sous le même effort, s'étendre plus ou moins qu'elles ne s'accourcissent. Alors les fibres invariables s'éloignent ou s'approchent de la face qui devient convexe lors de la flexion. La rupture a lieu quand les fibres étendues ne peuvent plus l'être davantage sans se séparer, ou quand les fibres comprimées ne peuvent plus l'être davantage sans s'écraser.

La rupture s'opère d'une manière différente selon les corps. Dans les pierres, le verre, les métaux fondus, il se fait une séparation brusque et totale sur toute la hauteur de la section. Dans les bois, les fibres sont écrasées vers la face concave, et arrachées irrégulièrement vers la face convexe. Dans les métaux forgés, la rupture n'est pas toujours accompagnée d'une séparation totale ou partielle. Les molécules, sans cesser d'être adhérentes, paraissent avoir pris près de la section de rupture de nouvelles po-

n° 168 au complément des articles I à VI, ces n° de 94 à 111, contenant des résultats d'expériences, auxquels on joindra ceux fort nombreux qui ont été obtenus depuis 1833.

Qu'il nous suffise de dire ici, pour donner une idée générale des valeurs du nombre E, et nous mettre à même de présenter quelques exemples de calcul numérique, qu'on a environ, pour le bois de chêne ou de sapin,  $E = 1\ 200\ 000\ 000$ ; pour le fer,  $E = 20\ 000\ 000\ 000$ ; pour la fonte,  $E = 12\ 000\ 000\ 000$ .

sitions d'équilibre, en vertu desquelles la figure du solide a changé.

Les conditions de la rupture dépendent de l'équilibre qui s'établit entre les forces qui tendent à rompre les corps, et les résistances dues aux forces développées par l'effet des extensions et compressions des fibres dans la section transversale où la rupture va s'opérer. Pour évaluer exactement ces résistances, il faudrait connaître : 1° l'axe d'équilibre où sont placées les fibres invariables; 2° la valeur de la force produite dans une fibre par une extension ou une compression donnée. A défaut de ces connaissances, que l'on ne pourrait acquérir que par des expériences délicates, on est obligé, pour obtenir au moins des évaluations approximatives, de recourir à des hypothèses.

113. L'hypothèse la plus simple, et généralement la moins éloignée de la vérité, consiste à admettre que les résistances des fibres, à l'instant où la rupture va s'opérer, sont encore proportionnelles aux extensions ou compressions de ces fibres, comme elles sont dans le cas d'une flexion très-petite. Alors l'état de la section transversale du corps, à l'instant où la rupture va s'opérer, ne diffère point de l'état considéré dans les n<sup>os</sup> 77 et suivants. Seulement il faut concevoir que la fibre placée à la face convexe qui est la plus étendue, ou la fibre placée à la face concave qui est la plus accourcie, subissent le degré d'allongement ou d'accroissement qui est immédiatement suivi de la rupture.

La situation de l'axe d'équilibre, où sont placées les fibres invariables, se déterminera toujours par la même condition géométrique énoncée n<sup>o</sup> 78. Supposons cet axe ainsi déterminé, et conservons les dénominations du n<sup>o</sup> 77, qui se rapportent à la Fig. 1; appelons de plus

$r$  la distance à l'axe d'équilibre  $aa'$  de la fibre extrême située à la face convexe ou à la face concave du solide, qui est prête à rompre;

$R$  une constante exprimant la force nécessaire pour rompre un prisme dont la section transversale est l'unité superficielle, tiré dans le sens de la longueur.

En remarquant que la résistance des fibres situées à la distance  $v'$  de l'axe  $aa'$  est  $dudv \cdot R$ , et que la résistance des fibres situées à la distance  $v$  du même axe est  $dudv \frac{Rv}{v'}$ , on aura pour l'expression de la somme des moments de ces résistances, pris par rapport à l'axe  $aa'$ ,

$$\frac{R}{v'} \left( \int_0^b du \int_0^u f_1 u dv \cdot v^2 + \int_0^b du \int_0^u f_2 u dv \cdot v^2 \right).$$

Nous nommerons cette expression *moment de rupture* du corps, et nous la désignerons par la lettre  $\tau$  (\*).

(\*) § 1. *Deuxième expression du moment de flexion.*—Nous mettons ici  $\tau$  au lieu de  $\rho$  déjà employé par Navier (n° 77, 86) pour le rayon de courbure. La dénomination *moment de rupture* n'a pas été adoptée par ses successeurs. M. de Guillebon, l'un deux, a fait observer que la formule ci-dessus, susceptible d'être écrite, avec les simplifications de la note du n° 80

$$\frac{R}{v'} \int v^2 d\omega \quad \text{ou} \quad R \frac{I}{v'},$$

n'est autre chose qu'une *deuxième expression* du moment de flexion  $M$  qui a reçu à la même note une *première expression*  $M = \frac{EI}{\rho}$ ;  $R$  désignant, dans la deuxième, l'effort supporté par une fibre à la distance  $v'$  de la ligne des fibres invariables, pour l'unité superficielle de sa section; et cette distance peut être arbitraire au lieu d'être la plus grande.

§ 2. *Cette deuxième expression ou équation*  $M = R \frac{I}{v'}$  *est tout aussi exacte que la première*  $M = \frac{EI}{\rho}$  *dans les mêmes limites. Son établissement direct et simple.* — Elle est exacte comme l'autre, tant que les proportions des extensions et des compressions n'ont pas encore dépassé les limites de leur égalité sous des efforts égaux et opposés et de leur proportionnalité à ces efforts, limites où l'on se tient ordinairement en définitive, comme on verra, lorsqu'on l'applique. On peut l'établir d'une manière directe ainsi que celle  $\int_0^{\omega} r d\omega = 0$ , don-

(Du n° 113).

nant les fibres invariables, sans invoquer le n° 78 et sans même parler du coefficient d'élasticité  $E$  ni de la courbure  $\frac{1}{\rho}$ , en admettant seulement, comme on a fait au n° 77 et aux notes, que les fibres résistent à l'extension comme si elles étaient isolées et que les longueurs des petites portions comprises entre deux sections voisines, sont les mêmes que si ces sections étaient restées des plans. En effet, sur ces deux plans très-voisins il y a une ligne, parallèle à leur intersection, à travers laquelle les portions de fibre n'ont pas varié de longueur, et les dilatations éprouvées par les autres sont proportionnelles à leurs distances  $v, v'$  à cette ligne, en sorte que  $R \frac{v}{v'} d\omega$  exprime la résistance ou tension de celle qui est située à la distance  $v$  et dont la section est  $d\omega$ , si les résistances sont restées dans le même rapport que ces dilatations positives ou négatives; d'où il suit que l'équilibre de translation et l'équilibre de rotation de la partie du prisme comprise entre la section  $\omega$  et une extrémité, ont bien pour expressions  $\frac{R}{v'} \int v d\omega = 0$  et  $\frac{R}{v'} \int v^2 d\omega =$  le moment  $M$ , autour de la même ligne, des forces extérieures agissant sur cette partie.

§ 3. Elle n'est pas applicable au delà de ces limites, si ce n'est en faisant varier le coefficient  $R$  qui représente alors autre chose que ce que donnent les expériences de rupture par extension ou compression longitudinale. — Cas de sections ou semblables ou ramenables les unes aux autres par augmentation des ordonnées ou des abscisses. — Mais les dilatations cessent pour l'ordinaire, longtemps avant la rupture, d'être proportionnelles aux efforts qui les produisent (§ 8 de la note du n° 21), et les contractions d'être égales aux dilatations pour mêmes efforts; aussi l'équation précédente  $M = R \frac{I}{v'}$  qu'on peut écrire  $P = R \frac{I}{av'}$  en appelant  $2P$  la force transversale agissant au milieu d'une pièce de longueur  $2a$  appuyée aux deux bouts (n° 90, 122), ne donne pas, même approximativement, la grandeur que doit avoir cette force  $2P$  pour produire la rupture immédiate ou prochaine, en y mettant pour  $R$  la valeur qui résulte des expériences de rupture par traction et pour  $v'$  l'ordonnée des

(Du n° 113).

fibres les plus tendues du côté devenu convexe. On n'obtient pas davantage cette grandeur au moyen de l'équation toute pareille

$$M = R' \frac{I}{v''}, \quad \text{ou} \quad P = R' \frac{I}{av'}$$

dans laquelle  $v''$  est l'ordonnée des fibres qui sont les plus comprimées du côté devenu concave, et  $R'$  la force de compression produisant une contraction longitudinale qui entraîne des dilatations transversales reconnues capables de disjoindre latéralement les fibres (§ 7, 8 de la note du n° 3), coefficient qui peut être fourni directement aussi (§ 9 de id.) par des expériences d'écrasement, et qui, très-supérieur à  $R$  pour les métaux, lui est généralement inférieur pour les bois.

On trouve bien, il est vrai, en faisant des expériences sur des pièces rectangulaires, que la force  $2P$  rompant par flexion, est non-seulement en raison inverse de la longueur  $2a$  (ce qui doit avoir lieu pour toutes les pièces prismatiques), mais encore, en raison directe de la largeur  $b$  et du carré  $c^2$  de l'épaisseur ou hauteur des sections

conformément à l'équation qui, pour  $I = \frac{bc^3}{12}$ ,  $v' = \frac{c}{2}$  prend la forme  $P = R \frac{bc^3}{6a}$ ; et l'on verra, à la note du n° 151, qu'on a la même chose

pour toutes les sections semblables, ou pour toutes celles qui, comme le rectangle ou l'ellipse, peuvent se transformer les unes dans les autres en amplifiant ou réduisant dans une même proportion toutes les abscisses ou toutes les coordonnées. Mais ce qu'on en tire alors pour  $R$ , après des expériences de rupture par flexion, est plus grand que la valeur de ce coefficient déduite d'expériences de rupture par extension et en est souvent plus que double, par exemple pour les pièces de fonte à section rectangle (ce qu'on expliquera à la note du n° 151). Et, pour des sections de diverses formes comparées non ramenables ainsi les unes aux autres, les expériences de rupture par flexion ne sauraient même être représentées par une équation

telle que  $P = R \frac{I}{av'}$  avec un coefficient  $R$  quelconque, à moins

qu'on ne le fasse varier pour même matière avec la forme des sections, et même avec leur situation par rapport à la direction des

( Du n° 123 ).

forces extérieures ; car, pour les pièces de fonte en T, par exemple, il faudrait un nombre R plus grand en les retournant de manière à mettre en haut la plus petite nervure d'abord en bas (ci-après note du n° 120).

C'est seulement au moyen d'une pareille adaptation de la valeur variable du coefficient R aux diverses formes et situations des sections qu'on peut arriver à prévoir par la formule  $P = R \frac{I}{av}$  le poids capable de rompre les pièces d'échafaudages, barraquements et autres constructions temporaires dans lesquelles on peut approcher bien près du maximum des charges moyennant une surveillance active et des précautions journalières (voyez note du n° 151).

§ 4. Elle donne cependant la résistance à l'énerivation ou à la rupture éloignée. — Coefficient  $R_0$  de cette résistance permanente. — Heureusement que les calculs les plus fréquents et les plus utiles sont ceux de résistance des constructions permanentes. Or l'observation prouve que pour celles-ci (ainsi qu'on a dit à la fin de la note du n° 21 et que l'exprimera Navier à la fin du n° 151), si l'on veut prévenir une rupture plus ou moins éloignée, due à l'altération de la contecture ou à l'énerivation de la matière avec le temps et les circonstances accidentelles, il faut que la plus grande dilatation ou contraction longitudinale excède très-peu ou point celles qui varient d'une manière exactement proportionnelle aux efforts qui les produisent. En conséquence en appelant, comme à la fin des notes des n° 21 et 3,

$$R_0, R'_0,$$

les efforts (bien moindres que ceux qui sont appelés R et R'), répondant par unité de section à cette dilatation ou contraction, limite de celles que les fibres peuvent supporter indéfiniment sans danger, les équations

$$M = ou < R_0 \frac{I}{v''}, \quad M = ou < R'_0 \frac{I}{v''}$$

expriment aussi exactement qu'on peut le désirer la double condition de non-énerivation ou de stabilité indéfinie de la cohésion de la matière, condition à remplir surtout, pour les fibres les plus étén-

(Du n° 113).

dues du côté devenu convexe et pour les fibres les plus contractées du côté devenu concave.

Ainsi la recherche d'équations capables de représenter des états de flexion plus voisins de la rupture, et les changements successifs de position de l'*axe neutre* ou ligne des fibres invariables n'a qu'un intérêt secondaire (ci-après note du n° 151); et les expériences sur la manière dont les pièces rompent, ou plutôt dont les ruptures s'achèvent une fois commencées, ne peuvent nullement être invoquées contre la théorie qui nous a conduits à l'équation précédente dont l'emploi permet (et c'est là l'essentiel) de prévenir le commencement de la rupture ou plutôt de l'énervation, sans s'occuper de ce qui suit, dont la considération peut seulement aider à la détermination des coefficients  $R_0$ ,  $R'_0$  des formules.

§ 5. *Restriction relative à la nécessité de prendre en considération les glissements quelquefois.* — Nous observerons toutefois que

l'équation  $M = R_0 \frac{I}{v}$  n'exprime complètement la condition de dilatations au plus égales à  $\frac{R_0}{E}$  que quand c'est bien dans le sens des fibres qu'a lieu la dilatation la plus grande; or, cela exige qu'il n'y ait pas de glissements transversaux ou qu'ils soient négligeables, car ils produisent des écartements moléculaires se composant avec les écartements longitudinaux pour amener un écartement résultant, légèrement oblique aux fibres. Nous apprendrons plus loin, (note des n° 152 à 155) à calculer cette influence des glissements, qui peut généralement être négligée lorsque le plus grand bras de levier des forces qui fléchissent excède sensiblement l'épaisseur de la pièce, ainsi que Coulomb l'avait pressenti (mémoire cité de 1773).

§ 6. *Équation d'élasticité. Équation de cohésion ou de stabilité. Section dangereuse. Point dangereux. Formes d'égale résistance.* — L'équation

$$M = \frac{EI}{\rho},$$

et l'équation

$$\text{Maximum de } M = \text{au plus } R_0 \frac{I}{v'} \text{ ou } R'_0 \frac{I}{v''}$$

(Du n° 113).

dont les analogues sont  $P = EI$ ,  $P = R_0 \omega$  ou  $R'_0 \omega$  pour le cas simple de l'action longitudinale (notes des n° 21 et 3), seront quelquefois appelées, la première, *équation d'élasticité*, et la seconde, *équation de cohésion permanente*, ou de *stabilité*, ou de *résistance à la rupture éloignée*.

Celle-ci (en nous bornant, pour fixer les idées, à considérer ici le côté des fibres étendues) donne

$$\frac{I}{v'} = \text{maximum de } \frac{M}{R_0},$$

ce qui servira à régler les dimensions transversales d'une pièce prismatique d'après le nombre  $R_0$  relatif à sa matière, et d'après la plus grande valeur du moment variable  $M$  des forces qui la sollicitent.

La section pour laquelle ce moment est le plus grand a été appelée par M. Poncelet, *section dangereuse*; et le point où elle est traversée par la fibre la plus tendue et le plus en danger de rompre, *point dangereux*. Cette section se trouve au milieu de la pièce lorsqu'elle est posée sur deux appuis et sollicitée comme aux n° 122, 125, 126, et se trouve à l'encastrement dans le cas des n° 121, 124. Le point dangereux est celui qui répond à la plus grande ordonnée  $v = v'$  quand on ne tient pas compte des glissements.

En effaçant *Maximum* ou en posant  $\frac{I}{v'} = \frac{M}{R_0}$  on a une équation dont on tire des dimensions transversales variables avec le moment  $M$ , ou avec les distances du point d'application des forces et telles que toutes les sections seront également dangereuses ou ne fatigueront pas plus l'une que l'autre. On reviendra aux n° 498 à 507, section quatrième, sur ces formes dites *d'égale résistance* ou de moindre volume considérées par Galilée dès l'origine de la théorie de la résistance des solides.

§ 7. *Cas où il faut poser l'équation d'élasticité, ou calculer les déplacements des points, avant d'établir l'équation de cohésion.* — Celle-ci peut être posée directement dans les problèmes particuliers, toutes les fois que le moment  $M$  des forces sollicitantes est connu à priori, ou déterminable directement aussi. Mais il faut se servir



(Du n° 113).

d'abord de la première, ou calculer préalablement les flexions ou les déplacements des-points :

1° Lorsque ces déplacements modifient sensiblement les bras de levier qui entrent dans M, comme il arrive notamment pour les pièces sollicitées *debout* ou très-obliquement.

2° Lorsque tout ou partie des forces qui entrent dans ce même moment sont des réactions de points fixes ou des actions mutuelles de pièces, ne pouvant être fournies en fonction des forces données par les seules équations d'équilibre de translation et de rotation générale de la statique élémentaire. Alors il faut (comme on verra surtout à la section quatrième), poser d'abord des expressions des déplacements en fonction des forces tant connues qu'inconnues, afin de déduire celles-ci des conditions que les déplacements doivent remplir aux points particuliers où elles agissent, par exemple de la nullité de ces déplacements aux points fixes, de leur direction obligée aux encastremens, de leur égalité pour deux pièces ou des portions d'une même pièce à leur jonction, etc., en ne calculant, au reste, à chaque jonction ou encastrement, que les résultantes et les moments résultants des réactions inconnues quand elles sont en nombre indéfini (ainsi qu'on l'a fait voir en 1837-1838 à des feuilles lithographiées de leçons de mécanique à l'École des ponts et chaussées, n° 46, 47, 48, 49, 82, et en 1843 aux Comptes rendus de l'Académie, t. XVII, p. 954 et p. 1025 à 1028).

3° Enfin, lorsqu'il y a lieu de composer ensemble des effets simultanés de divers genres, comme une flexion avec un glissement ou une torsion. (Voyez notes des n° 152 à 155, et de l'article V).

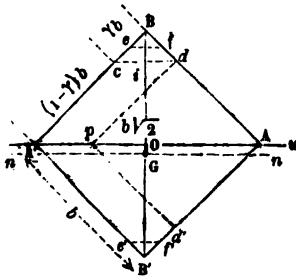
Il est d'ailleurs toujours utile de revenir souvent à la considération des déplacements et des dilatations, quand ce ne serait que pour ne pas se laisser égarer, comme ont fait quelques auteurs anglais, par la considération exclusive des efforts intérieurs qui ne sont pas directement, comme les dilatations, ce qu'il est nécessaire de limiter, et qui n'ont pas toujours entre eux des rapports simples.

§ 8. Cas où  $\frac{I}{v}$  ou  $\frac{I}{v^2}$  augmente en tronquant la section. — Supposer alors la troncature qui donne à ce quotient sa plus grande valeur. — La rupture ou la disjonction des fibres les plus tendues

(Du n° 1113).

ou les plus comprimées n'entraîne pas toujours celle des autres fibres, et souvent la soustraction d'un certain nombre d'entre elles ne fait qu'augmenter la grandeur de ce quotient  $\frac{I}{v'}$  ou  $\frac{I}{v''}$  par lequel nous estimons la résistance spécifique des diverses sections.

Soit, par exemple, un prisme à section carrée ABA'B' sollicité à fléchir dans le plan des diagonales BB', et dont on suppose d'abord que la matière (comme les métaux fondus), est bien plus sujette à



se désagréger ou à s'énervier par la tension que par une compression égale. Soit retranché de cette section, le triangle isocèle cBd traversé par les fibres les plus dilatées. On aperçoit de suite, si les côtés Bc=Bd de ce triangle sont très-petits, que la fraction  $\frac{I}{v'}$  augmentera, car, en même temps que le numérateur ne sera diminué que d'une quantité

très-petite du second ordre, le dénominateur le sera d'une quantité du premier ordre.

Pour voir jusqu'où va une pareille augmentation de  $\frac{I}{v'}$  qui primitivement, si  $b$  est le côté du carré, avait une valeur donnée par

$$I = \frac{b^4}{12}, \quad v' = \frac{b\sqrt{2}}{2}, \quad \frac{I}{v'} = \frac{b^3}{6\sqrt{2}}$$

appelons  $\gamma$  la proportion de la troncature des côtés supérieurs du carré, en sorte que Bc = Bd =  $\gamma.b$ . On obtiendra, d'abord, la position du centre de gravité G de la section tronquée, ou sa distance GO à la diagonale AA', en divisant par l'aire nouvelle de la section :

$$\omega_1 = b^2 - \frac{\gamma^2 b^2}{2}$$

son moment statique par rapport à cette diagonale. Comme le moment de la section primitive ou entière est nul, le moment (aussi statique) de la section nouvelle est égal, au signe près, à celui du triangle retranché cBd, ou à

(Du n° 113).

$$\frac{\gamma^2 b^3}{2} \left( \frac{b\sqrt{2}}{2} - \frac{2}{3} \gamma \frac{b\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{b^3 \sqrt{2}}{12} (3\gamma^2 - 2\gamma^3);$$

on a donc pour la distance cherchée

$$GO = \frac{b\sqrt{2}}{6} \cdot \frac{3\gamma^2 - 2\gamma^3}{2 - \gamma^2};$$

d'où, pour la distance nouvelle  $G_i = v'_1$  de la ligne des fibres invariables  $nGn$  parallèle à  $AA'$ , à celle  $cd$  ou aux fibres les plus tendues

$$v'_1 = \frac{b\sqrt{2}}{2} (1 - \gamma) + \frac{b\sqrt{2}}{6} \cdot \frac{3\gamma^2 - 2\gamma^3}{2 - \gamma^2} = \frac{b\sqrt{2}}{6} \cdot \frac{6 - 6\gamma + \gamma^3}{2 - \gamma^2}.$$

Pour avoir le moment d'inertie  $I_1$  nouveau ou autour de  $nGn$ , prenons-le d'abord autour de la diagonale  $AA'$ . On aura, en partageant la figure en deux demi-carrés  $AB'A'$ ,  $Adp$  dont les côtés sont  $b$ ,  $(1 - \gamma)b$ , et en un parallélogramme  $A'cdp$  dont la base est  $\gamma b\sqrt{2}$  et la hauteur  $(1 - \gamma) \frac{b\sqrt{2}}{2}$ , la valeur suivante de ce moment autour de  $AA'$ :

$$\frac{b^4}{24} + \frac{(1 - \gamma)^4 b^4}{24} + \gamma b\sqrt{2} \cdot \frac{1}{3} \left[ (1 - \gamma) \frac{b\sqrt{2}}{2} \right]^3;$$

d'où, en retranchant (paragraphe 4 de la note du n° 81, p. 48),

$$\omega_1 \times \overline{GO}^3 = b^3 \frac{2 - \gamma^2}{2} \cdot \left[ \frac{b\sqrt{2}}{6} \cdot \frac{3\gamma^2 - 2\gamma^3}{2 - \gamma^2} \right]^3 \text{ et en divisant par } v'_1$$

$$\frac{I_1}{v'_1} = \frac{b^3}{6\sqrt{2}} \cdot \frac{12 - 42\gamma^2 + 48\gamma^3 - 18\gamma^4 + \gamma^6}{12 - 12\gamma + 2\gamma^3}.$$

Le maximum de ce quotient a lieu pour  $\gamma = 0,2440$  et a pour valeur

$$\frac{I_1}{v'_1} = 1,1134 \frac{b^3}{6\sqrt{2}} = 1,1134 \frac{I}{v};$$

en sorte que pour avoir théoriquement la résistance spécifique la plus grande possible, il faut retrancher, de la section, un triangle dont les côtés soient les 0,2440 (ou presque le quart) de ceux du carré, et cette résistance est, ainsi, plus forte des 0,1134, ou de  $1/9$  à  $1/8$ , que celle qui est offerte par le carré non tronqué.

On aurait le même résultat, mais en faisant la troncature à l'angle opposé, si la matière était sensiblement plus sujette à s'énerver par

( Du n° 113 ).

contraction suivie de disjonction latérale (§ 8 de la note du n° 3), que par dilatation des fibres, comme il arrive pour certains bois.

Mais si les fibres ont une égale disposition à se désagréger pour des dilatations et pour des contractions égales, il faut supposer la soustraction simultanée de deux petits triangles égaux  $Bef$ ,  $B'ef'$ . En appelant toujours  $\gamma b$  leurs côtés, on trouve pour le nouvel état

$$I_1 = \frac{(1-\gamma)^4 b^4}{12} + 2 \frac{b^4}{6} \gamma (1-\gamma)^3, \quad v'_1 = (1-\gamma) \frac{b\sqrt{2}}{2};$$

$$\frac{I_1}{v'_1} = \frac{b^3}{6\sqrt{2}} (1+3\gamma) (1-\gamma)^3;$$

Le maximum de cette expression a lieu pour

$$\gamma = \frac{1}{9}$$

résultat déjà signalé par Emerson (1), mais en l'appliquant à une section triangulaire telle que  $ABA'$  et non à une section carrée, parce qu'il supposait la matière *incompressible*, ce qui revient à placer le *neutral axis* ou la ligne des fibres invariables sur la base inférieure.

De cette troncature du carré du  $1/9$  des deux côtés il résulte

$$\frac{I_1}{v'_1} = \frac{256}{243} \frac{b^3}{6\sqrt{2}} = 1,0535 \frac{I}{v'}$$

ou une augmentation des 0,0535 ou de  $\frac{1}{19}$  à  $\frac{1}{18}$  dans  $\frac{I}{v'}$ .

Si l'on considère comme Emerson la section triangulaire isocèle, mais en faisant passer la ligne *neutre* ou des fibres invariables par le centre de gravité du trapèze qui résulte de la troncature au sommet, on trouve, par les dernières formules du § 3 de la note du n° 82 :

$$I_1 = \frac{b^4 (1-\gamma)^3 (1+4\gamma+\gamma^2)}{72 (1+\gamma)}, \quad v'_1 = \frac{b\sqrt{2}}{3} (1-\gamma) \frac{2+\gamma}{2+2\gamma}.$$

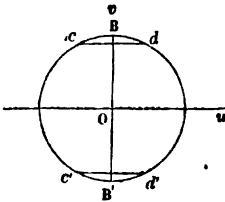
Le maximum de  $\frac{I_1}{v'_1}$  répondra à  $\gamma = 0,1304$  et aura pour va-

(1) *Emerson's Mechanics*, sect. VIII, p. 444. Ce passage est cité par M. Tredgold (*Force du fer coulé*, traduction de 1826, n° 85), et par M. Hodgkinson (*Recherches expérimentales*, etc. 1846, p. 76 de la traduction de M. Pirel, insérée en 1855 aux *Annales des ponts et chaussées*, 4<sup>or</sup> semestre).

(Du n° 113).

leur 1 fois,0922 celle  $\frac{b^3}{24\sqrt{2}}$  relative au triangle non tronqué.

Cette augmentation de  $\frac{I}{v'}$  par des troncutures a lieu même lorsque la section, au lieu d'offrir des pointes, se termine par des parties arrondies B, B'; car, si l'on en retranche deux segments cBd, c'B'd' dont les cordes soient parallèles à l'axe Ou du moment, et dont les flèches soient très-petites de l'ordre 1, le dénominateur de  $\frac{I}{v'}$  diminuera d'une quantité du même ordre, mais le numérateur diminuera d'une quantité bien plus petite puisqu'elle sera de l'ordre 3/2, d'où il suit bien que cette troncuture aura augmenté le quotient.



Par exemple soit une section circulaire pour laquelle on a,  $r$  étant le rayon, et le moment étant pris autour du diamètre Ou

$$I = \frac{\pi r^4}{4}, \quad v' = r, \quad \frac{I}{v'} = \frac{\pi r^3}{4}.$$

Soit  $\gamma r$  la flèche très-petite des segments retranchés, supposés égaux; leur corde est  $2\sqrt{\gamma r(2r - \gamma r)}$ ; l'aire de chacun est à peu près

$$\frac{2}{3} \cdot \gamma r \cdot 2\sqrt{\gamma r \cdot 2r} = \frac{4}{3} r^2 \gamma \sqrt{2\gamma};$$

le moment d'inertie nouveau est environ  $I_1 = \frac{\pi r^4}{4} - r^2 \cdot \frac{8}{3} r^2 \gamma \sqrt{2\gamma}$ ,

et comme la nouvelle valeur de  $v'$  est  $v'_1 = r(1 - \gamma)$ , l'on a, à cela près de quantités d'ordre supérieur,  $\frac{I_1}{v'_1} = \frac{\pi r^3}{4} \left(1 + \gamma - \frac{32\sqrt{2}}{3\pi} \gamma^{\frac{3}{2}}\right)$ ,

dont le maximum, répondant à  $\gamma = \frac{\pi^2}{512} = 0,0193$ , est

$$\frac{\pi r^3}{4} \left(1 + \frac{\pi^2}{1536}\right) = 1,0064 \frac{\pi r^3}{4}.$$

On obtient la solution exacte en appelant  $2\alpha$  l'angle au centre de chacun des deux segments retranchés, et en se servant de la quatrième formule du § 3 de la note du n° 84, qui donne

$$I_1 = \frac{\pi r^4}{4} - r^4 \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\sin 4\alpha}{8}\right), \quad v'_1 = r \cos \alpha,$$

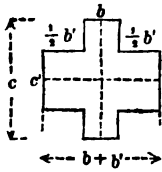
(Du n° 113).

en sorte que le maximum de  $\frac{I_1}{v_1}$ , répondant à  $\alpha = 0,1343 \frac{\pi}{2}$ , ou à  $\gamma = 0,0222$ , est

$$1,00693 \frac{\pi r^3}{4}$$

et donne ainsi une résistance surpassant des  $0,00693 = \frac{1}{144}$  environ celle qu'on avait avant la troncature.

Pour une section rectangle, sollicitée parallèlement à deux côtés, le quotient  $\frac{I}{v}$  n'augmente pas en diminuant ainsi la hauteur. Mais



il en peut être autrement d'une section composée de plusieurs rectangles, telle que la croix d'équerre ayant latéralement deux parties de largeur  $\frac{1}{2} b'$  et de hauteur  $c'$ , et au milieu une partie de largeur  $b$  et de hauteur  $c > c'$ , ce qui fait deux nervures

de largeur  $b$  et de saillie  $\frac{1}{2} (c - c')$  sur un rectangle de largeur  $b + b'$  et de hauteur  $c'$ . On a pour cette section

$$I = \frac{bc^3}{12} + \frac{b'c'^3}{12}, v' = \frac{c}{2}, \frac{I}{v'} = \frac{bc^3 + b'c'^3}{6.c}$$

Si l'on réduit à  $c_1$  la hauteur  $c$  du rectangle comprenant la nervure, et si l'on appelle  $\frac{I_1}{v_1}$  la nouvelle valeur de  $\frac{I}{v}$  qui en résulte, on a la différence

$$\begin{aligned} \frac{I_1}{v_1} - \frac{I}{v'} &= (c - c_1) \frac{b'c'^3 - bcc_1(c + c_1)}{6.c.c_1} = \\ &= \left(\frac{c}{c_1} - 1\right) \frac{bc^3}{6} \left[ \frac{b'c'^3}{bc^3} + \frac{1}{4} - \left(\frac{c_1}{c} + \frac{1}{2}\right)^2 \right]. \end{aligned}$$

Cette différence sera positive pour toute valeur de  $c_1$ , plus petite que  $c$  si l'on a  $\frac{b'c'^3}{bc^3} + \frac{1}{4} > \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2$ , ou

$$b'c'^3 > 2.bc^3;$$

alors toute diminution de la hauteur des nervures augmentera le

(Du n° 113).

quotient  $\frac{I}{v}$  par lequel nous mesurons la résistance à la rupture. Et si cette condition  $b'c^2 > 2.bc^2$ , n'est pas remplie, ou si  $\frac{I}{v}$  diminue d'abord quand on réduit très-peu la hauteur  $c$ , on rendra toujours ce quotient plus grand qu'il n'était primitivement en prenant  $c_1$  suffisamment petit; mais comme  $c_1$  ne saurait être au-dessous de  $c'$  il faudra qu'on ait pour cela

$$b'c^2 > bcc' (c + c'), \text{ ou } b'c^2 > bc^2 \left(1 + \frac{c'}{c}\right).$$

Toutes les fois que cette dernière condition sera satisfaite, ou que la résistance à la rupture offerte par la partie  $b' \times c'$ , excédera  $\left(1 + \frac{c'}{c}\right)$  fois (moins de deux fois) la résistance à la rupture offerte par la partie  $b \times c$ , on augmentera  $\frac{I}{v}$  en supprimant les deux nervures ou saillies  $b \times \frac{c-c'}{2}$ .

L'existence de fibres inutiles, qui rompent ou s'énervent d'abord sans le reste, ne saurait diminuer en rien la résistance d'un solide à la rupture. Il faudra donc, toutes les fois que cette circonstance se présentera, c'est-à-dire lorsque le quotient  $\frac{I}{v}$  augmentera en tronquant la section comme on vient de voir, prendre pour valeur définitive de ce quotient sa plus grande valeur, résultant d'une troncature convenable, faite soit du côté des fibres étendues, soit du côté des fibres comprimées, soit des deux côtés à la fois suivant la nature de la matière.

Ainsi, pour la section carrée sollicitée diagonalement, si la cohésion résiste sensiblement plus aux compressions qu'aux extensions ou réciproquement, on prendra 1 fois,4134 la valeur  $\frac{b^3}{6\sqrt{2}}$  de  $\frac{I}{v}$  relative à la section entière ou non tronquée, et l'on prendra 1 fois,0535 seulement si la cohésion s'altère autant par des compressions que par des extensions égales, dépassant une certaine limite, et après le même temps d'action.

Dans cette dernière supposition, qu'il faudra toujours faire par

(Du n° 113).

prudence s'il y a incertitude (vu qu'elle est la plus défavorable), si la section est circulaire, on prendra  $\frac{I}{v}$  égal à 1 fois,00693 la valeur  $\frac{\pi r^3}{4}$  relative à une troncature nulle.

Et si la section est un rectangle avec nervure faisant saillie sur ses bases, on calculera  $\frac{I}{v}$  en supprimant les nervures lorsqu'on aura (figure d'autre part)  $b'c^2 > bc^2 \left(1 + \frac{c'}{c}\right)$ .

Et ainsi des autres.

On sera même assuré d'une résistance un peu supérieure à celles qui seront mesurées par les valeurs de  $\frac{I}{v}$  ainsi augmentées; car les fibres *surtendues* ou *surpressées* que nous regardons comme inutiles parce que leur soustraction ne fait qu'accroître ce quotient, ne laissent pas, tout en éprouvant un commencement de désagrégation, d'apporter une quote part à la résistance totale. Elles ne rompent pas d'une manière patente et complète si le reste ne rompt pas; tout au plus subissent-elles ces petites disjonctions intérieures et invisibles que nous avons dit constituer, probablement, l'énervation de la matière (fin du § 9 de la note du n° 21), et qui ne font que diminuer la section effectivement résistante de chacune des fibres sans l'annuler. (Voyez aussi § 16 ci après).

Aussi, dans une expérience comparative de rupture immédiate faite par M. Hodgkinson, un prisme triangulaire a offert plus de résistance avant qu'après la troncature du sommet de la section (1).

On peut donc avec sécurité adopter, pour les sections entières, les valeurs les plus grandes de  $\frac{I}{v}$  relatives aux sections tronquées, c'est-à-dire  $1,0535 \frac{b^3}{6\sqrt{2}}$  pour le carré sollicité diagonalement,  $1,0069 \frac{\pi r^3}{4}$  pour le cercle, etc.

On voit au reste que les coefficients numériques ajoutent peu aux

(1) *Recherches, etc.*, citées tout à l'heure. Les figures 53, 54 de la traduction insérée aux *Ann. des ponts et ch.*, en 1855, ne sont pas en rapport avec les pages 73 (expériences 12 et 13) et 76 du texte, où l'on ne parle que de sections *pleines* et ayant d'autres proportions.

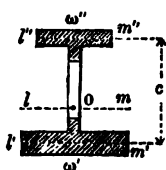
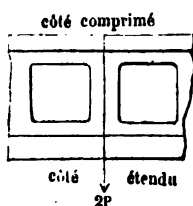


(Du n° 113).

valeurs de  $\frac{l}{v}$  calculées pour les sections entières. Aussi, tout en appelant l'attention sur les considérations qui précèdent afin d'y avoir égard dans quelques occasions, nous calculerons presque toujours par la suite les résistances sans supposer de troncatures.

§ 9. *Moyen commode de poser une équation de cohésion approchée dans certains cas.* — On a remarqué, à la fin de la note du n° 80, que l'équation d'équilibre de rotation peut être posée autour de toute ligne tracée sur une section  $\omega$  à une distance quelconque  $\pm d$  de celle des fibres invariables, et cette équation  $M = \int \frac{R}{v} r(r \pm d) d\omega$  se réduit toujours à  $M = \frac{RI}{v}$ , vu que  $\int r d\omega = 0$ . Il est commode de

prendre, ainsi, l'axe des moments des forces successivement autour de deux lignes  $l'm'$ ,  $l''m''$  tracées vers le haut et vers le bas d'une section



lorsqu'elle se compose de deux parties  $\omega'$ ,  $\omega''$  séparées par un intervalle beaucoup plus grand que leurs hauteurs, et liées entre elles par une ou deux plaques minces évidées, dont

on puisse négliger la résistance et le moment d'inertie. En effet,  $c$  étant la distance des milieux de ces parties, ou des lignes  $l'm'$ ,  $l''m''$  supposées parallèles à l'axe neutre  $lm$  que traversent les fibres invariables, pour que la partie  $\omega'$  supporte par unité superficielle la limite  $R$  des tractions non dangereuses et celle  $\omega''$  la limite  $R'$  des pressions aussi sans danger ou ne donnant pas lieu à des dilatations transversales dangereuses (§ 3 et § 13), on aura deux équations de moments très-simples :

$$M'' = R'\omega''c \text{ autour de } l'm',$$

$$M' = R\omega'c \text{ autour de } l''m'',$$

où nous avons mis, aux premiers membres, des moments différents  $M''$ ,  $M'$  afin d'embrasser le cas où les forces extérieures ont une composante longitudinale totale comme celle  $Q$  du § 8 de la note du

(Du n° 113).

n° 80. On peut vérifier au reste que les seconds membres sont identiques à

$$R' \frac{I}{v''}, \quad R \frac{I}{v'},$$

$v''$ ,  $v'$  étant respectivement les distances de  $l''m''$ ,  $l'm'$  à la ligne  $lm$  ou au centre de gravité de la section, car on a

$$v'' = \frac{\omega'}{\omega' + \omega''} c, \quad v' = \frac{\omega''}{\omega' + \omega''} c, \quad I = \omega' v'^2 + \omega'' v''^2 = \frac{\omega' \omega''}{\omega' + \omega''} c^2.$$

Ces deux équations de moments autour de  $l'm'$ ,  $l''m''$  montrent qu'on doit, lorsque  $M' = M'' = M$  ou lorsqu'il n'y a pas de pression ou traction longitudinale totale, proportionner les parties  $\omega'$ ,  $\omega''$  de la section aux inverses des résistances  $R$ ,  $R'$  à la rupture par traction et à la rupture par pression, et elles donnent les superficies à leur attribuer pour qu'elles *fatiguent* également ou que l'une ne coure pas plus de risque de rompre que l'autre. C'est par cette méthode approximative que M. Edwin Clark et d'autres ingénieurs anglais calculent les dimensions des pièces de fer laminé des *ponts tubulaires* qu'ils projettent, et dont la base  $\omega'$  et le toit  $\omega''$  sont composés de cellules rectangulaires (1). Nous verrons toutefois qu'elle peut donner des résultats fautifs (voy. §§ 16 à 18 de la note du n° 120), et que si on se dispense de tenir compte de la partie verticale et des hauteurs des parties horizontales des sections à double T, on risque de se tromper quelquefois du simple au double dans l'évaluation du rapport  $\frac{v'}{v''}$  des distances du centre de gravité aux deux bases.

§ 10. *Détermination directe des coefficients R. et R'. de résistance permanente.* — La difficulté principale qui se rencontre dans l'application des équations de cohésion *permanentes* telles que celle  $M$  ou  $Pa = R. \frac{I}{v'}$  ou  $R'. \frac{I}{v''}$  du cas de flexion (§§ 3 à 6), et celles (note du n° 21, § 12, et du n° 3, § 9)  $P = R. \omega$ ,  $P = R'. \omega$  des cas d'extension et de compression simple par des forces longitudinales,

(1) *The Britannia and Conway tubular Bridges*, 1850, ou *Notice sur les ponts tubulaires*, par M. Yvert, 1851.

( Du n° 113 ).

résidé dans la détermination, pour chaque espèce de matière, de la constante

$$R_0 \text{ ou } R'_0,$$

ou (comme le coefficient d'élasticité  $E$  est toujours facile à obtenir) dans la détermination de la dilatation ou contraction

$$i' = \frac{R_0}{E} \text{ ou } \frac{R'_0}{E},$$

limite de celles qui n'offrent aucun danger, même à la longue, même avec intermittence et petites augmentations périodiques dues aux vibrations, et eu égard aussi aux autres circonstances accidentelles dont on a parlé § 12 de la note du n° 21.

On détermine  $i'$  ou  $R_0$ ,  $R'_0$ , lorsqu'on le peut, comme on a déjà dit alors ainsi qu'à la note du n° 3, par l'examen de constructions existantes et déjà anciennes, soumises aux mêmes causes de fatigue et de destruction, et réputées *hardies*, ou n'ayant, au jugement de constructeurs expérimentés qui en ont vu s'écrouler d'autres plus légères, que tout juste les dimensions nécessaires pour résister. Comme on n'a pas souvent à sa disposition ce moyen de détermination, l'on s'est quelquefois servi, conformément à un conseil de Young (sous-note du § 10 de la note du n° 21) d'expériences d'extension ou plutôt de flexion, en observant la dilatation ou la flèche qui commence à avoir une partie *persistante* sensible (ce que les Anglais appellent *set* ou *defect of elasticity*) (1) en se tenant en deçà (2).

(1) M. Hodgkinson. *Experimental researches on the Strength and other properties of cast iron*. London, 1846, n° 99 (ou traduction de M. Pirel).

(2) C'est ainsi que M. Tredgold a adopté, pour construire la table II° de l'Introduction de son *Practical Essay on the Strength of cast iron* (page 26, article 6 de la traduction, *Essai sur la force du fer coulé*, faite en 1826 par M. Duverne sur la 2° édition), une valeur de  $R_0$  résultant d'une expérience (art. 45, p. 87) où une barre de bonne fonte, de 34 pouces anglais de longueur entre les deux appuis, et de 4 pouce d'équarrissage, a commencé à prendre une flèche permanente sous une charge de 410 livres (pounds) au milieu, ce qui, en réduisant la charge à 300 livres (art. 106, p. 193 de la même traduction), ou en faisant  $2P=300$ ,  $2a=34$ ,  $b=c=1$  dans la formule  $M=R_0 \frac{l}{v}$ , ou  $\frac{2P \cdot 2a}{4} = R_0 \frac{bc^3}{6}$ , donne  $R_0=45300$  lbs par pouce carré ou 40753000 kilogrammes par mètre carré; ce qui répond, d'après la flèche observée qui était 0pouce,16 et d'après les expressions  $i' = \frac{R_0}{E}$ ,  $E = \frac{2P(2a)^3}{4bc^3 \cdot l}$

(Du n° 113).

Mais, comme nous l'avons observé (§§ 9 et 10 de la note du n° 21), cette partie persistante, qui se manifeste quelquefois avec les dilatations les plus faibles, n'est pas un signe de perte d'élasticité ni de cohésion; et il conviendrait, en donnant une très-longue durée aux expériences, d'observer plutôt le point où la matière cesse de s'*écrouir* et commence à s'*énervier* (notes des n° 1 et 21), sauf à se tenir fortement en deçà dans l'adoption de la charge dont on déduira par les formules (exactes ordinairement jusqu'à cette valeur réduite) la limite des dilatations, ou celle des tensions, afin de laisser une large part aux circonstances accidentelles qu'on vient de rappeler et que le calcul ne peut embrasser.

Il convient aussi, comme a fait la commission d'enquête anglaise instituée le 27 août 1847 (1), de soumettre les pièces à une longue série de chocs ou bien d'alternatives de fatigue et de relâchement, afin d'apprécier l'effet désorganisateur de ces mouvements répétés, dont chacun peut modifier la texture un peu autrement que les précédents (§ 12 de la note du n° 21).

§ 11. *Usage d'expériences de rupture immédiate, par traction ou par compression, pour des comparaisons de valeurs des coefficients R<sub>o</sub> ou R'<sub>o</sub> relatives aux diverses variétés d'une même matière.* — Mais les expériences dont nous venons de parler § 10 sont dispendieuses

ou simplement d'après celle  $i = \frac{3v'f}{a^2}$  (fin de la note du n° 87 ci-dessus), en faisant  $a = 17$ ,  $f = 0,16$ ,  $v' = \frac{c}{2} = \frac{4}{2}$ , à  $i = \frac{0,24}{289} = \frac{4}{4204} = 0,00083045$  que M. Tredgold propose d'adopter comme limite de la dilatation non dangereuse de la fonte de fer.

Mais M. Hodgkinson (*Experimental researches*, etc., ou traduction française de M. l'ingénieur Pirel, aux *Annales des ponts et chaussées*, 1855, 4<sup>or</sup> semestre, p. 58), oppose d'autres expériences qui paraissent prouver que la charge de 300 lbs, s'élevant à plus du tiers de celle qui est capable de rompre la barre de M. Tredgold, donnait probablement déjà une flèche permanente, qui eût été manifestée par une plus longue action ou par des moyens de mesurage plus délicats. Il pense aussi que sous cette même charge les dilatations et les contractions des fibres devaient être inégales pour mêmes efforts et non proportionnelles à ces efforts, en sorte que la ligne neutre ne devait pas passer par le centre de gravité comme le suppose la formule dont Tredgold a tiré les valeurs de R<sub>o</sub> et de F, que M. Hodgkinson trouve en conséquence trop fortes (voyez Complément ci-après des art. I à VI).

(1) *Report of the Commissioners appointed to inquire into the application of iron to Railway structures*, London, 1849.

(Du n° 113).

et difficiles ; celles qui sont relatives, notamment, au point de séparation de l'écroutissage et de l'énervation sont délicates et ont besoin d'être extrêmement longues pour qu'on puisse en tirer des conclusions applicables. On ne peut espérer qu'elles seront entreprises pour toutes les matières et leurs diverses variétés et qualités. En attendant, les expériences promptes et infiniment plus faciles de rupture immédiate peuvent très-bien, comme l'observe M. Poncelet (1) (et comme nous avons déjà énoncé aux §§ 9 de la note du n° 8 et 12 de celle du n° 21), fournir au moins des rapports approchés entre les nombres  $R_0$  ou  $R'$ , relatifs aux diverses variétés d'une même espèce de matériaux, comme le bois, la pierre dure ou tendre, le fer, la fonte. Connaissant donc par les constructions anciennes, etc.,  $R_0$  ou  $R'$  pour une variété et sachant qu'il est, par exemple, le 1/8 du coefficient de *cohésion* instantanée  $R$  ou  $R' = \frac{P}{\omega}$  ou de la force  $P$  qui fait rompre immédiatement par traction longitudinale ou par écrasement, divisée par l'aire  $\omega$  de la section, on adoptera, pour les autres variétés ou provenances, aussi le 1/8 de cette charge de prompt rupture.

On n'aura pas pour cela la dilatation limite  $i' = \frac{R_0}{E}$  ou  $\frac{R'}{E}$  égale au 1/8 de la dilatation finale positive ou négative, puisque la proportionnalité des efforts aux effets cesse longtemps avant. Mais on aura un certain rapport aussi à peu près constant entre ces deux dilatations.

§ 12. Usage (pour les mêmes comparaisons) d'expériences de rupture immédiate par flexion. Cet usage n'implique nullement la supposition fautive d'un rapport constant entre les efforts et les dilatations ou contractions jusqu'à la fin. — On peut même, pour les comparaisons dont on vient de parler, se servir également des expériences de rupture par flexion, ordinairement plus faciles que celles de rupture par extension et même par écrasement, et qui, d'ailleurs, mettent les pièces dans des circonstances plus analogues à celles où on veut les employer. Rien donc n'empêche de prendre pour les coefficients  $R_0$  ou  $R'$ , relatifs à chaque matière, une fraction

(1) Introduction à la Mécanique industrielle, n° 253.

( Du n° 113 ).

Constante de ceux R ou R' tirés de l'équation  $2P = R \cdot \frac{2}{a} \frac{I}{v'}$  ou  $R' \cdot \frac{2}{a} \frac{I}{v'}$ , dans laquelle 2P représente le poids rompant immédiatement par flexion des barres de chacune des variétés de cette matière. En effet, supposons d'abord que la rupture ne se fasse que du côté étendu ou devenu convexe. Il est bien vrai que les R ainsi obtenus ne représentent nullement (ainsi qu'on l'a montré au § 3) la tension de la fibre la plus dilatée à l'instant de la rupture; mais si l'on a trouvé pour une variété, au sujet de laquelle on est fixé sur R., qu'il est le 1/6 du R obtenu par flexion, on peut approximativement prendre aussi le 1/6 pour les autres variétés. Cela n'implique nullement la supposition fautive de la proportionnalité constante des efforts aux dilatations des fibres jusqu'à rupture, comme le prétendent les adversaires de la théorie. Cela consiste simplement à admettre que la charge transversale  $2P = R \cdot \frac{2I}{av'}$ , susceptible d'être portée indéfiniment sans danger par une pièce d'une certaine forme, soumise en outre aux chances accidentelles de destruction, est, pour les diverses variétés, une même fraction de celle  $2P = R \frac{2I}{av'}$  qui la ferait rompre au bout de peu d'instants; ce qui est tout aussi plausible, comme approximation, que la supposition analogue faite dans le cas de la traction longitudinale dont la formule simple n'est l'objet d'aucune attaque. Seulement, pour la flexion, cette fraction numériqué devrait être un peu différente, selon qu'on ferait les expériences de rupture avec des barres ayant des sections rectangulaires ou des sections d'une autre forme (ci-après, n° 151 et sa note).

Aussi, comme l'ont proposé en même temps M. Couche, ingénieur en chef professeur à l'École des mines et M. Love, ingénieur civil, il conviendrait de faire toutes les expériences de rupture sur un même échantillon, pour lequel le second de ces deux auteurs propose une barre carrée de 0<sup>m</sup>,50 de longueur sur 0<sup>m</sup>,025 de côté, afin d'établir déjà des comparaisons avec des expériences nombreuses faites en Angleterre sur les fontes.

Les mêmes choses peuvent être dites pour le côté concave ou

( Du n° 113 ).

pour les fibres comprimées, si l'on est certain que la rupture commence par l'écrasement de ce côté (§ 8 de la note du n° 3) ou par la disjonction transversale suivie, dans les bois, de la flexion en détail des fibres désunies. Adopter, pour le coefficient  $R'$ , une fraction constante de  $R'$  déterminé par la formule  $2P = R' \frac{2I}{av^2}$  appliquée aux expériences de rupture, c'est simplement supposer que la charge permanente non dangereuse est proportionnelle à la charge de prompt rupture pour les pièces de même forme et de diverses variétés d'une même matière, ce qui est très-plausible évidemment.

Cette distinction du côté concave ou convexe, par lequel peut commencer la rupture ou son danger éloigné, est même inutile pour les pièces rectangulaires et généralement pour toutes celles qui ont une section symétrique par rapport à une ligne perpendiculaire au plan de flexion; car, pour ces sections, on a  $v' = v''$ , et on peut se servir d'une seule formule  $M = R_0 \frac{I}{v'}$ , dans laquelle le coefficient  $R_0$ , une fois fixé pour une variété de matière, se déterminera pour toutes les autres au moyen d'expériences de rupture sans s'embarrasser de savoir s'il représente une tension-limite ou une pression-limite.

§ 13. *Suite. Détermination du rapport des deux coefficients  $R'$ ,  $R_0$  de maximum des pressions et du maximum des tensions longitudinales non dangereuses des fibres.* — Mais, pour les pièces à section non symétrique par rapport à cette ligne passant par le centre de gravité des sections, il est nécessaire, afin d'assurer la stabilité de la cohésion, de satisfaire à deux conditions

$$M = ou < R_0 \frac{I}{v'}, \quad M = ou < R' \frac{I}{v''},$$

et par conséquent de connaître les valeurs à donner aux deux coefficients  $R_0$ ,  $R'$  ou aux deux limites  $\frac{R_0}{E}$ ,  $\frac{R'}{E}$  qu'il faut imposer à la dilatation et à la contraction longitudinale des fibres.

Si leur rapport  $\frac{R'}{R_0}$  était connu, l'observation de constructions éprouvées, et, ensuite, des expériences de rupture par flexion (§ 12)

( Du n° 113 ).

faites sur des pièces à section rectangle ou autre symétrique de diverses variétés de la même matière, donneraient la valeur du plus petit de ces deux coefficients, et l'autre s'en déduirait.

Mais il s'agit d'obtenir ce rapport.

Pour pouvoir y arriver, rappelons que, d'après le principe général de résistance énoncé au § 4 de la note du n° 3 et appliqué déjà, § 7, aux matières d'égale contexture en tous sens, c'est par les dilatations latérales qu'elles provoquent que les contractions longitudinales amènent un danger ou un commencement de désagrégation. Appelons donc

$E_t$ , le coefficient d'élasticité de la matière d'un prisme, dans un sens transversal ou perpendiculaire aux arêtes ;

$R_t$ ,  $R_o$ , pour ce même sens, les valeurs des quantités qui sont appelées  $R$ ,  $R_o$  pour le sens longitudinal, c'est-à-dire  $R_t$  la cohésion transversale instantanée ou la force qui séparerait immédiatement la matière dans le sens transversal, sur l'unité superficielle de section parallèle aux fibres, et  $R_o$  la cohésion transversale permanente ou la force de traction, limite de celles qui peuvent être supportées sans danger un temps indéfini ; ou appelons

$$\frac{R_o}{E_t}$$

la limite des dilatations non dangereuses dans le même sens transversal.

Si  $\eta$  représente, comme aux notes des n° 21 et 80, le rapport des dilatations transversales aux contractions longitudinales qui les provoquent, la dilatation transversale limite  $\frac{R_o}{E_t}$  répondra à une contraction longitudinale  $\frac{1}{\eta} \frac{R_o}{E_t}$ , ou à la contraction que produit une force de compression longitudinale  $E \cdot \frac{1}{\eta} \frac{R_o}{E_t}$  par unité de la section  $\omega$  du prisme. Ce sera la valeur de la limite  $R'_o$  à imposer à ces compressions ; on a donc, en divisant par  $R_o$ ,

$$\frac{R'_o}{R_o} = \frac{1}{\eta} \frac{E}{E_t} \frac{R_o}{R_o}$$



(Du n° 113).

Dans le second membre de cette égalité,  $E$  est connu; le coefficient  $E_t$  de l'élasticité transversale peut être tiré d'observations, ainsi que le rapport  $\eta$ , qui peut d'ailleurs être regardé comme ne variant qu'entre  $1/5$  et  $1/2$  (fin du § 5 de la note du n° 21).

Quant à la limite  $R_o$  des *tractions transversales* non dangereuses, on ne voit pas par quel moyen elle pourrait se déterminer.

Mais nous pouvons, comme au § 11, prendre à peu près pour valeur du rapport  $\frac{R_o'}{R_o}$  de deux cohésions permanentes, celui  $\frac{R_t}{R}$  des deux cohésions instantanées, dont la seconde est connue, et dont la première,  $R_t$ , peut être trouvée par une expérience facile de rupture par traction d'un petit prisme taillé dans un sens perpendiculaire aux fibres. On peut donc poser approximativement

$$\frac{R_o'}{R_o} = \frac{1}{\eta} \frac{E}{E_t} \frac{R_t}{R}$$

Cette expression se réduit à  $\frac{1}{\eta}$  lorsqu'il y a égalité de contexture dans les deux sens, et par conséquent, comme nous avons déjà dit, si l'égalité a lieu dans tous, à

$$\frac{R_o'}{R_o} = h$$

puisque l'analyse donne alors  $\eta = \frac{1}{h}$ .

Pour exemple d'un cas d'inégale contexture prenons le bois-de-chêne. Comme on a, d'après les expériences de MM. Wertheim et Chevandier (1).

Dans le sens du rayon de l'arbre	$E_t = 188\ 700\ 000$ ,	$R_t = 582\ 000$ ,
Id. de la tangente aux couches	129 800 000,	406 000,
Et, pour le sens longitudinal (moyenne de 2 espèces de chêne)	949 800 000,	6 075 000,

on trouvera

$$\frac{E}{E_t} \frac{R_t}{R} = \begin{cases} 0,482 & \text{pour le sens du rayon,} \\ 0,489 & \text{pour le sens des couches.} \end{cases}$$

(1) Mémoire présenté le 5 octobre 1846 et inséré aux *Annales de chimie et de physique* en 1848, quatrième partie.

(Du n° 113).

Quant au rapport  $\eta$  des dilatations transversales aux contractions longitudinales, aucune expérience ne l'a fait connaître pour les bois, et il n'est lié par aucune relation théorique avec le rapport des élasticités  $E, E_t$ . Mais en le regardant comme  $= 1/4$  pour les matières d'égale contexture en tous sens, et en considérant que M. Wertheim a trouvé  $\eta = 1/3$  pour le verre et pour le laiton, matières qui sont à coup sûr d'une élasticité moins inégale que le bois, prenons, pour celui-ci,  $\eta = 0,4$  ou  $0,45$ , nous aurons pour le chêne

$$\frac{R'_o}{R_o} = \left( \frac{1}{0,40} \text{ ou } \frac{1}{0,45} \right) 0,4855 = 1,21 \text{ ou } 1,08.$$

Pour les pièces de fonte de fer, comme les coefficients d'élasticité dans les deux sens doivent différer assez peu, ainsi que les cohésions, bien qu'il y ait une certaine différence de contexture, si nous réduisons  $\frac{R'_o}{R_o}$  à  $\frac{1}{\eta}$  et si nous adoptons la valeur  $\eta = 1/3$  trouvée pour d'autres matières fondues, nous aurons

$$\frac{R'_o}{R_o} = 3.$$

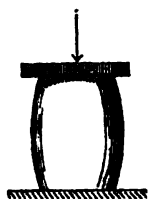
La recherche de  $\eta$  et de  $E_t$  exige des expériences délicates. On pourrait, afin de s'en dispenser, être porté à prendre pour  $\frac{R'_o}{R_o}$  le rapport  $\frac{R'}{R}$  des forces qu'on trouve dans les expériences ordinaires de rupture immédiate par écrasement et par extension. Il en résulterait moins de 1 pour le bois, 8 à 10 pour la pierre, et environ 6 pour la fonte<sup>(1)</sup>. Mais l'adoption de ce dernier nombre serait évidemment contraire au conseil de prudence et même de simple logique qui doit, comme on a dit (§ 9 de la note du n° 3), faire limiter les écartements moléculaires transversaux du côté des fibres comprimées, comme leurs écartements du côté des fibres dilatées. Sans nier donc tout à fait qu'on puisse

(1) *Recherches, etc.*, de M. Hodgkinson, p. 16 de la traduction de M. Pirel, où l'on trouve une moyenne de 6,6. Les expériences plus récentes du *Report of the commissioners, etc.*, ont donné moyennement moins de 6.

(Du n° 113).

tirer quelques lumières des valeurs du rapport  $\frac{R'}{R}$ , il paraîtra clair qu'on ne doit pas l'adopter pour  $\frac{R'_0}{R_0}$  quand il a des valeurs aussi différentes de celles que peut probablement avoir  $\frac{1}{\gamma} \frac{E}{E_t} \frac{R_t}{R}$ . On

peut bien avec quelque probabilité substituer approximativement au rapport de deux tractions-limites celui des deux tractions produisant la rupture immédiate, mais il n'y a pas de raison de faire de même quand il s'agit du rapport d'une traction à une pression. L'évaluation expérimentale de la résistance  $R'$  à la rupture par compression est d'ailleurs toujours fort incertaine, car tantôt le prisme comprimé fléchit un peu, ce qui donne une résistance trop faible, tantôt on en obtient une beaucoup trop forte parce que le frottement sur ses bases s'oppose à sa dilatation latérale, comme on a dit au



§ 8 de la note du n° 3.

Un moyen plus rationnel, mais qui prête encore à erreur, consiste à soumettre à la rupture immédiate par flexion des pièces dont la section offre la forme d'un double T, ou est composée de deux parties ou *semelles* horizontales reliées par un *corps vertical* mince (§ 9, ou ci-après § 16 de la note du n° 120), et de faire varier le rapport des aires des deux semelles sans changer l'aire totale, ni la hauteur ni l'épaisseur du corps vertical qui les unit, jusqu'à ce qu'on arrive à la section qui exige la plus grande charge pour être rompue, et qui donne même des signes de rupture à la fois des deux côtés, savoir par arrachement du côté étendu, et par *séparation du coin* (§ 8, note du n° 3 page 10) du côté comprimé. C'est ce qu'a fait M. Hodgkinson pour la fonte de fer<sup>(1)</sup>. La forme de plus grande résistance à laquelle il est arrivé ainsi, et qu'il regarde comme la meilleure, est figurée au § 18 de la note du n° 120, où elle est l'objet d'un calcul. Le rapport des aires de la semelle dilatée à la semelle contractée est de 5,8 à 1; c'est, dit l'auteur, « à peu près le rapport des résistances moyennes de la

<sup>(1)</sup> *Recherches, etc.*, déjà cités, ou traduction de M. Pirel, pages 87 à 101.

( Du n° 113 ).

fonte à l'écrasement et à la rupture par extension. » Mais ce n'est pas une raison de l'adopter pour  $\frac{R'}{R_0}$ ; car le calcul exact, fait en tenant compte du corps vertical, prouve qu'il n'y a cependant qu'un rapport de 2,859 (ci-après le § 18 cité) entre la plus grande compression et la plus grande extension des fibres. Si l'on adopte pour  $\frac{R'}{R_0}$  ce dernier rapport, donné par celui des distances du centre de gravité aux deux bases, on a, comme on voit, un nombre différant peu de 3, que nous avons été déterminé à adopter pour la fonte en faisant des suppositions plausibles sur les éléments de la formule  $\frac{1}{\eta} \frac{E}{E_t} \frac{R_t}{R}$ , fondée sur la considération d'un état fort éloigné de la rupture.

Il a été fait en 1850 et 1851 sur des fers laminés, par M. Ferdinand Zorès, alors entrepositaire de produits d'usines (1), des expériences qu'on peut regarder comme ayant quelque analogie avec celles de M. Hodgkinson sur la fonte. Mais leurs résultats sont loin d'offrir la même concordance avec la théorie; car l'expérimentateur ayant remarqué que la rupture par flexion des fers à double T symétriques ou à semelles égales s'opérait toujours par la semelle supérieure « refoulée sur elle-même, rejetée à droite ou à gauche, sans que la semelle inférieure (ou dilatée) éprouve d'altération, » a adopté un profil dans lequel cette semelle supérieure ou comprimée a une aire double à peu près de l'autre, ce qui a produit une augmentation de plus d'un cinquième dans les résistances à la rupture, à poids égal et à hauteur égale des pièces.

En calculant la position du centre de gravité de quelques-unes des sections ainsi constituées, on trouve que le rapport des plus grandes contractions aux plus grandes dilatations des fibres dans la flexion, est 0,84 au minimum et 0,91 au maximum. Mais nous ne voyons pas de raison d'adopter de pareils nombres pour valeurs de  $\frac{R'}{R_0}$  relatives au fer forgé ou laminé; ils sont trop éloignés de  $\frac{1}{\eta} \frac{E}{E_t} \frac{R_t}{R}$ , qui doit évidemment surpasser 2, car pour cette matière,

(1) *Recueil de fers spéciaux*, publié en 1853.

(Du n° 113).

$\frac{E R_t}{E_t R}$  doit différer peu de l'unité. Leur adoption ne ferait trouver d'ailleurs qu'un avantage de  $\frac{1}{13}$  à  $\frac{1}{27}$  à rendre les semelles inégales. L'avantage de  $\frac{1}{5}$ , manifesté par les expériences de 1851 (que des expériences toutes récentes n'ont point confirmées) tenait probablement à des effets compliqués; par exemple à ce que la semelle supérieure, fortement comprimée, fléchissait latéralement à la manière des *pièces debout*, surtout lorsqu'il y avait un peu de *déversement* (note ci-après du n° 120, §§ 4 et 13); et c'est ce que semble même indiquer le compte rendu des expériences, où la semelle supérieure était « rejetée à droite ou à gauche. »

Il faut bien d'ailleurs se souvenir que l'état pour lequel on pose les équations de résistance permanente est bien éloigné de l'état où se trouvent les pièces dans les expériences de rupture. L'avantage d'une plus grande superficie de la semelle supérieure, s'il est réel pour les fortes charges produisant la rupture immédiatement, est plus que douteux lorsqu'il s'agit de charges permanentes incomparablement moindres, ne déterminant dans la semelle supérieure qu'une simple compression longitudinale accompagnée des dilatactions transversales ordinaires, sans atteindre la grandeur capable de déterminer le commencement de sa flexion latérale (ci-après, n° 383); c'est-à-dire n'offrant que le danger de la rupture éloignée, qui doit dépendre des seuls écartements moléculaires.

Nous ne croyons donc pas que pour le fer forgé ou laminé on doive jamais prendre  $\frac{R'_0}{R_0}$  moindre que 1; nous pensons qu'on pourrait adopter plutôt pour ce rapport la valeur 2.

Cela n'empêche pas, comme on verra surtout aux §§ 17 et 18 de la note du n° 120, les sections à semelles égales ou peu inégales d'être avantageuses à un autre point de vue, savoir celui de la *résistance élastique à la flexion* ou de la *petitesse des flèches*, et de pouvoir, par suite, résister mieux, même à la rupture éloignée, sous des charges qui ne seraient pas immobiles ni d'une intensité constante (§ 12 de la note du n° 24).

§ 14. *Examen de la méthode consistant à adopter une même limite des dilatactions pour les diverses qualités ou variétés d'une même ma-*

(Du n° 113).

rière. — Plusieurs auteurs, après avoir déterminé la grandeur de la limite  $i' = \frac{R}{E}$  des dilatations pour une certaine matière, d'après des constructions où elle est employée, etc. (§§ 10 à 13), semblent conseiller d'adopter la même grandeur  $i'$  (soit 0,0006, par exemple, pour le fer) pour toutes les autres variétés ou qualités de la même matière, sans avoir égard aux expériences comparatives de rupture immédiate.

Cette méthode revient à prendre les *cohésions permanentes*  $R_0 = E i'$  proportionnelles aux *coefficients d'élasticité*  $E$  des diverses variétés, au lieu de les prendre proportionnelles aux *cohésions instantanées*  $R$  mesurées au moyen de la rupture par extension ou bien par flexion.

Bien qu'il soit évidemment plus naturel de proportionner  $R_0$  à  $R$  qu'à  $E$ , nous ne condamnons pas entièrement cette méthode, vu la difficulté du sujet. Mais nous pensons qu'il faut en réduire l'usage à obtenir une sécurité de plus.

Si donc il résulte, de l'adoption des *cohésions permanentes*  $R_0$ , proportionnelles aux *cohésions instantanées*  $R$ , quelque valeur de  $i' = \frac{R_0}{E}$  trop au-dessus de celle qu'on aura été déterminé à adopter pour la variété à laquelle on compare les autres, on la réduira de manière à ne pas excéder celle-ci du tiers ou de moitié par exemple : en sorte que si, pour une certaine qualité de fer forgé, on avait adopté  $i' = 0,0006$ , on ne prendra pas au delà de  $i' = 0,0008$  ou 0,0009 pour les autres qualités ; car l'énerivation ou la désagrégation doit bien dépendre des écartements moléculaires.

§ 15. *Cas où la contexture varie dans l'étendue des sections.* — Supposons qu'on veuille tenir compte, comme aux §§ 7 des notes du n° 21 et du n° 80, du défaut d'homogénéité de la matière, pour le cas où nous avons posé, au lieu de  $M = \frac{EI}{\rho}$ , en appelant  $E_0$  le coefficient d'élasticité de toute la partie centrale,  $e$  une constante relative à une couche mince d'une contexture différente sur les bords, et  $j$  le moment d'inertie du périmètre (ou plutôt de la ligne moyenne

(Du n° 113).

de la couche dont le module d'élasticité excède celui du reste, de  $e$  divisé par son épaisseur)

$$M = \frac{E_e I + e_j}{\rho}$$

Et bornons-nous aux matières qui cèdent par l'extension des fibres du côté que la flexion rend convexe. Comme on a  $\frac{v}{\rho} = \frac{R}{E}$  pour la dilatation d'une fibre quelconque dont la tension est appelée  $R$ , si l'on élimine  $\rho$ , on obtient, au lieu de l'équation  $M = R \frac{I}{v}$  des §§ précédents,

$$M = \frac{R}{E v} (E_e I + e_j).$$

Il faut, dans cette équation, pour qu'elle soit celle de cohésion permanente, substituer à  $R$  la limite des tensions non compromettantes pour la qualité de matière de la fibre quelconque à la distance  $v$ , et écrire,  $R$  désignant cette limite,

$$M = \text{ou } < \text{ minimum de } \frac{R}{E v} (E_e I + e_j).$$

Dans cette équation,  $\frac{R}{E v}$  n'est pas constant comme était  $\frac{R}{E v} = \frac{1}{\rho}$  dans la précédente; il varie d'une fibre à l'autre. Il faut mettre sa valeur relative à la fibre la plus exposée, ou pour laquelle ce quotient est le plus petit. Si l'on a des raisons de penser que c'est la fibre la plus dilatée, comme quand la matière est homogène, ou que la contexture hétérogène est telle que le rapport  $\frac{R}{E}$  varie moins que  $v$ , l'équation sera, en désignant comme à l'ordinaire par  $v'$  la grandeur de l'ordonnée de cette fibre, et par  $E'$ ,  $R'$  les valeurs correspondantes de  $E$ ,  $R$ :

$$M = \frac{E_e}{E'} R' \frac{I}{v'} + \frac{e}{E'} R' \frac{j}{v'},$$

ou bien,  $R$  et  $r$  désignant deux constantes dépendant comme  $E_e$  et  $e$  de la nature de la matière et de son mode de forgeage ou de fusion:

$$M = R \frac{I}{v'} + r \frac{j}{v'}.$$

(Du n° 113).

Si l'on veut représenter par une équation de cette forme les expériences de *rupture immédiate* des barres rectangulaires par exemple, on déterminera les constantes  $R, r$  (dont nous ôtons alors les indices  $o$ , § 4), de manière à rendre aussi petits que possible, en les compensant mutuellement, les écarts ou les différences entre le premier et le second membre. Comme ce sont les écarts proportionnels plutôt que les écarts absolus qu'il s'agit d'atténuer, on écrira, en divisant par  $\frac{I}{v'}$ ,

$$M \cdot \frac{v'}{I} = R + r \frac{j}{I}$$

ou,  $b, c$  étant la largeur et la hauteur de la section,  $b', c'$  les mêmes dimensions diminuées de la demi-épaisseur présumée de la couche d'une contexture différente du reste

$$M \cdot \frac{6}{bc^3} = R + \frac{6b'c'^2 + 2c'^3}{bc^3} \cdot r.$$

Et l'on obtiendra les deux coefficients  $R, r$  par les méthodes dont on se sert pour déterminer les deux paramètres des formules des eaux courantes <sup>(1)</sup>, afin de remplacer (§ 7 de la note du n° 80) le mieux possible, par une ligne droite, la suite des points ayant les  $\frac{j}{I}$  pour abscisses et les  $M \frac{v'}{I}$  pour ordonnées. Cette ligne doit passer par le centre de gravité général des points, pour que la somme des écarts en moins soit égale à la somme des écarts en plus; mais il ne sera pas toujours facile de choisir *visuellement* sa meilleure direction. Alors on se servira soit de la méthode de Laplace qui atténue le plus possible la somme des valeurs absolues des écarts <sup>(2)</sup>, soit de la méthode plus connue de la *moindre somme de leurs carrés*, soit de la méthode d'interpolation bien plus expéditive et très suffisante de M. Cauchy <sup>(3)</sup>, souvent employée par les astro-

(1) Voyez *Recherches physico-mathématiques*, de Prony, — ou bien *Mémoires sur des formules et des tables nouvelles pour les eaux courantes*, in-8°, 1852, nos 3 et 6; et aussi *Annales des mines*, 4<sup>e</sup> série, t. XX, 1852, p. 187 à 202.

(2) *Mécanique céleste*, 1<sup>re</sup> partie, liv. 3, n° 40.

(3) *Journal Liouville*, mai 1837.



(Du n° 113).

nomes <sup>(1)</sup>, et qui revient dans notre cas particulier de deux coefficients seulement, à joindre ensemble les centres de gravité des deux groupes de points situés l'un à gauche l'autre à droite de l'ordonnée de leur centre de gravité général <sup>(2)</sup>, procédé aussi facile à retenir qu'à exécuter <sup>(3)</sup>.

Si l'on n'applique cette équation que pour l'instant où commence le danger d'énervation, en sorte qu'elle exprime la condition de cohésion permanente et non celle de cohésion instantanée, on l'écrira

$$M = R_0 \frac{I}{v'} + r_0 \frac{j}{v'}$$

Elle est alors exacte comme est celle  $M = R_0 \frac{I}{v'}$  des §§ précédents relative à une matière dont les propriétés ne varient pas vers le périmètre; et on pourra prendre pour  $R_0$  et  $r_0$  certaines fractions des valeurs  $R$ ,  $r$  obtenues des expériences de rupture immédiate.

Pour les pièces de bois on aurait,  $r_1$  étant comme au § 7 de la note du n° 80, le rayon de l'arbre dont on les a extraites,  $r_0$  la distance du centre de leur section rectangulaire  $b \times c$  au centre des couches ligneuses, une formule

$$M \frac{v'}{I} = R \mp r \left( \frac{1}{3} \frac{b^3}{kr_1^3} + \frac{3}{5} \frac{c^3}{kr_1^3} + \frac{r_0^2}{r_1^3} \right),$$

dont on déterminerait les coefficients  $R$ ,  $r$  par plusieurs expériences, comme on vient de dire.

§ 16. Possibilité de dépasser beaucoup la limite de dilatation adoptée pour les cas ordinaires, lorsqu'il y a simultanément et dans un autre sens, de fortes contractions. — Nous avons déjà dit à

<sup>(1)</sup> Mémoire de M. Yvon Villarceau sur les étoiles doubles, à la *Connaissance des temps*, 1852.

<sup>(2)</sup> N° 6 du Mémoire cité sur les Eaux courantes.

<sup>(3)</sup> Nous avons ainsi trouvé par les 64 expériences du capitaine Henry James sur les barres de fonte (*Report of the Commissioners*, 1849, p. 250-253), en regardant la couche comme très-mince ou en supposant  $b' = b$ ,  $c' = c$ , une formule représentant mieux les résultats que celle  $M = R(1,18 - 0,04D) \frac{I}{v'}$  proposée par M. Love (*Mémoire sur la Résistance du fer et de la fonte*, 1852, p. 55), et où  $D$  désigne la plus petite des deux dimensions transversales sans distinction de sa direction par rapport aux forces. Nous aurions eu sans doute une approximation plus grande en supposant  $b'$ ,  $c'$ , moindres que  $b$ ,  $c$  d'un ou deux millimètres.

(Du n° 113).

la fin du § 8, que des fibres *surtendues*, ou dilatées jusqu'à éprouver ces petites diajonctions intérieures et en quelque sorte cellulaires qui constituent l'énervation probablement, pouvaient bien malgré cela, et même sous un effort indéfiniment continué, ne pas rompre d'une manière totale et patente, si les autres fibres du solide, moins dilatées, gardaient leur contexture et leur résistance.

Il y a plus encore. Divers faits établissent que lorsqu'un solide est très-fortement comprimé, en certains points et en certains sens, il peut éprouver, aux mêmes points et dans d'autres sens, des dilatations extrêmement considérables, sans rompre ni se désagréger aucunement, comme si les compressions comblaient les vides des diajonctions produites par les dilatations.

Ainsi, dans une expérience de MM. Easton et Ames, dont nous avons déjà parlé au § 8 de la note du n° 3 et sur laquelle nous reviendrons (\*) le diamètre intérieur d'un cylindre creux en fonte de fer, contenu extérieurement par un cylindre plus fort (où on l'avait introduit en chauffant celui-ci) a été porté de 89 à 94 millimètres par une énorme compression exercée sur de l'étain dont on l'avait rempli, ce qui a fait éprouver à la circonférence de l'évidement une dilatation de près de  $\frac{4}{18} = 0,0556$ , ou de trente-trois fois la proportion de l'allongement de rupture immédiate d'une barre de fonte.

Dans une autre expérience (\*\*) où la pression exercée sur du plomb avait constamment fendu, en commençant par l'intérieur, les cylindres de fonte non contenus, un cylindre de *fer forgé* avait seul pu résister, en se dilatant aussi beaucoup intérieurement mais non extérieurement.

On sait d'ailleurs, pour ce dernier métal, par son étirage à froid en fils, par son martelage aussi à froid, et, pour le cuivre, par l'emboutissage presque instantané des rondelles dont on fait des capsules, etc., que des extensions considérables peuvent être opérées.

(\*) *The Britannia and Conway tubular Bridges, by Edwin Clarke, 1850, note de la page 344.* Cette expérience est citée par M. Couche à la page 445 du *Mémoire* inséré au t. XX des *Annales des mines*.

(\*\*) Même ouvrage de M. Clarke, p. 308, cité par M. Morin à la 2<sup>e</sup> édition (1857) des *Leçons sur la résistance des matériaux*, p. 442.

(Du n° 1113).

rées sans disjonction ou énervation lorsque les molécules sont fortement retenues dans un sens perpendiculaire à celui de l'extension.

D'où l'on peut inférer que de fortes dilatations au centre des pièces solides ou dans les parties des bords qui sont serrées par d'autres solides ne doivent pas inquiéter, et qu'il n'y a lieu de les limiter que vers les surfaces libres ou en contact avec l'atmosphère ; surfaces dont les points, au reste, sont ceux pour lesquels les extensions longitudinales, ou les dilatations transversales dues aux compressions, sont ordinairement les plus fortes.

Il serait désirable que des expériences plus ou moins analogues à celles de MM. Easton et Amos pussent être faites sur d'autres matériaux, par exemple sur les pierres dures et les bois.

§ 17. *Dimensions déterminées en vue de limiter la flexion, etc., des pièces, et non les proportions des dilatations les plus grandes de leurs parties.* — Remarquons que dans quelques circonstances ce n'est pas en vue de la crainte d'une rupture qu'il faut modérer les charges ou régler les dimensions des pièces, c'est en vue de limiter des déformations qui deviendraient nuisibles.

Ainsi, une solive de plancher, un rail de chemin de fer qui, sans rompre, prendrait une flèche trop considérable, deviendrait par cela seul incapable de remplir sa destination ; il en serait de même d'un arbre tournant de machine qui se tordrait d'un angle trop considérable.

Alors les formules pratiques sont plus faciles à dresser. On les tire simplement de celles de l'élasticité, comme a fait M. Tredgold qui a donné il y a longtemps, pour calculer l'équarissage des pièces chargées au milieu, une formule (revenant à  $2P = \frac{1}{10} \frac{EI}{(2a)^3}$ ) et une table basée sur la limitation, à  $\frac{1}{480}$ , du rapport  $\frac{f}{2a}$  de la flèche de courbure à la longueur (1).

(1) Table I ou n° 5 de l'introduction de l'*Essai pratique sur la résistance du fer coulé*, traduit en 1826. Nous avons dit à la sous-note du § 40 que la Table II, basée sur un autre principe, celui de la limitation de la tension ou de la dilatation des fibres, donnait des dimensions telles que la charge n'atteigne pas les trois quarts de celle qui commence à altérer, suivant M. Tredgold, la force élastique.

114. Si la section transversale peut être partagée en deux parties symétriques par une ligne perpendiculaire à la direction de la force qui agit sur le corps, l'axe d'équilibre est placé dans cette ligne. Les deux intégrales sont égales, et l'on a

$$r = \frac{2R}{v'} \int_0^b du \int_0^u dv \cdot v^2$$

pour l'expression du moment de rupture.

En comparant ces formules avec celles qui ont été trouvées n° 80 pour représenter le moment de flexion, on reconnaît que l'expression du moment de rupture peut être déduite de celle du moment de flexion en écrivant  $R$  à la place de  $E$ , et en divisant par  $v'$ , c'est-à-dire par la distance à l'axe d'équilibre contenant les fibres invariables, de la fibre qui en est le plus éloignée. D'après cela, les expressions des n°s 81 et suivants donneront immédiatement les résultats ci-après.

115. La section est un rectangle (Fig. 2) dont  $b$  et  $c$  sont la largeur et l'épaisseur,  $v' = \frac{c}{2}$ , et l'expression du moment de rupture est

$$r = \frac{2R}{c} \cdot \frac{bc^3}{12} = R \frac{bc^2}{6}.$$

116. La figure de la section étant formée de deux triangles égaux (Fig. 3) dont les côtés sont  $p$  et  $q$ , le moment de la résistance à la rupture est

$$r = \frac{R}{q} \cdot \frac{pq^3}{6} = R \frac{pq^2}{6}.$$

117. La figure de la section étant un rectangle dont les côtés sont  $b$ ,  $c$ , et l'axe contenant les fibres invariables formant l'angle  $\varphi$  avec le côté  $b$ , le moment de rupture est

$$r = R \frac{b^3c \sin^3\varphi + bc^3 \cos^3\varphi}{6(b \sin \varphi + c \cos \varphi)}.$$

Quand la section est un carré cette formule se réduit à

$$r = R \frac{b^3}{6(\sin \varphi + \cos \varphi)};$$

et si la pièce est fléchie dans le sens d'une des diagonales du carré, l'on a

$$r = R \frac{b^3}{6\sqrt{2}}.$$

Ainsi une pièce à base carrée fléchie dans le sens des diagonales de la base résiste moins à la rupture qu'elle ne le fait quand elle est fléchie dans le sens des côtés de cette base, dans

le rapport de 1 à  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  (\*).

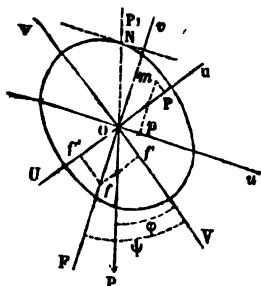
(\*) § 1. *Erreur où peut faire tomber la première formule du n° 117.* — La fin de ce numéro, relative au cas où la section est un carré, est exacte, parce que tout prisme dont la section est une figure ayant ses moments d'inertie égaux autour de toutes les droites tracées sur son plan par son centre de gravité (§ 8 de la note du n° 83), fléchit toujours dans le plan même où il est sollicité pour fléchir (§ 1 de la même note) ou dans le plan du moment sollicitant  $M = P(a-x)$  ou  $= Pa$  des n° 77, 86, 121, etc.

Mais la formule  $r = R \frac{b^3 c \sin^3 \varphi + bc^3 \cos^3 \varphi}{6(b \sin \varphi + c \cos \varphi)}$  du commencement, comme celle  $\epsilon = \dots$  du n° 83 (p. 52) n'est propre qu'à induire dans une erreur où l'on tombera nécessairement avec quelques auteurs si l'on pose, comme il est indiqué au n° 121,  $r = M = Pa$  en y mettant pour  $r$  l'expression signalée.

Cela vient (comme on a déjà dit à la note du n° 83) de ce que la flexion ne s'effectue pas dans le plan de sollicitation à fléchir, lorsque ce plan n'est pas parallèle à l'un des deux axes principaux d'inertie des sections.

§ 2. *Établissement direct de l'équation de cohésion pour une sollicitation oblique aux axes principaux des sections.* — Si  $\varphi$  dé-

( Du n° 117 ).



signe, comme à la note du n° 83, et pour une section de forme quelconque, l'angle aigu  $\text{POV}$  que fait le plan de sollicitation  $\text{P}_1\text{OP}$  avec l'axe d'inertie  $\text{Ov}$  prolongé, et  $\psi$  celui  $\text{vOv}$  que fait avec le même axe principal  $\text{Ov}$ , le plan de flexion effective  $\text{FOv}$ , ou l'angle égal  $\text{uOu}$  de la ligne des fibres invariables  $\text{Ou}$ , perpendiculaire à  $\text{OF}$ , avec l'autre axe d'inertie  $\text{Ou}$  de la section, on a (note du n° 83), pour dé-

terminer cet angle  $\psi$  non connu *a priori*,  $\text{tang } \psi = \frac{I'}{I''} \text{ tang } \varphi$ ,  $I'$ ,  $I''$  étant les moments d'inertie de la section autour des axes principaux  $\text{Ou}$ ,  $\text{Ov}$ .

Mais, plutôt que de mettre cet angle à la place de  $\varphi$  dans la formule  $r = \dots$  du texte relative au rectangle ayant ses côtés  $b$ ,  $c$  parallèles à  $\text{Ou}$ ,  $\text{Ov}$ , et de l'égalier à la composante  $M \cos(\psi - \varphi)$  du moment  $M$  ou  $\text{P}\rho$  autour de la ligne des fibres invariables  $\text{Ou}$ , il est bien plus simple de poser, autour des deux axes principaux, deux équations d'équilibre de rotation entre les forces extérieures et les forces intérieures qu'on peut exprimer comme au n° 112 (sans parler de  $E$  ni du rayon  $\rho$ ) par

$$\frac{R}{v'} v d\omega.$$

Il en résulte, en effet, en remplaçant (comme à la note du n° 83, p. 54)  $v$  par sa valeur  $v \cos \psi + u \sin \psi$ , où  $v$  et  $u$  sont les distances d'une fibre quelconque  $m$  aux deux axes principaux  $\text{Ou}$ ,  $\text{Ov}$ , deux équations

$$M \cos \varphi = \frac{R}{v'} I' \cos \psi, \quad M \sin \varphi = \frac{R}{v'} I'' \sin \psi$$

qui, ajoutées ensemble après avoir multiplié la première par  $\frac{v}{I'}$  et la seconde par  $\frac{u}{I''}$  donnent

$$M \left( v \frac{\cos \varphi}{I'} + u \frac{\sin \varphi}{I''} \right) = R \frac{u \cos \psi + v \sin \psi}{v'} = R \frac{v}{v'};$$

d'où, en faisant  $v =$  sa plus grande valeur  $v'$ , et  $R = R$ , limite des efforts non dangereux, cette équation de cohésion permanente :

(Du n° 1117).

$$M = \text{minimum de } \frac{R_0}{\frac{v}{l'} \cos \varphi + \frac{u}{l''} \sin \varphi}$$

Elle convient à des prismes ayant des sections de toutes les formes, sollicités obliquement à leurs axes principaux.

§ 3. *Application à la section rectangle dont les côtés sont b et c.*— Comme les plus grandes valeurs des coordonnées v et u sont  $\frac{1}{2}c$  et  $\frac{1}{2}b$ , et comme  $l' = \frac{bc^2}{12}$ ,  $l'' = \frac{b^2c}{12}$ , on a

$$M \text{ ou } Pa = \frac{R_0}{\frac{6}{bc^2} \cos \varphi + \frac{6}{b^2c} \sin \varphi} = \frac{R_0}{6} \cdot \frac{b^2c^3}{b \cos \varphi + c \sin \varphi}$$

Cette formule est très-différente de celle  $M \text{ ou } Pa = \frac{R_0}{6} \frac{b^2c \sin^2 \varphi + bc^2 \cos^2 \varphi}{b \sin \varphi + c \cos \varphi}$  qu'on poserait d'après ce qui est dit au texté. Nous avons remarqué ailleurs, depuis longtemps <sup>(1)</sup>, et on peut vérifier facilement que cette dernière équation inspirerait une fausse sécurité; car si, par exemple, l'angle  $\varphi$  est demi-droit, la valeur qu'elle donne pour la charge P est  $\frac{b^2+c^2}{2bc}$  fois celle qui résulte de la formule exacte qu'on vient de donner; et ce rapport  $\frac{b^2+c^2}{2bc}$ , toujours plus grand que l'unité, a pour valeurs. . . . 1,083, 1,250, 1,667, etc. selon que le rapport de l'un des deux côtés du rectangle à l'autre côté est. . . . . 3/2, 2, 3, etc.

Le sens de sollicitation le plus dangereux est celui pour lequel  $b \cos \varphi + c \sin \varphi$  est le plus grand, ou pour lequel

$$\text{tang } \varphi = \frac{c}{b},$$

ce qui donne le sens perpendiculaire à l'une des deux diagonales du rectangle. Alors  $M \text{ ou } Pa = \frac{R_0}{6} \cdot \frac{b^2c^3}{\sqrt{b^2+c^2}}$ .

(1) 30 octobre 1843, aux *Comptes rendus de l'Académie*, t. XVII, p. 949.

(Du n° 833).

Généralement, toutes les fois que  $u$ ,  $v$ , répondant au maximum du dénominateur  $\frac{v}{I'} \cos \varphi + \frac{u}{I''} \sin \varphi$ , ont une valeur fixe, ce maximum par rapport à  $\varphi$  a lieu pour

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{u}{v} \frac{I'}{I''},$$

ce qui donne pour condition de résistance permanente

$$M = \frac{R_0}{\sqrt{\frac{v^2}{I'^2} + \frac{u^2}{I''^2}}}$$

§ 4. *Établissement élémentaire de ces formules.* — On l'opère en considérant (comme au § 9 de la note du n° 83) le prisme comme éprouvant simultanément deux flexions dues, l'une, à des forces qui ont un moment  $M' = M \cos \varphi$ , l'autre à des forces qui ont un moment  $M'' = M \sin \varphi$ , et produisant des déplacements qui se composent d'après le principe de simultanété du § 2 de la note du n° 21. On dira donc simplement que si la fibre située à la distance  $v'$  de l'axe du premier moment et à la distance  $u'$  de l'axe du second éprouve une dilatation due à une tension  $R$  par unité de section, celle qui est située aux distances  $v$ ,  $u$  des mêmes axes éprouvera une dilatation due à la tension  $R \frac{v}{v'}$  si le moment ou couple  $M'$  agit seul, et une dilatation due à la tension  $R \frac{u}{u'}$  si le couple  $M''$  agit seul pour fléchir respectivement autour de ces deux axes supposés principaux ; et l'on aura, aussi respectivement,  $M' = R \frac{I'}{v'}$ ,  $M'' = R \frac{I''}{u'}$  pour l'équilibre de rotation. Si ces deux couples agissent à la fois, la fibre éprouvera une dilatation totale, somme des deux dilatations partielles, ou due à la tension totale

$$R \frac{v}{v'} + R \frac{u}{u'} = M' \frac{v}{I'} + M'' \frac{u}{I''}$$

Donc, pour que cette dilatation atteigne la limite des dilatations non dangereuses, ou soit celle qui est due à la tension-limite  $R_0$ , on doit avoir l'équation suivante (donnée en octobre et novembre 1843 aux articles cités des *Comptes rendus*) :



118. La figure de la section transversale étant un cercle (Fig. 4) dont  $r$  est le rayon, l'expression du moment de la résistance à la rupture est

$$r = \frac{R}{r} \frac{\pi r^4}{4} = R \frac{\pi r^3}{4}.$$

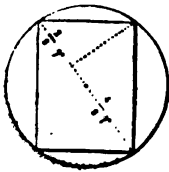
Les moments de rupture, pour le carré et le cercle inscrit, sont entre eux dans le rapport de 1 à  $\frac{3\pi}{16}$ , le même qui a lieu pour le cas de la flexion (\*).

119. A l'égard d'un tuyau,  $r'$  et  $r''$  étant les rayons des deux cylindres extérieur et intérieur, remarquant que le moment de rupture du vide intérieur supposé plein est

$$R_u = \text{maximum de } M' \frac{v}{I'} + M'' \frac{u}{I''},$$

d'où  $M = \text{minimum de } \frac{R_u}{\frac{v}{I'} \cos \varphi + \frac{u}{I''} \sin \varphi}$  comme à la fin du § 2.

(\*) *Perte de force des arbres équarris.* — Si c'est un cercle circonscrit que l'on compare au carré pour la flexion, le rapport, au lieu de 1 à  $\frac{3\pi}{16} = 0,5890$ , est de 1 à  $\frac{3\pi\sqrt{2}}{8} = 1,6661$ . Un arbre perd ainsi considérablement de sa force lorsqu'on l'équarrit. Et cela a lieu même lorsqu'on en tire la pièce à section rectangle ci-après (du n° 120), dont les deux côtés sont entre eux dans le rapport



1 à  $\sqrt{2}$  (fournis par les équations  $b^2 + c^2 = 1$ ,  $\frac{d(bc^2)}{db} = 0$ ) ou par la construction ci-contre où l'on divise le diamètre en deux parties comme 1 est à 2; car le rapport des résistances du rectangle et du cercle est de 1 à  $\frac{9\pi\sqrt{3}}{32} = 1,53039$ .

$$\frac{R}{r'} = \frac{\pi r'^{2b}}{4},$$

on a, pour le moment cherché,

$$\tau = R \frac{\pi(r'^b - r''^b)}{4r'}.$$

A sections transversales égales, un cylindre plein et un tuyau offrent des résistances à la rupture qui sont entre elles dans le rapport de

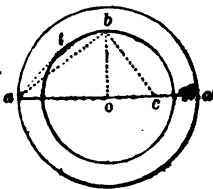
$$(r'^2 - r''^2)^{\frac{2}{3}} \text{ à } \frac{r'^b - r''^b}{r'}.$$

A résistances égales, les sections transversales du cylindre et du tuyau sont entre elles dans le rapport de

$$\left(\frac{r'^b - r''^b}{r'}\right)^{\frac{3}{2}} \text{ à } r'^2 - r''^2 (*).$$

(\*) Ces deux rapports qui sont plus simplement, le premier, celui de  $\sqrt{1 - \frac{r''^2}{r'^2}}$  à  $1 + \frac{r''^2}{r'^2}$ , et, le second, l'inverse élevé à la puissance de  $\frac{2}{3}$ , résultent de la division, l'une par l'autre, des expressions qui seront données §§ 6 et 7 de la note du numéro suivant (120) : 1° en supposant  $\omega^{\frac{2}{3}}$  le même pour le cylindre et pour le tuyau; 2° en supposant  $\frac{1}{\omega}$  le même, et tirant le rapport des sections  $\omega$ .

M. Poncelet a trouvé que le premier rapport est celui de  $at$ , tangente menée au cercle intérieur par un point  $a$  de la circonférence du cercle extérieur, à  $ac$ , longueur déterminée par  $ob$  perpendiculaire à  $ao$ , et par  $bc$  perpendiculaire à  $ab$ ,  $o$  étant le centre et  $aoca'$  un diamètre.



Ce rapport est aussi, à peu près, la racine carrée de celui de l'épaisseur au diamètre moyen du tuyau.

120. Connaissant l'expression du moment de rupture pour une base de fracture rectangulaire, on peut se proposer d'inscrire dans un cercle un rectangle déterminé par la condition de rendre cette expression un maximum. Le diamètre étant 1, les côtés de ce rectangle seront respectivement  $\frac{1}{\sqrt{3}}$  et  $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$  (\*).

(\*) (Voyez note du n° 118).

§ 1. *Comparaison des sections à égale superficie ou égale quantité de matière.* — Nous allons donner ici les valeurs de  $\frac{I}{v^2}$ , et, aussi, les valeurs du moment d'inertie I, par complément aux n° 81 à 85 (et ainsi que nous l'avons annoncé), en mettant les expressions sous une forme telle qu'on puisse comparer quant à ces valeurs, les diverses sections à égale superficie ou à égale quantité du métal dont on compose les prismes. Nous parlerons ici déjà, pour rendre le tableau plus complet, des sections de prismes à côte ou à nervure, dont Navier ne fait mention dans son texte qu'à la SECTION IV (Charpente), art. VII, n° 493 à 497.

Le moment d'inertie I est du quatrième degré ou est un produit de quatre dimensions linéaires; le quotient  $\frac{I}{v^2}$  est du troisième degré; la superficie  $\omega$  est du deuxième degré. Il faudra donc, pour les comparaisons des sections sous le double rapport de la résistance à la simple flexion et à la rupture par flexion, donner respectivement pour forme, à I et à  $\frac{I}{v^2}$ , le produit de  $\omega^2$  et de  $\omega^{\frac{3}{2}}$  par un nombre ou par une fonction des rapports mutuels des dimensions des diverses parties de la section.

§ 2. *Résistances spécifiques à la flexion et à la rupture par flexion* (ou quantités remplaçant I et  $\frac{I}{v^2}$ ) *lorsque la sollicitation est oblique aux axes principaux d'inertie des sections.* — Alors la résistance spécifique à la flexion, au lieu d'être représentée par I, le sera (note du n° 83) par

(Du n° 120).

$$\rho \frac{M}{E} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\cos^2 \varphi}{I'^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{I''^2}}} = \frac{I'}{\cos \varphi} \sqrt{\frac{1}{1 + \left(\frac{I'}{I''} \tan \varphi\right)^2}};$$

$I'$  et  $I''$  étant les moments d'inertie principaux de la section,  $\varphi$  étant l'angle du plan de sollicitation ou du moment  $M$  des forces extérieures avec l'axe de  $I''$ , et  $\rho$  étant le rayon de courbure.

Et la résistance spécifique à la rupture par flexion au lieu d'être représentée par  $\frac{I}{v'}$ , le sera (note du n° 117) par

$$\frac{M}{R} = \frac{1}{\frac{v'}{I'} \cos \varphi + \frac{u'}{I''} \sin \varphi} \left\{ \begin{array}{l} u' \text{ et } v' \text{ étant les coordonnées } u, v, \text{ par rapport aux} \\ \text{axes des moments principaux } I', I'', \text{ de la fibre la plus} \\ \text{tendue, ou rendant } \frac{v}{I'} \cos \varphi + \frac{u}{I''} \sin \varphi \text{ un maximum;} \\ \text{et } R \text{ la traction qu'elle supporte par unité superficielle.} \end{array} \right.$$

Si l'angle  $\varphi$  est indéterminé ou si la pièce peut être sollicitée sous diverses inclinaisons, comme l'arbre tournant d'une machine, il faut prendre l'inclinaison la plus dangereuse, ou la valeur de  $\varphi$  qui rend un minimum cette expression de  $\frac{M}{R}$ . Et si  $u', v'$  sont constants, comme quand le contour est composé de lignes à angle droit, ce minimum a lieu pour  $\tan \varphi = \frac{I'}{I''} \frac{u'}{v'}$ , et est

$$\frac{M}{R} = \frac{1}{\sqrt{\frac{v'^2}{I'^2} + \frac{u'^2}{I''^2}}}.$$

Mais si le contour est continu,  $u'$  et  $v'$  sont fonctions de  $\varphi$ , et l'on a un autre minimum.

§ 3. Section rectangle dont  $b$  et  $c$  sont les dimensions.— Si  $b$  est la largeur,  $c$  la hauteur ou épaisseur, c'est-à-dire si la sollicitation a lieu dans un plan parallèle à  $c$ , on a :

$$\omega = bc, \quad v' = \frac{c}{2}.$$

$$\text{Résistance spécifique à la flexion élastique } I = \frac{bc^3}{12} = \omega \frac{c^2}{12} = \frac{1}{12} \frac{c}{b} \omega^2.$$

$$\text{Idem} \quad \text{à la rupture par flexion } \frac{I}{v'} = \frac{bc^2}{6} = \omega \frac{c}{6} = \frac{1}{6} \sqrt{\frac{c}{b}} \cdot \omega^{\frac{3}{2}},$$

(Du n° 110).

Ainsi, à égale superficie de la section  $\omega$ , ou à égale quantité de matière d'un prisme de longueur donnée, la résistance à la flexion (ou le poids capable de donner une flèche déterminée à ce prisme appuyé aux deux bouts et sollicité au milieu), est comme le rapport  $\frac{c}{b}$  de la hauteur à la largeur.

Et la résistance à la rupture par flexion (ou le poids appliqué de même, qui fléchit de manière à donner une dilatation ou une contraction déterminée à la fibre la plus tendue ou la plus comprimée, et qui, par conséquent, peut mettre la matière en danger de rompre ou de s'énerver) est comme la racine carrée  $\sqrt{\frac{c}{b}}$  du même rapport.

§ h. Même section rectangle si la sollicitation est oblique. Cause qui limite (en partie) l'avantage d'employer des pièces de champ à section haute et mince. — Si le plan de sollicitation ou du moment  $M$ , au lieu d'être parallèle au côté  $c$ , fait avec ce côté un angle  $\varphi$ , on a (d'après ce qu'on vient de dire § 2)

$$\left. \begin{array}{l} \text{Résistance à la} \\ \text{flexion.} \end{array} \right\} \frac{P}{E} = \frac{bc}{12 \sqrt{\frac{\cos^2 \varphi}{c^4} + \frac{\sin^2 \varphi}{b^4}}} = \frac{\omega c^2}{12 \sqrt{\cos^2 \varphi + \frac{c^4}{b^4} \sin^2 \varphi}} = \frac{1}{12} \frac{c}{b} \frac{\omega^{\frac{2}{3}}}{\cos \varphi} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{c^4}{b^4} \tan^2 \varphi}}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Id. à la rupture} \\ \text{par flexion.} \end{array} \right\} \frac{M}{R} = \frac{1}{6} \frac{b^2 c^2}{b \cos \varphi + c \sin \varphi} = \frac{1}{6} \frac{\omega c}{\cos \varphi + \frac{c}{b} \sin \varphi} = \frac{1}{6} \sqrt{\frac{c}{b}} \frac{\omega^{\frac{2}{3}}}{\cos \varphi} \frac{1}{1 + \frac{c}{b} \tan \varphi}$$

Si une pièce a une largeur  $b$  très-petite par rapport à sa hauteur  $c$ , il suffit qu'on prenne  $\tan \varphi = \frac{b}{c}$ , ou que le plan de sollicitation ait seulement la petite inclinaison  $\frac{b}{c}$  de la diagonale sur le grand côté  $c$  de la section, pour que le dénominateur  $\cos \varphi + \frac{c}{b} \sin \varphi$  devienne  $2 \cos \varphi$ , c'est-à-dire à peu près  $= 2$ , et que, par conséquent, la résistance  $\frac{M}{R}$  à la rupture par flexion soit deux fois

(Du n° 120).

moindre que quand la sollicitation est exactement parallèle au grand côté  $c$ .

En même temps (c'est-à-dire pour  $\tan \varphi = \frac{b}{c}$  ou pour la sollicitation diagonale) on a une résistance à la flexion  $\rho \frac{M}{E} = \frac{\omega c^3}{12} \tan \varphi = \frac{\omega c^3 b}{12 c}$ , ou  $\frac{c}{b}$  fois moindre que si la sollicitation était parallèle à  $c$ . Et, à égale superficie de la section, l'on a seulement la même résistance  $\frac{\omega^3}{12}$  à la flexion qu'avec une section carrée.

Aussi, comme il est difficile d'empêcher que l'action ne devienne un peu oblique, quand ce ne serait que par suite d'une légère torsion due à ce que la charge n'agit pas exactement au milieu de la largeur  $b$  de la pièce, les constructeurs évitent d'employer des pièces de champ trop minces ou de rendre trop grand le rapport  $\frac{c}{b}$  de la hauteur à la largeur, afin de prévenir le déversement dénoté par la formule, et, aussi, une sorte de flexion de la pièce dans le sens de la hauteur de la section.

Si l'angle  $\varphi$  du plan de sollicitation n'est pas déterminé ou si la pièce peut être sollicitée transversalement sous toutes les inclinaisons, il faut prendre l'inclinaison la plus dangereuse. Ce sera, quant à la rupture par flexion, celle qui a pour valeur  $\tan \varphi = \frac{c}{b}$  si  $c > b$ , et on aura, pour cette sollicitation qui est perpendiculaire à une des diagonales,

$$\text{Plus petite résistance à la rupture par flexion, ou Minimum de } \frac{M}{R} = \frac{4}{6} \frac{b^2 c^3}{\sqrt{b^2 + c^2}} = \frac{4}{6} \sqrt{\frac{\frac{c}{b}}{1 + \frac{c^2}{b^2}}} \cdot \omega^3.$$

Il est évident, au reste, que la plus grande flexion est donnée par  $\varphi = 0$  ou  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  selon que  $l' < ou > l''$ , ou, pour le rectangle, selon que  $b > ou < c$ .

(Du n° 120).

§ 5. *Section carrée.* — Les expressions précédentes, en faisant  $b = c$ , donnent

$$\left. \begin{array}{l} \text{Sollicitation dans un} \\ \text{plan parallèle à} \\ \text{l'un des côtés} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \omega = b^2, \quad v' = \frac{b}{2} \\ \text{Résist. à la flexion} \quad I = \frac{b^4}{12} = \frac{\omega b^2}{12} = \frac{\omega^3}{12} = 0,08333 \omega^2 \\ \text{Id. à la rupt. par flex.} \quad \frac{I}{v'} = \frac{b^3}{6} = \frac{\omega b}{6} = \frac{1}{6} \omega^{\frac{3}{2}} = 0,16667 \omega^{\frac{3}{2}} \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Sollicitation oblique} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \rho \frac{M}{E} = \frac{b^4}{12} = \frac{\omega^2}{12} = 0,08333 \omega^2 \text{ (comme pour la sollicitation} \\ \text{parallèle, et, cela, quel que soit } \varphi) \\ \frac{M}{R} = \frac{b}{6} \frac{1}{\cos \varphi + \sin \varphi} = \frac{1}{6(\cos \varphi + \sin \varphi)} \omega^{\frac{3}{2}} \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Sollicitation diagonale} \\ \text{(ou sous l'inclinaison} \\ \text{la plus dangereuse)} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{M}{R} = \frac{b^3}{6\sqrt{2}} = \frac{1}{6\sqrt{2}} \omega^{\frac{3}{2}} = 0,11785 \omega^{\frac{3}{2}} \end{array}$$

§ 6. *Section circulaire pleine, rayon r.*

$$\omega = \pi r^2, \quad v' = r$$

$$I = \frac{\pi r^4}{4} = \frac{\omega r^2}{4} = \frac{1}{4\pi} \omega^2 = 0,079577 \omega^2$$

$$\frac{I}{v'} = \frac{\pi r^3}{4} = \frac{\omega r}{4} = \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \omega^{\frac{3}{2}} = 0,141047 \omega^{\frac{3}{2}}$$

§ 7. *Section circulaire évidée (section de tuyau); rayon extérieur  $r'$ ; intérieur  $r''$*

$$\omega = \pi (r'^2 - r''^2), \quad v' = r'$$

$$I = \pi \frac{r'^4 - r''^4}{4} = \frac{r'^2 + r''^2}{4} \omega = \frac{\omega r'^2}{2} \left( \frac{1}{2} + \frac{r''^2}{2r'^2} \right) = \frac{1}{4\pi} \frac{1 + \left( \frac{r''}{r'} \right)^2}{1 - \left( \frac{r''}{r'} \right)^2} \omega^2$$

$$\frac{I}{v'} = \pi \frac{r'^4 - r''^4}{4r'^3} = \frac{\omega r'}{2} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{r''^2}{r'^2} \right) = \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1 + \left( \frac{r''}{r'} \right)^2}{\sqrt{1 - \left( \frac{r''}{r'} \right)^2}} \omega^{\frac{3}{2}}$$

(Du n° 113).

Si l'on fait le rayon moyen  $\frac{r' + r''}{2} = r$ , et l'épaisseur  $r' - r'' = e$ , on a

$$\omega = \pi \left[ \left( r + \frac{e}{2} \right)^2 - \left( r - \frac{e}{2} \right)^2 \right] = 2\pi r e, \quad v' = r + \frac{e}{2}.$$

$$I = \frac{\omega r^3}{2} \left( 1 + \frac{e^2}{4r^2} \right) = \frac{r}{4\pi} \left( 1 + \frac{e^2}{4r^2} \right) \omega^2$$

$$\frac{I}{v'} = \frac{\omega r}{2} \frac{1 + \frac{e^2}{4r^2}}{1 + \frac{e}{2r}} = \frac{\sqrt{2r}}{4\sqrt{\pi}} \frac{1 + \frac{e^2}{4r^2}}{1 + \frac{e}{2r}} \omega^{\frac{3}{2}}.$$

(Voyez les conséquences, note du n° 119).

§ 8. *Prise en considération des troncutures qui augmentent la valeur de l'expression  $\frac{I}{v'}$  ou  $\frac{M}{R}$  de la résistance spécifique à la rupture.* — D'après ce qu'on a dit au § 8 de la note du n° 113 (p. 100) comme l'existence de fibres inutiles ou susceptibles de rompre d'abord *seules*, ne diminue en rien la résistance du reste, il convient, à l'égard des sections pour lesquelles le quotient  $\frac{I}{v'}$  augmente en en retranchant une partie ou en les supposant tronquées, d'attribuer à ce quotient sa plus grande valeur, résultant de la troncuture qui le rend un maximum.

En conséquence il faut, si l'on veut avoir des expressions plus exactes de la résistance spécifique à la rupture  $\frac{I}{v'}$  ou  $\frac{M}{R}$  multiplier celles qui sont données aux § précédents ou suivants par des nombres un peu au-dessus de 1, comme ceux du § 8 cité de la note du n° 113.

Et ces expressions seront, encore, plutôt au-dessous qu'au-dessus de la résistance réelle d'après ce qu'on a dit page 101 et que l'expérience confirme, de la petite part que les fibres comptées comme inutiles ne laissent pas de prendre à cette résistance.

Ainsi, au lieu de  $\frac{I}{v'} = \frac{1}{6\sqrt{2}} \omega^{\frac{3}{2}} = 0,11785 \omega^{\frac{3}{2}}$  du § 5 pour le carré



(Du n° 130).

sollicité diagonalement on prendrait  $\frac{I}{v'} = \frac{1,4134}{6\sqrt{2}} \omega^{\frac{3}{2}} = 0,13121 \omega^{\frac{3}{2}}$ ,

si la matière résiste sensiblement plus aux compressions qu'aux extensions ou réciproquement ;

Et  $\frac{M}{R} = \frac{1,0535}{6\sqrt{2}} \omega^{\frac{3}{2}} = 0,1242 \omega^{\frac{3}{2}}$  si elle résiste autant aux unes qu'aux autres ou s'il y a incertitude.

Au lieu de  $\frac{I}{v'} = \frac{4}{4\sqrt{\pi}} \omega^{\frac{3}{2}} = 0,414047 \omega^{\frac{3}{2}}$  pour le cercle, on prendra

$\frac{I}{v'} = \frac{1,00693}{4\sqrt{\pi}} \omega^{\frac{3}{2}} = 0,442024 \omega^{\frac{3}{2}}$  pour une troncature haut et bas.

Et ainsi des autres, même pour le cas de *flexion oblique* en y appliquant les principes du § 8 de la note du n° 113 lorsqu'on croira devoir pousser l'approximation à un pareil degré, ce dont on peut ordinairement se dispenser.

§ 9. Cas où les troncatures auraient effectivement lieu. — Si l'on a retranché les fibres dites inutiles en fondant les pièces de métal ou en taillant les pièces de bois, il est évident que pour comparer les résistances des sections à *surface égale*, il faut mettre à la

places de  $\omega$  la surface de la section tronquée ou débarrassée des parties répondant à ces fibres.

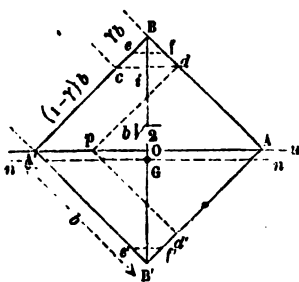
Alors 1°. S'il est question d'un carré sollicité diagonalement et tronqué *seulement à l'angle supérieur ou à l'angle inférieur*, comme au premier exemple du § 8 de la note du n° 113, p. 95 et 96, on a

$$\omega = b^2 - \frac{\gamma^2 b^2}{2} \text{ d'où } b = \left( \frac{2\omega}{2-\gamma^2} \right)^{\frac{1}{2}},$$

et par conséquent

$$\frac{I}{v'} = \frac{\omega^{\frac{3}{2}}}{6\sqrt{2}} \sqrt{2} \cdot \frac{12 - 42\gamma^2 + 48\gamma^2 - 18\gamma^4 + \gamma^6}{(6 - 6\gamma + \gamma^2)(2 - \gamma^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

2° S'il s'agit du même carré, tronqué à la fois et symétrique-



(Du n° 120).

ment à ces deux angles, comme au deuxième exemple, p. 97, on aura

$$\omega^2 = b^2 - \gamma^2 b^2, \quad \frac{I}{v'} = \frac{\omega^{\frac{3}{2}}}{6\sqrt{2}} \frac{(1+3\gamma)(1-\gamma)^{\frac{1}{2}}}{(1+\gamma)^{\frac{3}{2}}}.$$

3° Enfin si ce même carré est tronqué également aux quatre angles, comme il conviendra si c'est la section d'un arbre tournant de machine, il faudra retrancher  $\frac{\gamma^4 b^4}{12}$  de l'expression de  $I_1$  (page 97) relative au cas de deux troncutures et on aura  $\omega^2 = b^2 - 2\gamma^2 b^2$ , et

$$I = \frac{1 - 6\gamma^2 + 8\gamma^3 - 4\gamma^4}{12} b^4, \quad \frac{I}{v'} = \frac{\omega^{\frac{3}{2}}}{6\sqrt{2}} \frac{1 - 6\gamma^2 + 8\gamma^3 - 4\gamma^4}{(1-\gamma)(1-2\gamma^2)^{\frac{3}{2}}}$$

où il ne faut pas supposer  $\gamma$  plus grand que  $\frac{1}{2}$ .

Si l'on se sert de ces expressions pour chercher quelle troncuture il faut faire dans chacun de ces trois cas pour avoir la plus grande résistance  $\frac{I}{v'}$  à superficie égale  $\omega$  on trouve ceci :

*Cas (1°),* ou d'une seule troncuture. Ce maximum de résistance pour  $\omega$  constant est obtenu en faisant  $\gamma = 1$  c'est-à-dire *en supprimant entièrement le demi-carré supérieur* ou en réduisant la section à un triangle rectangle isocèle, la base tournée du côté dilaté si c'est par dilatation que la matière risque le plus de céder. Inutile de dire que cette forme de section n'est pas la plus avantageuse entre toutes celles qu'on peut donner si l'on a le choix d'autres formes.

*Cas (2°),* ou de deux troncutures du carré sollicité diagonalement. On a le maximum de  $\frac{I}{v'}$  pour  $\omega$  constant en faisant,  $\gamma = \frac{1}{5}$  et ce maximum est  $\frac{1}{6\sqrt{2}} \omega^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{4}{3} \sqrt{\frac{2}{3}} = 1,08866 \frac{1}{6\sqrt{2}} \omega^{\frac{3}{2}} = 0,12830 \omega^{\frac{3}{2}}$ .

*Cas (3°)* de quatre troncutures. Il faut, pour le maximum, faire  $\gamma = \frac{1}{2}$  ce qui revient à remplacer le carré sollicité parallèlement à

( Du n° 120 ).

ses diagonales par un carré sollicité parallèlement à ses côtés. C'est ce qu'on pouvait prévoir d'après ce qu'on a vu (§ 5) de la supériorité de résistance dans cette dernière situation. Mais si la pièce est tournante, comme la supériorité disparaîtrait lorsque la diagonale deviendrait verticale, il conviendra de tronquer en octogone régulier. Et si l'on admet de nouvelles troncatures produisant plus de huit côtés, on est conduit simplement à ce résultat, que la forme circulaire est la meilleure pour le contour de la section d'une pièce tournante fléchie successivement dans tous les plans passant par son axe de figure (Voyez ci-après § 19).

§ 10. *Section elliptique, b et c étant le plus petit et le plus grand diamètre.* — Le plan de sollicitation étant parallèle à c, on a

$$\omega = \frac{\pi bc}{4}, \quad v' = \frac{c}{2}$$

$$I = \frac{\pi bc^3}{64} = \frac{\omega c^2}{16} = \frac{1}{4\pi} \frac{c}{b} \omega^2$$

$$\frac{I}{v'} = \frac{\pi bc^3}{32} = \frac{\omega c}{8} = \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{c}{b}} \cdot \omega^{\frac{3}{2}}.$$

Le plan de sollicitation faisant un angle  $\varphi$  avec le côté c :

$$\text{Résist. spéc. à la flexion.} \left\{ \begin{array}{l} P \\ E \end{array} \right. \frac{M}{E} = \frac{\pi bc}{64 \sqrt{\frac{\cos^2 \varphi}{c^4} + \frac{\sin^2 \varphi}{b^4}}} = \frac{\omega c^2}{16 \sqrt{\cos^2 \varphi + \frac{c^4}{b^4} \sin^2 \varphi}} = \frac{1}{4\pi} \frac{c}{b} \frac{\omega^2}{\cos \varphi} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{c^4}{b^4} \tan^2 \varphi}}$$

$$\text{Id. à la rupture.} \left\{ \begin{array}{l} M \\ R \end{array} \right. = \frac{\pi b^2 c^3}{32 \sqrt{b^2 \cos^2 \varphi + c^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{\omega c}{8 \sqrt{\cos^2 \varphi + \frac{c^2}{b^2} \sin^2 \varphi}} = \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{c}{b}} \cdot \frac{\omega^{\frac{3}{2}}}{\cos \varphi \sqrt{1 + \frac{c^2}{b^2} \tan^2 \varphi}}$$

§ 11. *Sections comparées ayant des formes ramenables les unes aux autres (comme toutes les ellipses, ou tous les rectangles, etc.) en amplifiant ou réduisant dans une même proportion toutes les abscisses ou toutes les ordonnées parallèles à un axe principal d'inertie ainsi qu'au plan de sollicitation.*

$I = K\omega c^2$  ou proportionnel à l'aire  $\omega$  et au carré de la hauteur  $c$  de la section.

$\frac{I}{v'} = K'\omega c$  ou proportionnel à l'aire et à la hauteur de la section.

(Du n° 120).

Et non-seulement la charge susceptible d'être portée indéfiniment sans danger, mais même celle de rupture immédiate, quelle que soit la loi qui lie les extensions ou compressions des fibres aux efforts qu'elles supportent, suit cette dernière proportionnalité (Voyez la note du n° 151).

§ 12. *Sections rectangles évidées symétriquement.* — Elles peuvent l'être de deux manières, ou en tuyau rectangulaire, ou en double T symétrique. Dans l'un comme dans l'autre cas, soient :

$b, c$  la largeur et la hauteur du rectangle extérieur,

$b', c'$  celles du rectangle intérieur ou d'évidement qui, dans le second cas, est partagé en deux parties ayant  $b'$  pour somme de leurs largeurs (figure page suivante)

$$\omega = bc - b'c', \quad v' = \frac{c}{2}$$

$$I = \frac{bc^3 - b'c'^3}{12} = \frac{\omega^2 c}{12 b} \frac{1 - \frac{b'c'}{bc}}{\left(1 - \frac{b'c'}{bc}\right)^2}$$

$$\frac{I}{v'} = \frac{bc^3 - b'c'^3}{6c} = \frac{\omega^{\frac{3}{2}}}{6} \sqrt{\frac{c}{b}} \cdot \frac{1 - \frac{b'c'}{bc}}{\sqrt{\left(1 - \frac{b'c'}{bc}\right)^2}}$$

Si par exemple on a  $\frac{b-b'}{b} = \frac{c-c'}{c} = \frac{1}{4}$ , ou  $\frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} = \frac{3}{4}$ , ces expressions donnent

$$I = \frac{\omega^2}{12} \cdot \frac{c}{b} \cdot \frac{25}{7} = 3,571 \frac{c \omega^2}{b \cdot 12}; \quad \frac{I}{v'} = \frac{\omega^{\frac{3}{2}}}{6} \sqrt{\frac{c}{b}} \cdot \frac{25}{4\sqrt{7}} = 2,362 \sqrt{\frac{c}{b}} \cdot \frac{\omega^{\frac{3}{2}}}{6};$$

le solide résiste 3<sup>fois</sup>,571 plus à la flexion et 2<sup>fois</sup>,362 plus à la rupture par flexion qu'un solide à section rectangle, de même superficie  $\omega$ , pour laquelle le rapport  $\frac{c}{b}$  serait le même.

(Du n° 120).

## § 13. Rapport de la hauteur à la largeur d'une section simple-

ment rectangle qui offrirait même résistance que la section en double T symétrique. Utilité de la forme en T pour s'opposer au déversement. — Pour qu'une pièce ayant une section rectangle *pleine* de même superficie résiste autant à la rupture ou ait le même  $\frac{I}{V^3}$  que la pièce en double T symétrique, il faut

$c_1$  et  $b_1$  étant sa hauteur et sa largeur,

qu'on ait cette équation, qui

s'obtient en égalant les expressions de  $\frac{I}{V^3}$  du § 3 et du § 12,

$$\frac{c_1}{b_1} = \frac{c}{b} \frac{\left(4 - \frac{b' c'^3}{b c^3}\right)^2}{\left(4 - \frac{b' c'}{b c}\right)^3}.$$

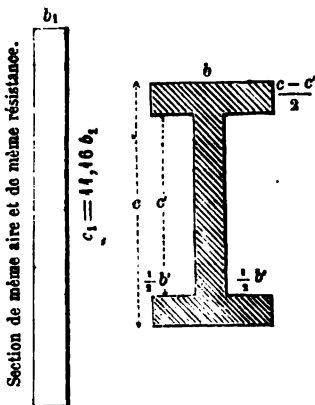
Par exemple si  $\frac{b - b'}{b} = \frac{c - c'}{c} = \frac{1}{4}$  il faut que  $\frac{c_1}{b_1}$  soit  $\frac{625}{112} = 5^{\text{fois}}, 580$

plus grand que  $\frac{c}{b}$ , ou il faut que

$$\frac{c_1}{b_1} = 11,16 \text{ si l'on a } \frac{c}{b} = 2,$$

$$\text{et } = 16,74 \text{ si } \frac{c}{b} = 3.$$

De pareils rapports entre la hauteur  $c_1$  et la largeur  $b_1$  seraient trop forts d'après ce que nous avons dit, § 4, du danger de diminution considérable de résistance que courent les pièces à section rectangle haute et étroite pour peu qu'elles *déversent* ou que la charge les sollicite dans un plan légèrement oblique au grand côté, ce qui a pour conséquence, comme on l'a démontré, de les ployer dans un autre plan bien plus oblique.



(Du n° 120).

Il y a donc lieu de donner en général, aux poutres ou solives métalliques, des côtes ou une forme en double T. Leur résistance au *déversement* dépend du rapport  $\frac{I'}{I}$  des moments d'inertie principaux de la section,  $I'$  désignant celui qui est pris autour de l'axe de symétrie parallèle à la hauteur  $c$ . Celui-ci a pour formule (toujours en nous bornant ici au cas où les deux semelles sont égales).

$$I' = (c - c') \frac{b^3}{12} + c' \frac{(b - b')^3}{12}$$

Son rapport à l'autre moment  $\frac{1}{12} (bc^3 - b'c'^3)$  est

$$\frac{I'}{I} = \frac{b^3}{c^3} \frac{n^2}{m^2} \frac{m^3 + n - 1}{mn^2 - (m-1)(n-1)^2} \text{ si on fait } \frac{b - b'}{b} = \frac{1}{m}, \frac{c - c'}{c} = \frac{1}{n}$$

expression qui se réduirait à  $\frac{b^3}{c^3}$  pour  $m$  ou  $n = 1$ , et qui est de la forme générale  $K \frac{b^3}{c^3}$ ,  $K$  ayant les valeurs numériques données par le tableau suivant :

Valeurs du dénominateur K de $\frac{b^3}{K c^3} = \frac{I'}{I}$						
Pour $\frac{1}{m} =$	$\frac{b' - b}{b} = 1$	$\frac{b' - b}{b} = \frac{1}{3}$	$= \frac{1}{4}$	$= \frac{1}{5}$	$= \frac{1}{6}$	$= 0$
Pour $\frac{1}{n} = \frac{c' - c}{c} = 1$	K = 1	1	1	1	1	1
$= \frac{1}{3}$	1	K = 2,24	2,26	2,25	2,24	2,11
$= \frac{1}{4}$	1	2,59	2,61	2,59	2,56	2,31
$= \frac{1}{5}$	1	2,87	2,90	2,86	2,81	2,44
$= \frac{1}{6}$	1	3,11	3,14	3,21	3,04	2,53

(Du n° 130).

Or, comme les plus grandes valeurs des coordonnées  $u$ ,  $v$  (§ 2) sont ici  $\frac{b}{2}$ ,  $\frac{c}{2}$ , si nous les substituons à  $u'$ ,  $v'$  dans l'expression

$$\frac{M}{R} = \frac{1}{\frac{v'}{I} \cos \varphi + \frac{u'}{I} \sin \varphi}, \text{ nous avons, en mettant } \frac{1}{K} \frac{b^2}{c^2} \text{ pour } \frac{I'}{I},$$

$$\frac{M}{R} = \frac{I}{v'} \cdot \frac{1}{\cos \varphi} \cdot \frac{1}{1 + K \frac{c}{b} \tan \varphi}, \quad (K \text{ variant généralement de } 2,24 \text{ à } 3,21).$$

Le 1<sup>er</sup> facteur de cette expression,  $\frac{I}{v'}$ , représente la résistance de la pièce non déversée ou sollicitée bien perpendiculairement et au milieu des semelles.

Le 2<sup>e</sup>,  $\frac{1}{\cos \varphi}$ , peut être remplacé par 1, l'angle  $\varphi$  étant toujours supposé petit.

La 3<sup>e</sup> montre que si la sollicitation oblique s'opérait suivant la diagonale du rectangle circonscrit  $b \times c$ , ou si l'on avait  $\frac{c}{b} \tan \varphi = 1$ , la résistance spécifique  $\frac{M}{R}$  serait réduite aux  $\frac{1}{3,2}$  à  $\frac{1}{4,2}$  de sa valeur  $\frac{I}{v'}$  relative à une sollicitation normale, tandis qu'elle est le  $\frac{1}{2}$  pour une section pleine (§ 4), en sorte que celle-ci résisterait plus au déversement que la section en double T.

Mais il en est autrement si, comme on doit toujours le supposer, l'obliquité de la sollicitation est faible. Si, par exemple, dans l'hypothèse  $\frac{b-b'}{b} = \frac{c-c'}{c} = \frac{1}{4}$  où l'on a  $K = 2,612$ , cette obliquité est celle de la diagonale du rectangle plein  $b_1 \times c_1$ , dont nous avons calculé tout à l'heure les dimensions et qui offrirait la même résistance, à surface égale, que le rectangle évidé  $b \times c - b' \times c'$ , ou si l'on prend  $\tan \varphi = \frac{b_1}{c_1} = \frac{1}{5,580} \frac{b}{c}$ . Le 3<sup>e</sup> facteur sera alors

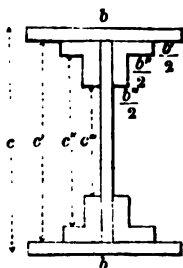
$$\frac{1}{1 + 2,612 \frac{c}{b} \frac{b_1}{c_1}} = \frac{1}{1 + \frac{2,612}{5,580}} = \frac{1}{1,47}.$$

( Du n° 120 ).

Il est, comme on voit, supérieur à  $\frac{1}{2}$ . Cette considération et celle d'une plus grande stabilité qui laisse moins de champ à la torsion résultant du déversement, assure une supériorité réelle aux pièces à double T symétrique sur les pièces à section rectangulaire mince et de champ d'égale superficie.

On voit toutefois qu'il ne faut pas s'exagérer cette supériorité.

§ 14. *Cas de l'évidement par plusieurs rectangles.* — Si le rectangle  $b \times c$  est évidé par plusieurs autres



$$\frac{b'}{2} c' + \frac{b'}{2} c', \quad \frac{b''}{2} c'' + \frac{b''}{2} c'', \quad \frac{b'''}{2} c''' + \frac{b'''}{2} c''',$$

comme dans la figure cotée ci-contre où les plaques de tôle horizontales et verticale sont assemblées par des cornières, on aura simplement

$$\omega = bc - b'c' - b''c'' - b'''c''',$$

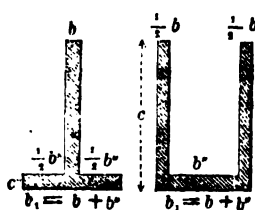
$$I = \frac{bc^3}{12} - \frac{b'c'^3}{12} - \frac{b''c''^3}{12} - \frac{b'''c'''^3}{12}, \quad v' = \frac{c}{2}.$$

§ 15. *Section en T simple, et en U.* — Navier considère ces deux espèces de rectangle évidé non symétrique à la Section IV<sup>a</sup> (ci-après n° 497). Il pose l'expression de leur moment de flexion ou d'inertie autour de la ligne encore inconnue des fibres invariables et il dit de mettre, pour la distance de cette ligne à l'une des bases, sa valeur tirée de l'équation d'équilibre de translation  $\int v d\omega = 0$  du n° 78 qui exprime qu'elle passe par le centre de gravité.

Dans le cours de l'École de Metz M. Michon a simplifié ce calcul en prenant d'abord le moment d'inertie par rapport à la base et en retranchant l'aire multipliée par le carré de sa distance au centre de gravité, distance qui s'obtient simplement, elle-même, en divisant par l'aire le moment statique de la section par rapport à la même base. Soient



(Du n° 120).

 $c$  la hauteur totale de la section. $b$  la largeur du corps vertical du T renversé, ou la somme des largeurs des deux branches de l'U. $b''$  la largeur de l'évidement qui est en deux parties pour le T. $c'$  la hauteur de la table ou semelle, ou  $c - c'$  la hauteur de l'évidement.

On aura :

Moment statique par rapport à la base inférieure  $\frac{1}{2} bc^2 + \frac{1}{2} b''c'^2$ ,D'où, divisant par l'aire  $\omega = bc + b''c'$ ;

$$v' = \frac{\frac{1}{2} bc^2 + \frac{1}{2} b''c'^2}{bc + b''c'}$$

Moment d'inertie autour de la même base  $\frac{1}{3} bc^3 + \frac{1}{3} b''c'^3$ D'où, en retranchant  $\omega v'^2$  (théorème général du § 4 de la note du n° 81, page 48).

$$I = \frac{bc^3 + b''c'^3}{3} - \frac{1}{4} \frac{(bc^2 + b''c'^2)^2}{bc + b''c'} = \frac{(bc^2 + b''c'^2)^2 - 4bc \cdot b''c''(c - c'')^2}{12(bc + b''c')}$$

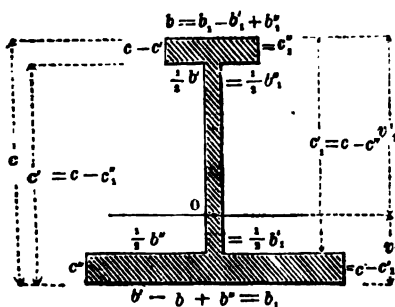
La section en simple T est, au reste, un cas particulier de la suivante.

§ 16. Section en double T non symétrique. (Côté inférieur pris pour celui des fibres étendues).

Nous supposons constamment désormais (comme les auteurs anglais) que le côté supérieur des sections est le côté comprimé, et que le côté inférieur est le côté des fibres étendues, parce que le cas d'une pièce posée sur deux appuis est bien plus fréquemment à considérer que le cas d'une pièce encastree à un bout et sollicitée à l'autre.

Or les formules relatives à la section en double T ou à deux semelles peuvent être obtenues facilement et sous une forme simple comme il suit. . Soient :

(Du n° 120).



$b$  la largeur de la semelle supérieure.  
 $c$  la hauteur totale de la section.  
 $b'$  la somme des largeurs et  $c'$  la hauteur de l'évidement qui aurait lieu si la section était en simple T ou s'il n'y avait pas de semelle inférieure.

En sorte que  $b - b'$  est l'épaisseur du corps de la section ou de la barre verticale du T.

$c''$  la hauteur de la semelle inférieure,  $b''$  la somme des largeurs qu'elle ajoute en deux parties à côté de ce corps vertical.

$v'$  et  $v'_1 = c - v'$  les distances du centre de gravité O ou de la ligne des fibres invariables à la base inférieure  $b - b' + b''$  et à la base supérieure  $b$ ; ou, ce qui revient au même,  $v$ , et  $v'_1$  les distances respectives des fibres invariables aux fibres les plus dilatées et aux fibres les plus comprimées.

On aura

Aire de la section,  $\omega = bc - b'c' + b''c''$

Moment statique de cette aire par rapport à la base inférieure  $b - b' + b''$

$$\frac{bc^2}{2} - \frac{b'c'^2}{2} + \frac{b''c''^2}{2}$$

Quotient, ou distance, à cette base inférieure, du centre de gravité O

$$v' = \frac{\frac{1}{2} bc^2 - \frac{1}{2} b'c'^2 + \frac{1}{2} b''c''^2}{bc - b'c' + b''c''}$$

Moment d'inertie de la section autour de cette même base inférieure

$$\frac{bc^3}{3} - \frac{b'c'^3}{3} + \frac{b''c''^3}{3}$$

(Du n° 120).

En retranchant  $\omega v^2$  (§ 4 de la note du n° 81) on aura cette expression assez simple du moment d'inertie autour de la ligne des fibres invariables.

$$I = \frac{1}{3} (bc^3 - b'c'^3 + b''c''^3) - \frac{1}{4} \frac{(bc^2 - b'c'^2 + b''c''^2)^2}{bc - b'c' + b''c''}$$

D'où, résistance spécifique à la rupture du côté dilaté :

$$\frac{I}{v'} = \frac{2}{3} \frac{(bc - b'c' + b''c'')(bc^3 - b'c'^3 + b''c''^3)}{bc^3 - b'c'^3 + b''c''^3} - \frac{1}{2} (bc^2 - b'c'^2 + b''c''^2).$$

Quant à  $v'_1$ , distance de la ligne des fibres invariables à la base supérieure ou aux fibres les plus comprimées, il est égal à

$$c - v'.$$

On lui donne, ainsi qu'à  $\frac{I}{v'_1}$ , les mêmes formes qu'à  $v'$  et  $\frac{I}{v}$  en faisant

$$b - b' + b'' = b_1, \quad b' = b'_1, \quad b'' = b''_1, \quad c - c' = c'_1, \quad c - c'' = c''_1.$$

Alors

$$\omega = b_1c - b'_1c + b''_1c'_1, \quad v'_1 = \frac{1}{2} \frac{b_1c^2 - b'_1c'^2_1 + b''_1c''^2_1}{b_1c - b'_1c'_1 + b''_1c''_1},$$

$$I = \frac{1}{3} (b_1c^3 - b'_1c'^3_1 + b''_1c''^3_1) - \frac{1}{4} \frac{(b_1c^2 - b'_1c'^2_1 + b''_1c''^2_1)^2}{b_1c - b'_1c'_1 + b''_1c''_1}$$

$$\frac{I}{v'} = \frac{2}{3} \frac{(b_1c - b'_1c'_1 + b''_1c''_1)(b_1c^3 - b'_1c'^3_1 + b''_1c''^3_1)}{b_1c^3 - b'_1c'^3_1 + b''_1c''^3_1} - \frac{1}{2} (b_1c^2 - b'_1c'^2_1 + b''_1c''^2_1).$$

Et l'on a le rapport de la plus grande compression à la plus grande extension

$$\frac{v'_1}{v'} = \frac{b_1c^2 - b'_1c'^2_1 + b''_1c''^2_1}{bc^2 - b'c'^2 + b''c''^2}.$$

Au reste le moment d'inertie peut aussi être écrit sous cette forme très-symétrique.

$$I = \frac{(bc^2 - b'c'^2 + b''c''^2)^2 - 4b'c' \cdot b''c''(c' - c'')^2 + 4b''c'' \cdot bc(c - c'')^2 - 4bc \cdot b'c'(c - c')^2}{42(bc - b'c' + b''c'')}$$

et sous une forme toute semblable avec des indices 1 à toutes les lettres hors  $c$ .

(Du n° 120).

D'où

$$\frac{I}{v' \text{ ou } v'_1} = \frac{\text{le numérateur de l'expression précédente ou un autre pareil avec les indices 1}}{6(bc^3 - b'c'^3 + b''c''^3) \text{ ou } 6(b_1c_1^3 - b'_1c'_1^3 + b''_1c''_1^3)};$$

Il est facile, en divisant ces expressions de  $I$ ,  $\frac{I}{v'}$ ,  $\frac{I}{v'_1}$  par  $bc - b'c' + b''c'' = b_1c - b'_1c' + b''_1c''$ , élevé au carré ou à la puissance  $\frac{3}{2}$ .

et multipliant par  $\omega^2$  ou  $\omega^{\frac{3}{2}}$ , d'avoir, comme aux paragraphes précédents, des expressions comparables à superficie égale de la section.

Pour que la section n'ait que les justes dimensions nécessaires à la résistance, il faut à la fois,  $M$  étant le plus grand des moments des forces extérieures, et  $R_0$ ,  $R'$ . (§ 4, et note du n° 113, § 13) les limites des tractions et pressions longitudinales non dangereuses des fibres,

$$M = R_0 \frac{I}{v'^2} \quad M = R' \frac{I}{v'_1}.$$

Ainsi les deux tables, semelles ou doubles nervures ne fatigueront pas plus l'une que l'autre, et l'on aura, toutes choses d'ailleurs égales, la plus grande économie de matière, si

$$\frac{v'_1}{v'} = \frac{R'_0}{R_0}$$

$$\text{ou} \quad b_1c^3 - b'_1c'^3 + b''_1c''^3 = \frac{R'_0}{R_0} (bc^3 - b'c'^3 + b''c''^3).$$

Cette relation peut s'écrire, en remplaçant  $c'_1$  par  $c - c''$ ,  $c'$  par  $c - c'_1$ , et faisant  $b - b' = b_1 - b'_1 = e$  épaisseur du corps vertical, puis mettant, après réduction,  $b'' = b'_1$  pour  $b_1 - e$ ,  $b'_1 = b'$  pour  $b - e$ ,

$$(2b''c'' + ce)c - (b''c''^3 - b'_1c''^3) = \frac{R'_0}{R_0} [(2b'_1c''_1 + ce)c + (b''c''^3 - b'_1c''^3)].$$

Elle se réduirait, si les différences de termes affectés des carrés  $c''^2$ ,  $c''_1^2$  des épaisseurs des nervures étaient négligeables, à

$$b''c'' + \frac{ce}{2} = \frac{R'_0}{R_0} \left( b'_1c''_1 + \frac{ce}{2} \right),$$

montrant qu'en partageant la section par une horizontale à égale distance des deux bases, l'aire de la partie inférieure devrait être  $\frac{R'_0}{R_0}$  fois plus grande que l'aire de la partie supérieure.

(Du n° 130).

Mais l'exemple numérique du § 18 nous montrera que ce rapport différera souvent d'une manière sensible du rapport exact.

A plus forte raison ne pourra-t-on que rarement y substituer le rapport des aires des semelles

$$b_1 c'' : b c''_1,$$

ce qui exigerait qu'on effaçât encore, dans la dernière équation posée, les termes  $\frac{ce}{2}$  en remplaçant en outre  $b''$  par  $b_1 = b' + e$ , et  $b''_1$  par  $b = b'_1 + e$ , c'est-à-dire qu'on négligeât tout à fait le corps vertical de la section, comme nous avons supposé pouvoir le faire au § 9 de la note du n° 113.

§ 17. *Comparaisons diverses des sections à double T non symétriques et symétriques d'égale superficie.* — Il nous suffira, pour avoir les résultats les plus généraux de ces comparaisons, de considérer le cas où l'on peut faire la première simplification du paragraphe précédent, c'est-à-dire négliger les termes affectés des carrés et des produits des épaisseurs  $c''$ ,  $c''_1$ ,  $e$ , mais en tenant compte de l'influence du corps vertical de la section. Soient :

$e$  l'épaisseur de ce corps vertical ;

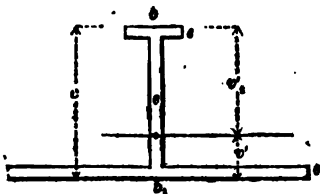
$b_e$ ,  $b_1 e$  les superficies des semelles supérieure et inférieure, ou soient

$b$ ,  $b_1$  leurs longueurs réduites ou amplifiées de manière à les ramener fictivement à l'épaisseur  $e$ ,

$c$  la hauteur totale.

Soit enfin :

$\frac{1}{\eta_1}$  le rapport  $\frac{R'_c}{R_c}$ , quel qu'il soit, entre la pression-limite et la



tension-limite, rapport que nous avons trouvé  $= \frac{1}{\eta} \frac{E}{E_t} \cdot \frac{R_{ct}}{R_c}$  au § 13 de la note du n° 113 et qui se réduit à  $\frac{1}{\eta}$  égal à  $\frac{1}{2}$  dans les corps d'égale texture en tous sens.

(Du n° 120).

On trouve en réduisant les formules du paragraphe précédent, et plus facilement d'une manière directe :

$$\omega = e(b + b_1 + c), v' = \frac{e \frac{c^2}{2} + be \cdot c}{e(b + b_1 + c)} = \frac{c}{2} \frac{2b + c}{b + b_1 + c}, v'_1 = \frac{e}{2} \frac{2b_1 + c}{b + b_1 + c}$$

$$I = e \frac{c^3}{3} + be \cdot c^2 - \omega v'^2 = \frac{ec^3}{12} \cdot \frac{c^2 + 4bc + 4b_1c + 12bb_1}{b + b_1 + c}$$

Pour que la plus grande dilatation soit une fraction  $\eta_1$  de la plus grande contraction, on doit avoir

$$\frac{v'}{v'_1} = \eta_1, \text{ ou } \eta_1 = \frac{2b + c}{2b_1 + c} \text{ d'où } v' = \frac{\eta_1 c}{1 + \eta_1}, v'_1 = \frac{c}{1 + \eta_1}$$

$$b = \eta_1 b_1 - \frac{1 - \eta_1}{2} c,$$

qui, introduits dans les expressions précédentes, donnent

$$\omega = \frac{1 + \eta_1}{2} e(2b_1 + c), \quad I = ec^3 \cdot \frac{6\eta_1 b_1 - (1 - 2\eta_1)c}{6(1 + \eta_1)}$$

$$\frac{I}{v'} = ec \frac{6\eta_1 b_1 - (1 - 2\eta_1)c}{6\eta_1}, \quad \frac{I}{v'_1} = ec \frac{6\eta_1 b_1 - (1 - 2\eta_1)c}{6}$$

Ces expressions particularisées deviennent :

$$\text{Quand } \eta_1 = \frac{1}{4} \left\{ \begin{array}{l} \omega = 5e \frac{2b_1 + c}{8}, v' = \frac{c}{5}, v'_1 = \frac{4c}{5} \\ b = \frac{2b_1 - 3c}{8}, I = ec^3 \frac{3b_1 - c}{15}, \frac{I}{v'} = ec \frac{3b_1 - c}{3} \end{array} \right.$$

$$\text{Quand } \eta_1 = \frac{1}{3} \left\{ \begin{array}{l} \omega = 2e \frac{2b_1 + c}{3}, v' = \frac{c}{4}, v'_1 = \frac{3c}{4} \\ b = \frac{b_1 - c}{3}, I = ec^3 \frac{6b_1 - c}{24}, \frac{I}{v'} = ec \frac{6b_1 - c}{6} \end{array} \right.$$

On voit par les valeurs de  $b$  que pour que la condition  $\frac{v'}{v'_1} = \eta_1$  soit remplie, la semelle inférieure  $b_1 e$  doit avoir une surface de plus de 1 fois  $\frac{1}{2}$  celle  $ce$  du corps vertical quand  $\eta_1 = \frac{1}{4}$ , et plus de 1 fois

(Du n° 120).

quand  $\eta_1 = \frac{1}{3}$ ; on peut même dire plus de 3 fois et de 2 fois, car alors  $b =$  seulement  $\frac{1}{3} b_1$  et  $\frac{1}{6} b_1$ .

Pour une section symétrique ou à semelles égales de même surface  $\omega$ , si l'on désigne par des accents les quantités analogues, on a (en faisant dans les premières formules ci-dessus  $b = b_1 = b'$ , ou  $\eta_1 = 1$  dans les secondes) :

$$\omega' = e'(2b' + c'), \quad v'' = v''_1 = \frac{c'}{2}, \quad I' = e'c'^2 \frac{6b' + c'}{12}, \quad \frac{I'}{v''} = e'c' \frac{6b' + c'}{6}.$$

Pour comparer les résistances à la rupture offertes par cette section et par celle qui a des semelles inégales, on doit bien faire attention de prendre le rapport de  $\frac{I'}{v''}$  (qui multiplié par R, en est la mesure pour la section à semelles égales) à  $\frac{I}{v'}$  (qui serait, pour l'autre, à multiplier par le même coefficient R, limite des tensions), et non pas à  $\frac{I}{v'_1}$  qui serait à multiplier par  $R' = \frac{R_0}{\eta_1}$ , valeur de la limite des pressions, supposée plus grande que celle de la limite R, des tensions.

Donc :

1° Si les deux sections ont même hauteur  $c' = c$ , même surface  $\omega' = \omega$  et même épaisseur  $e' = e$ , on aura d'abord par cela seul, pour la seconde :

$$2b' + c = \frac{1 + \eta_1}{2} (2b_1 + c), \quad \text{d'où } b' = \frac{1 + \eta_1}{2} b_1 - \frac{1 - \eta_1}{4} c,$$

$$I' = ec^2 \cdot \frac{6(1 + \eta_1)b_1 - (1 - 3\eta_1)c}{24}, \quad \frac{I'}{v''} = ec \frac{6(1 + \eta_1)b_1 - (1 - 3\eta_1)c}{12}$$

(Du n° 120).

Il en résultera

Rapport des résist. à la rupture.

Rapport des résist. à la flexion.

$$\text{Quand } \tau_1 = \frac{1}{4}, \frac{I'}{v'} : \frac{I}{v} = \frac{1}{16} \frac{30 \frac{b_1}{c} - 1}{3 \frac{b_1}{c} - 1}; \quad \frac{I'}{I} = \frac{5}{32} \frac{30 \frac{b_1}{c} - 1}{3 \frac{b_1}{c} - 1}$$

$$\text{Quand } \tau_1 = \frac{1}{3}, \frac{I'}{v'} : \frac{I}{v} = \frac{4 \frac{b_1}{c}}{6 \frac{b_1}{c} - 1}; \quad \frac{I'}{I} = \frac{8 \frac{b_1}{c}}{6 \frac{b_1}{c} - 1}$$

D'où	$\frac{b}{c}$	$\frac{b}{b_1}$	$\frac{b'}{c}$	Rapport des résistances			
				à la rupture.	à la flexion.		
Quand $\tau_1 = \frac{1}{4}$	Pour $\frac{b_1}{c} = 3/2$	0	0	0,750	0,786	1,964	
		2	1/8	1/16	1,062	0,737	1,844
		3	5/8	1/8	1,687	0,695	1,738
		4	3/8	5/32	2,312	0,676	1,690
Quand $\tau_1 = \frac{1}{3}$	Pour $\frac{b_1}{c} = 1$	0	0	0,500	0,800	1,600	
		3/2	1/6	1/9	0,833	0,750	1,500
		2	1/3	1/6	1,167	0,727	1,455
		3	2/3	2/9	1,833	0,706	1,412
	4	1	1/4	2,500	0,696	1,391	

On voit ainsi que pour même superficie et même hauteur la section à semelles égales résiste moins à la rupture que la section à semelles inégales telle que  $\frac{v'}{v_1} = \tau_1$ , mais toutefois sans que le désavantage excède  $\frac{1}{5}$  à  $\frac{3}{10}$ , car le rapport des résistances varie de 0,80 à 0,68 en ne faisant pas  $b_1$  plus grand que  $4c$ .

Et, en même temps, la pièce dont la section est à semelles



(Du n° 120).

égales résiste bien mieux à la flexion élastique, ou prend bien moins de flèche sous même charge. L'avantage est exprimé par un rapport qui varie de 1,4 à 1,9.

On voit aussi, par la colonne  $\frac{b}{b_1}$ , que ce rapport des aires des deux semelles est bien moindre que le rapport  $\eta_1 = \frac{v'}{v'_1}$  des plus grandes tensions et pressions des fibres, auquel il serait égal si l'on négligeait l'influence du corps vertical. Il faut donc prendre ce corps en considération.

2° Si l'on donne à ces deux sections des hauteurs différentes, de manière qu'elles offrent même résistance à la rupture, ou qu'avec  $\omega' = \omega$  on ait  $\frac{I'}{v''} = \frac{I}{v'}$ , ce qui s'exprime par

$$e'(2b' + c') = \frac{1 + \eta_1}{2} e(2b_1 + c), \quad e'c' \frac{6b' + c'}{6} = ec \frac{6\eta_1 b_1 - (1 - 2\eta_1)c}{6\eta_1},$$

on trouvera, en divisant la seconde égalité par la première

$$\frac{c'}{c} = \frac{2}{\eta_1(1 + \eta_1)} \cdot \frac{2\frac{b'}{c} + 1}{6\frac{b'}{c} + 1} \cdot \frac{6\eta_1 \frac{b'}{c} - 1 + 2\eta_1}{2\frac{b_1}{c} + 1}; \quad \text{puis } \frac{I'}{I} = \frac{v''}{v'} = \frac{1 + \eta_1}{2\eta_1} \frac{c'}{c};$$

$$\text{Et } \frac{e'}{e} = \frac{e}{c} \frac{\eta_1^2(1 + \eta_1)^3}{8} \cdot \frac{\left(6\frac{b'}{c} + 1\right)^3}{\left(2\frac{b'}{c} + 1\right)^3} \cdot \frac{\left(2\frac{b_1}{c} + 1\right)^3}{\left(6\eta_1 \frac{b_1}{c} - 1 + 2\eta_1\right)^3}.$$

Faisons successivement sur le rapport des deux dimensions des sections à nervures égales les deux hypothèses  $\frac{b'}{c} = \frac{1}{2}$  et  $\frac{b'}{c} = \frac{1}{3}$ ; nous aurons (les nombres  $\frac{c'}{c}$  et  $\frac{e'}{e}$  de la seconde hypothèse se déduisant de ceux de la première en les multipliant par  $\frac{10}{9}$  et par  $\frac{243}{250}$ ):

(Du n° 120).

		Si $\frac{b'}{c'} = \frac{1}{2}$			Si $\frac{b'}{c'} = \frac{1}{3}$		
Quand $\eta = \frac{1}{4}$	Pour $\frac{b_1}{c} = \frac{3}{2}$	$\frac{c'}{c} = 1,4$	$\frac{e'}{c'} = 0,638 \frac{e}{c}$	$\frac{l'}{l} = \frac{7}{2}$	$\frac{c'}{c} = 1,556$	$\frac{e'}{c'} = 0,620 \frac{e}{c}$	$\frac{l'}{l} = \frac{35}{9}$
	2	1,6	$0,610 \frac{e}{c}$	4	1,778	$0,593 \frac{e}{c}$	$\frac{40}{9}$
	3	1,829	$0,654 \frac{e}{c}$	$\frac{32}{7}$	2,082	$0,686 \frac{e}{c}$	$\frac{320}{63}$
	4	1,956	$0,744 \frac{e}{c}$	$\frac{44}{9}$	2,473	$0,723 \frac{e}{c}$	$\frac{440}{81}$
Quand $\eta = \frac{1}{3}$	Pour $\frac{b_1}{c} = 1$	$\frac{c'}{c} = 1,25$	$\frac{e'}{c'} = 0,128 \frac{e}{c}$	$\frac{l'}{l} = \frac{5}{2}$	$\frac{c'}{c} = 1,389$	$0,124 \frac{e}{c}$	$\frac{l'}{l} = \frac{25}{9}$
	$\frac{3}{2}$	1,50	$0,593 \frac{e}{c}$	3	1,667	$0,576 \frac{e}{c}$	$\frac{10}{3}$
	2	1,65	$0,642 \frac{e}{c}$	$\frac{33}{10}$	1,833	$0,595 \frac{e}{c}$	$\frac{11}{3}$
	3	1,821	$0,703 \frac{e}{c}$	$\frac{51}{14}$	2,024	$0,684 \frac{e}{c}$	$\frac{85}{21}$
	4	1,917	$0,817 \frac{e}{c}$	$\frac{23}{6}$	2,430	$0,794 \frac{e}{c}$	$\frac{115}{27}$

On voit que le désavantage comparatif des sections à semelles égales disparaît si l'on augmente la hauteur; seulement, leur corps vertical devient plus grêle, car le rapport  $\frac{e'}{c'}$  de l'épaisseur à la hauteur n'est que des 0,6 aux 0,8 du rapport  $\frac{e}{c}$  relatif aux sections à semelles inégales de même résistance et de même superficie.

D'un autre côté, les semelles égales ont un avantage considérable sous le rapport de la résistance à la flexion, ou de la petitesse, des flèches, qui sont en raison inverse des moments d'inertie  $l', l$

(Du n<sup>o</sup> 120).

doit nous donner les rapports s'élevant à plus de 3 et de 4 à 1, si l'on exclut les valeurs de  $\frac{b_1}{c}$  donnant  $b = 0$ .

§ 18. *Application de la formule exacte à la section jugée la mieux proportionnée par M. Hodgkinson. Conclusion de ce paragraphe et du précédent.* — Les approximations du § précédent pouvaient suffire à son objet; mais les formules du § 16 peuvent seules donner des résultats exacts.

Prenons pour exemple la section en double T en fonte que M. Hodgkinson présente comme la mieux proportionnée, d'après les expériences de *rupture immédiate* où il a fait varier successivement les dimensions (<sup>1</sup>), et qui a, en millimètres, des semelles inférieure et supérieure de 167,4 sur 16 et 59,2 sur 8, avec une hauteur 130 et un corps vertical de 6,7 de large, ou pour laquelle

$$e = 6,7, \quad b = 59,2, \quad c = 130, \quad b' = 52,5, \quad c' = 122, \quad b'' = 160,7, \quad c'' = 16, \\ b_1 = 167,4, \quad c_1 = 130, \quad b'_1 = 160,7, \quad c'_1 = 114, \quad b''_1 = 52,5, \quad c''_1 = 8.$$

Nous trouvons d'abord

$$\frac{v'_1}{v'} = \frac{\frac{1}{2} b_1 c_1^2 - \frac{1}{2} b'_1 c_1'^2 + \frac{1}{2} b''_1 c_1''^2}{\frac{1}{2} b c^2 - \frac{1}{2} b' c'^2 + \frac{1}{2} b'' c''^2} = \frac{371982}{130101} = 2,859;$$

d'où  $v' = 33,687, \quad v'_1 = 96,313.$

Si, pour ce rapport  $\frac{v'_1}{v'}$  de la plus grande compression à la plus grande dilatation, nous avons pris le rapport des aires des semelles inférieure et supérieure en négligeant le corps vertical et les carrés des épaisseurs, nous aurions eu  $\frac{b_1 c''}{b c'_1} = \frac{167,4 \times 16}{59,2 \times 8} = \frac{2678,4}{473,6} = 5,6554$  ou près du double de la vraie valeur 2,859.

Et si, en tenant compte du corps vertical, nous avons encore négligé les termes provenant des carrés des épaisseurs, nous aurions

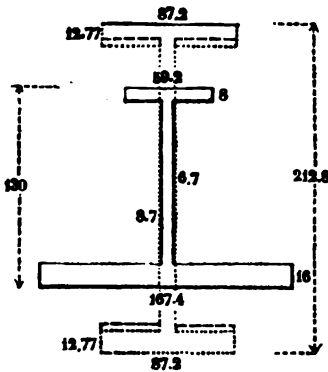
(<sup>1</sup>) Figure 66 (expériences 42 et 43) et pages 100 et 104 de la traduction libre faite par M. Pirel, des *Recherches expérimentales, etc. (Annales des Ponts et Chaussées, 4<sup>e</sup> semestre 1855.*

(Du n° 120).

eu (§ 16)  $\frac{b''c'' + \frac{1}{2}ce}{b''_1c''_1 + \frac{1}{2}ce} = \frac{3006,7}{855,5} = 3,514$ , qui excède encore d'environ  $\frac{1}{4}$  le vrai rapport 2,859.

En poursuivant le calcul rigoureux nous obtenons

$$\omega = 3862 \text{ mm}^2 \text{ carrés, } 2; I = 8\,581\,742, \frac{I}{v'} = 254\,749.$$



Maintenant, transformons cette section.

1° Si, en lui conservant sa superficie, sa hauteur totale  $c = 130$  millimètres, et l'épaisseur 6,7 de son corps vertical, nous changeons ses nervures en d'autres qui soient égales entre elles et d'une épaisseur 12, nous trouvons que les semelles auront 131,33 de longueur et qu'on aura

$$v'' = \frac{c}{2} = 65; I' = 11\,674\,640, \frac{I'}{v''} = 179610.$$

La résistance à la flexion élastique est, comme on voit, augmentée dans la proportion  $\frac{1167}{858} = 1,36$ , mais la résistance à la rupture n'est plus que les  $\frac{179610}{254749} = 0,705$  de ce qu'elle était.

2° Rendons à cette dernière résistance sa valeur en augmentant la hauteur de la section devenue symétrique. Soit C sa nouvelle hauteur, B la largeur extérieure ou la longueur des semelles, C' la hauteur et B' la largeur totale de l'évidement, on devra avoir (§ 12)

$$BC - B'C' = \omega = 3862,2; \frac{BC^3 - B'C'^3}{6C} = \frac{I}{v'} = 254749;$$

d'où, si l'on pose  $B' = mB, C' = mC :$

(Du n° 120).

$$C = \frac{1 - mn}{1 - mn^3} \cdot \frac{6}{\omega} \cdot \frac{I'}{v}, \quad B = \frac{\omega}{C(1 - mn)},$$

Si nous prenons  $1 - m = 0,1$ ,  $1 - n = 0,12$ , ces formules nous donneront les dimensions suivantes :

$$B = 87,240, \quad C = 212,846; \quad \text{Épaisseur du corps } 8,724,$$

$$\text{Épaisseurs des semelles } \frac{G - C'}{2} = 12,7705,$$

ou la section figurée d'autre part en ponctué rond et qui offre, avec la même superficie et la même résistance à la rupture que la section en lignes pleines, une résistance à la flexion bien supérieure, car son moment d'inertie est

$$I' = \frac{I}{v'} \frac{C}{2} = 254\,749 \times 106,422 = 27\,111\,155,$$

ou plus que triple du moment d'inertie  $I$  de la section en lignes pleines.

3°. Si maintenant, en conservant la nouvelle hauteur  $C = 212,85$  ainsi que la largeur 87,2 des semelles, nous réduisons l'épaisseur de la semelle supérieure aux deux tiers, c'est-à-dire à 8,51 en augmentant d'autant l'épaisseur de la semelle inférieure ou en la portant à 17,04, conformément aux deux lignes horizontales en *ponctué allongé*, les formules du § 16 donnent

$$v' = 90,19, \quad v'_1 = 122,66, \quad I = 25\,808\,319, \quad \frac{I}{v'} = 286\,370.$$

La résistance à la rupture est sensiblement augmentée puisqu'on a maintenant 286370 au lieu de 254749, et la résistance à la flexion, mesurée par la valeur de  $I$ , est fort peu diminuée et toujours un peu plus que triple de ce qu'elle était avec la section primitive en lignes pleines.

4° On aurait eu sensiblement le même résultat *en augmentant la largeur de la semelle inférieure ponctué au lieu d'augmenter son épaisseur*. Et l'on aurait eu un profil plus conforme au conseil généralement donné de rendre le plus égales possibles les épaisseurs des diverses parties des pièces en métal fondu.

(Du n° 120).

De la discussion contenue dans ce paragraphe et dans le précédent, et à laquelle nous aurions pu donner plus d'étendue sans en épuiser l'utilité pratique, nous pouvons tirer ces conclusions :

A égale hauteur et à égale superficie, une pièce en métal ou autre matière pour laquelle la résistance permanente  $R'$ , à la compression longitudinale excède très-sensiblement la résistance  $R$ , à l'extension, résiste plus à la rupture éloignée si la semelle inférieure ou étendue de sa section en double T a plus de surface que la semelle supérieure ou comprimée, que si ces deux semelles sont égales, pourvu que l'inégalité ne soit pas telle que le rapport des distances du centre de gravité aux deux bases supérieure et inférieure excède  $\frac{R'_0}{R_0}$ , ou qu'elle n'aille pas jusqu'à produire du côté devenant concave des compressions longitudinales ayant pour conséquence des dilatations transversales plus *dangereuses* que les dilatations longitudinales du côté devenant convexe; pourvu aussi qu'il n'en résulte pas de déversement ni de flexion latérale de la semelle comprimée.

Ce rapport-limite  $\frac{R'_0}{R_0}$  serait 4 si la matière était d'égale texture en tous sens; il paraît convenable (jusqu'à recherches ultérieures) de le réduire à 3 pour les fontes et à 2 pour les fers.

Mais, même en lui donnant sa plus grande valeur 4, le calcul prouve que la résistance à la rupture obtenue avec les semelles inégales n'excède jamais les  $\frac{3}{2}$  de celle qu'on a avec des semelles égales pour même surface et même hauteur.

Et la résistance élastique à la flexion est considérablement diminuée par l'inégalité des semelles qui, ainsi, augmente beaucoup la flèche sous même charge.

En accroissant des 0,4 aux 0,7 la hauteur d'une section à semelles égales, on obtient, pour même superficie, l'excédant de résistance à la rupture qui est susceptible d'être obtenu en les rendant inégales pour même hauteur.

Et l'on augmente en même temps, dans une plus forte proportion, la résistance élastique à la flexion.

(Du n° 120).

Lors donc qu'on ne sera pas gêné pour la hauteur, il sera avantageux d'employer, à l'augmenter, la plus grande partie de l'excédant de matière de la semelle inférieure de la section non symétrique qu'on aurait proportionnée de manière à offrir égalité de résistance sur les deux bases. Toutefois, la hauteur doit être limitée par la crainte du *déversement* (§§ 4 et 13) susceptible d'être produit par une charge légèrement oblique, et par celle de faciliter la flexion latérale de la semelle supérieure pressée longitudinalement. On devra, par la même considération, conserver aux semelles une certaine grandeur, et, le plus souvent, pour les fers laminés, faire la semelle supérieure égale à l'autre, les expériences de rupture citées à la fin du § 13 de la note du n° 413 ne paraissant pas offrir de motifs suffisants pour la faire plus grande que la semelle inférieure.

Dans chaque cas il conviendra de se rendre compte, par les formules exactes du § 16, ou par un calcul numérique de moments statiques et de moments d'inertie fait sur l'épure (surtout lorsque la section n'aura pas exactement la forme d'un double T à angles droits et prononcés), des résistances comparées de diverses formes avant d'adopter la forme définitive.

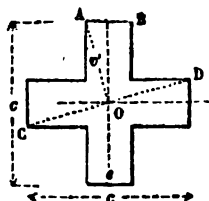
Nous reviendrons, au reste, sur ce sujet dans la partie expérimentale en discutant les résultats obtenus, auxquels il nous sera sans doute donné de joindre ceux d'épreuves toutes récentes, faites en grand sous la direction de M. Morin.

§ 19. *Discussion relative aux sections en croix ou à nervures égales dans deux sens rectangulaires.* — On emploie quelquefois pour les arbres tournants des machines, ou bien pour les poteaux et les bielles, des pièces à quatre nervures égales appelées aussi pièces à côtes ou à ailes, ou *axes emplumés* (*feathered axis*). Nous allons voir qu'elles n'offrent, à égale quantité de matière, que peu ou point d'avantage sur les sections circulaires quant à la flexion, à moins que les nervures ou ailes ne soient très-fortement saillantes, ce que d'autres considérations doivent faire souvent exclure.

Ces sections sont les suivantes.

Le moment d'inertie de chacune est le même autour de tous les axes tracés sur leur plan par leur centre de figures. On prend con-

(Du n° 120).



stamment pour valeur de  $v'$  le maximum de distance de la fibre la plus éloignée, pour les diverses positions de cet axe.

1° Simple croix d'équerre. Soient  $c$  la longueur des doubles bras,  $e$  leur épaisseur, on a

$$\omega = 2ce - e^2, \quad v' = \frac{1}{2} \sqrt{c^2 + e^2}, \quad I = \frac{ce^3}{12} + \frac{ec^3}{12} - \frac{e^4}{12}$$

ou

$$I = \frac{\frac{c^3}{e^3} + \frac{c}{e} - 1}{12 \left(2\frac{c}{e} - 1\right)^2} \omega^2, \quad \frac{I}{v'^3} = \frac{\frac{c^3}{e^3} + \frac{c}{e} - 1}{6 \sqrt{\left(\frac{c^2}{e^2} - 1\right) \left(2\frac{c}{e} - 1\right)^3}} \omega^{\frac{2}{3}}$$

On trouve en conséquence

Lorsque  $\frac{c}{e} = 1$  (simple carré),  $\frac{I}{\omega^2} = \frac{1}{12} = 0,0833$ ,  $\frac{I}{v'^3 \omega^{\frac{2}{3}}} = 0,1176$

1,2 . . . . .	0,0820 . . . . .	0,1242
1,5 . . . . .	0,0807 (minimum)	0,1268
1,8 . . . . .	0,0818 . . . . .	0,1280
2,0 . . . . .	0,0833 . . . . .	0,1291
3 . . . . .	0,0967 . . . . .	0,1367
4 . . . . .	0,1139 . . . . .	0,1462

La résistance à la rupture par la flexion augmente constamment à mesure que le rapport  $\frac{c}{e}$  du double bras à l'épaisseur augmente; mais la résistance  $\frac{I}{\omega^2}$  à la flexion élastique n'augmente qu'après avoir eu, pour  $b = 1, 5 . e$ , un minimum très-peu différent de la valeur 0,0796 relative à la section circulaire, et être redevenue ensuite, pour  $b = 2e$ , la même qu'elle était pour  $b = e$  ou pour le simple carré. On voit, au reste, que l'augmentation de la résistance à la rupture est peu rapide, et il faut que le rapport  $\frac{b}{e}$  atteigne 3 1/2 pour que cette résistance  $\frac{I}{v'^3 \omega^{\frac{2}{3}}}$  d'une pièce à section en croix atteigne la va-



(Du n° 120).

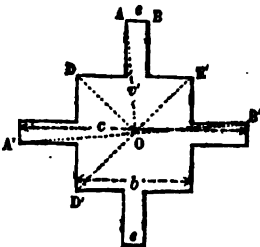
leur  $0,14105 = \frac{1}{4\sqrt{\pi}}$  qu'elle a dans une pièce cylindrique ou à section circulaire.

Nous n'avons pas calculé  $\frac{I}{v'}$  en égard aux augmentations de valeur pouvant résulter de la supposition de troncutures qui diminuent  $v'$  plus que 1, parce que, lorsque l'axe du moment d'inertie est parallèle à la base supérieure  $AB = e$ , les deux conditions du § 8 de la note du n° 113 (p. 99 et 100) pour qu'une troncuture augmente le quotient  $\frac{I}{v'}$  sont, |cl,  $(c - e)e^3 > 2c^2e$  et  $(c - e)e^2 > ce^2(c + e)$  qui ne se trouvent remplies ni l'une ni l'autre; d'où il suit que la seule troncuture capable d'augmenter la résistance consisterait à échan-crer un peu un angle tel que A lorsque l'axe du moment est CD per-pendiculaire à OA, ce qui ne produirait qu'une augmentation né-gligeable.

2° Section carrée avec quatre nervures. On a,  $b$  étant le côté du carré servant de noyau,  $c$  la longueur d'une double nervure y compris la largeur de ce noyau, et  $e$  l'épaisseur des nervures

$$\omega = b^2 + 2(c - b)e, \quad I = \frac{1}{12} [ec^3 - eb^3 + (a - b)e^3 + b^4]$$

$$v' = \text{la plus grande des deux longueurs} \begin{cases} OD = \frac{1}{2} b \sqrt{2} \\ OA = \frac{1}{2} \sqrt{c^2 + e^2}, \end{cases}$$



Ou la 1<sup>re</sup> longueur tant que  $\frac{c}{b}$  n'at-teint pas  $\sqrt{2 - \left(\frac{e}{b}\right)^2}$  ou que la sec-tion n'est pas inscriptible dans un cercle, en sorte qu'on ait  $OA = OD$ ;  
Et la 2<sup>e</sup> longueur ensuite.

D'où, en adoptant  $\frac{e}{b} = \frac{1}{5} = 0,2$  :

(Du n° 120).

Si $\frac{c}{b} = 1$ (carré sans nervures)	$\frac{I}{\omega^2} = 0,0888$ ,	$\frac{I}{v'\omega^2} = 0,1176$
1,2 . . . . .	0,0820 . . . . .	0,1205
1,4 . . . . .	0,0827 . . . . .	0,1275
1,6 . . . . .	0,0884 . . . . .	0,1250
1,8 . . . . .	0,0943 . . . . .	0,1197
2 . . . . .	0,1024 . . . . .	0,1205
3 . . . . .	0,1599 . . . . .	0,1427

On voit qu'à égale surface de section la résistance élastique est d'abord diminuée par l'addition de nervures; puis, passé la valeur  $\frac{c}{b} = 1,4 = \sqrt{2 - \left(\frac{e}{b}\right)^2}$  qui rend la section inscriptible dans un cercle, cette résistance est augmentée. Quant à la résistance à la rupture par flexion, elle augmente d'abord jusqu'à  $\frac{c}{b} = 1,4$  puis elle diminue, et redevient, pour  $\frac{c}{b} = 1,8$ , ou pour les nervures dont la saillie est un peu moindre que la demi-épaisseur du noyau, peu différente de ce qu'elle était sans nervures; elle n'augmente que pour des nervures plus saillantes. Et elle n'atteint la valeur 0,1410 relative au cercle que pour  $\frac{c}{b} = 3$  environ, ou pour des nervures ayant leur saillie égale à la largeur du noyau.

Une troncature qui consisterait seulement à échancreur ou chanfreiner un peu l'angle D ou l'angle A parallèlement aux diagonales D'E', A'B" augmenterait trop peu  $\frac{I}{\omega^2}$  pour qu'il y eût lieu de tenir compte de cette augmentation (§ 8 de la note du n° 113). Si elle consiste à accourcir la double nervure verticale en lui donnant une longueur  $c_1$  un peu moindre que celle  $c$  conservée à la nervure horizontale,  $\frac{I}{\omega^2}$  deviant, pour  $v' = 0A$ ,  $\frac{ec_1^3 - eb^3}{6\sqrt{c_1^2 + e^2}} \frac{(c-b)e^2 + b^4}{6\sqrt{c_1^2 + e^2}}$  dont la dérivée par rapport à  $c_1$

$$e_1 \frac{(c_1^2 + e^2) \cdot 3ec_1 + eb^3 - (c-b)e^2 - b^4}{6(c_1^2 + e^2)\sqrt{c_1^2 + e^2}}$$

( Du n° 120 ).

ne sera négative, quand  $b = 5e$ , que pour  $\frac{c}{e} < 6,225$ , ou  $\frac{c}{b} < 1,245$ .

Comme cette valeur de  $\frac{c}{b}$  est moindre que celle  $\sqrt{2 - \left(\frac{e}{b}\right)^2} = 1,4$  pour laquelle on cesse de prendre  $v' = OD = \frac{1}{2} b\sqrt{2}$  pour commencer à prendre  $v' = oA = \frac{1}{2} \sqrt{c^2 + e^2}$ , on voit que  $\frac{I}{v'}$  n'augmentera pas en diminuant la longueur de la double nervure verticale.

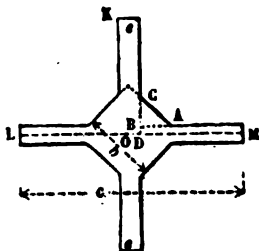
La prise en considération des troncutures possibles ne changera donc pas sensiblement les conclusions précédentes.

3° *Section carrée avec quatre nervures en prolongement des diagonales.* Soient

$b$  le côté du carré,

$c$  la longueur d'une double nervure y compris la diagonale qu'elle prolonge, et  $e$  son épaisseur.

Le moment d'inertie se compose de celui  $\frac{1}{12} (ec^3 + ce^3 - e^4)$  de la



croix d'équerre qui resterait en enlevant les quatre triangles tels que ABC, et de quatre fois le moment d'inertie de ce triangle. Comme on a ses côtés :

$$AB = BC = b \frac{\sqrt{2}}{2} - 2BD = b \frac{\sqrt{2}}{2} - e,$$

et par conséquent l'aire de ce triangle

$\omega' = \frac{1}{2} (b - e\sqrt{2})^2$ , on peut, pour son moment d'inertie autour de la diagonale LM du noyau, appliquer la formule

$$\frac{\omega'}{6} (y^3 + y'^3 + y''^3 + y'y'' + y''y + yy')$$

du § 6 de la note du n° 82, en substituant les ordonnées de ses trois sommets A, B, C,  $y = \frac{e}{2}$ ,  $y' = \frac{e}{2}$ ,  $y'' = b \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{e}{2}$ . Le sextième entre parenthèses se réduit à  $\frac{e^2}{2} + \frac{b^2}{2}$ . Multipliant par  $\frac{\omega'}{6}$ ,

(Du n° 120).

quadruplant et ajoutant le moment d'inertie de la croix, on obtient

$$I = \frac{ec^3}{12} + \frac{(c-e)e^3}{12} + \frac{(b-e\sqrt{2})^2(b^2+e^2)}{12}.$$

On a

$$v' = OK = \frac{1}{2} \sqrt{c^2 + e^2}$$

et l'aire  $\omega = b^2 + c^2 + 2e(c - b\sqrt{2})$ . D'où, adoptant  $\frac{e}{b} = \frac{1}{4}$  ou l'épaisseur des nervures égale au quart du côté du carré :

$$\text{Si } \frac{c}{b} = \sqrt{2} = 1,4142; \frac{I}{\omega^2} = 0,0863; \frac{I}{v'\omega^2} = 0,1239$$

$$1,50 \quad \dots \quad 0,0892 \quad \dots \quad 0,1233$$

$$1,67 \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad 0,1239$$

$$2 \quad \dots \quad 0,1121 \quad \dots \quad 0,1295$$

$$3 \quad \dots \quad 0,1732 \quad \dots \quad 0,1585.$$

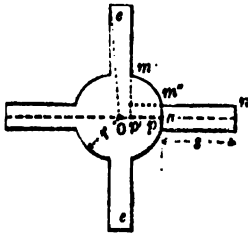
La résistance à la flexion élastique augmente constamment. Mais la résistance à la rupture par flexion n'augmente qu'après avoir diminué; elle ne vient à surpasser sensiblement celle 0,14105 du cylindre à section circulaire que pour  $\frac{c}{b} = 3$  ou pour des nervures comme celles de la figure, et qui sont très-saillantes.

De même que pour le cas précédent, la troncature d'un angle en chanfrein n'augmenterait  $\frac{I}{v'}$  que d'une manière négligeable; et toute réduction de la double nervure verticale à une longueur moindre que  $c$ , diminuerait  $\frac{I}{v'}$ , quand  $\frac{e}{b} = \frac{1}{4}$  et  $\frac{c}{b} =$  au moins  $\sqrt{2}$ . Il n'y a pas lieu de prendre les troncatures en considération.

(Du n° 120).

4<sup>e</sup> Section composée d'un noyau circulaire de rayon  $r$  et de

quatre nervures ayant une épaisseur  $e$  et une saillie  $s$ . — On peut la partager : 1<sup>o</sup> en un rectangle de largeur  $e$  et de hauteur  $2r+2s$ ; 2<sup>o</sup> en deux autres rectangles de hauteur  $e$  et de largeur



$m'n = s + \left[ r - \sqrt{r^2 - \left(\frac{e}{2}\right)^2} \right]$ ; 3<sup>o</sup> en quatre portions de cercle  $p'm'm'p$

comme celles qui ont été considérées au (2<sup>o</sup>) du § 3 de la note du n° 84, et pour lesquelles l'arc  $am'' = x' = \text{arc sin } \frac{e}{2r}$ . On a donc

$$\omega = e(2r + 2s) + 2e \left( s + r - \sqrt{r^2 - \frac{e^2}{4}} \right) + 4r^2 \left( \frac{\pi}{4} - \text{arc sin } \frac{e}{r} \right),$$

$$v' = \sqrt{(r + s)^2 + \frac{e^2}{4}},$$

$$I = \frac{\pi r^4}{4} + \frac{e(2r + 2s)^2 + e^2(2r + 2s)}{12} - r^4 \text{arc sin } \frac{e}{2r} - \frac{er^3}{6} \left( 1 + \frac{e^2}{2r^2} \right) \sqrt{1 - \frac{e^2}{r^2}}.$$

Ce qui donne, en adoptant  $\frac{e}{r} = \frac{1}{2}$  :

Simple cercle  $\frac{I}{\omega^2} = 0,07958$ ;  $\frac{I}{v'^2 \omega^2} = 0,14105$

$\frac{s}{r} = 0$	.....	0,08097	.....	0,14020
0,2	.....	0,08350	.....	0,12768
0,5	.....	0,09373	.....	0,12501
1	.....	0,12002	.....	0,13465
1,5	.....	0,15226	.....	0,1498
2	.....	0,18760	.....	0,16620

Les nervures augmentent constamment, à égale superficie, la résistance à la flexion, mais elles diminuent d'abord la résistance à la rupture par flexion, qui n'arrive à surpasser ce qu'elle était sans nervures ou pour la simple section circulaire, que lorsque la saillie de celles-ci atteint 1 fois 1/2 le rayon du noyau.

**121.** Considérons un solide prismatique (Fig. 9) encasté horizontalement à l'extrémité A, et chargé à l'autre extrémité M d'un poids. Nommons

- r le moment de rupture, évalué conformément aux n<sup>os</sup> 113 et suivants, d'après la figure de la section transversale du solide ;
- P le poids suspendu à l'extrémité M du corps ;
- a la distance horizontale de la section A à la direction du poids P ;
- s la longueur AM du solide ;
- f la flèche de courbure CM.

Par le même motif que pour la section carrée avec nervures, il n'y pas lieu de s'occuper ici des troncutures possibles.

*Conclusion de ce § 19.* — On reconnaît ainsi qu'il y a nécessité absolue, avant d'adopter un profil à nervures ou à quatre ailes, de se rendre exactement compte des résistances qu'on peut en attendre à égale quantité de matière.

Et même, si l'on considère que les arbres de transmission de mouvement, pour lesquels surtout on a imaginé ces sortes de profils, sont en même temps soumis à la torsion, et que les nervures ont fort peu d'influence sur la résistance à la torsion, comme on verra aux notes des n<sup>os</sup> 156 à 160, en sorte qu'à égale quantité de matière elles diminuent très-sensiblement cette sorte de résistance, on partagera, quoique par une autre raison, l'avis de M. Tredgold (*Practical essay on the strength of cast iron*, 1824) qui préfère, pour ces arbres, les sections circulaires sans nervures.

Les sections en croix paraissent ainsi devoir être réservées pour les pièces sollicitées debout, comme les poteaux et les bielles, et à la condition que les bras de la croix seront assez longs pour augmenter très-sensiblement  $\frac{I}{\omega^2}$  ou la résistance élastique à la flexion, qui est ce qu'il y a d'essentiel à considérer dans les pièces sollicitées de cette manière.

La rupture tend à se faire dans la section A, et les conditions de l'équilibre sont exprimées par

$$r = Pa, \text{ d'où } P = \frac{r}{a};$$

ou à peu près, en supposant que la courbe du solide est l'élastique du n° 86, ce qui donne  $s = a + \frac{3f^2}{5a}$ ,

$$P = \frac{r}{s - \frac{3f^2}{5a}}.$$

**122.** Considérons présentement un solide prismatique (Fig. 10), posé horizontalement sur deux appuis, et chargé au milieu. Notions

2P le poids suspendu au milieu A du solide ;

$a$  la moitié CM de la distance des appuis ;

$f$  la flèche de courbure AC ;

$\alpha$  l'angle de la tangente à la courbe en M, M' avec l'horizontale MM'.

La rupture du corps tend à s'effectuer au milieu A. L'effort exercé contre l'appui M (abstraction faite de la considération du frottement sur cet appui) est une force normale à la courbe du solide, dont la composante verticale est P, et la composante horizontale  $P \tan \alpha$ . Par conséquent, en supposant que la courbe du solide est l'élastique du n° 86, d'où  $\tan \alpha = \frac{3f}{2a}$ , les conditions de l'équilibre s'expriment en posant

$$r = P.a + P.f \tan \alpha, \text{ ou } r = Pa \left( 1 + \frac{3f^2}{2a^2} \right);$$

d'où

$$2P = \frac{2r}{a + f \tan \alpha}, \text{ ou } 2P = \frac{2r}{a \left( 1 + \frac{3f^2}{2a^2} \right)}.$$

**125.** Considérons un solide prismatique droit encastré horizontalement à une extrémité, comme celui qui est représenté Fig. 9, et chargé de poids distribués arbitrairement sur la longueur AM. Nommant

$x$  la distance horizontale d'un point quelconque du solide à l'extrémité A ;

$p$  la valeur du poids suspendu en ce point, rapportée à l'unité de longueur, et donnée en fonction de  $x$  ;

$a$  la distance AC ;

on aura, pour exprimer l'équilibre

$$r = \int_0^a dx \cdot px.$$

**124.** Si les poids portés par chacun des éléments de la longueur du solide sont égaux entre eux,  $p$  est constante, et l'on a

$$r = \frac{pa^2}{2}, \quad pa = \frac{2r}{a}.$$

Ainsi le solide serait également rompu par un poids distribué conformément sur sa longueur, ou par un poids moitié moindre, suspendu à l'extrémité B.

**125.** Lorsqu'un solide posé horizontalement sur deux appuis, comme on l'a supposé n° 122, est chargé par des poids distribués uniformément sur sa longueur,  $p$  représentant la charge correspondante à l'unité linéaire, on a  $pa$  et  $pa \cdot \tan \alpha$  pour les composantes verticale et horizontale de la pression supportée par les appuis. Par conséquent, en supposant que la courbe du solide est l'élastique du n° 90, d'où  $\tan \alpha = \frac{8f}{5a}$ , les conditions de l'équilibre sont exprimées par l'équation

$$r = pa \cdot a + pa \cdot f \tan \alpha - pa \frac{a}{2},$$



ou

$$r = pa \left( \frac{a}{2} + f \tan \alpha \right), \quad \text{ou} \quad 2pa = \frac{4r}{a \left( 1 + \frac{16f^2}{5a^2} \right)}.$$

Ainsi (en négligeant le carré de  $\frac{f}{a}$ ) le solide est également rompu par un poids distribué uniformément sur sa longueur, ou par la moitié de ce poids placée au milieu.

**126.** Lorsque le solide prismatique, posé horizontalement sur deux appuis, est chargé à la fois du poids  $2P$  placé au milieu, et du poids constant  $p$  sur chaque unité de longueur, l'équilibre est exprimé par l'équation

$$r = (P + pa)a + (P + pa)f \tan \alpha - pa \cdot \frac{a}{2},$$

ou

$$r = (P + pa) \left( a + f \tan \alpha \right) - \frac{pa^2}{2},$$

d'où

$$2P = \frac{2r - pa \left( a + 2f \tan \alpha \right)}{a + f \tan \alpha}.$$

Dans le cas dont il s'agit, en supposant la courbure du solide déterminée conformément à ce qui a été fait n° 90, on a  $\tan \alpha = \frac{3P + 2pa}{8P + 5pa} \cdot \frac{4f}{a}$ ; cette valeur doit être substituée dans les équations précédentes (\*).

(\*) Cette expression de  $\tan \alpha$  résulte immédiatement de la division de la dernière par l'avant-dernière équation du § 3 de la note du n° 90 (page 82). On néglige les termes en  $\left(\frac{a^2}{EI}\right)^2$  parce que la substitution de cette expression à  $\tan \alpha$  dans celle de  $2P$  du texte ne donne que des termes en  $\left(\frac{f}{a}\right)^2$  très-petits.

**127.** Pour appliquer les résultats précédents à un corps donné, il faudra substituer à la place de  $r$  l'expression du moment de rupture qui convient à la figure de la section transversale de ce corps, conformément aux n<sup>os</sup> 113 et suivants. On donnera ensuite à la constante  $R$  la valeur qui convient à la nature du corps; et qui doit être déterminée par l'observation.

Les observations au moyen desquelles on détermine la valeur de cette constante consistent à placer horizontalement un solide prismatique sur deux appuis, à le charger au milieu par des poids de plus en plus grands, et à observer simultanément le poids qui cause la rupture, et la flèche de courbure qui a lieu à l'instant où cette rupture est prête à s'opérer. La section transversale du solide étant un rectangle (Fig. 2) dont les côtés sont

$$b \text{ et } c, \text{ on a (n}^\circ \text{ 115) } r = R \frac{bc^3}{6}, \text{ et (n}^\circ \text{ 122), } 2P = \frac{2r}{a \left(1 + \frac{3f^2}{2a^2}\right)},$$

en faisant abstraction du poids du solide. Donc

$$2P = R \frac{bc^3}{3a \left(1 + \frac{3f^2}{2a^2}\right)}, \text{ d'où } R = \frac{2P \cdot 3a \left(1 + \frac{3f^2}{2a^2}\right)}{bc^3},$$

$2a$  étant l'intervalle des appuis,  $2P$  le poids placé au milieu de la longueur du solide,  $f$  la flèche de courbure.

**128.** Si l'on a égard au poids du solide, il faut employer l'expression de  $2P$  du n<sup>o</sup> 126. En nommant  $2\Pi$  ce poids, cette expression devient

$$2P = \frac{Rbc^3 - 3\Pi(a + 2f \tan \alpha)}{3(a + f \tan \alpha)}$$

d'où

$$R = \frac{3[(2P + 2\Pi)(a + f \tan \alpha) - \Pi a]}{bc^3};$$

et l'on a

$$\tan \alpha = \frac{3P + 2\Pi}{8P + 5\Pi} \cdot \frac{4f}{a}.$$

**139.** Lorsque les solides ont une petite longueur, ou ne prennent qu'une faible courbure à l'instant de la rupture, on peut négliger les termes du second ordre introduits par la considération de cette courbure : on a alors, en faisant abstraction du poids du solide,

$$2P = R \frac{bc^3}{3a}, \quad \text{d'où} \quad R = 2P \cdot \frac{3a}{bc^3};$$

et, en tenant compte de ce poids,

$$2P = R \frac{bc^3}{3a} - \Pi, \quad \text{d'où} \quad R = (2P + \Pi) \frac{3a}{bc}.$$

On va maintenant rapporter les expériences faites pour évaluer la résistance à la rupture de divers corps, et au moyen desquelles on peut déterminer les valeurs de la constante R.

**150 à 141** (\*).

**142.** Les circonstances de la flexion et de la rupture des bois, telles que les allongements et accourcissements des fibres, et la situation de la fibre invariable, ont été étudiées dans des expériences faites par M. Ch. Dupin, mais qui n'ont pas encore été publiées (\*\*). M. Barlow, dans un ouvrage déjà cité, a donné quelques recherches sur cet objet. Elles apprennent que quand un prisme en bois fléchit progressivement, les fibres situées sur la face concave s'accourcissent plus que les fibres situées sur la face convexe ne s'allongent. Le rapport de l'accourcissement des premières à l'allongement des secondes, égal à l'unité quand la flexion commence, croît progressivement jusqu'à devenir égal à 1,7 environ. La fibre invariable s'approche

(\*) Expériences renvoyées, comme celles des n<sup>os</sup> 4 à 20, 22 à 75 et 94 à 141, et par les mêmes motifs, après le n<sup>o</sup> 168 au *Complément des articles I à VI*, en y ajoutant celles qui ont été faites depuis 1833.

(\*\*) Elles l'ont été aux *Leçons de Mécanique* du Conservatoire, publiées par ce savant. On les donnera au *Complément des art. I à VI*.

peu à peu de la face convexe. Dans les barreaux éprouvés par M. Barlow, elle a été observée communément, lors de la rupture, aux  $\frac{5}{8}$  de la hauteur de la section, à compter de la face concave.

Ces effets sont mis en évidence par une expérience remarquable, imaginée par Duhamel. Elle consiste à scier transversalement une pièce de bois du côté de la face concave, et à remplir le trait de scie par une cale de bois dur. La force de la pièce augmente un peu quand le trait de scie pénètre jusqu'au  $\frac{1}{3}$  de l'épaisseur; elle est la même quand il pénètre jusqu'à moitié environ, et elle est peu diminuée quand il pénètre aux  $\frac{3}{4}$  de l'épaisseur. Cette expérience a été répétée par M. Barlow, avec les mêmes résultats (\*).

143 à 149 (\*\*).

*Notions sur les théories de la résistance à la rupture proposées par Galilée, et par Mariotte et Leibnitz.*

150. La première consistait à placer l'axe horizontal d'équilibre au point inférieur de la section de rupture (Fig. 41), et à considérer la force intérieure développée en chaque point de cette section comme constante pour tous les points. Nommant

R la résistance pour l'unité de surface ;

b la largeur de la section ;

$f_1, u, f_2, u$  les valeurs  $pm, pn$  de l'ordonnée du contour de la section qui répondent à une même abscisse  $u$  ;

c la hauteur de la section ;

(\*) On a dit ci-dessus (§§ 13 de la note du n° 113 et 18 de celle du n° 120) et l'on verra aux tableaux d'expériences, que c'est le contraire pour la fonte de fer.

(\*\*) Renvoyés comme les n° 130 à 141.

on avait ainsi

$$R \int_0^b du \int_{f_1 u}^{f_2 u} dv \cdot v$$

pour l'expression du moment de la résistance à la rupture. Cette expression, dans le cas où la section est un rectangle dont les côtés sont  $b$ ,  $c$ , devient

$$R \frac{bc^3}{2}.$$

La théorie attribuée communément à Mariotte et à Leibnitz consistait à placer également l'axe horizontal d'équilibre au point inférieur de la section, et à supposer la force intérieure développée en chaque point proportionnelle à la distance de ce point à l'axe d'équilibre. Le moment de la résistance à la rupture était alors

$$\frac{R}{c} \int_0^b du \int_{f_1 u}^{f_2 u} dv \cdot v^2.$$

Il devenait, dans le cas du rectangle

$$R \frac{bc^3}{3}. \quad (*)$$

(\*) Les considérations présentées par Galilée, le fondateur de la théorie de la résistance des solides, se trouvent à son *Dialogo secundo, Giornata secunda*, 1638<sup>(1)</sup>. Il place la puissance et la résistance aux extrémités d'un levier coudé ayant pour bras horizontal la longueur du parallépipède ou du cylindre solide encasté, et pour bras vertical la moitié de la hauteur de ce solide; et il conclut que les poids capables de le rompre par sollicitation transversale et par traction longitudinale sont entre eux en raison inverse de ces deux bras. D'où il déduit déjà que les prismes posés résistent en raison directe de la largeur et du carré de la hauteur et en raison inverse de la longueur; que ceux qui sont creux (comme les os, les

(1) *Opere di Galileo Galilei*, édit. 1764, t. III, p. 63, article 556.

( Du n° 150 ).

plumes, etc.) ont plus de résistance sous même volume; que, pour une largeur constante, il y aura *égale résistance* partout, si les hauteurs croissent comme les ordonnées d'une parabole dont les abscisses sont les distances du point d'application de la force transversale, etc.

La théorie de Leibnitz est exposée aux *Acta eruditorum, Lipsiæ*, 1684, p. 319, dans un article intitulé : *Demonstrationes novæ de resistantiâ solidorum*. Il place l'axe de rotation, comme Galilée, au bas de la section, mais le bras *moyen* vertical de son levier n'est plus que le tiers de la hauteur de la section rectangulaire.

Marlotte plaçait déjà cet axe ou cette *ligne des fibres invariables* au milieu de la hauteur, en considérant, comme on fait aujourd'hui, des fibres étendues au-dessus et des fibres comprimées au-dessous. Mais se trompant, ensuite, quant aux conséquences, d'une manière singulière qui revient à doubler en même temps un bras de levier et une force pour doubler leur produit<sup>(1)</sup>, il trouve pour le moment des résistances « la même chose que si toutes les parties s'étendaient » ou que si l'axe de rotation était au bas.

On s'étonne de voir, vingt ans plus tard, Jacques Bernoulli commettre précisément la même méprise du simple au double<sup>(2)</sup> et affirmer que la position attribuée à l'axe de rotation est tout à fait indifférente, même lorsque les forces sont des fonctions quelconques des extensions ou compressions. C'est que n'apercevant pas encore, comme Coulomb, le principe de nullité de la somme des actions intérieures horizontales, il cherche à échapper par un raisonnement, qui se trouve être faux, à la nécessité de déterminer d'abord la position de cet axe (Voyez ci-après note du n° 151).

(1) *Traité* (posthume) *du Mouvement des eaux*, 1684, 5<sup>e</sup> partie, second discours, 43<sup>e</sup> alinéa.

(2) *Véritable hypothèse de la résistance des solides*, avec la démonstration de la courbure des ressorts, lemme 4 (Académie des sciences, 1705; ou *Jacobi Bernoullii opera omnia*, t. II, p. 976).

*Remarque sur la théorie de la résistance à la rupture.*

151. La théorie présentée dans les n<sup>os</sup> 112 et suivants est fondée sur l'hypothèse que les fibres longitudinales, à l'instant de la rupture, offrent des résistances proportionnelles aux extensions et contractions de ces fibres, et qui sont égales pour des extensions et contractions égales. La situation de l'axe d'équilibre est déterminée par la condition énoncée n<sup>os</sup> 77 et 78, en sorte que cet axe est au milieu de la hauteur de la section, quand la section peut être partagée dans sa hauteur en deux parties symétriques, comme cela a lieu pour le rectangle et le cercle.

Si cette hypothèse était exactement conforme aux effets naturels, les valeurs de la constante R déduites, au moyen des formules précédentes, des expériences sur la rupture rapportées dans les n<sup>os</sup> 94 et suivants, ne différeraient point des résultats obtenus par les expériences directes sur la rupture des corps produite par extension ou par écrasement. Lorsque cet accord n'a pas lieu, on doit l'attribuer à ce que les fibres des corps n'opposant pas, quand la rupture vient à s'opérer, des résistances égales à l'extension et à la compression, l'axe d'équilibre change de situation, en sorte que les expressions du moment de rupture ne s'accordent pas avec l'état du solide.

On doit remarquer toutefois, 1<sup>o</sup> que les principaux résultats obtenus précédemment n'en sont pas moins vrais; en sorte que les résistances des bases rectangulaires sont toujours proportionnelles à la largeur et au carré de l'épaisseur, et que les résistances des bases de figures semblables le sont toujours aux cubes des dimensions homologues. Les rapports seuls des résistances pour les bases des diverses figures sont changés. 2<sup>o</sup> Dans les applications, on n'est point dans le cas de calculer les résistances respectives des corps en les considérant dans l'état qui précède la rupture: on les considère, au contraire, comme on le verra dans la suite, lorsqu'ils n'ont pu prendre encore qu'une légère

flexion, qui n'en a point altéré l'élasticité; et les résultats précédents conviennent alors sensiblement à la manière dont la résistance s'exerce (\*).

(\*) § 1. *Proportionnalité des résistances aux largeurs et aux carrés des hauteurs des sections semblables ou seulement transformables les unes dans les autres en réduisant ou amplifiant dans une même proportion leurs ordonnées ou leurs abscisses.* — La dernière remarque (2<sup>e</sup>) de Navier, très-importante, nous a servi précédemment (note du n° 413, §§ 2, 3, 4, 12) à la justification de toutes les formules de résistance à la rupture éloignée, posées avec  $R_0$  au lieu de  $R$ .

Mais considérons maintenant ce qui a lieu pour la rupture immédiate ou prochaine.

Ce qu'il dit à la remarque (1<sup>e</sup>), à savoir « que les résistances sont toujours proportionnelles à la largeur et au carré de l'épaisseur » est vrai non-seulement pour les sections rectangulaires comparées, mais encore, plus généralement (comme on va voir) pour les diverses sections qui, comme les ellipses, etc., sont ramenées les unes aux autres lorsqu'on amplifie ou qu'on réduit dans un même rapport, ou toutes les abscisses, ou toutes les ordonnées, ou à la fois les unes et les autres supposées parallèles et perpendiculaires à la ligne finale des fibres invariables; et, cela, quelles que soient les expressions inconnues des efforts de tension et de pression des fibres en fonction de leurs dilatations et contractions; pourvu toutefois que ces dilatations et contractions soient encore, à l'instant de la rupture, *proportionnelles aux distances à cette ligne neutre, traversée alors par les fibres dont la longueur est restée ou est redevenue la même qu'avant la flexion, comme si les sections voisines étaient demeurées planes ou s'étaient changées en une même surface peu courbe* (§ 4 de la note du n° 80).

En effet, soient

$\varphi$  et  $\psi$  les indices des fonctions des dilatations et contractions qui expriment les grandeurs des tensions ou pressions des fibres;

Et soient, pour l'instant de la rupture :



(Du n° 151).

$v$  et  $r_1$ , les distances, à la ligne neutre (quelle que soit alors la situation de cette ligne), d'une fibre étendue et d'une fibre comprimée quelconques ;

$v'$  et  $r'_1$ , les plus grandes valeurs de  $v$  et  $r_1$  ;

$i'$  la dilatation de la fibre la plus étendue, ou de la fibre à la distance  $v'$  ;

$U$  et  $U_1$ , les largeurs de la section aux distances  $v$ ,  $v_1$ .

La dilatation et la contraction des deux fibres quelconques à ces distances de la ligne neutre seront

$$i' \frac{v}{v'} \quad \text{et} \quad i' \frac{v_1}{v'}.$$

On aura donc,  $M$  étant le moment des forces extérieures autour de cette ligne, les deux équations suivantes d'équilibre de translation longitudinale et de rotation

$$M = \int_0^{v'} U dv \varphi \left( i' \frac{v}{v'} \right) = \int_0^{v'_1} U_1 dr_1 \psi \left( i' \frac{r_1}{v'} \right)$$

$$M = \int_0^{v'} U r dr \varphi \left( i' \frac{v}{v'} \right) + \int_0^{v'_1} U_1 r_1 dr_1 \psi \left( i' \frac{r_1}{v'} \right).$$

Or si, dans la première équation,  $m$  et  $n$  étant deux nombres quelconques, nous remplaçons  $U$ ,  $U_1$  par  $mU$ ,  $mU_1$ , et  $r$ ,  $v'$ ,  $r_1$ ,  $v'_1$ ,  $dr$ ,  $dv$ , par  $nr$ ,  $nv'$ ,  $nr_1$ ,  $nv'_1$ ,  $ndv$ ,  $ndr_1$ , sans changer la dilatation-limite  $i'$  qui ne dépend que de la matière, elle sera encore satisfaite, car les fonctions  $\varphi$ ,  $\psi$  auront conservé les mêmes grandeurs pour les ordonnées  $nv$ ,  $nv_1$  qu'elles avaient pour celles  $v$ ,  $v_1$  ; ce qui montre déjà que lorsqu'on remplace une section par une autre dont les abscisses soient celles de la première multipliées par  $m$  et dont les ordonnées soient celles de la première multipliées par  $n$ , la ligne neutre y occupe, à l'instant où la dilatation  $i'$  infiniment peu dépassée détermine la rupture, une situation homologue à celle où elle était, ou telle que le rapport de ses distances à la fibre la plus étendue et à la fibre la plus contractée est toujours le rapport primitif de  $v'$  à  $v'_1$ .

Il en résulte qu'en faisant, dans le second membre de la deuxième équation, la même transformation, il exprimera la somme des mo-

(Du n° 151).

ments des forces intérieures à l'instant de la rupture du prisme ayant la nouvelle section, comme il l'exprimait pour le prisme ayant la section primitive. Or,  $M'$  étant le nouveau moment, on aura, en divisant la nouvelle équation par l'ancienne,

$$\frac{M'}{M} = mn^2.$$

Donc les résistances de ces deux prismes, ou les moments capables de produire leur rupture immédiate par flexion, sont bien proportionnelles aux largeurs et aux carrés des hauteurs des sections.

§ 2. *Formules pour le calcul approximatif des résistances à la rupture immédiate ou prochaine, principalement quand les sections sont rectangles* — Pour calculer les grandeurs de ces résistances en fonction du coefficient  $R$  de rupture par traction (ou du coefficient  $R'$  d'écrasement) il serait nécessaire, comme on a déjà dit au § 4 de la note du n° 113, de connaître complètement la forme des fonctions que nous venons de désigner par  $\varphi$  et par  $\psi$ .

A défaut de cette connaissance, on peut substituer des expressions empiriques simples satisfaisant à peu près à ce qu'on sait de ces fonctions.

Dès 1702 Varignon a considéré <sup>(1)</sup> une variation non linéaire de la tension d'une fibre à l'autre, mais sans faire d'hypothèse sur sa loi. Jacques Bernoulli dans son mémoire déjà cité, de 1705 (Véritable hypothèse, etc.), avance que « la compression d'une fibre croît nécessairement dans un moindre rapport que le poids comprimant » parce qu'autrement la fibre finirait « par être comprimée plus que de toute sa longueur » ce qui est absurde, et il admet « qu'il en doit être de même de l'extension parce qu'elle n'est qu'une compression négative. » Aussi, et eu égard à ce qu'il regarde le résultat comme le même (note ci-dessus du n° 150) que si l'axe de rotation était placé au bas de la section ou qu'il n'y eût que des extensions, arrive-t-il, pour un prisme rectangulaire d'une matière dont  $R$  est la résistance à la rupture par traction pour l'unité de superficie de sa base  $b \times c$ , à un moment de rupture par flexion

(1) *De la Résistance des solides pour tout ce qu'on peut faire d'hypothèses touchant la force ou la ténacité des fibres, etc.* (Académie des sciences, 1702).

Du n° 151).

moindre que  $R \frac{bc^2}{3}$ , ce qui lui fait croire sa théorie confirmée par quelques expériences de Mariotte qui ont donné  $1/4$  à  $1/3$  de  $Rbc^2$  pour des barres de bois et des tiges de verre.

Mais cette confirmation apparente résulte d'une compensation de l'erreur que nous avons signalée à la fin de la note du n° 150, avec l'erreur de l'hypothèse sur la loi de variation des compressions ou extensions d'une fibre sous divers efforts, car les expériences faites depuis vingt-cinq ans surtout ont prouvé (§ 8 de la note du n° 21) que ces compressions ou extensions croissent plus rapidement que les efforts qui les produisent, contrairement à ce que suppose Bernoulli, depuis l'instant où elles commencent à avoir une partie permanente jusqu'à celui de l'écrasement ou de la séparation.

Aussi M. Hodgkinson (1) a-t-il donné un calcul où les efforts d'extension  $p$  et de compression  $p_1$  sont représentés, pour les fibres, aux distances  $v, v_1$  de la ligne neutre, par des formules qui sont susceptibles d'être écrites ainsi,  $m$  et  $m_1$  étant des exposants numériques plus grands que 1,  $R$  et  $R_1$  les efforts d'extension et de compression à une même distance  $v'$  de la ligne neutre, et  $n, n_1$  deux constantes positives, aussi  $> 1$  (et qui sont celles qu'il appelle  $n, n'$ , divisées respectivement par  $v'^{n-2}, v_1'^{n_1-2}$ )

$$p = R \frac{n \frac{v}{v'} - \left(\frac{v}{v'}\right)^n}{n-1}, \quad p_1 = R_1 \frac{n_1 \frac{v_1}{v_1'} - \left(\frac{v_1}{v_1'}\right)^{n_1}}{n_1-1},$$

formules où il fait surtout la supposition  $m = m_1 = 2$ .

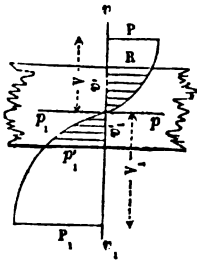
Nous préférons employer les formules suivantes :

$$(1) \quad p = P \left[ 1 - \left( 1 - \frac{v}{V} \right)^n \right], \quad p_1 = P_1 \left[ 1 - \left( 1 - \frac{v_1}{V_1} \right)^{n_1} \right]$$

où  $p, p_1$  représentent toujours l'effort d'extension et l'effort de

(1) *Experimental researches, etc.*, 1846, au chapitre (nos 189 et suivants, non traduit par M. Pirel) intitulé *Theoretical inquiry with regard to the strength of Beams*.

(Du n° 151).



compression de deux fibres aux distances quelconques  $v, v_1$  de la ligne neutre, pour l'unité superficielle de leurs sections,  $V, V_1$  des grandeurs linéaires égales ou supérieures aux plus grandes valeurs  $v', v'_1$  des distances ou ordonnées  $v, v_1$ ,  $P, P_1$  deux constantes (qui seraient évidemment les valeurs des efforts  $p, p_1$  aux distances  $V, V_1$ ).

L'épure ci-contre manifeste la raison de notre préférence.



Les courbes pleines sont celles que représente, pour  $m = 2, 4, 6, 8, 10$ , la première de nos deux formules (4) (à laquelle la seconde est semblable). Elles nous paraissent plus propres à figurer les divers modes de variation qu'on peut supposer aux forces  $p$  en fonction des distances  $v$ , que les courbes ponctuées, qui sont celles que fournit la formule de M. Hodgkinson quand on y fait  $\kappa = m$  (comme nous y serons obligés ci-après afin que la tangente soit verticale ou parallèle aux abscisses  $v$  pour  $v = v'$ ), et dans laquelle on voit qu'il faudrait donner surtout à  $m$  des valeurs fractionnaires comprises entre 0 et 2, car, pour  $m > 2$  on n'aurait

que des lignes comprises entre la parabole ordinaire ( $m = 2$ ) et la ligne droite ( $m = \infty$ ), et ne pouvant guère servir; ce qui peut être dit aussi de la ligne  $m = 1$  dont l'équation aurait une forme transcendante, car en cherchant la vraie valeur du  $\frac{0}{0}$  la première formule Hodgkinson pour  $m = \kappa = 1$  devient  $p = R \frac{v}{v'} \left( 1 - \log \frac{v}{v'} \right)$ .

Au reste nos formules donnent la même chose que celles de

(Du n° 151).

M. Hodgkinson pour  $m$  ou  $m_1 = 2$ , savoir des expressions de la forme  $p$  ou  $p_1 = Ai - Bi^3$  ( $i$  étant la dilatation ou contraction), forme que l'habile physicien a reconnue satisfaisante à peu près aux expériences sur les barres de fonte quand on ne les pousse pas tout à fait jusqu'à la rupture ou à l'écrasement.

Nous aurons d'abord, au moyen des formules que nous adoptons :

Condition de juste résistance (la rupture étant supposée commencer du côté étendu) :

$$p = R \quad \text{pour} \quad v = v'$$

ou

$$(2) \left\{ \begin{array}{l} R = P \left[ 1 - \left( 1 - \frac{v'}{V} \right)^m \right] \\ \text{ou} \quad \frac{R}{v'} = \frac{mP}{V} \left( 1 - \frac{m-1}{2} \frac{v'}{V} + \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} \frac{v'^2}{V^2} - \dots \right). \end{array} \right.$$

Condition pour qu'il y ait raccordement des deux courbes dont les coordonnées sont  $p$  et  $v$ ,  $p_1$  et  $v_1$ ; ou pour que les faibles valeurs de  $p$ ,  $p_1$  soient dans une même proportion avec les petites dilatations et avec les petites compressions :  $\frac{dp}{dv} = \frac{dp_1}{dv_1}$  pour  $v = 0$ ,  $v_1 = 0$ ,

ou

$$(3) \quad \frac{mP}{V} = \frac{m_1 P_1}{V_1}.$$

Ensuite, en nous bornant désormais aux sections rectangles dont nous appelons  $b$  la largeur et  $c$  la hauteur :

Condition d'équilibre de translation  $\int_0^{v'} p dv = \int_0^{v'_1} p_1 dv_1$ , ou

$$(4) \left\{ \begin{array}{l} P V \left\{ \frac{v'}{V} - \frac{1}{m+1} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{v'}{V} \right)^{m+1} \right] \right\} = P_1 V_1 \left\{ \frac{v'_1}{V_1} - \frac{1}{m_1+1} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{v'_1}{V_1} \right)^{m_1+1} \right] \right\} \\ \text{ou} \\ P \left( \frac{m v'^2}{1 \cdot 2V} - \frac{m m-1 v'^3}{1 \cdot 2 \cdot 3V^2} + \frac{m m-1 m-2 v'^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4V^3} - \dots \right) = P_1 \left( \frac{m_1 v_1'^2}{1 \cdot 2V_1} - \frac{m_1 m_1-1 v_1'^3}{1 \cdot 2 \cdot 3V_1^2} + \dots \right) \\ \text{ou, eu égard à (3)} \\ \frac{v'^2}{2} - \frac{m-1}{2} \frac{v'^3}{3V} + \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} \frac{v'^4}{4V^2} - \dots = \frac{v_1'^2}{2} - \frac{m_1-1}{2} \frac{v_1'^3}{3V_1} + \frac{m_1-1}{2} \cdot \frac{m_1-2}{3} \frac{v_1'^4}{4V_1^2} - \dots \end{array} \right.$$

Condition qui, avec la précédente, servira à déterminer  $v'$ ,  $v'_1$ .

(Du n° 151).

(5)  $v_1 + v'_1 = c$

Condition d'équilibre de rotation :  $M = b \int_0^{v'} p r dx + b \int_0^{v'_1} p_1 v_1 dx_1$ ,  
ou en substituant (4) :

$$\begin{aligned}
 M &= b P V^2 \left\{ \frac{v^2}{2V^2} - \frac{1}{m+1} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{v'}{V} \right)^{m+1} \right] + \frac{1}{m+2} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{v'}{V} \right)^{m+2} \right] \right\} + \\
 &+ b P_1 V_1^2 \left\{ \frac{v_1^2}{2V_1^2} - \frac{1}{m_1+1} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{v'_1}{V_1} \right)^{m_1+1} \right] + \frac{1}{m_1+2} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{v'_1}{V_1} \right)^{m_1+2} \right] \right\} \\
 \text{ou} \\
 M &= b P \left( \frac{m v^3}{1 \cdot 3V} - \frac{m m - 1}{1 \cdot 2} \frac{v^4}{4V^2} + \frac{m m - 1}{1 \cdot 2} \frac{m - 2}{3} \frac{v^5}{5V^3} - \dots \right) + \\
 &+ b P_1 \left( \frac{m_1 v_1^3}{1 \cdot 3V_1} - \frac{m_1 m_1 - 1}{1 \cdot 2} \frac{v_1^4}{4V_1^2} + \frac{m_1 m_1 - 1}{1 \cdot 2} \frac{m_1 - 2}{3} \frac{v_1^5}{5V_1^3} - \dots \right) \\
 \text{ou, eu égard à (3) et à (2)} \\
 M &= b \frac{R}{v'} \cdot \frac{v^3 \left( \frac{1}{3} - \frac{m-1}{2} \frac{v'}{4V} + \frac{m-1}{2} \frac{m-2}{3} \frac{v^2}{5V^2} - \dots \right) + v_1^3 \left( \frac{1}{3} - \frac{m_1-1}{2} \frac{v'}{4V_1} + \dots \right)}{1 - \frac{m-1}{2} \frac{v'}{V} + \frac{m-1}{2} \frac{m-2}{3} \frac{v^2}{V^2} - \dots}
 \end{aligned}
 \tag{6}$$

§ 3. Particularisations de ces formules. Explication de quelques résultats d'expérience. Limites supérieure et inférieure, etc.

1° Si l'on fait les exposants  $m = m_1 = 1$ , les cinq équations de condition se réduisent à

$$\frac{P}{V} = \frac{R}{v'}, \quad \frac{P_1}{V_1} = \frac{P}{V}, \quad v_1^2 = v'^2, \quad v = v_1 = \frac{c}{2}, \quad M = R \frac{bc^2}{8}.$$

C'est la supposition de variation simplement linéaire, ou de proportionnalité constante des efforts aux dilatations ou contractions comme quand celles-ci restent très-petites; et on retombe sur les formules du texte.

2° Si, en faisant toujours  $m = m_1 = 1$ , l'on omet la condition de raccordement (3)  $\frac{mP}{V} = \frac{m_1 P_1}{V_1}$  ou si l'on substitue, approximativement, des variations linéaires aux variations réelles des tensions et des pressions mais suivant deux rapports différents, on a

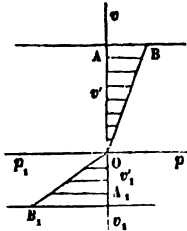
$$\frac{P}{V} = \frac{R}{v'}, \quad \frac{P}{V} v^2 = \frac{P_1}{V_1} v_1^2, \quad M = \frac{b}{8} \left( \frac{P}{V} v^3 + \frac{P_1}{V_1} v_1^3 \right);$$

(Du n° 151).

ou, vu que  $v' + v_1 = c$ ,

$$M = R \frac{bcv'}{3}.$$

Or si c'est, comme on le suppose, du côté des fibres étendues qu'une même force produit plus de changement de longueur, ou si  $\frac{P}{V} < \frac{P_1}{V_1}$ , on a  $v' > v_1$ ; ce qu'on aperçoit également, si la ligne verticale  $AOA_1$  représente une coupe de la section rectangulaire par le plan de flexion, en traçant les lignes droites  $OB$ ,  $OB_1$  dont les abscisses (verticales) sont  $v$  et  $v_1$  et dont les ordonnées (horizontales) sont les forces  $p$  et  $p_1$



correspondantes; car pour que les aires  $OAB$ ,  $OA_1B_1$  soient égales, ce qui est la condition de l'équilibre de translation, il faut, puisque  $\frac{AB}{AO}$  est moindre que  $\frac{A_1B_1}{A_1O}$ , que  $OA = v$  soit plus grand que  $OA_1 = v_1$ .

Il en résulte qu'on a  $v' > \frac{c}{2}$ , et que le moment  $M = R \frac{bcv'}{3}$  des forces à l'instant de la rupture excède la valeur  $R \frac{bc^2}{6}$  donnée par la théorie ordinaire.

De même si la rupture commence du côté des fibres comprimées, le moment  $M$  excède  $R' \frac{bc^2}{6}$ ,  $R'$  étant la résistance à l'écrasement de l'unité superficielle.

On voit déjà que l'inégalité des résistances des fibres à l'extension et à la compression, ces deux résistances étant assimilées empiriquement à deux fonctions linéaires, rend la résistance à la rupture par flexion supérieure à ce qu'on trouve quand on suppose ces deux résistances égales.

3° Mais la non-linéarité, ou l'accroissement des forces dans un rapport moindre que celui des changements de longueur des fibres est une seconde cause d'augmentation de la résistance.

Observons d'abord que lorsque la dilatation d'une fibre a atteint

( Du n° 151 ).

sa limite, comme une faible augmentation qu'on lui fait subir produit la rupture ou bien fait décroître très-rapidement sa force de tension, il est naturel de regarder la courbe des tensions comme ayant à l'instant de la rupture, pour  $v = v'$ , sa tangente verticale ou parallèle à l'axe coordonné des  $v$ , d'autant plus que cet instant a été précédé d'une énerivation graduelle.

Cela revient à supposer  $\frac{dp}{dv} = 0$  pour  $v = v'$ , ou à prendre

$$(7) \quad V = v', \quad P = R$$

d'où

$$\text{Condition de raccordement (3) : } m \frac{R}{v'} = m_1 \frac{P_1}{V_1}$$

1<sup>er</sup> membre de l'équation (4) d'équilibre de translation :  $Rv' \frac{m}{m+1}$

1<sup>er</sup> terme du 2<sup>e</sup> membre de l'équation (6) d'équil. de rotation :  $bRv'^2 \frac{m(m+3)}{2(m+1)(m+2)}$

4<sup>e</sup> Or, en supposant d'abord, en outre,  $m = m_1$ ,  $P = P_1$ ,  $V = V_1$ , ou la loi de variation la même du côté comprimé que du côté étendu, ce qui donne  $V = V_1 = v' = v'_1 = \frac{c}{2}$ ,  $P = P_1 = R$ , l'expression du moment se réduit à

$$M = R \frac{bc^2}{6} \cdot \frac{3m(m+3)}{2(m+1)(m+2)}$$

qui donne pour  $m = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$

$$M = R \frac{bc^2}{6} \text{ multiplié par } 1, \frac{5}{4}, \frac{27}{20}, \frac{7}{5}, \frac{10}{7}, \frac{81}{56}, \frac{35}{24}, \frac{22}{15} = 1,467;$$

en sorte que plus l'exposant  $m$  est grand, plus le moment de rupture prochaine excède la valeur  $R \frac{bc^2}{6}$  relative à la loi linéaire.

5<sup>e</sup> En supposant enfin, d'une manière plus rapprochée de ce qui a lieu réellement à l'égard de la fonte de fer surtout, que du côté comprimé les forces croissent à peu près comme les contractions (vu que les fibres de ce côté occuperont une portion de la section plus petite que du côté des fibres étendues et que la courbe des





(Du n° 151).

pressions n'atteindra sa tangente verticale que très-loin au delà de la section), on fera

$$m_1 = 1, m \text{ quelconque;}$$

ce qui joint à  $V = v'$ ,  $P = R$ ,  $v' + v'_1 = c$ , donnera

$$\text{Condition de raccordement } \frac{mR}{v'} = \frac{P_1}{V_1};$$

$$\text{Équilibre de translation } \frac{v'^2}{m+1} = \frac{v'_1{}^2}{2};$$

D'où :

$$v' = \frac{\sqrt{m+1}}{\sqrt{2} + \sqrt{m+1}} c, \quad v'_1 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} + \sqrt{m+1}} c,$$

$$M = bRv'^2 \frac{m(m+3)}{2(m+1)(m+2)} + bm \frac{Rv'_1{}^2}{v'} = \frac{Rbc^2}{6} \frac{m \left( 3 \frac{m+3}{m+2} + 4 \sqrt{\frac{2}{m+1}} \right)}{(\sqrt{m+1} + \sqrt{2})^2},$$

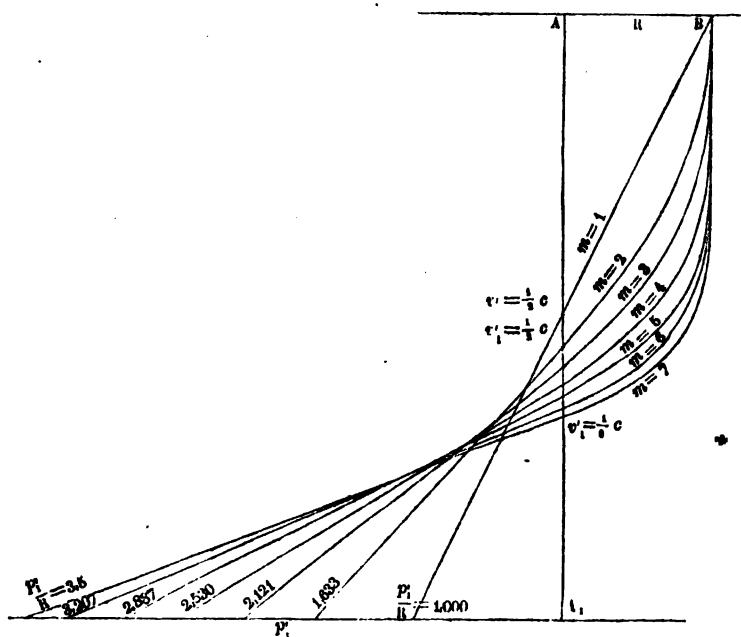
$$p_1 \text{ (plus grande force de pression, répondant à } v_1 = v'_1) = \frac{P_1}{V_1} v'_1 = m \frac{R}{v'} v'_1.$$

D'où successivement :

	VALEURS DE				
	$\frac{v'}{v'_1}$	$\frac{v'}{c}$	$\frac{v'_1}{c}$	$\frac{P_1}{R}$ (Rapport de la plus grande pression à la plus grande tension.)	M (Moment des forces qui font rompre.)
Pour $m=1$	4,0000	0,5000	0,500	4,0000	$R \frac{bc^2}{6}$
2	4,2247	0,5505	0,4495	4,6330	$1,4175 R \frac{bc^2}{6}$
3	$\sqrt{2}=1,4142$	0,5858	0,4142	2,1213	4,6540
4	4,5811	0,6126	0,3874	2,5298	4,8101
5	4,7321	0,6340	0,3660	2,8868	4,9218
6	4,8708	0,6517	0,3483	3,2071	2,0068
7	2,000	$\frac{2}{3}=0,6667$	$\frac{1}{3}=0,3333$	$\frac{7}{2}=3,5000$	$\frac{56}{27}=2,0741 R \frac{bc^2}{6}$
$m=\infty$	$\infty$	4	0	$\infty$	$R \frac{bc^2}{2}$

(Du n° 151).

L'épure ci-dessous représente, à droite de la verticale  $AA_1 = c$ , prise pour axe des  $v$ , toutes les *lignes courbes de traction*  $p = R \left[ 1 - \left( 1 - \frac{v}{c} \right)^m \right]$  dont les abscisses (aussi verticales) sont les distances  $v$  des diverses fibres étendues à la ligne neutre et dont les ordonnées (horizontales) sont les tractions correspondantes  $p$  pour les valeurs  $m = 1$  à  $7$  en sorte que, pour toutes, on a  $AB =$  la cohésion  $R$ . A gauche elle donne les *lignes de pression* dont les abscisses



comptées de haut en bas sont  $v_1$  et les ordonnées horizontales sont  $p_1$ ; lignes que nous remplaçons par des droites, vu, comme nous avons dit, que leurs sommets analogues à  $B$  seraient fort au-dessous de  $A$ , pour des matières qui, comme la fonte, les pierres dures, etc, résistent beaucoup plus à la compression qu'à l'extension lorsqu'on approche de la rupture. Ces lignes droites se rac-

(Du n° 151).

*cordent* avec les courbes de traction, ou leur sont tangentes, aux points de passage à travers la verticale  $AA_1$ , points qui représentent les diverses projections, sur le plan de la figure, de la ligne *neutre* rencontrant les fibres qui ont conservé ou repris la longueur primitive à l'instant de la rupture (§ précédent), ou qui sont les diverses origines des abscisses  $v, v_1$ , et qui se trouvent placées sur  $AA_1$  de manière que les aires triangulaires rectilignes de gauche soient équivalentes aux aires triangulaires curvilignes de droite afin que la condition d'équilibre de translation soit remplie.

Les courbes qui résultent des valeurs les plus fortes de l'exposant  $m$  sont assez analogues à celles qui représentent les expériences de traction des fils et des barres métalliques de MM. Bornet, Seguin, Ardant (1).

On voit que,

$$\text{Pour } m = 2,35 \text{ environ, l'on a } M = \frac{3}{2} R \frac{bc^2}{6} = R\omega \frac{c}{4},$$

$$\text{Pour } m = 6 \dots \dots \dots M = 2R \frac{bc^2}{6} = R\omega \frac{c}{3},$$

résultats qui sont dans les limites des expériences anciennes de Mariotte et de celles plus récentes de MM. Fairbairn, Hodgkinson, Henry James, etc.

La supposition  $m = \infty$  n'est autre chose que l'hypothèse de Galilée, suivant laquelle la force de résistance des fibres tirées serait constante à l'instant de la rupture du solide, et celle des fibres comprimées serait indéfinie. Le résultat  $M = R \frac{bc^2}{2}$  est une limite supérieure.

On voit que le calcul explique comment le moment des forces qui produisent la rupture immédiate des prismes rectangles par flexion, au lieu d'être constamment égale à  $\frac{Rbc^2}{6} = R\omega \frac{c}{6}$ , où  $Rbc = R\omega$  représente la résistance immédiate à la rupture par traction, a une

(1) N° 290 et figure 48 de l'Introduction à la mécanique industrielle de M. Poncelet; ou bien n° 9 et fig. 4 de la Résistance des matériaux de M. Morin. Voyez aussi plus loin le Complément des art. i à vi.

*De la rupture d'un solide prismatique d'une petite longueur.*

152. Les notions précédentes, comme on l'a remarqué au n° 79, ne peuvent être appliquées avec exactitude qu'autant que la longueur du solide prismatique est beaucoup plus grande que les dimensions de sa section transversale. C'est effectivement ce qui a lieu dans les cas qui se présentent le plus fréquemment dans les constructions et dont la considération est le plus importante. A l'égard des cas où la longueur du solide surpasse peu les dimensions de la section transversale, ou même est plus petite que ces dimensions, comme ils n'ont pas été suffisamment étudiés par l'expérience, on se bornera à présenter à ce sujet quelques aperçus.

Considérons le solide AM (Fig. 9) encasté horizontalement à une extrémité, et supposons d'abord que le fil auquel est suspendu le poids P soit placé dans le plan de la section A, c'est-à-dire contre la face verticale du corps dans lequel l'extrémité du solide AM est encasté. L'action du poids P ne tendra pas alors à faire fléchir la portion AM du solide; mais elle tendra à séparer cette portion de celle qui est encastée, et avant que

valeur comprise entre  $\frac{Rbc^2}{6}$  donné par Coulomb et  $\frac{Rbc^2}{2}$  donné par Gallée.

Mais l'analyse précédente peut faire mieux que de fournir une explication des faits observés. Elle peut prévoir ce qui arrivera dans des cas sur lesquels n'a pas porté l'observation. Ainsi, des expériences de rupture ayant donné  $M = n \cdot \frac{Rbc^2}{6}$  pour une pièce à section rectangle, on déduira du tableau précédent la valeur à attribuer à l'exposant  $m$  (par exemple  $m = 5$  à  $6$  si  $n = 2$  environ comme on a trouvé pour la fonte) ce qui pourra servir à calculer par les formules précédentes la résistance, à la rupture *immédiate* ou *prochaine*, de pièces de même matière, ayant une section de forme non rectangle. Nous renvoyons plus loin les applications.

cette séparation ne s'opère, les fibres qui unissent les parties prêtes à se disjoindre se seront allongées d'une certaine quantité. Il est naturel d'admettre que l'effort nécessaire pour produire cet allongement soit proportionnel : 1° à l'aire de la section transversale du solide; 2° à la grandeur de l'allongement dont il s'agit. Par conséquent, si la section transversale est un rectangle dont  $b$  représente le côté horizontal et  $c$  le côté vertical; et si nous désignons par

$\delta$  l'allongement dans le sens vertical (supposé très-petit) des parties du solide placées dans la section transversale  $A$ ;

$D$  un coefficient constant spécifique représentant la résistance du corps à un glissement d'une partie sur l'autre dans le plan de la section transversale;

l'effort dont il s'agit sera représenté par  $D\delta \cdot bc$ . Nous écrirons donc ici pour équation d'équilibre

$$P = D\delta \cdot bc;$$

et nous concevrons que la rupture aura lieu lorsque l'allongement  $\delta$  aura pris une valeur telle qu'il entraîne la disjonction des parties du corps. Le poids qui causerait la rupture serait donc proportionnel à l'aire de la section transversale (\*).

(\*) § 1. *De la résistance au glissement relatif des parties d'un solide. Circonstances diverses où elle entre en jeu.* — Ce n° 152 n'existait pas à l'édition de 1826. Navier l'a introduit dans celle de 1833 évidemment pour répondre à l'un des reproches que M. Vicat venait de diriger contre toute la théorie de la résistance des solides, notamment en raison de l'omission de l'espèce de résistance dont il s'agit, qui s'exerce en  $A$  et à laquelle il donnait le nom de *force transverse*.

C'est, dit l'illustre ingénieur (1) la résistance  $\alpha$  à toute disjonction par le mouvement tangentiel des parties les unes sur les au-

(1) Page 4 des *Recherches* de M. Vicat sur les phénomènes physiques qui précèdent et accompagnent la rupture et l'affaissement d'une certaine classe de solides. *Annales des ponts et chaussées* 1833, deuxième semestre.

(Du n° 153).

tres » ou « à tout effort qui tend à diviser un corps en faisant glisser, pour ainsi dire, une de ses parties sur l'autre, sans exercer ni pression, ni tirage hors de la face de rupture. »

L'existence de cette force intérieure signalée par M. Vicat n'avait pas échappé à Coulomb, car, dans son beau mémoire de 1773 (cité au § 3 de la note du n° 3) il dit, à propos de la rupture d'une pièce fléchie « que la formule n'est exacte qu'autant que la force intérieure agissant dans le plan même des sections transversales n'influe que très-peu, ce qui est vrai lorsque la longueur est beaucoup plus grande que l'épaisseur. » Et un peu plus loin il fait entrer cette force tangentielle dans le calcul, mais seulement pour les massifs de terre, de maçonnerie, etc., en ajoutant qu'on peut par sa considération se rendre compte de la résistance des blocs eux-mêmes à l'écrasement, ce que nous avons discuté à la même note du n° 3.

Th. Young l'avait également aperçue comme résistance à ce qu'il appelait la *détrusion* (l'action de pousser dehors ou de chasser de côté), rangée par lui après l'extension et la compression des solides (1) et qui est produite, dit-il, « lorsqu'un effort transversal agit contiguëment ou tout contre (*close*) de la même manière que les lames d'une paire de ciseaux. » Il faisait consister la solidité (*hardness*) dans cette force d'*adhésion latérale* dont les fluides sont dépourvus, etc.

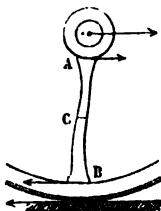
M. Vicat remarque avec raison qu'il y a un grand nombre de circonstances où les pièces solides sont ainsi sollicitées à rompre par glissement parallèle aux faces de rupture. Dans ce cas, dit-il, se trouvent (p. 243 de son mémoire) les tourillons, les tenons, les crochets, ainsi que les goujons (p. 248), les clefs ou clavettes, etc. — Nous pouvons y ajouter les corbeaux, taquets et tasseaux, ergots ou talons, boulons de chaînes plates et de poulies ou de palans, les queues d'hironde et les bouts de pièces moisées ou embrevées, les dents d'engrenage ou d'embrayage, les bagues ou embases, les filets de vis et d'écroux, les *rivets* unissant les plaques de tôle soumises à la traction, et généralement toutes les pièces que des forces

(1) *A course of lectures on natural Philosophy and mechanical Arts*, London, 1807, vol. I, p. 435, lecture XIII (On passive Strength).

(Du n° 153).

transversales tendent à trancher ou à *cisailler* (terme très-expressif employé par M. Love). Il convient d'y joindre les couches de mortier qui unissent les assises des murs de soutènement ou les voussoirs des reins des voûtes.

Les pièces même de charpente d'une certaine longueur, qui sont posées aux deux bouts, et qu'une force appliquée au milieu fait fléchir, ont, tout auprès des points d'appui, une tendance à rompre par glissement, dont il faut tenir compte quand on calcule leur profil d'égale résistance (voy. ci-après § 9 de la note du n° 154). Quelquefois c'est au milieu des pièces et non à leurs extrémités que s'exerce surtout cette tendance au glissement transversal, comme il arrive aux rayons ou bras ACB de roues de voitures ou de machines qui, en transmettant le mouvement du moyeu A aux jantes B, s'infléchissent de part et d'autre en sens opposé à partir du milieu C, où il n'y a que glissement sans flexion (\*).



Nous montrerons aussi, bientôt (art. V, note du n° 156), que la *torsion* n'est autre chose qu'un certain *glissement inégal* des parties, sur les divers éléments des sections transversales des pièces, de même que la *flexion* est ramenable (n° 77) à des extensions ou compressions variables d'une fibre à l'autre. C'est ce qu'avait remarqué Young, qui faisait consister surtout la torsion dans un déplacement latéral (détrusion) des côtés opposés d'un prisme dans des directions aussi opposées.

Enfin la résistance au glissement s'exerce non-seulement dans un sens transversal aux pièces mais aussi dans un sens longitudinal, car tout effort qui tend à faire glisser les *sections* les unes devant les autres tend aussi, comme nous verrons, à faire glisser les *fibres* les unes contre les autres. Ces deux glissements sont même insé-

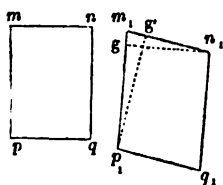
(\*) Cette ingénieuse remarque a été faite par M. Poncelet à la Faculté des sciences, dans ses leçons de 1840, où il a cité avec bienveillance ce que nous avons dit, dans un cours lithographié (1837-1838), de la résistance au glissement en général, et de sa mise en ligne de compte lorsqu'elle se compose avec les résistances à l'extension et à la flexion dans un même endroit (ci-après note du n° 154).

(Du n° 150).

parables. Et c'est à quoi on peut attribuer souvent la fente longitudinale des bois et autres corps fibreux.

§ 2. *Observation sur la manière dont la résistance au glissement est estimée aux n° 152 à 155 du texte.* — Dans ce que dit ici Navier et qui a été évidemment improvisé, on voit qu'il envisage le glissement relatif des deux portions d'un prisme situées de part et d'autre d'une de ses sections transversales supposées verticales, comme dû à de certains allongements verticaux de fibres horizontales qu'il ne définit pas, quoiqu'il les regarde, au n° 154, comme susceptibles de se composer, à la manière des forces ou des petits déplacements rectangulaires, avec les allongements horizontaux dus à la flexion. Mais les deux notes ajoutées par lui, aussi en 1833, au n° 159 relatif à la torsion, et au n° 167 relatif à la rupture par torsion (voy. ci-après) prouvent, par leurs conclusions relatives aux valeurs des coefficients numériques, qu'il envisageait quelquefois les choses d'une autre manière, en rapport avec ce que nous allons en dire en l'appliquant au glissement sans torsion.

§ 3. *Définition et mesure du glissement des lignes matérielles les unes devant les autres, ou sur ces lignes. Il a toujours lieu simultanément et également des deux directions rectangulaires.* — Dans un corps élastique dont les particules éprouvent des déplacements relatifs très-petits, variant de l'une à l'autre avec *continuité*, les très-petites lignes droites parallèles et peu distantes peuvent être regardées comme restant droites et parallèles. Soit donc  $mnp$



un petit rectangle matériel, et  $m_1n_1q_1p_1$  le parallélogramme très-peu oblique dans lequel il s'est changé; si  $g$  est le pied de la perpendiculaire abaissée de  $n_1$  sur  $m_1p_1$ , le côté  $nq$  a glissé de  $m_1g$  devant le côté parallèle  $mp$ . Rapporté à l'unité de distance des côtés, ce glisse-

ment est  $\frac{m_1g}{m_1n_1}$ , quotient qui peut être regardé comme indépendant de la distance elle-même tant que cette distance reste très-petite, en vertu de la *continuité* supposée, ou de ce que les autres



(Du n° 152).

côtés  $mn$ ,  $pq$  restent sensiblement droits; en sorte qu'on peut le prendre pour mesure du glissement de la matière du corps sur la ligne  $mp$ , dans le plan  $nmp$ .

En même temps, si  $g'$  est le pied de la perpendiculaire  $p, g'$  sur  $m, n_1$ , le glissement sur le côté adjacent  $mn$ , rapporté aussi à l'unité de sa distance à  $pq$  est  $\frac{m, g'}{m, p_1}$ ; quotient égal au premier  $\frac{m, g}{m, n_1}$  qui mesure le glissement sur  $mp$ .

Nous appellerons donc généralement :

*Glissement de la matière d'un corps solide sur l'une ou l'autre de deux petites droites matérielles primitivement rectangulaires qui se coupent, et dans le plan qu'elles font ensemble, la projection actuelle, sur chacune, de l'unité de longueur portée dans la direction de l'autre.*

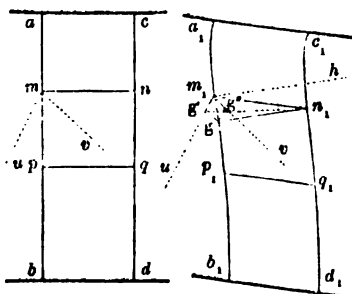
Et nous dirons qu'il est la même chose que le *glissement relatif* des droites parallèles à chacune, prises dans le même plan et à de très-petites distances.

Il revient, en grandeur, au cosinus de l'angle  $n, m, p_1$  devenu légèrement aigu, ou au sinus de la diminution éprouvée par cet angle primitivement droit. Il est sensiblement égal à ce petit rétrécissement angulaire lui-même, mesuré en arc d'un rayon égal à l'unité, ou bien à la *petite inclinaison* acquise par chacune des deux droites  $m, n_1$ ,  $n, p_1$  sur la normale à l'autre, ou encore par la normale ancienne sur la normale nouvelle à l'une d'elles, dans ce même plan.

§ 4. *Glissements sur une face ou sur les droites qui sont tracées, et dans les plans normaux à cette face plane; ou glissements divers sur la droite qui lui est normale. Leur maximum, ou glissement principal sur cette droite normale ou sur cette face.* — Soit  $mp$  une petite face plane qui sera par exemple un des éléments d'une section transversale  $ampb$  d'un prisme, devenue  $a, m, p_1, b_1$  par suite des déplacements de ses points. Si  $m, n_1$  et  $m, u$  représentent ce que sont devenues la normale  $mn$  à cette face et une ligne quelconque  $mu$  tracée dans son plan, comme ces deux lignes primitivement perpendiculaires sont généralement devenues légèrement obliques l'une à l'autre, si l'on prend  $m, n_1$  pour unité de longueur, la pro-

(Du n° 153).

jection  $m_1g'$  de  $m_1n_1$  sur  $m_1u$  représentera (§ précédent) le glissement sur  $mu$  et sur la normale  $mn$  dans leur plan  $nmu$ .



Nous l'appellerons quelquefois *glissement sur la face dans le sens mu*.

C'est, en effet, la quantité dont deux éléments correspondants  $nq, mp$  de deux faces parallèles et très-voisines ont glissé l'un devant

l'autre, estimée dans ce sens et rapportée à l'unité de leur distance.

Nous appellerons *glissement principal* celui  $m_1g$  qui a lieu suivant  $m_1p_1$ , projection actuelle, sur la face, de la ligne  $m_1n_1$  qui lui était primitivement normale.

C'est la projection, sur la face, de l'unité de longueur portée sur cette normale ancienne. Il est le plus grand parmi tous les glissements tels que  $m_1g'$  qui ont lieu sur la face ou sur ses lignes génératrices  $m_1u$ , ou, ce qui revient au même, parmi les divers glissements sur une même droite  $mn$  qui est la normale à cette même face, dans les divers plans qui la comprennent. En effet  $m_1g'$  est aussi la projection de  $m_1g$  sur  $m_1u$ .

En sorte que si l'on appelle :

- $g$  le glissement principal  $m_1g$  sur la face ou sur sa normale ;
- $g', g''$  les glissements  $m_1g', m_1g''$  dans des plans  $nmu, nmt$  primitivement perpendiculaires entre eux ainsi qu'à la face, et suivant leurs intersections rectangulaires  $mu, mv$  avec celles-ci, ainsi que suivant leur intersection commune  $mn$  ;
- $\alpha$  l'angle  $ump$  que la première intersection  $mu$  fait avec la droite  $mp$  suivant laquelle se projette sur la face, après les déplacements, la ligne  $mn$  qui lui était normale ;

on aura

$$g' = g \cos \alpha, \quad g'' = g \sin \alpha,$$

$$g = \sqrt{g'^2 + g''^2}.$$

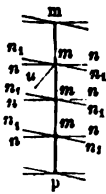
Le glissement principal est résultant géométrique de deux glisse-

(Du n° 153).

ments dans des plans ou suivant des lignes à angle droit. Il mesure le *glissement relatif* des éléments superficiels correspondants  $mp, nq$  de sections ou faces parallèles très-voisines  $ab, cd$  devenues  $a_1b_1, c_1d_1$ .

Le plan du glissement principal est aussi celui qui passe, après les déplacements, par la droite tangente à la normale ancienne  $m_1n_1$  à une face et par sa normale nouvelle  $m_1h$ .

§ 5. *Efforts tangentiels. Ils sont proportionnels à la fois aux glissements dans leur sens et aux surfaces. Coefficient d'élasticité de glissement.* — Si, sur une portion finie  $mp = \omega$  d'une section



ou autre surface plane imaginée à l'intérieur d'un solide homogène, toutes les petites normales matérielles  $nmn$  sont supposées s'incliner, en devenant  $n_1mn_1$ , d'un même petit angle  $n_1mn = g$  et dans le même sens qui sera, d'après les définitions du § précédent, celui du *glissement principal* mesuré par  $g$ , les écartements et rapprochements qui en résulteront entre molécules très-proches, situées de part et d'autre de la surface  $\omega$ , développeront des actions dont les résultantes partielles seront les mêmes à travers tous les éléments superficiels égaux  $d\omega$  de cette face.

D'où il suit que la *résultante générale de ces actions, provoquée par un glissement principal constant  $g$  sur cette face, sera proportionnelle à la superficie  $\omega$ .*

Cette résultante ou action totale sera aussi proportionnelle à  $g$  en vertu du principe général de proportionnalité des efforts à leurs effets très-petits, du § 2 de la note du n° 21, puisque nous supposons que cette petite inclinaison des fibres sur la face  $\omega$  est la seule modification qui rapproche ou écarte les molécules situées à de petites distances de part et d'autre de  $\omega$ .

On aura donc en appelant :

P la résultante, décomposée (au besoin) tangentiellement à la face  $\omega$  ou projetée sur son plan

G un coefficient constant dépendant de la matière du prisme,

$$P = G\omega g.$$

(Du n° 153).

De plus, la force tangentielle  $P$  aura, sur la face  $\omega$ , la même direction que le glissement principal  $g$  si la matière est d'égale texture *en tous les sens transversaux* ou parallèles à cette face, car il n'y a pas de raison pour que la résultante se dirige à droite plutôt qu'à gauche du plan dans lequel s'incline la petite normale  $mn$  qu'elle rencontre sur la face.

Si donc nous appelons :

$g'$  le glissement sur la face, suivant une droite quelconque  $mu$  qui y est tracée, ou le glissement sur cette droite et sur la normale  $mn$  dans leur plan  $nm\mu$ ;

$P'$  la résultante des actions moléculaires, décomposée parallèlement à cette droite  $mu$ ;

$\alpha$  l'angle  $pmu$ ;

Il y aura le même rapport entre  $g'$  et  $g$  qu'entre  $P'$  et  $P$  et l'on aura

$$P' = G\omega g'.$$

On voit que l'effort tangentiel, estimé suivant une droite quelconque tracée sur la face  $\omega$  où il s'exerce, est égale au produit de la constante  $G$  par l'aire  $\omega$  et par le glissement suivant cette droite.

Cette constante  $G$  est ce que nous appellerons le *coefficient d'élasticité de glissement*.

C'est le rapport de l'effort tangentiel  $\frac{P'}{\omega}$  exercé dans un sens quelconque par unité superficielle au glissement sur la face dans ce sens.

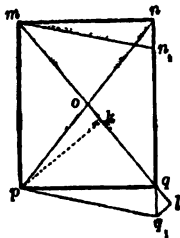
Les expressions  $P = G\omega g$ ,  $P' = G\omega g'$  des efforts tangentiels subsistent lorsqu'il y a, outre les glissements, des dilatations dans des sens perpendiculaires ou parallèles à la face  $\omega$  si la texture est toujours supposée la même en tous sens au moins autour de ses normales, et symétrique par rapport au plan de  $\omega$ ; car, alors, les dilatations n'influent pas sur les résultantes d'actions moléculaires décomposées tangentièlement, comme il est facile de s'en convaincre.

§ 6. *La résistance à un glissement peut être regardée comme une résistance à une dilatation et à une contraction simultanées et*

(Du n° 153).

moitié moindres, ayant lieu dans des directions rectangulaires qui font l'une et l'autre un angle demi-droit avec les lignes glissantes.

— En effet soient  $mp, nq$  les deux petites droites parallèles qui ont glissé l'une devant l'autre de  $nn_1 = qq_1$ , ou soit  $mpqn$  le petit rectangle changé au petit parallélogramme ( $mpq_1n_1$  que nous supposons de même base et de même hauteur afin de simplifier en abstrayant les dilatations des côtés ainsi que les déplacements généraux dans l'espace). Dans ce changement, le point  $q$  s'est éloigné du point  $m$ , et le point  $n$  s'est rapproché du point  $p$ . Les deux diagonales  $mq, pn$  se sont donc, la première dilatée, la seconde contractée. Abaissons  $pk$  perpendiculaire sur la première  $mq$ , et  $q_1l$  sur son prolongement  $ql$ . Et soient :



$i = \frac{ql}{mq}$  la dilatation ou la proportion de l'extension de cette diagonale  $mp$ ,

$g = \frac{qq_1}{pq}$  le glissement (d'après la définition § 3).

Les deux triangles semblables  $lqq_1, kpq$  donnent la proportion

$$\frac{ql}{pk} = \frac{qq_1}{pq}, \text{ d'où } \frac{ql}{mq} = \frac{qq_1}{pq} \cdot \frac{pk}{mq}, \text{ ou}$$

$$i = g \frac{pk}{mq}.$$

Mais le rapport  $\frac{pk}{mq}$  de la hauteur à l'hypoténuse du triangle rectangle  $mpq$  est le plus grand possible lorsque la perpendiculaire  $pk$  se confond avec la demi-diagonale  $po$  du rectangle double, et la valeur de ce rapport est alors égale à  $1/2$ . C'est donc pour  $pq = pm$ , ou dans une direction  $mq$  prise à 45 degrés que le glissement produit la plus grande dilatation. Et cette dilatation est

$$i = \frac{g}{2},$$

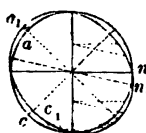
ou la moitié du glissement.

( Du n° 159 ).

La plus grande contraction de  $pn$ , deuxième diagonale, a lieu aussi quand elle est inclinée d'un demi-droit et elle a la même grandeur  $\frac{g}{2}$ .

Tout glissement équivaut donc à une dilatation et à une contraction moitié moindres, suivant des directions faisant dans son plan un angle demi-droit avec les lignes ou les faces sur lesquelles il a eu lieu.

La résistance au glissement peut être regardée comme une résistance à cette dilatation et à cette contraction obliques. C'est, si l'on veut, la résistance à la transformation de petits carrés en losanges et de petits cercles matériels *anc* en ellipses  $a_1n_1c$ , par l'extension d'une des diagonales ou d'un des diamètres à 45 degrés et la contraction de l'autre.



Réciproquement une dilatation dans un sens quelconque, avec ou sans contraction dans des sens à angle droit, en allongeant ou accourcissant les côtés de petits rectangles formés par des lignes parallèles et perpendiculaires à ce sens, change en parallélogrammes les petits rectangles dont les côtés y sont inclinés, et produit par conséquent des glissements; excepté dans le seul cas où il y aurait la même dilatation ou contraction dans toutes les directions.

§ 7. *Limite des glissements déduite de la limite des extensions, dans les solides d'égale contexture en tous sens. Limite des efforts tangentiels.* — Il suit de là que si l'on peut faire supporter à une pièce solide d'une manière permanente, sans danger d'énervation et de rupture même éloignée, des tractions longitudinales capables de l'étendre dans une proportion désignée (§§ 12 de la note du n° 21 et 10 de la note du n° 113) par

$$v' = \frac{R_0}{E},$$

et si l'on suppose sa matière telle que, dans tous les sens, cette limite des extensions dangereuses soit la même que dans le sens longitudinal, on peut, aussi sans danger, faire glisser les uns devant

(Du n° 153).

les autres les éléments de ses sections ou de ses fibres de quantités dont le quotient par leurs distances n'excède pas une proportion double, ce qui donne pour la limite des glissements

$$g' = 2i' = 2 \frac{R_0}{E};$$

expression dans laquelle E représente le coefficient d'élasticité d'*extension* et  $R_0$  la limite des tractions non dangereuses de cette matière d'égale contexture en tous sens, pour l'unité de la section transversale d'un petit prisme qui en serait extrait.

Si donc nous appelons

T l'effort tangentiel capable de rompre immédiatement par glissement ;

Et, aussi par unité superficielle :

T, la limite des efforts tangentiels qui peuvent être supportés sans danger pendant un temps indéfini ;

Cette dernière force T, s'obtiendra en mettant pour le glissement g dans l'expression (§ 5) Gg de l'effort tangentiel par unité de surface, la limite  $g'$  des glissements non dangereux dont nous venons de donner la valeur  $= 2i' = 2 \frac{R_0}{E}$  ; car, en deçà de cette limite très-resserrée, les efforts en général n'ont pas encore cessé d'être proportionnels aux effets (§ 2 de la note du n° 21). Nous aurons donc

$$T_0 = 2Gi' = 2G \frac{R_0}{E}, \text{ ou } \frac{T_0}{R_0} = 2 \frac{G}{E}.$$

Le rapport des limites des efforts tangentiels et des efforts de traction non dangereux est, ainsi, double du rapport des coefficients d'élasticité de glissement et d'extension, dans les matières *isotropes* ou d'égale contexture en tous sens.

Le rapport  $\frac{T}{R}$ , seul déterminable directement par expérience, des efforts produisant la *rupture immédiate* par glissement et par extension, peut en différer beaucoup. Aussi, pour avoir  $\frac{T_0}{R_0}$ , nous allons déterminer  $\frac{G}{E}$  au moyen de considérations de statique moléculaire.

Du n° 153).

§ 8. Détermination théorique, pour les matières d'égale texture 1° Du rapport  $\frac{G}{E}$  des coefficients d'élasticité de glissement et d'extension; 2° du rapport  $\eta$  (§ 5 de la note du n° 21) des contractions transversales des prismes aux dilatations longitudinales qui les provoquent quand les faces ne sont pas pressées latéralement. — C'est, comme a dit Navier, au n° 1, « par le jeu des forces d'attraction et de répulsion mutuelle des molécules des corps qu'on rend raison des phénomènes de l'élasticité. » La pression ou tension intérieure résultant de l'action totale d'une portion d'un corps élastique sur une autre portion qui en est séparée par une petite face plane telle qu'un élément  $ab$  (figure ci-dessous) d'une de ses sections, n'est, ainsi, autre chose que la résultante de toutes les forces moléculaires qui s'exercent d'un côté à l'autre à travers la superficie de cet élément. Or soient

$M$  le centre de ce petit plan, qu'on peut supposer (pour fixer les idées) limité par un cercle;

$\omega$  sa surface;

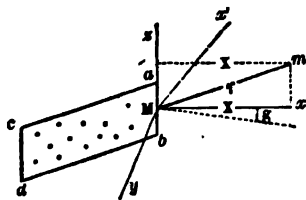
$r$  la distance  $Mm$  de son centre  $M$  à une molécule quelconque  $m$  située à droite;

$x$  la distance de  $m$  au petit plan prolongé au besoin;

$R$  l'intensité de l'action de deux molécules du corps à la distance et dans la direction  $r$ ;

$n$  le nombre des molécules contenues dans l'unité de volume du même corps aux environs de  $M$ .

Pour avoir la résultante générale des actions moléculaires à tra-



vers  $\omega$ , additionnons d'abord toutes celles qui s'exercent à des distances égales et parallèles à  $Mm = r$ . Les molécules de gauche dont elles émanent sont toutes contenues dans un cylindre oblique  $abdc$  dont la base est  $\omega$  et dont les arêtes sont

égales et parallèles à  $r$ , en sorte qu'il y a un nombre  $n\omega x$  de ces molécules. La somme de toutes ces actions parallèles et égales est



(Du n° 153).

$$n\omega X \cdot R.$$

Décomposée normalement à la face  $\omega$ , cette somme ou résultante partielle aura pour intensité

$$n\omega R X \frac{X}{r}$$

On peut donc représenter la résultante générale, ou l'action moléculaire totale à travers  $\omega$ , ainsi décomposée normalement, par

$$n\omega \dot{S} R \frac{X^2}{r},$$

la somme  $\dot{S}$  s'étendant aux valeurs de  $r = Mm$  relatives à toutes les molécules  $m$  situées du côté droit pour lesquelles  $R \frac{X^2}{r}$  ne se réduit pas à une grandeur insensible, vu le décroissement rapide de  $R$  quand la distance augmente.

Si on appelle  $p_{xx}$  cette même résultante rapportée à l'unité superficielle de la face  $\omega$ , on a

$$p_{xx} = n\dot{S} R \frac{X^2}{r}.$$

Or, appliquons cette expression générale de la pression ou tension estimée normalement, à l'état où se trouve le corps élastique s'il a éprouvé des dilatations très-petites

$$i, \quad i', \quad i''$$

respectivement dans le sens de  $Mx$  normal à la face  $\omega$ , et de deux autres lignes de coordonnées  $My$ ,  $Mz$  perpendiculaires entre elles et à  $Mx$ , et par conséquent tracées sur  $\omega$ . Si nous appelons :

$$y, z \text{ les projections de } Mm = r \text{ sur } My, Mz;$$

et si, pour simplifier, nous supposons le point  $M$  resté immobile ainsi que les axes coordonnés (ce qui n'influe ni sur les écartements ou rapprochements moléculaires ni sur les forces qu'ils développent), le point  $m$  aura éprouvé respectivement dans les trois sens  $x, y, z$ , des déplacements

$$ix, \quad i'y, \quad i''z,$$

dont les projections sur la direction de  $Mm$ , ajoutées ensemble,

(Du n° 152).

donnent pour l'augmentation très-petite  $\delta r$  de longueur de cette ligne  $r = Mm$  :

$$\delta r = i'x \frac{x}{r} + i'y \frac{y}{r} + i''z \frac{z}{r}.$$

Les actions développées par les déplacements, ou les actions moléculaires en sus de celles qui existaient antérieurement et qui se faisaient équilibre, sont proportionnelles à ces augmentations de distance, et se trouvent représentées par  $R'\delta r$  si  $R'$  est la dérivée de  $R$  par rapport à  $r$ . Mettant en conséquence  $R'\delta r$  au lieu de  $R$  dans l'expression  $p_{xx} = nSR \frac{x^2}{r}$  et faisant  $n \frac{R'}{r^2} = R$ , quantité qui dépendra comme  $R$  de la grandeur de  $r$  et de sa direction, on aura simplement

$$p_{xx} = iSRx^4 + i'SRx^2y^2 + i''SRx^2z^2.$$

On obtiendra des expressions analogues pour les actions totales à travers des faces perpendiculaires respectivement aux  $y$  et aux  $z$ , décomposées perpendiculairement à ces faces; actions que nous appellerons

$$p_{yy} \quad \text{et} \quad p_{zz}.$$

Faisons donc, vu la symétrie que la contexture est supposée avoir en tous sens avant les déplacements

$$SRx^4 = SRY^4 = SRz^4 = A,$$

$$SRY^2z^2 = SRz^2x^2 = SRx^2y^2 = G;$$

nous aurons pour les pressions ou forces élastiques à travers l'unité superficielle des trois faces perpendiculaires aux  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , estimées normalement à ces faces :

$$p_{xx} = Ai + G(i' + i''), \quad p_{yy} = Ai' + G(i'' + i), \quad p_{zz} = Ai'' + G(i + i').$$

Mais les coefficients  $A$ ,  $G$  dépendent l'un de l'autre.

En effet si  $x'$  est la projection de  $Mm = r$  sur une nouvelle droite  $Mx'$ , bissectrice de l'angle  $zMx$ , la symétrie ou l'égalité de contexture en tous sens exige qu'ont ait encore :

$$A = SRx'^4.$$

(Du n° 153).

Or on a

$$x' = x \sqrt{\frac{1}{2}} + z \sqrt{\frac{1}{2}},$$

$$x'^4 = \frac{1}{4} (x^4 + 4x^2z^2 + 6x^2z^2 + 4xz^3 + z^4).$$

Substituant dans  $SRx'^4$  on devra mettre zéro pour les deux sommes dans lesquelles il entre des puissances impaires de  $x$  et  $z$ , car, en vertu de la même symétrie de texture moléculaire de part et d'autre des plans coordonnés, ces sommes se composeront de termes égaux deux à deux au signe près. On aura donc simplement

$$A = \frac{1}{4} (2A + 6G),$$

ou

$$A = 3G;$$

en sorte que les formules des pressions ou tensions normales aux trois faces peuvent être écrites :

$$p_{xx} = G(3i + i' + i''), \quad p_{yy} = G(i + 3i' + i''), \quad p_{zz} = G(i + i' + 3i'').$$

Or, supposons qu'il n'y ait de pression ou tension que dans le sens  $x$ , ou que

$$p_{yy} = 0, \quad p_{zz} = 0.$$

Il en résultera

$$0 = i + 3i' + i'', \quad 0 = i + i' + 3i'';$$

d'où :

$$i' = i'' = -\frac{1}{4} i.$$

Cela montre bien que lorsque les pressions latérales sont nulles, un prisme d'une matière d'égale texture éprouve dans les deux sens transversaux des contractions égales au quart de la dilatation longitudinale qu'on lui fait subir; ou que,  $\eta$  désignant comme à la note du n° 21 le rapport des contractions latérales à cette dilatation longitudinale, on a

$$\eta = \frac{1}{4}.$$

(Du n° 153).

Cherchons maintenant, par les mêmes considérations, le rapport des coefficients d'élasticité de glissement et d'extension.

Si, au lieu de décomposer suivant  $x$ , ou normalement à la petite face  $ab = \omega$ , la somme (page 198)

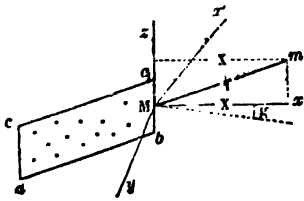
$$n\omega x \cdot R$$

des actions s'exerçant à travers  $\omega$  à des distances toutes égales et parallèles à  $Mm = r$ , on les décompose suivant  $y$ , on a

$$n\omega R \frac{xy}{r};$$

et, en désignant par  $p_{xy}$  l'action totale ou pression ainsi décomposée tangentiellement à la face  $\omega$  à travers laquelle elle s'exerce, pour l'unité superficielle, on obtient

$$p_{xy} = nSR \frac{xy}{r}.$$



Or supposons que le corps n'ait éprouvé aucune dilatation dans les sens rectangulaires  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , mais que le plan  $zMz$  et tous ceux qui lui sont parallèles aient tourné autour de leur intersection avec le plan  $yMz$  d'un angle très-petit

g

qui sera évidemment un glissement sur les parallèles aux  $y$  dans les plans parallèles à  $yMz$ .

Dans ce mouvement, le point  $m$ , ayant tourné d'un petit arc dont  $x$  est le rayon, aura cheminé, dans le sens  $y$ , de

$$xg;$$

ce qui, en projetant ce déplacement sur  $Mm = r$ , aura produit un petit accroissement de  $r$

$$\delta r = xg \frac{y}{r}.$$

On aura donc en mettant comme ci-dessus  $R \delta r = R \frac{r^2}{n} \delta r$  pour  $R$  dans  $nSR \frac{xy}{r}$

(Du n<sup>o</sup> 153).

$$p_{xy} = gSRx^2y^2;$$

ce qui montre que le coefficient de  $g$  est un de ceux que nous avons désignés tout à l'heure par  $G$ , et qu'on a

$$p_{xy} = Gg.$$

Ce coefficient de glissement ou d'élasticité tangentielle est égal à celui d'élasticité latérale qui affecte les dilatations transversales  $i'$ ,  $i''$  dans la formule  $p_{xx} = 3Gi + Gi' + Gi''$  de la pression ou tension longitudinale  $p_{xx}$  d'un prisme d'égale contexture.

Mais, lorsque ce prisme dilaté longitudinalement ou suivant les  $x$  dans une proportion  $i$  n'éprouve aucune pression latérale, il est, comme on vient de voir, contracté latéralement ou suivant les  $y$  et les  $z$  dans des proportions  $\frac{1}{4}i$  qui, mises pour  $-i'$ ,  $-i''$  dans  $p_{xx} = G(3i + i' + i'')$  donnent

$$p_{xx} = \frac{5}{2}Gi.$$

Ce qui affecte  $i$ , dans le second membre de cette égalité, doit être la valeur du coefficient d'élasticité d'extension  $E$ , d'après la définition de celui-ci. On a donc :

$$G = \frac{2}{5}E;$$

ou le coefficient de glissement égal aux deux cinquièmes du coefficient ou module d'extension dans les prismes dont la matière est d'égale contexture en tous sens (1).

Les expériences sur la torsion (voyez ci-après n<sup>o</sup> 162) n'y contredisent nullement car celles qui ont été faites jusqu'en 1833 ont donné, moyennement, environ  $G = \frac{1}{3}E$  pour des matières où cette égalité de contexture n'était qu'approchée.

(1) On trouve à notre *Mémoire sur la flexion* inséré au Journal de M. Liouville en 1856, art. 7 et 9, une autre démonstration simple de l'égalité du coefficient de glissement à celui qui affecte les dilatations transversales dans l'expression de la tension longitudinale, et du rapport  $\frac{4}{3} = \frac{G}{A}$  entre ce coefficient  $G$  et celui de la dilatation longitudinale. (V. Appendices ci-après, p. 559, 565, 580, 647, 805.)

Elle ne s'appuie pas sur les expressions ci-dessus  $p_{xx} = nSr \frac{x^2}{r}$ ,  $p_{xy} = nSr \frac{xy}{r}$ .

( Du n° 159 ).

§ 9. *Rapport entre la limite  $T_0$  des efforts tangentiels et la limite  $R_0$  des efforts de traction dans les solides d'égale contexture. Comparaison à l'expérience.* — Si, dans l'égalité obtenue § 7 :

$$\frac{T_0}{R_0} = 2 \frac{G}{E},$$

nous mettons pour  $\frac{G}{E}$  la valeur  $\frac{2}{5}$ , à laquelle nous venons d'arriver par la considération des actions moléculaires dont les résultantes constituent les pressions ou tensions intérieures normales, tangentielles ou obliques aux faces à travers lesquelles elles s'exercent, nous trouvons

$$T_0 = \frac{4}{5} R_0.$$

pour la relation entre les limites des efforts capables d'être indéfiniment supportés tangentiellement et perpendiculairement par une même face matérielle. Elle a été trouvée (note (a) du n° 167 ci-après) par Navier à propos de la torsion, quoiqu'il ne l'ait pas aperçue dans le mode d'action qui fait le sujet des n° 152 à 155.

On ne doit pas s'attendre à ce que  $\frac{T}{R}$  ou le rapport des efforts tangentiels et normaux capables de rompre immédiatement soit  $\frac{4}{5}$  comme  $\frac{T_0}{R_0}$ . Cependant les expériences de MM. Gouin et C<sup>ie</sup> ont donné précisément ce rapport  $\frac{4}{5}$  entre les poids produisant la rupture de petites tringles de fer par cisaillement et par extension, car la moyenne de ceux-là a été 3200 kilogrammes, et, la moyenne de ceux-ci, 4000 kilogrammes par centimètre carré (1).

§ 10. *Application de ces principes dans les cas exceptionnels où la section de glissement est astreinte à rester plane.* — Une section *ab* d'un prisme sollicité transversalement doit rester à peu près plane lorsqu'elle est soumise à ce que M. Vicat appelle un *encastrement complet* (2) c'est-à-dire lorsqu'elle n'est pas seulement

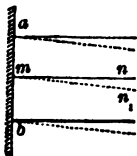
(1) *Leçons sur la résistance des matériaux* de M. Morin, 2<sup>e</sup> édition, 1857, n° 40, page 34.

(2) *Annales des ponts et chaussées* 1833, 2<sup>e</sup> semestre, pages 243, 252, 247.

(Du n° 153).

contenue, mais *scellée* ou *soudée* avec une matière plus rigide, ou lorsqu'elle se trouve sollicitée parallèlement à son plan par deux forces opposées agissant à une distance extrêmement petite et tendant à trancher comme il arrive pour les sections des rivets dans le plan de contact des tôles qu'ils assemblent. Il y a aussi, comme l'a remarqué M. Vicat, certaines sections qui, sollicitées dans leur plan par une force à laquelle font équilibre deux autres forces extérieures agissant à distance mais symétriquement de part et d'autre, n'ont aucune raison de s'infléchir plutôt à droite qu'à gauche et qui doivent rester planes; comme par exemple la section milieu d'une pièce droite horizontale à laquelle est suspendu un poids à égale distance de ses deux extrémités appuyées.

Sur une de ces sections exceptionnelles, *amb* par exemple, l'inclinaison  $n, mn$  des fibres ou le glissement  $g$  peut être regardé comme ayant la même valeur pour tous les éléments  $d\omega$ , en sorte que si  $P$  est la force transversale qui l'engendre, on a (§ 5)



$$g = \frac{P}{G\omega},$$

expression où l'on peut mettre pour  $G$ , quand sa détermination n'a pas été l'objet d'expériences (voyez à la torsion) les  $2/5$  du coefficient d'élasticité  $E$  d'extension (§ 8).

Et la plus grande valeur qu'on puisse attribuer sans danger d'une manière permanente à cette force transversale  $P$  supposée agir de manière à ne pas produire autre chose que le glissement en cet endroit de la pièce sera

$$P = T\omega,$$

la constante  $T$ , étant déterminée, ou par des expériences directes, ou en la regardant comme égale (§ 9) aux  $4/5$  de la limite plus connue  $R$ , des forces d'extension non dangereuses.

Mais le glissement est généralement variable dans l'étendue des sections. Nous verrons aux deux notes suivantes ce qu'il faut alors faire, ainsi que dans les cas où il y a à la fois glissement et extension ou flexion.

153. Revenons maintenant à la considération du solide dont la partie à gauche du point A est encastrée fixement, mais dont la partie à droite de ce point est libre, et sollicitée à son intrémité M par le poids P. D'après les remarques faites dans le n° 77, l'équilibre de la partie AM exige que les forces intérieures développées dans la section transversale A par l'action du poids P aient des composantes verticales dont la somme soit égale à ce poids; et il faut de plus que les composantes horizontales de ces mêmes forces fassent équilibre au poids P autour de l'axe horizontal correspondant aux fibres dont la longueur ne varie pas. Nous avons considéré jusqu'ici ce dernier équilibre seul; mais dans le cas dont il s'agit il devient nécessaire de considérer également l'équilibre des forces verticales. Supposons donc ces forces verticales développées dans la section d'une manière conforme à ce qui a été expliqué ci-dessus (ce qui ne peut être bien éloigné de la vérité, surtout lorsque la longueur du solide est fort petite), nous écrivons d'abord l'équation

$$P = D\delta \cdot bc.$$

Et quant à l'équilibre de rotation, si nous représentons par  $\rho$  le rayon du cercle osculateur de la courbe affectée par l'axe longitudinal du solide au point A, nous aurons, conformément à ce qu'on a vu dans l'article précédent, pour exprimer l'équilibre, l'équation

$$Pa = \frac{E}{\rho} \cdot \frac{bc^3}{12},$$

$a$  désignant toujours la longueur AM, et E ayant la signification indiquée n° 77.

Lorsque le solide supportera sans rompre l'action du poids P, nous regarderons l'équilibre qui s'établit dans la section A comme étant exprimé par ces deux équations. Si la longueur du solide était presque nulle, on considérerait seulement la première. Si cette longueur était fort grande, on considérerait seulement la seconde. Dans les cas intermédiaires on les considérera toutes



deux, et elles donneront respectivement les valeurs des quantités  $\delta$  et  $\rho$  exprimant respectivement le degré d'allongement des parties dans le sens vertical, et le degré de flexion qui a lieu au point d'encastrement A (\*).

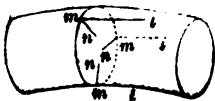
(\*) § 1. *Les sections transversales libres de se courber restent normales à la surface du prisme fléchi. Autres théorèmes relatifs au contour des sections.* — Au lieu de « ce degré d'allongement » dont parle encore ici l'auteur sans le définir, les principes de la note du n° précédent vont nous conduire à calculer les *glissements* ou les inclinaisons prises sur les sections par les fibres, et l'augmentation qui en résulte dans la flèche produite par une force ployant en même temps un prisme; augmentation dont la proportion est sensible lorsque le prisme est court.

Les glissements varient en général d'un élément à l'autre des sections transversales primitivement planes, ce qui tient à la courbure ou au *gauchissement* qu'elles prennent généralement, car celles dont nous avons parlé au § 10 de la note du n° précédent, et qui sont empêchées de s'infléchir, ne font qu'une rare exception.

Pour apprécier les circonstances de cette courbure prise par les sections, remarquons d'abord en général que *partout où la surface extérieure d'un corps d'égale élasticité en tous sens est libre, ou n'éprouve que des actions normales* comme la pression de l'atmosphère ou d'un autre fluide en repos, et aucune action tangentielle, il n'y a, par cela seul (§ 5 de la note du n° précédent) aucun glissement sur cette surface. Par conséquent, après la flexion ou autre petite déformation du corps, *les petites lignes matérielles qui étaient primitivement normales à cette surface extérieure lui sont encore normales.*

Il suit de là

1° Que ces lignes normales  $mn$ , tracées dans le plan primitif d'une section  $mm'm$  normale elle-même aux arêtes d'un prisme, restent normales au contour de cette section quelle que soit la petite modification que ce contour a éprouvée; ce qui est d'accord avec ce que nous avons dit au § 3 de la note du n° 80 de la forme du contour après une flexion.



(Du n° 153).

2° Que les sections planes, en se *gauchissant* ou en se changeant en surfaces légèrement courbes, restent normales aux faces latérales, quel que soit le petit changement de forme éprouvé par celles-ci.

3° Que lorsque la surface latérale du prisme a des arêtes saillantes (comme pour les prismes à base rectangle ou polygonale) *les sections infléchies restent normales à ces arêtes devenues courbes*. En effet, elles sont normales à la fois aux deux faces contiguës qui se coupent suivant ces arêtes.

4° Que le glissement principal sur les sections, aux divers points  $m, m, m$  de leur contour, ne peut être dirigé que suivant la tangente à ce contour aux mêmes points. Car comme les fibres ou lignes matérielles  $ml, ml$  primitivement perpendiculaires au plan de la section sont restées perpendiculaires aux petites lignes  $mn$  qui sont tracées sur la section et qui n'ont pas cessé d'être normales au contour  $mmm$ , ces lignes  $ml$  devenues légèrement inclinées sur la section ne peuvent s'y projeter que suivant l'élément du contour où la tangente.

Ces théorèmes sont également vrais, comme il est facile de le prouver, lorsque la texture de la matière du prisme, *symétrique par rapport aux sections, n'est égale que dans tous les sens transversaux* et est du reste différente dans le sens longitudinal comme il arrive pour les bois et autres corps fibreux.

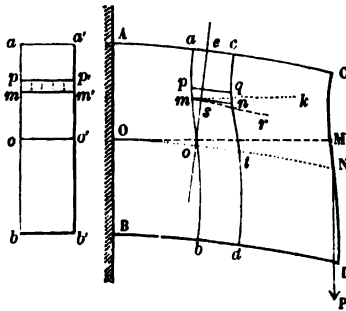
Ils ne peuvent concerner les sections à *encastrement complet* dont il a été question au commencement du § 10 de la note du n° 152, car à leur contour la flexion développe, sur les faces latérales, des résistances tangentielles longitudinales dues au scellément ou à la soudure. Semblable chose peut être dite pour les sections au contour desquelles se trouvent appliquées les forces extérieures isolées (comme pour la section des rivets dans le plan des tôles qu'ils assemblent), car cette application de forces a lieu par l'intermédiaire de corps qui (comme ces tôles) exercent sur la surface des frottements énergiques. Ces sections exceptionnelles, susceptibles de rester planes, pourront couper obliquement tout ou partie des faces latérales du prisme fléchi.

§ 2. *Loi de variation des glissements aux divers points des sec-*

(Du n° 153).

tions d'un prisme rectangulaire mince fléchi de champ. Forme de doucine affectée par les sections primitivement planes. — Toutes les autres sections, faites dans les parties des pièces fléchies où les faces latérales n'éprouvent que la pression de l'atmosphère, devront se gauchir pour peu que l'équilibre exige qu'il s'y développe des actions tangentielles, afin de pouvoir rester normales à quelques fibres du contour et s'incliner sur d'autres fibres; en sorte que le glissement variera d'un élément à l'autre de ces sections.

Pour déterminer la loi de sa variabilité, prenons le cas le plus simple, celui d'un prisme rectangulaire  $ABDC$  dont les sections transversales  $abb'a'$  aient une largeur  $aa'$  assez petite par rapport



à la hauteur  $ab$  pour que les glissements puissent être regardés comme égaux en tous les points appartenant à chaque droite  $mm'$  parallèle à la largeur  $aa'$ , ou perpendiculaire au plan de sollicitation  $ACP$ . Soient  $ab, cd$  les coupes longitudinales infléchies de la section  $abb'a'$  et d'une section très-voisine;

ces coupes auront la forme de *doucines* rencontrant perpendiculairement les coupes  $AC, BD$  des faces supérieure et inférieure du prisme, auxquelles les sections seront restées normales ainsi qu'au faces latérales (§ précédent).

Posons l'équation d'équilibre de translation longitudinale de la petite tranche solide dont la coupe transversale est  $mm'p'p'$  et la coupe longitudinale  $mnqp$ , et qui est comprise entre ces deux sections  $ab, cd$  et deux plans parallèles aux faces supérieure et inférieure du prisme. Soient

$b$  et  $c$  la largeur  $aa'$  et la hauteur  $ab$  de la section ;

$P$  la force qui agit transversalement en  $N$  à la distance  $ON = a$  de la section d'encastrement  $AB$ , pour fléchir le prisme, et qui fait en même temps glisser les sections les unes devant les autres ;

( Du n° 153 ).

- $x, x + dx$  les abscisses  $Oo, Ot$  des deux sections  $aob, ctd$ ;  
 $v, v + dv$  les ordonnées  $om, op$  des deux plans comprenant primitivement la tranche, l'origine  $o$  étant prise sur la ligne  $oo'$  des fibres de longueur invariable  $ot$ ;  
 $\rho$  le rayon de courbure de l'axe  $OoN$  du prisme en  $o$ ;  
 $g$  le glissement principal sur les éléments de la section ayant leurs centres sur la ligne  $mm'$ ;  
 $g_c$  le glissement au centre de la section, ou aux points de la ligne  $oo'$ ;  
 $E, G$  les coefficients d'élasticité d'extension et de glissement;  
 $\omega = b \cdot c$  l'aire de la section, et  $I = \frac{bc^3}{12}$  son moment d'inertie autour de  $oo'$ .

D'après ce qu'on a dit au § 4 de la note du n° 152,  $g$ , qui est le glissement sur  $mo$  ou sur  $mn$  dans le plan  $nmo$  de ces deux lignes, sera aussi le glissement principal, dirigé longitudinalement, sur la face inférieure  $mm' \times mn$  de la tranche; et le glissement principal sur la face supérieure  $pp' \times pq$  sera, aussi par unité superficielle,

$$g + \frac{dg}{dv} dv.$$

Comme les aires de ces deux faces sont égales à  $b dx$ , la tranche se trouvera sollicitée longitudinalement, ou parallèlement à  $mn$ , sur ces faces, par les deux forces opposées :

$$+ Gg \cdot b dx \quad \text{et} \quad - G \left( g + \frac{dg}{dv} dv \right) b dx.$$

Mais la même tranche ou réunion de fibres est tirée longitudinalement en arrière, sur la base de gauche  $pm$ , en vertu des extensions provenant de la flexion, par une force dont la grandeur, pour l'unité superficielle, est, comme nous savons (n° 77),

$$E \frac{v}{\rho}$$

produit du coefficient d'élasticité d'extension par la dilatation  $\frac{v}{\rho}$  des fibres au passage à travers la section  $abb'a'$ . Et l'on a, pour l'équi-

(Du n° 153).

libre de rotation entre la force  $P$  dont le moment autour de  $oo'$  est  $P(a-x)$  et les forces intérieures  $E \frac{v}{\rho} d\omega$  qui s'exercent à travers la même section, l'équation

$$\int E \frac{v}{\rho} d\omega \cdot v = \frac{EI}{\rho} = P(a-x);$$

en sorte que la traction en arrière  $\frac{E}{\rho} v$  par unité superficielle de la base  $mp$  de la tranche a pour valeur

$$\frac{P}{I} (a-x) \cdot v.$$

La traction en avant sur l'autre base  $nq$  s'obtiendra en remplaçant  $x$  par  $x + dx$ . Donc, comme ces deux bases ont pour aire  $b dv$ , la tranche est encore sollicitée longitudinalement par les deux forces opposées

$$-\frac{P}{I} (a-x)v \cdot b dv \quad \text{et} \quad \frac{P}{I} (a-x-dx)v \cdot b dv.$$

Ajoutons ces deux forces à celles  $Ggb dx$  et  $-G \left( g + \frac{dg}{dv} dv \right) b dx$  qu'on vient de trouver, on devra, pour l'équilibre de la tranche, avoir une somme zéro. Il en résulte, en réduisant et divisant par le volume  $b dv dx$  de la tranche :

$$G \frac{dg}{dv} = -\frac{P}{I} v.$$

Intégrant depuis  $v = 0$ , valeur pour laquelle  $g = g_0$ , on obtient

$$g_0 - g = \frac{P}{2GI} v^2;$$

ce qui montre que les glissements varient paraboliquement des bases  $aa'$ ,  $bb'$  à la médiane  $oo'$  de la section.

Comme ils doivent être nuls sur ces deux bases (§ précédent), on obtiendra pour le glissement central, en faisant  $g = 0$ ,  $v = \pm \frac{c}{2}$  :

( Du n° 153 ).

$$g_0 = \frac{P}{2GI} \left(\frac{c}{2}\right)^2 = \frac{P}{2G} \frac{c^2}{bc^2 \frac{4}{12}} = \frac{3}{2} \frac{P}{G\omega}; \quad (1)$$

d'où pour les autres glissements

$$g = \frac{P}{2GI} \left[ \left(\frac{c}{2}\right)^2 - v^2 \right] = \frac{3}{2} \frac{P}{G\omega} \left[ 1 - \left(\frac{2v}{c}\right)^2 \right].$$

Cette expression satisfait à la condition d'équilibre de translation transversale qui exige que la somme des actions tangentielles  $Ggd\omega$  sur la section soit égalé à la force  $P$ , car en remplaçant  $d\omega$  par l'aire  $mn'p'p = b\delta v$ , et  $\omega$  par  $bc$ , l'on a bien

$$\int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} Ggb\delta v = \frac{3}{2} \frac{P}{bc} b \left[ c - \frac{4}{c^2} \cdot \frac{2}{3} \left(\frac{c}{2}\right)^3 \right] = P.$$

(1) Nous avons à peine besoin de dire que cette détermination du glissement central ou de l'inclinaison prise par l'axe du prisme sur ces sections courbées en surface cylindrique à base de doucine peut être donnée élémentairement dans les cours d'Art et métiers. On conçoit facilement que les sections sollicitées à glisser l'une devant l'autre doivent rester normales aux faces du prisme qui n'éprouvent que la pression atmosphérique, ou que le glissement  $g$  doit être nul pour  $v = \pm \frac{c}{2}$ . Et si l'on appelle  $g_1$  le glissement sur l'unité de la face supérieure  $pq$  de la tranche  $mnpq$ , on voit aisément que la différence  $g - g_1$  du glissement sur les deux faces  $mn, pq$ , multiplié par leur aire et par  $G$ , doit, pour l'équilibre de la tranche, être égale à l'excès des tractions sur ses deux bases  $mp, nq$ , excès égal à leur superficie multipliée par  $E \frac{v}{\rho} = \frac{P \times om}{l} v$ , traction sur l'unité de la première, moins  $\frac{P \times (om - on)}{l} v$ , traction sur l'unité de la seconde; ce qui donne, en réduisant, et mettant  $om$  pour  $v$ , l'expression :

$$G(g - g_1) = \frac{P}{l} \cdot om \times mp,$$

qui additionnée à toutes celles de même genre depuis  $om = 0$  jusqu'à  $om =$  une valeur quelconque  $v$  donne bien  $G(g - g_1) = \frac{P}{l} \frac{v^2}{2}$  puisque la somme de produits  $om \times mp$  d'une variable  $om = v$  par son incrément est l'aire  $\frac{v^2}{2}$  du triangle rectangle isocèle dont elle est le côté. D'où l'on tire l'expression  $g_0 = \frac{3}{2} \frac{P}{G\omega}$  en faisant  $v =$  la demi-hauteur  $\frac{c}{2}$  en même temps que  $g = 0$  comme on vient de voir.

(Du n° 153).

Une analyse exacte prouve qu'on aurait encore  $g_0 = \frac{3}{2} \frac{P}{G\omega}$  pour une section rectangle dont la largeur n'est pas très-petite par rapport à la hauteur, et aussi pour les points du diamètre vertical d'une section circulaire, si les fibres, en se dilatant longitudinalement, n'éprouvaient pas une contraction latérale (1); et qu'on tient compte de l'influence de celle-ci en multipliant le second membre de  $g_0 = \frac{3}{2} \frac{P}{G\omega}$  ou la fraction  $\frac{3}{2}$  par. . . . 0,98; 0,94; 0,85,

lorsque la largeur de la section rectangle =  $\frac{1}{2}$ , 1, 2 fois la haut';

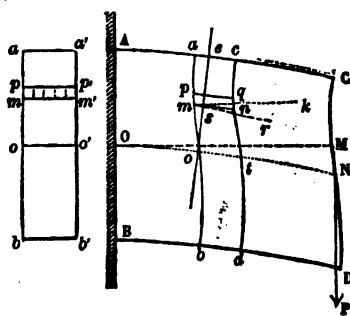
ce qui suppose qu'on prend  $\eta = \frac{1}{4}$ ,  $\frac{G}{E} = \frac{2}{5}$ .

Pour une section circulaire, il faut prendre

$$g_0 = \left( \frac{3}{2} - \eta \frac{G}{E} \right) \frac{P}{G\omega}; \text{ ou } g_0 = \frac{7}{5} \frac{P}{G\omega} \text{ si } \eta = \frac{1}{4}, \frac{G}{E} = \frac{2}{5};$$

et, pour une section elliptique, la même chose en multipliant la fraction 7/5 par 1,04; 1,035; 1,00; 0,94 selon que la largeur est à la hauteur comme  $\frac{1}{3}$ ;  $\frac{1}{2}$ ; 1; 2.

§ 3. Détermination de la forme courbe en cylindre à base de doucine affectée par la section après la flexion du prisme. — Appelons x



l'ordonnée horizontale  $ms$  du point quelconque  $m$  de cette surface ou sa distance au plan  $eo$  normal à la courbe d'axe  $ol$ ; la petite inclinaison  $\frac{dx}{dv}$  de l'élément  $mp$  sur  $eo$  sera égale à l'inclinaison  $kmr$  de sa normale  $mk$  sur une parallèle  $mr$  à  $ol$ , ou au glissement  $g = kmn$  plus la petite inclinaison  $nmr$  que

(1) On trouve en effet aux articles 49 et 27 de notre Mémoire sur la flexion, inséré au Journal de mathématiques pour 1856, des formules (les dernières de celles qui portent le n° 77 et le n° 405) donnant pour la force tangentielle  $-p_{wx}$ , la même

(Du n° 153).

la fibre  $mn$  peut avoir prise sur la fibre centrale  $of$ . Cette dernière inclinaison s'obtient en remarquant qu'à la dilatation longitudinale  $\frac{v}{\rho}$  de la fibre en  $m$  répond une contraction transversale  $\eta \frac{v}{\rho}$  ( $\eta$  ayant la signification de la note du n° 80), d'où résulte, entre les points  $m$  et  $o$  un rapprochement  $\int_0^v \eta \frac{v}{\rho} dv = \eta \frac{v^2}{2\rho} = \eta \frac{v^2}{2} \frac{P(a-x)}{EI}$ . Le point  $n$  se sera rapproché du point correspondant  $t$  de l'axe, d'une quantité pareillement exprimée mais avec  $-x - dx$  au lieu de  $-x$ ; en sorte que le point  $m$  se sera rapproché de plus que le point  $n$ , de

$$\eta \frac{v^2}{2} \frac{Pdx}{EI};$$

d'où résulte, en divisant par  $of = mn = dx$ , une inclinaison

$$\eta \frac{Pv^2}{2EI}$$

prise par  $mn$  sur  $of$ . Ajoutant cette quantité au glissement  $g = \frac{P}{2GI} \left( \frac{c^2}{4} - v^2 \right)$  trouvé § précédent, on a

$$\frac{dx}{dv} = \frac{P}{2GI} \left( \frac{c^2}{4} - v^2 + \frac{\eta G}{E} v^2 \right);$$

ce qui donne, en intégrant de manière que  $x = 0$  pour  $v = 0$

$$x = \frac{3Pc}{4G\omega} \left[ \frac{2v}{c} - \left( 1 - \frac{\eta G}{E} \right) \frac{8v^3}{3c^3} \right].$$

C'est l'équation de la coupe  $aob$  ou de la base de la surface cylindrique en doucine affectée par la section après la flexion du prisme par la force  $P$ . Chacune de ses deux moitiés est une parabole du troisième degré ou une courbe tout à fait analogue à la courbe d'axe  $OofN$  du prisme fléchi.

que nous appelons ici  $Gg$ , des expressions qui reviennent à  $\frac{3}{2} \frac{P}{\omega} \left[ 1 - \left( \frac{2v}{c} \right)^2 \right]$

lorsqu'on y suppose nulle une quantité  $\eta$  qui y représente le produit de  $\frac{G}{E}$  par notre rapport  $\eta$  ci-dessus des contractions latérales aux dilatations longitudinales.



(Du n° 153).

Si la section rectangulaire a une base dont la grandeur approche de celle de la hauteur ou l'excède, l'analyse prouve que la surface est coupée par des plans parallèles à  $oe$  non plus suivant des droites, mais suivant des lignes légèrement concaves vers  $oo'$ ; ces coupes sont convexes si la section est circulaire ou elliptique (Mémoire cité sur la flexion).

§ 4. *Flèche complète de flexion, eu égard au glissement.* — La force qui produit le glissement produit aussi ordinairement une flexion. On obtiendra les déplacements totaux des divers points de la pièce solide en composant, d'après le principe de superposition du § 2 de la note du n° 21, ceux qui viennent de la flexion, calculés comme on a fait aux §§ 77 et suivants et à leurs notes, avec ceux qui viennent du glissement.

Par exemple la *flèche*, ou le déplacement vertical total MN de l'axe à l'extrémité libre d'une pièce encastree de longueur  $a$ , s'obtiendra en ajoutant à  $\frac{Pa^3}{3EI}$ , valeur de cette flèche due à la flexion seule (n° 86), ce qui vient de l'inclinaison que le glissement central  $g$  fait prendre à tous les éléments de la ligne d'axe sur les normales aux sections, ou le produit de  $g$  par la longueur  $a$ . On a donc pour la *flèche complète*

$$MN = f = \frac{Pa^3}{3EI} + g \cdot a.$$

D'où successivement, en mettant pour  $g$  ses valeurs ci-dessus

$$\left. \begin{array}{l} \text{Section rectangulaire} \\ \text{beaucoup plus haute} \\ \text{que large. . . . .} \end{array} \right\} f = \frac{Pa^3}{3EI} \left( 1 + \frac{3E}{8G} \frac{c^3}{a^3} \right) = \frac{Pa^3}{3EI} \left( 1 + \frac{15c^3}{16a^3} \right), \text{ si } \frac{G}{E} = \frac{2}{5};$$

$$\text{Section circulaire } f = \frac{Pa^3}{3EI} \left( 1 + \frac{21E}{20G} \frac{r^3}{a^3} \right) = \frac{Pa^3}{3EI} \left( 1 + \frac{21r^3}{8a^3} \right) \text{ idem.}$$

On voit que le glissement n'augmente sensiblement la flèche que lorsque la longueur  $a$  du prisme n'est pas considérable par rapport à sa hauteur  $c$  ou  $2r$ .

154. A l'égard de la rupture, on remarquera que, conformément aux notions présentées dans le n° 112, nous la regardons comme étant déterminée par un certain degré d'extension acquis par les parties du corps qui se trouvent le plus fortement tendues. Or il est visible qu'en supposant ici l'état d'équilibre de la section A conforme aux notions précédentes, les parties placées à la face supérieure du solide dans cette section se seront allongées par l'effet de l'abaissement vertical de la partie AM et de la flexion de cette partie, d'une fraction de leur longueur qui est exprimée par

$$\sqrt{\delta^2 + \left(\frac{1}{\rho} \frac{c}{2}\right)^2};$$

ou, en mettant pour  $\delta$  et  $\rho$  leurs valeurs tirées des équations précédentes,

$$\frac{P}{bc} \sqrt{\frac{1}{D^2} + \frac{36a^2}{E^2c^2}}.$$

Or la grandeur de cet allongement étant le terme qui détermine la rupture, il s'ensuit que le poids qui peut rompre le solide est proportionnel à l'expression

$$\frac{bc}{\sqrt{\frac{1}{D^2} + \frac{36a^2}{E^2c^2}}}.$$

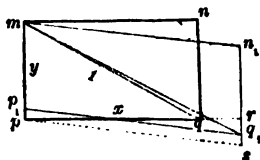
Cette formule satisfait aux cas extrêmes : si la longueur du solide est fort petite, on négligera le terme affecté du rapport  $\frac{a^2}{c^2}$ , et la résistance à la rupture sera proportionnelle à  $bc$ ; si cette longueur est fort grande par rapport à la hauteur  $c$ , on négligera au contraire le terme  $\frac{1}{D^2}$ , et la résistance sera proportionnelle à  $\frac{bc^2}{a}$ , comme l'indique dans ce cas l'expérience. Il est vraisemblable que, dans les cas intermédiaires, la formule dont

il s'agit s'éloignera peu des effets naturels, lorsqu'on déterminera les coefficients constants  $\frac{1}{D^2}$  et  $\frac{36}{E^2}$  de manière à satisfaire à des résultats obtenus directement par l'expérience (\*).

(\*) § 1. *Détermination de la dilatation maximum qui se produit dans un sens oblique lorsqu'il y a à la fois un glissement transversal et une extension longitudinale accompagnée de contraction latérale.* — En partant du principe énoncé au texte « que la rupture est déterminée par un certain degré d'extension, » principe déjà posé ci-dessus (§ 4 de la note du n° 3) et qui nous a constamment guidé (note du n° 113) ; mais en l'appliquant avec ce qui a été établi sur le glissement aux notes des deux numéros précédents 152, 153, nous allons chercher une expression exacte des conditions de résistance à la rupture éloignée sous l'action de forces produisant à la fois un *glissement et une extension, accompagnée, comme toujours, de contraction dans un sens perpendiculaire, et pouvant varier d'une fibre à l'autre comme quand il y a flexion.*

Cette recherche mérite d'autant plus d'attention que nous en appliquerons le résultat à l'article VI (note du n° 168), au cas pratique de torsion et flexion simultanées, où les glissements ont une influence capitale.

Considérons donc une fibre qui se dilate longitudinalement, se contracte transversalement, et, en même temps, s'incline légèrement sur l'élément de section qui lui



sert de base, ce qui produit un glissement sur celle-ci. Soient, avant les déplacements de ses points,  $mnqp$ , et, après,  $mn_1q_1p_1$  la coupe, par le plan de glissement principal, d'un élément de

cette fibre. Si nous appelons

- $x, y$  les dimensions longitudinale et transversale  $pq, mp$  ;
- $i, k$  les proportions de la dilatation de la dimension  $x$ , et de la contraction de la dimension  $y$  ;
- $g$  le glissement sur la base  $mp$  ;
- $i_1$  la proportion de la dilatation de la diagonale  $mq$  ;

(Du n° 154).

et si, jusqu'à la ligne  $n_1q_1$ , coupe nouvelle de la deuxième base, nous tirons  $qr$  prolongement de  $pq$ , et  $ps$  parallèle à  $p_1q_1$ , nous aurons

$$qr = i.x,$$

et, en considérant que  $rs$ , égal au glissement  $g$  multiplié par  $pr$  (§ 4 de la note du n°152), peut être regardé comme égal à la même très-petite quantité  $g$  multipliée par  $pq = x$ , dont  $pr$  diffère extrêmement peu :

$$rq_1 = rs - pp_1 = g.x - k.y.$$

Nous pouvons prendre pour unité de longueur la diagonale  $mq$  dont nous avons à calculer la dilatation  $i_1$ .

Pour avoir cette proportion  $mq_1 - mq = i_1$  dont elle s'est agrandie nous n'avons qu'à projeter les deux petites lignes  $qr$ ,  $rq_1$ , dont la valeur vient d'être donnée, sur le prolongement de  $mq$ , et prendre la somme des deux projections. Or puisque  $mq = 1$ , projeté sur  $pq$ , donne  $x$ ,  $qr = i.x$  se projetant sur  $mq$  prolongé avec lequel il fait le même angle, donnera  $i.x$  multiplié par  $x$ , ou  $ix^2$ ; et, par une raison semblable, puisque  $mq = 1$  projeté sur  $mp$  donne  $y$ ,  $rq_1 = gx - ky$  donnera  $(gx - ky)y$ .

Nous avons donc pour la projection  $i_1$  de la dilatation qu'éprouve le solide dans la direction oblique  $mq$  par l'effet de la dilatation longitudinale  $i$ , de la contraction transversale  $k$  et du glissement  $g$  simultanément :

$$i_1 = ix^2 + gxy - ky^2;$$

expression dans laquelle  $x$  et  $y$ , liés ensemble par

$$x^2 + y^2 = 1,$$

donnent le degré d'obliquité quelconque de  $mq$ .

Pour que le corps résiste d'une manière permanente aux efforts simultanés produisant ces effets, il faut (§ 2 de la note du n° 3) que la plus grande valeur de la dilatation  $i_1$  n'excède pas la limite adoptée, représentée ci-dessus (§§ 12 de la note du n° 21; 4, 5, 10 de celle du n° 113, et 7 de celle du n° 152) par

$$i' = \frac{R_0}{E}, \text{ ou par } \frac{1}{2} g' = \frac{1}{2} \frac{T_0}{G}.$$

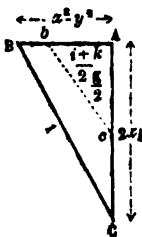
(Du n° 154).

Nous pourrions trouver la valeur de  $x$  donnant cette direction de plus grande dilatation en remplaçant  $x$  par  $\cos \alpha$ ,  $y$  par  $\sin \alpha$ ,  $\alpha$  étant l'angle  $nmq$  fait par la direction  $mq$  avec les fibres, et en égalant à zéro la différentielle de  $i_1$  par rapport à  $\alpha$ , ce qui donnerait  $\text{tang } 2\alpha = \frac{g}{i+k}$  pour déterminer l'angle  $\alpha$  du maximum.

Mais, désirant continuer de donner cette recherche sous une forme élémentaire, nous écrivons ainsi la valeur de  $i_1$  :

$$i_1 = \frac{i-k}{2} + \frac{i+k}{2}(x^2 - y^2) + \frac{g}{2} \cdot 2xy;$$

et nous raisonnerons comme au § 10 de la note du n° 83 pour les moments d'inertie principaux; ou, plus simplement encore, nous remarquerons que  $x^2 - y^2$  et  $2xy$  peuvent être regardés



comme deux côtés AB, AC d'un triangle rectangle dont l'hypoténuse BC est l'unité (car, en considérant  $1 - (x^2 - y^2)^2$  comme la différence de deux carrés, il est égal au produit de  $1 + x^2 - y^2 = 2x^2$ , somme des racines, par  $1 - x^2 + y^2 = 2y^2$ , différence des racines); puis, en portant sur les côtés AB, AC, des longueurs  $Ab = \frac{i+k}{2}$ ,  $Ac = \frac{g}{2}$ , nous verrons

que la projection, sur l'hypoténuse BC, de la ligne brisée  $bAc$ , ou de  $bc$ , sera

$$\frac{i+k}{2}(x^2 - y^2) + \frac{g}{2} \cdot 2xy.$$

Or cette projection est à son maximum lorsque  $bc$  est parallèle à BC et elle a pour grandeur alors  $bc$  lui-même  $= \sqrt{Ab^2 + Ac^2}$ . On a donc :

$$\text{Maximum de } i_1 = \frac{i-k}{2} + \sqrt{\left(\frac{i+k}{2}\right)^2 + \left(\frac{g}{2}\right)^2}.$$

Le radical doit toujours être pris positivement, en sorte que si  $g = 0$ , le maximum est  $i$  ou la dilatation longitudinale lorsque  $i$  est positif. Mais lorsque  $i$  est négatif ou quand il y a contraction longitudinale on a le maximum de  $i_1 = \frac{i-k}{2} - \frac{i+k}{2} = -k$ , quantité alors positive représentant une dilatation transversale.

(Du n° 154).

Le rapport de la contraction latérale  $k$  à la dilatation longitudinale  $i$  des fibres est celui que nous avons appelé  $\eta$  et qui dépend de la contexture égale ou inégale, en divers sens, de la matière qui est du reste supposée homogène ou la même aux divers points; en sorte que l'expression précédente revient à

$$i_1 = \frac{1-\eta}{2} i + \sqrt{\left(\frac{1+\eta}{2} i\right)^2 + \left(\frac{1}{2} g\right)^2}.$$

Si l'on fait successivement dans cette formule

$$\eta \text{ ou } \frac{k}{i} = \frac{1}{5}, \quad \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{3},$$

elle donne, dans le cas particulier  $g = i$ ,  $i_1 = 1,566i$ ,  $1,554i$ ,  $1,535i$ , valeurs fort peu différentes entre elles. Et l'on en obtient qui le sont bien moins encore lorsque le glissement  $g$  a une grandeur ou plus considérable ou plus petite que la dilatation  $i$  (supposée positive) de la fibre. Nous pouvons donc faire constamment, comme si le corps était d'égale contexture (§ 8 note n° 152) quand  $i$  est positif ou quand il y a dilatation proprement dite

$$\eta = \frac{k}{i} = \frac{1}{4};$$

et la formule précédente de la dilatation maximum en un point donné sera :

$$i_1 = \frac{3}{8} i + \sqrt{\left(\frac{5}{8} i\right)^2 + \left(\frac{1}{2} g\right)^2};$$

expression qui, lorsque  $g = 0$ , donne  $i_1 = i$  si  $i$  est positif, mais qui donnerait  $i_1 = -\frac{1}{4} i$  si  $i$  était négatif, car le terme  $\sqrt{\left(\frac{5}{8} i\right)^2}$  doit toujours entrer pour sa valeur absolue ou positive comme on a dit tout à l'heure, en sorte qu'il serait alors  $-\frac{5}{8} i$ .

§ 2. Usage de cette détermination. Formule générale de résistance à divers genres d'efforts s'exerçant à la fois. — Pour faire servir à l'établissement de la condition de résistance permanente, ou de

(Du n° 154).

stabilité de la cohésion d'un solide à chacune de ses sections, cette expression de la plus grande dilatation entre les diverses droites matérielles qui se croisent dans tous les sens en un même point quelconque, il faut chercher la plus grande valeur du second membre

$$\frac{1-\eta}{2} i + \sqrt{\left(\frac{1+\eta}{2} i\right)^2 + \left(\frac{g}{2}\right)^2}$$

pour les divers points de chaque section, et l'égaliser à la limite des extensions non dangereuses qui est, avons-nous dit au § précédent,

$$i' = \frac{R_0}{E} = \frac{T_0}{2G}.$$

En divisant l'équation par  $i'$  et conséquemment par son carré les deux termes sous le radical, on peut le remplacer ensuite par sa valeur  $\frac{T_0}{2G}$  dans le second terme, et par sa valeur  $\frac{R_0}{E}$  dans le premier ainsi que dans le terme hors du radical. L'équation de cohésion permanente devient ainsi

$$1 = \text{la plus grande valeur de } \frac{1-\eta}{2} \frac{Ei}{R_0} + \sqrt{\left(\frac{1+\eta}{2} \frac{Ei}{R_0}\right)^2 + \left(\frac{Gg}{T_0}\right)^2}.$$

C'est la *condition générale de résistance d'un solide* pour une section quelconque à travers laquelle il y a des extensions longitudinales  $i$  (ou des contractions  $-i$ ) et des glissements  $g$ .

Elle s'applique au cas où  $i$  serait négatif  $= -j$  et où, par conséquent, le terme hors du radical serait négatif pourvu que le radical soit toujours positif ou qu'on mette  $+j$  pour  $+i$  dans le premier terme qu'il recouvre.

Elle satisfait évidemment aux deux cas extrêmes :

1° Où le glissement  $g$  est nul, car elle donne alors (le terme provenant du radical étant toujours positif) :

$$R_0 = \begin{cases} \text{La plus grande des valeurs de } Ei \text{ si } i \text{ est positif;} \\ \text{et la plus grande des valeurs de } -\eta Ei = \eta E/j \text{ si } i \text{ est négatif ou si } -i = j \\ \text{est une contraction longitudinale.} \end{cases}$$

(ce qui est d'accord avec le § 7 de la note du n° 3).

(Du n° 154).

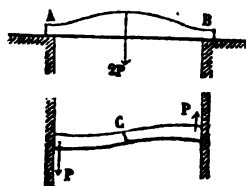
2° Où l'extension  $i$  est nulle puisqu'elle donne

$$T_0 = \text{la plus grande valeur de } Gg.$$

Et elle doit fournir dans les cas intermédiaires, où  $i$  et  $g$  existent à la fois, et lorsque la contexture du solide n'offre pas en tous sens l'égalité que nous avons supposée, toute l'approximation désirable en donnant des valeurs convenables aux constantes  $R_0$ ,  $T_0$ ,  $E$ ,  $G$ ,  $\eta$  (1).

Il est bien entendu qu'il faut en poser une semblable pour les diverses sections si les plus grandes valeurs de  $i$  et de  $g$  ne sont pas les mêmes pour toutes.

§ 3. Application au cas où la rupture peut être déterminée par un glissement, sur une section libre de s'infléchir. — Ce cas arrive, par exemple :



1° Aux extrémités A, B d'un solide simplement posé sur deux appuis et sollicité au milieu par une force transversale  $2P$ ; car, à ces deux endroits A, B, le moment des forces qui tendent à fléchir est nul et la pièce ne résiste qu'au glissement.

2° Au milieu C d'un solide qui se trouve sollicité transversalement en sens opposés par des forces égales  $P$ ,  $P$  aux extrémités, où la direction de son axe est supposée fixée de manière qu'il ne puisse tourner sous leur action.

Alors on a simplement pour condition de résistance à la rupture éloignée

$$T_0 = \text{la plus grande valeur de } Gg$$

ou,  $g$ , étant le glissement central

$$T_0 = Gg.$$

Or nous avons trouvé (§ 2 de la note du n° 153),  $g = \frac{3}{2} \frac{P}{G\omega}$

(1) La formule construite par M. Navier pour satisfaire aussi aux cas extrêmes revient à peu près à  $1 = \sqrt{\left(\frac{EI}{R_0}\right)^2 + \left(\frac{Gg}{T_0}\right)^2}$ , ou à ce qu'on aurait si  $\eta$  était  $= 1$ . Mais  $\eta$  ne doit jamais excéder  $1/3$  ou atteindre  $1/2$ .



(Du n° 154).

ou  $\frac{7}{5} \frac{P}{G\omega}$ , etc. selon la forme des sections. Nous aurons donc, pour calculer la superficie  $\omega$  à donner à la section menacée par simple glissement sans flexion, ou pour calculer la limite de la force  $P$  quand cette superficie est donnée

$P = \frac{2}{3} T_0 \omega$  si la section est un rectangle beaucoup moins large que haut ;

$P = \frac{5}{7} T_0 \omega$  si elle est un cercle.

Et on divisera les fractions  $\frac{2}{3}$  et  $\frac{5}{7}$  par les nombres peu différents de l'unité dont on a donné le tableau à la fin du même § 2 de la note du n° précédent 153, si la largeur du rectangle n'est pas très-petite, ou si la section est une ellipse au lieu d'être un cercle.

Les dimensions des autres sections du même solide, supposées de même forme, seront réglées comme on dira aux § suivants.

La théorie ordinaire et connue des solides dits d'*égale résistance* (§ 6 de la note du n° 113, ou ci-après section IV art. VII n° 498 à 507), en réglant le profil de ces pièces eu égard à la seule flexion, donnait une superficie *zéro* à la section répondant aux deux points d'appui de la première pièce et à la section milieu de la seconde. *La considération du glissement montre quelle doit être cette superficie* et fait disparaître ainsi le paradoxe.

§ 4. *Application au cas où il y a en même temps glissement et extension ou compression sans flexion. Formule et table numérique.* — 1° Soit un solide qui doit être, à l'une de ses sections, à la fois étendu par une force longitudinale également répartie  $Q$ , et sollicitée au glissement ou cisaillement par une force transversale  $P$ . Désignant par  $\omega$  la superficie inconnue qu'il faut donner à cette section pour rendre le solide capable de résister, on aura :

$i = \frac{Q}{E\omega}$  sur toute la section ;

$g = \frac{Q}{G\omega}$  aussi sur toute la section si elle est astreinte à rester plane (§ 10 de la note du n° 153) ;

(Du n° 154).

Et : la plus grande valeur de  $g = \frac{3}{2} \frac{P}{G\omega}$  ou  $\frac{7}{5} \frac{P}{G\omega}$  si elle est libre de s'infléchir, selon que sa forme est rectangulaire étroite ou qu'elle est circulaire.

Substituant dans la formule générale du § 2 et multipliant par  $\omega$ , les coefficients d'élasticité  $E$  et  $G$  disparaissent et on tire pour cette superficie  $\omega$  cherchée

$$\omega = \frac{1-\eta}{2} \frac{Q}{R_0} + \sqrt{\left(\frac{1+\eta}{2} \frac{Q}{R_0}\right)^2 + \left(\frac{P}{T_0}, \text{ ou } \frac{3}{2} \frac{P}{T_0}, \text{ ou } \frac{7}{5} \frac{P}{T_0}\right)^2}.$$

En appelant :

$\omega''$  la superficie qu'il faudrait donner si la pièce n'était sollicitée à rompre que par extension ;

$\omega'''$  celle qu'il faudrait donner si elle n'était sollicitée à la rupture que par glissement ou cisaillement transversal ;

comme on a , en faisant successivement  $P = 0$  et  $Q = 0$  :

$$\omega'' = \frac{Q}{R_0}, \quad \omega''' = \frac{P}{T_0}, \quad \text{ou } \frac{3}{2} \frac{P}{T_0}, \quad \text{ou } \frac{7}{5} \frac{P}{T_0};$$

la formule d'extension et glissement peut être écrite de cette manière claire et commode

$$\omega = \frac{1-\eta}{2} \omega'' + \sqrt{\left(\frac{1+\eta}{2} \omega''\right)^2 + \omega'''^2};$$

ou, si  $\eta = \frac{1}{4}$  :

$$\omega = \frac{3}{8} \omega'' + \sqrt{\left(\frac{5}{8} \omega''\right)^2 + \omega'''^2};$$

expression qui peut être remplacée par le tableau suivant :

(Du n° 154).

Pour $\frac{\omega''}{\omega'''} =$								Et pour $\frac{\omega'''}{\omega''} =$								
0	1/4	1/3	1/2	2/3	3/4	4/5	1	1	4/5	3/4	2/3	1/2	1/3	1/4	1/8	0
On a $\frac{\omega}{\omega'''} =$								Et $\frac{\omega}{\omega''} =$								
1	1,048	1,083	1,175	1,289	1,351	1,390	1,354	1,418	1,386	1,333	1,235	1,146	1,106	1,050	1	

2° Si la force longitudinale  $Q$  sollicite le prisme à la compression et non à l'extension, la formule du § précédent qui, en faisant  $i = -j$  prend, comme on a dit, la forme

$$i = \text{la plus grande valeur de } -\frac{1-\eta}{2} \frac{Ej}{R_0} + \sqrt{\left(\frac{1+\eta}{2} \frac{Ej}{R_0}\right)^2 + \left(\frac{Gg}{T_0}\right)^2}$$

devient, en remplaçant  $j$  par  $\frac{Q}{E\omega}$

$$\omega = -\frac{1-\eta}{2} \frac{Q}{R_0} + \sqrt{\left(\frac{1+\eta}{2} \frac{Q}{R_0}\right)^2 + \left(\frac{P}{T_0} \text{ ou } \frac{3}{2} \frac{P}{T_0} \text{ ou } \frac{7}{5} \frac{P}{T_0}\right)^2}$$

D'où en faisant  $P = 0$  et appelant  $\omega''$  la section à donner pour résister à la seule sollicitation longitudinale ou à la compression

$$\omega'' = \eta \frac{Q}{R_0};$$

en sorte qu'on a dans le cas de la compression

$$\omega = -\frac{1-\eta}{2\eta} \omega'' + \sqrt{\left(\frac{1+\eta}{2\eta} \omega''\right)^2 + \omega''^2};$$

ou, si  $\eta = \frac{1}{4}$ :

$$\omega = -\frac{3}{2} \omega'' + \sqrt{\left(\frac{5}{2} \omega''\right)^2 + \omega''^2};$$

formule donnant ceci :

(Du n° 154).

Pour $\frac{\omega''}{\omega'''} =$							Et pour $\frac{\omega'''}{\omega''} =$									
0	1/4	1/3	1/2	2/3	3/4	4/5	1	4/5	3/4	2/3	1/2	1/3	0,3	1/4	1/8	0
Ou a $\frac{\omega}{\omega'''} =$							Et $\frac{\omega}{\omega''} =$									
0	1,012	1,022	1,050	1,084	1,110	1,125	1,119	1,036	1,000	0,944	0,851	0,802	0,800	0,802	0,860	1,000

Les valeurs de  $\frac{\omega}{\omega''}$  sont plus petites que l'unité quand  $\omega'''$  est au-dessous de  $\frac{3}{4} \omega''$ ; leur minimum répond à  $\omega''' = 0,3\omega''$  et est égal à 0,8. On voit ainsi qu'une compression longitudinale aide quelquefois à la résistance au lieu d'y nuire. Cela se conçoit, parce qu'elle diminue les écartements moléculaires provenant du glissement qui a lieu simultanément.

§ 5. Rivet ou petit boulon, comme exemple numérique du cas d'extension et glissement. — Par anticipation à ce que nous nous proposons de faire après avoir rapporté les tableaux d'expériences du complément des art. 1 à VI, nous donnons, ici, pour ne pas interrompre ce qui est relatif au glissement et à sa prise en considération, des applications numériques des formules précédentes.

On demande; par exemple, la superficie à donner à la section circulaire d'un rivet ou d'un petit boulon en fer destiné à assembler des feuilles de tôle, en supposant qu'après le serrage de son écrou, ou après sa pose à chaud, il éprouve une traction  $Q = 1000$  kilogrammes environ, et qu'il se trouve dans le cas de supporter transversalement, en vertu des efforts auxquels seront soumises les tôles, une force  $P = 1200$  kilogrammes tendant à le rompre par cisaillement.

Solution. En admettant que par chaque millimètre carré on puisse lui faire supporter d'une manière permanente un effort de traction  $R_0$  de 5 kilogrammes, et (§ 9 note n° 152) un effort de cisaillement  $T_0$  des  $\frac{4}{5}$  de  $R_0$ , ou de 4 kilogrammes, il faudrait donner au rivet ou boulon, s'il n'était soumis qu'à la traction, une section de

(Du n° 154).

$$\frac{1000}{5} = 200 \text{ millimètres carrés ;}$$

et s'il n'était soumis qu'au cisaillement, une section de

$$\frac{1200}{4} = 300 \text{ millimètres.}$$

On aura donc (1<sup>re</sup> formule du § précédent),  $\omega''' = 200$ ,  $\omega'' = 300$ ,

$$\omega = \frac{3}{8} 200 + \sqrt{\left(\frac{5}{8} 200\right)^2 + (300)^2}, \text{ ou, Section effective à donner :}$$

$$\omega = 400 \text{ millimètres carrés,}$$

c'est-à-dire un diamètre de 0<sup>m</sup>,02257.

On verra, § 9, 4<sup>e</sup> exemple, un cas de *compression et glissement*.

§ 6. *Application quand il y a à la fois glissement, extension et flexion. Premier cas, où la section reste plane.* — Soit maintenant cette pièce sollicitée à la fois non-seulement à l'extension par une force longitudinale Q et au glissement par une force transversale P, mais, encore, à la flexion par celle-ci, que nous supposerons, pour plus de simplicité, parallèle à l'un des deux axes principaux (note du n° 83) de la section  $\omega$  dont on cherche les dimensions.

Il faut considérer deux cas.

Supposons, en premier lieu, que cette section soit de celles qui ne peuvent prendre aucune courbure ou qui sont astreintes à rester planes (§ 10 de la note du n° 152). Si

I représente son moment d'inertie autour d'une ligne qui y est tracée par son centre de gravité à angle droit sur la force transversale P ;

M le moment de P autour de cette ligne ;

$v'$  la distance, à cette même ligne, de la fibre la plus éloignée et par conséquent la plus étendue ;

l'on a  $\pm \frac{Q}{E\omega} + \frac{M}{EI} v'$  pour cette plus grande dilatation, le signe inférieur devant être pris quand la force Q est comprimante ; et

$g = \frac{P}{G\omega}$  pour le glissement sur la base de cette fibre.

(Du n° 154).

Substituant dans l'équation générale de résistance du § 2, on a

$$1 = \frac{1 - \eta}{2} \left( \pm \frac{Q}{R_0 \omega} + \frac{Mv'}{R_0 I} \right) + \sqrt{\left[ \frac{1 + \eta}{2} \left( \pm \frac{Q}{R_0 \omega} + \frac{Mv'}{R_0 I} \right) \right]^2 + \left( \frac{P}{T_0 \omega} \right)^2};$$

équation à laquelle on peut donner cette forme plus simple, en transposant le 1<sup>er</sup> terme du second membre, élevant au carré sans développer, puis faisant passer encore le premier terme du second membre dans le premier, et décomposant ensuite le premier membre en vertu du théorème  $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$  :

$$\left( 1 \mp \frac{Q}{R_0 \omega} - \frac{Mv'}{R_0 I} \right) \left( 1 \pm \eta \frac{Q}{R_0 \omega} + \eta \frac{Mv'}{R_0 I} \right) = \left( \frac{P}{T_0 \omega} \right)^2.$$

En désignant par  $\omega''$ ,  $\omega'''$  les superficies que l'on donnerait à la section  $\omega$  si elle n'était soumise respectivement qu'à la force longitudinale  $Q$  et qu'à l'effort de glissement  $P$ , et par  $I'$ ,  $v'$  des valeurs du moment d'inertie  $I$  et de la plus grande ordonnée  $v'$  satisfaisant à la condition de stabilité si  $P$  ne sollicitait qu'à fléchir; ou en faisant

$$\frac{P}{T_0} = \omega'', \quad \frac{M}{R_0} = \frac{I'}{v'}$$

en même temps que

$$\frac{Q}{R_0} = \omega''' \text{ si } Q \text{ est une traction,}$$

$$\frac{\frac{Q}{\eta_1}}{R_0} \omega''' \text{ si } Q \text{ est une pression ( §§ 7 note du n° 3, et 17 note du n° 201);}$$

l'équation devient

$$\left( 1 - \frac{\omega'''}{\omega} - \frac{I'v'}{IV'} \right) \left( 1 + \eta \frac{\omega'''}{\omega} + \eta \frac{I'v'}{IV'} \right) = \left( \frac{\omega''}{\omega} \right)^2 \text{ si } Q \text{ est une traction.}$$

$$\left( 1 + \frac{1}{\eta_1} \frac{\omega'''}{\omega} - \frac{I'v'}{IV'} \right) \left( 1 - \frac{\eta}{\eta_1} \frac{\omega'''}{\omega} + \eta \frac{I'v'}{IV'} \right) = \left( \frac{\omega''}{\omega} \right)^2 \text{ si } Q \text{ est une pression.}$$

Supposons par exemple la section circulaire, et désignons par  $r$  son rayon cherché, et par  $r'$ ,  $r''$ ,  $r'''$  les valeurs qu'on donnerait à  $r$  si le solide n'était sollicité respectivement qu'à la flexion, qu'au glissement, qu'à l'extension ou compression. Comme on a  $\omega = \pi r^2$ ,

( Du n° 154 ).

$I = \frac{\pi r^4}{4}$ ,  $v' = r$ , on obtient, en mettant pour  $\omega''$ ,  $\omega'''$ ,  $I'$ ,  $v'$  des expressions analogues et multipliant tout par  $4r^4$ , si on se borne au cas où la force longitudinale  $Q$  agit par traction et où  $\tau = \tau_1 = \frac{1}{h}$  :

$$(r^3 - r''^3 r - r'^3) (4r^3 + r''^2 r + r'^3) = 4r''^4 r^3.$$

Comme  $r''^2$ ,  $r'^2$ ,  $r''^4$  sont connus en chiffres par les expressions  $\frac{Q}{R_0} = \pi r''^2$ ,  $\frac{P}{T_0} = \pi r'^2$ ,  $\frac{M}{R_0} = \frac{\pi r^3}{4}$ , cette équation donnera facilement la valeur du rayon cherché  $r$  par une construction graphique, ou bien en tâtonnant par la méthode numérique des différences proportionnelles ou de double fausse position, appliquée successivement, et dont l'emploi deviendra plus prompt eu prenant les logarithmes des deux membres.

Si la pièce n'est sollicitée qu'au glissement et à la flexion, l'on a  $r''' = 0$ , et l'équation se réduit à :

$$(r^3 - r'^3) (4r^2 + r'^3) = 4r''^4 r^3.$$

Il n'y a que lorsque la flexion est nulle ou que  $\frac{I'}{v'} = 0$  que l'équation se réduit au second degré et que la solution peut être directe (§§ 4 et 5).

Si la section est un rectangle dont  $b$ ,  $c$  sont les côtés perpendiculaire et parallèle à la force transversale  $P$ , on a  $\omega = bc$ ,  $v' = \frac{b}{2}$ ,  $\frac{I}{v'} = \frac{bc^2}{6}$ ; et, en accentuant comme précédemment les valeurs qu'on donnerait si la pièce n'était soumise qu'à chacun des trois genres d'efforts, on a une équation qui multipliée par  $4b^3c^4$  prend cette forme;

$$(bc^3 - b''c''c - b'c^2) (4bc^2 + b''c''c + b'c^2) = 4b''^4 c''^2 c^2.$$

Elle servira à déterminer l'une des dimensions  $b$ ,  $c$  de la section rectangle en se donnant l'autre, ou en se donnant une relation entre elles. Par exemple si l'on veut que  $c$  soit égal à  $b$  multiplié par un nombre donné quelconque, en faisant  $c'$ ,  $c''$ ,  $c''' = b'$ ,  $b''$ ,  $b'''$  multiplié par le même nombre ou rapport, et divisant l'équation par sa quatrième puissance, on a, avec des  $b$ , précisément l'équa-

(Du n° 154).

tion que nous avons eue avec des  $r$  pour le cas d'une section circulaire.

Si l'on se donne l'épaisseur  $c$ , l'on a en divisant par sa quatrième puissance  $c^4 = c'^4 = c''^4 = c'''^4$  :

$$(b - b''' - b') \left( b + \frac{b''' + b'}{4} \right) = b''^2;$$

d'où, pour la largeur cherchée

$$b = \frac{3}{8} (b''' + b') + \sqrt{\left[ \frac{5}{8} (b''' + b') \right]^2 + b''^2}$$

qui peut aussi être donnée par le premier tableau numérique du § 4.

Si l'on se donne la largeur  $b$ , on a en divisant par  $b^2 = b'^2 = b''^2 = b'''^2$  une équation en  $c$  qui se réduit, quand  $c''' = 0$  ou quand la pièce n'est sollicitée qu'à la flexion et au glissement sans extension ou compression générale, à

$$(c^2 - c'^2) (4c^2 + c'^2) = 4c''^2 c^2;$$

d'où, une expression de  $c^2$  :

$$c^2 = \frac{3}{8} c'^2 + \frac{1}{2} c''^2 + \sqrt{\left( \frac{3}{8} c'^2 + \frac{1}{2} c''^2 \right)^2 + \left( \frac{c''^2}{2} \right)^2}$$

qui se réduit à  $c^2$  si  $c'' = 0$  et à  $c''^2$  si  $c' = 0$ , et qui fournit du reste ce tableau numérique :

Pour $\frac{c''^2}{c'^2} =$						Et pour $\frac{c''^2}{c'^2} =$						
0	1/8	1/4	1/2	2/3	3/4	1	3/4	2/3	1/2	1/4	1/8	0
On a $\frac{c^2}{c'^2} =$						Et $\frac{c^2}{c'^2} =$						
1	1,102	1,207	1,425	1,575	1,651	1,883	1,645	1,571	1,419	1,201	1,097	1

§ 7. Observation pour le cas où l'on donne partout à la pièce une égale épaisseur. Il faut alors qu'elle soit très-courte pour que le glissement ait une influence sensible sur la condition de résis-



(Du n° 154).

lance. — Si, dans l'expression générale du § précédent où il faut faire  $Q = 0$  quand il n'y a que flexion et glissement

$$1 = \frac{3}{8} \frac{Mv'}{R_o I} + \sqrt{\left(\frac{5}{8} \frac{Mv'}{R_o I}\right)^2 + \left(\frac{P}{T_o \omega}\right)^2}$$

nous faisons passer  $\frac{5}{8} \frac{Mv'}{R_o I}$  hors du radical de manière à avoir l'unité pour premier terme sous le signe, le second terme sera  $\left(\frac{4R_o}{5T_o} \cdot \frac{2P}{M} \cdot \frac{I}{\omega v'}\right)^2$ ; et si, pour  $M$ , nous mettons  $Pa$ , moment de la force  $P$  avec un bras de levier  $a$ , et, pour  $T_o$ , sa valeur théorique  $\frac{1}{5} R_o$ , nous avons

$$R_o \frac{I}{v'} = Pa \left[ \frac{3}{8} + \frac{5}{8} \sqrt{1 + \left(\frac{2I}{a\omega v'}\right)^2} \right]$$

Cette expression se réduira à  $R_o \frac{I}{v'} = Pa = M$  ou à l'équation ordinaire de résistance à la flexion seule lorsque le second terme sous le radical sera petit devant le premier, de manière que la quantité entre crochets excède fort peu  $\frac{3}{8} + \frac{5}{8} = 1$ . Or, ce second terme, pour une section circulaire de rayon  $r$ , vu que  $\omega = \pi r^2$ ,  $v' = r$ ,  $I = \frac{\pi r^4}{4}$ , se réduira à  $\left(\frac{2r}{4a}\right)^2$ , et, pour une section rectangle où  $\omega = bc$ ,  $v' = \frac{c}{2}$ ,  $I = \frac{bc^3}{12}$ , à  $\left(\frac{c}{3a}\right)^2$ . On peut le négliger quand la hauteur  $2r$  ou  $c$  du solide est moindre que le bras de levier  $a$  avec lequel agit la force qui opère en même temps la flexion et le glissement.

Il en résulte que lorsque la forme du solide doit être à peu près prismatique et que sa longueur ou pour mieux dire la distance du point d'application de la force à la section la plus exposée excédera la hauteur de la section, on pourra calculer ses dimensions comme si elle n'était que fléchie en négligeant le glissement.

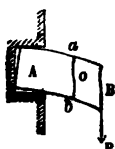
C'est ce qui arrive souvent pour les dents d'engrenages, etc.

Mais il faut en tenir compte, comme nous avons déjà dit, si l'on donne au solide la forme d'égalité résistance. Et, en tous cas, les ef-

(Du n° 154).

fets de glissement sont comparables à ceux d'extension et de compression générale qui sont produits par des forces du même ordre d'intensité et dont on tient compte en général.

§ 2. *Second cas (de flexion et de glissement simultanés), où la section peut s'infléchir librement. Alors il suffit de choisir la plus forte des dimensions fournies par un double calcul.* — Supposons en second lieu que les sections  $aob$  de la pièce  $AB$  sollicitée transversalement par une force  $P$  puissent prendre librement la courbure dont nous avons parlé § 2 de la note du n° 153 et



§ 3 de la note du n° 154. Les fibres en  $a$ , les plus éloignées de la ligne  $o$  des fibres invariables sont les plus étendues en vertu de la flexion ; mais, d'après ce que nous avons vu, elles restent normales à la section infléchie, et le glissement est nul. D'une autre part, c'est au milieu de la section, ou en  $o$ , que le glissement est le plus fort ; mais la flexion du solide n'y produit ni extension ni compression.

De plus, le calcul prouve (!) que lorsque la hauteur  $ab$  de la section atteint 3<sup>fois</sup>,05 le bras de levier  $oB$  de la force si la section est rectangulaire, et 4<sup>fois</sup>,3 si elle est circulaire, le point dangereux ou de plus grande dilatation quitte brusquement les bords  $a$  et  $b$  pour venir très-près du centre  $o$ , dont il se rapproche encore plus à mesure que la hauteur de la section augmente par rapport au bras de levier.

Il en résulte que, dans ce cas, les effets de flexion et de glissement produits par une action transversale se combinent à peine ensemble, et que, pour avoir les dimensions à donner à la section, il n'y a qu'à les calculer successivement comme si la pièce n'était sollicitée qu'à la flexion et comme si elle n'était sollicitée qu'au glissement transversal avec libre courbure de la section ; et qu'à prendre le plus fort des résultats de ce double calcul.

Mais, d'après les tableaux des §§ 4 et 6 dans lesquels les fractions dont les nombres qui y sont inscrits excèdent l'unité donnent la mesure de la quote-part nullement négligeable de celui des deux

(!) *Mémoire sur la torsion* (Savants étrangers, t. XIV), art. 426, ou bien art. 436 règle 1.

(Du n° 154).

effets qui est le moins influent, l'on voit que lorsque la section est astreinte à rester plane ou encore lorsque, soit qu'elle reste plane ou qu'elle devienne courbe, le glissement a lieu simultanément à une extension ou une compression générale des fibres, les écartements moléculaires partiels se composent pour produire un écartement résultant qui est sensiblement supérieur à chacun, et il y a nécessité de donner aux sections des dimensions plus fortes que celles qui les rendraient capables de résister séparément aux deux genres d'effort.

§ 9. Applications numériques des formules des §§ 6, 7, 8.

1<sup>er</sup> exemple. Flexion et glissement. On demande la hauteur  $c$  à donner à la section rectangulaire d'une pièce prismatique horizontale en fonte, d'une largeur  $0^m,015 = b$ , posée sur deux appuis à une distance de  $0^m,03 = 2a$ , pour qu'elle puisse porter au milieu une charge  $2P = 2000$  kilogrammes.

Solution. C'est la section milieu qui est la plus exposée à rompre par flexion seule. Or cette section n'a aucune raison de se courber plutôt à droite qu'à gauche : elle restera donc plane, et il faut pour calculer sa dimension verticale  $c$ , se servir de la formule de la fin du § 6.

La valeur  $c'$  qui rendrait la pièce capable de résister à la seule flexion serait fournie par  $R_0 \frac{bc'^2}{6} = 1^a$ , d'où en faisant  $b = 0,015$ ,  $a = \frac{0,03}{2}$ ,  $P = 1000$ ,  $R_0 = 7\ 500\ 000$ , l'on tire  $c'^2 = 0,0008$ ,  $c' = 0,02818$ .

La valeur  $c''$  capable de la faire résister au seul glissement sans courbure de la section serait donnée par  $T_0 bc'' = P$ , où  $b = 0,015$ ,  $P = 1000$ , et où, faute d'expériences spéciales on fera  $T_0 = \frac{4}{5} R_0 = 6\ 000\ 000$ ; d'où  $c'' = \frac{1}{90} = 0,01111$ ,  $c''^2 = 0,000123457$ .

Au moyen de ces valeurs de  $c'^2$  et  $c''^2$ , la formule  $c^2 = \frac{3}{8} c'^2 + \frac{1}{2} c''^2 + \sqrt{\left(\frac{3}{8} c'^2 + \frac{1}{2} c''^2\right)^2 + \left(\frac{1}{2} c'^2\right)^2}$  de la fin du § 6, relative à ce cas où l'on se donne la largeur  $b$ , fournira

(Du n° 154).

$$c^2 = 0,00090103, \quad c = 0^m,03002.$$

Il y a bien, à droite et à gauche de la section milieu, des sections qui s'infléchissent librement : mais, ainsi que nous avons dit § 8, il n'y a aucun glissement sur la base des fibres les plus tendues ou comprimées, et aucune extension ni compression des fibres du centre où le glissement est le plus fort ; et la hauteur  $b$  à donner à la section doit être la plus forte de celles qu'on trouverait s'il n'y avait que flexion et s'il n'y avait que glissement. Or, dans la première supposition, on aurait moins que ce que nous avons trouvé pour la section milieu ; dans la seconde, celle de glissement seul avec libre inflexion, on aurait (§ 3),  $bc = \frac{P}{\frac{2}{3} T_0} = \frac{1000}{4\,000\,000} = 0,00025$

d'où  $c = \frac{0,00025}{0,015} = 0^m,01667$ , valeur moindre que celle 0,03 que nous avons trouvée tout à l'heure pour la section milieu non infléchie.

Donc il faut donner à la petite pièce prismatique en fonte une hauteur de 3 centimètres.

2<sup>me</sup> exemple. Même pièce en lui donnant un profil d'égale résistance.— Soit alors sa hauteur ou épaisseur variable désignée par  $z$  au lieu de  $c$ , pour la section à la distance  $x$  d'un des deux appuis.

On trouverait, s'il n'y avait que flexion,  $R_0 \frac{bz^2}{6} = Px$  ; et, avec le glissement, on trouverait pour la valeur de  $z^2$  en  $x$ , la dernière

équation du § 6 en faisant  $c^2 = z^2$ ,  $c'^2 = \frac{6Px}{bR_0}$ ,  $c''^2 = \left(\frac{P}{T_0 b}\right)^2$  si les

sections étaient partout astreintes à rester planes ; mais, vu la faculté qu'elles ont généralement de s'infléchir (§ 8), le double profil parabolique donné par l'équation  $R_0 \frac{bz^2}{6} = Px$  en supposant la face inférieure horizontale, conviendra à la pièce en faisant  $R_0 = 7500000$ ,

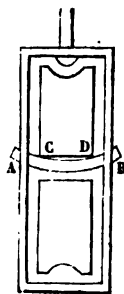
$b = 0,015$ ,  $P = 1000$  partout, excepté 1<sup>o</sup> auprès de son milieu  $x = a = 0,015$  où il en résulterait une épaisseur  $z = 0,0283$  tandis qu'on doit avoir, comme nous venons de trouver,  $z = 0,03$  ; 2<sup>o</sup> auprès des appuis, ou l'équation donnerait l'épaisseur  $z = 0$  et où

(Du n° 154).

On doit avoir, comme on vient de dire,  $z = 0,0167$ . Prenant, en ces trois points, les ordonnées  $z = 0,0167$ ,  $z = 0,03$ ,  $z = 0,0167$  et faisant de petits raccordements pour aller joindre tangentiellement la parabole, on aura le profil d'égalé résistance.

**3<sup>e</sup> Exemple. Flexion et glissement. Boulon de poulie.** — On demande quel diamètre doit avoir le boulon horizontal d'une poulie destinée à porter deux poids  $P = 800$  kilogrammes, et qui a un jeu horizontal de 3 millimètres dans sa chape ?

**Solution.** Ce boulon est comme une pièce posée sur deux appuis A, B et portant, intermédiairement, deux poids P en deux points C, D distants l'un de l'autre de l'épaisseur CD de la poulie. Si celle-ci restait bien à égale distance des deux branches de la chape, ou si on avait toujours  $AC = DB$ , les réactions des appuis A, B seraient égales chacune à P, et le moment M tendant à la



flexion serait  $P \times AC = P \times 0^m,0015$  dans toute la partie CD qui fléchirait ainsi en arc de cercle. Le glissement serait nul entre C et D; mais, immédiatement en deçà de C et au delà de D, le glissement aurait lieu en vertu d'une force transversale P. Mais la poulie peut se porter tout d'un côté, ou toucher la branche B de la chape en restant à 3 millimètres de la branche A. Comme ce jeu est toujours petit en comparaison de l'épaisseur de la poulie, les deux appuis peuvent toujours être considérés comme portant chacun la moitié de la charge totale 2P. Le boulon, à sa section la plus exposée, qui est la section C, est donc sollicité à fléchir par un moment  $M = Pa = 800^k \times 0,003 = 2^k,4$ , et à glisser par une force transversale  $P = 800^k$ .

Comme cette section peut librement s'infléchir en doucine, il y a lieu (§ 8) de calculer son rayon  $r$  successivement comme s'il n'y avait que flexion et comme s'il n'y avait que glissement, et de prendre le plus fort des deux résultats. Dans la première hypothèse on aurait, le coefficient de résistance permanente  $R$ , étant 6000000 :

$$\frac{R_1 I}{r^3} = R_2 \frac{\pi r^3}{4} = Pa = 2,4; \text{ d'où } r^3 = \frac{9,6}{3,4416.6000000}; r = 0^m,00798.$$

(Du n° 154).

Dans la deuxième hypothèse, celle du glissement avec libre inflexion, on aurait, vu que la section est circulaire (§ 3).

$$\text{Section } \pi r^2 = \frac{P}{\frac{5}{7} T_0} = \frac{P}{\frac{5}{7} \cdot \frac{4}{5} R_0} = \frac{7 \times 800}{24\,000\,000}, \quad r^2 = \frac{0,7428}{10000}, \quad r = 0^m,00862.$$

Cette seconde valeur étant la plus forte, on doit adopter le diamètre  $2r = 2 \times 0,00862 = 17^m,2$ , qu'il sera prudent de porter à 2 centimètres, vu qu'il s'agit d'une pièce sujette à s'user.

*4<sup>me</sup> Exemple. Compression et glissement. Rais de roue de voiture.*  
— Quelle superficie faut-il donner à la section milieu des rais de roue d'une charrette destinée à traîner une charge de 10,000 kilogrammes dans des chemins de traverse ?

*Solution.* Si la charge de 5,000<sup>k</sup> par roue est supposée porter toujours au moins sur deux rais à la fois, à cause de la répartition produite par la jante, chaque rai sera comprimé longitudinalement; à chaque tour, par une force de 2,500<sup>k</sup>. En admettant (voy. plus loin) que pour une longueur d'au plus 12 fois l'épaisseur, le bois de chêne debout supporte d'une manière permanente, par centimètre carré, une compression de 44<sup>k</sup> que nous réduisons à 35<sup>k</sup> vu les chocs, il faudrait donner une section  $\omega''' = 70$  centimètres carrés.

Mais chaque rai sert en outre à transmettre horizontalement, comme l'a remarqué M. Poncelet (ci-dessus § 1 de la note n° 152), par deux actions transversales opposées, la force du tirage à la bande en contact avec le sol, ou la résistance de celui-ci à l'essieu. Cette traction ou cette résistance horizontale est le 1/20 de la charge sur un terrain médiocre; mais, afin de résister aux coups de collier accidentellement nécessaires pour franchir les obstacles, il est bon de compter sur 1/8, ou sur 625 kil. La superficie nécessaire pour résister au glissement résultant de cette action transversale

sur une section libre de s'infléchir en doucine sera  $\frac{625^k}{\frac{2}{3} T_0}$ .

Si l'on prenait pour  $T_0$  les 4/5 (§ 9 de la note n° 152) de la résistance permanente  $R_0$  du chêne à l'extension dans le sens des fibres, qui est (voy. plus loin) 2<sup>k</sup> par millimètre carré ou 200<sup>k</sup> par centi-

(Du n° 154).

mètre, on aurait  $T_0 = 160$ . Mais la résistance à la rupture par extension dans un sens perpendiculaire aux fibres n'est (voy. *idem*) que le  $\frac{1}{13}$  de ce qu'elle est dans le sens des fibres, ce qui donnerait, si la contexture était en tous sens ce qu'elle est dans le sens transversal  $T_0 = \frac{160}{13} = 12^{\frac{1}{3}}$ . Diverses considérations théoriques portent à penser (1) que le rapport de  $T_0$  à  $G$  a une valeur moyenne proportionnelle entre celles qu'il aurait si la contexture était, en tous sens, successivement ce qu'elle est dans chacun des deux sens; si l'on admet la même loi pour la valeur de  $T_0$  elle-même, on prendra  $T_0 = \sqrt{160 \cdot \frac{160}{13}} = 44$ ; mais on verra que des expériences sur la rupture du bois par torsion font adopter environ  $T_0 = 30$ . Il en résulte, pour la surface de section capable de résister au glissement,  $\omega'' = \frac{625}{\frac{2}{3} \cdot 30} = 31$  centimètres carrés.

La valeur (§ 4)  $\omega = -\frac{3}{2}\omega'' + \sqrt{\left(\frac{5}{2}\omega''\right)^2 + \omega''^2}$  à donner à la superficie de la section du milieu du rai, pour résister simultanément aux deux efforts de compression et de glissement, sera en conséquence

$$\omega = 73 \text{ centimètres carrés.}$$

Quant aux sections autres que la section milieu, comme la pièce y est soumise, en outre, à la flexion par la force transversale 625<sup>t</sup>, censée appliquée au milieu du rai, l'on déterminera leurs dimensions pour chacune des deux moitiés par la formule (§ 6)

$R_x = -\frac{Q}{\omega} + \frac{Mv'}{I}$  de manière à résister à la fois à la compression et à la flexion,  $M'$  étant le moment variable  $Px$ , produit de la force  $P = 625$  par la distance  $x$  de la section milieu à la section que l'on considère, dont  $v'$  est la demi-épaisseur et  $I$  le moment d'inertie, et l'on se tiendra à ces dimensions sans considérer le glissement si (§ 8) elles donnent une superficie plus forte que celle de 73 centimè-

(1) *Mémoire sur la torsion des prismes*, 1855, art. 24, 27, 422.

155. Lorsqu'au lieu d'une pièce encastree par une extrémité, on considérera une pièce posée horizontalement sur deux appuis et chargée au milieu (Fig. 10), les mêmes considérations pourront être appliquées, en concevant que  $a$  désigne la moitié de la distance des appuis, et  $P$  la moitié du poids placé au milieu de la pièce (\*).

## ARTICLE V.

## DE LA RÉSISTANCE D'UN CORPS PRISMATIQUE A LA TORSION.

156. On peut essayer de former la théorie de ce genre de résistance au moyen de considérations analogues à celles qui ont été employées pour la résistance à la flexion.

Soit (Fig. 12) un solide prismatique encastree horizontalement à l'une des extrémités. Supposons qu'une force  $P$  agisse à l'autre extrémité avec le bras de levier  $Bc$  pour tordre le solide autour de l'axe  $Cc$ ; imaginons que par l'effet de la torsion, un diamètre  $bb$  de la section extrême, sur laquelle agit la force  $P$ , se soit transporté en  $b'b'$ . Le diamètre correspondant  $AA$  de l'extrémité encastree n'aura subi aucun déplacement; et on doit concevoir que tous les diamètres des sections intermédiaires,

tres carrés qu'on vient de trouver pour résister à la compression et au glissement seuls.

Il est bien entendu, au reste, que la section sera renforcée suivant l'usage, auprès du moyeu et auprès des jantes, pour obtenir l'encastrement parfait, ou la constante normalité du rai à leurs deux circonférences.

Il sera bon aussi, vu les hypothèses qu'il nous a fallu faire pour arriver au résultat  $\omega = 73$ , d'appliquer le même calcul à quelques voitures analogues, déjà construites ou éprouvées, ce qui servira à faire une correction par la comparaison.

(\*) Voir la note du n° 154.



tels que  $dd$ , se sont déplacés proportionnellement à leur distance  $Ce$  de l'extrémité encastrée. Par l'effet de ces déplacements, les molécules qui, dans deux sections transversales consécutives, étaient avant la torsion vis-à-vis les unes des autres, ont été éloignées l'une de l'autre d'une quantité proportionnelle, 1<sup>o</sup> à la distance de ces molécules à l'axe  $Cc$ ; 2<sup>o</sup> à la différence des angles parcourus par chaque diamètre dans deux sections transversales consécutives, différence proportionnelle à l'angle  $bc'b'$ , et réciproque à la longueur  $Cc$  du solide. On peut supposer, la torsion étant censée très-petite, que les résistances naissant des déplacements relatifs sont proportionnelles à ces déplacements. Le moment de la résistance qui a lieu dans une section quelconque du solide, doit d'ailleurs être égal au moment du poids  $P$ . Considérons une section transversale quelconque, et nommons

$a$  la longueur du solide, depuis la section fixe  $AA$  jusqu'à la section  $bb$  où agit la force  $P$  ;

$\theta$  l'angle  $bc'b'$  décrit par les diamètres de cette section extrême, angle qui est supposé fort petit ;

$r$  la distance d'un point quelconque d'une section transversale au centre  $e$  de cette section ;

$\varphi$  l'angle de la ligne  $r$  avec un diamètre de la même section ;

$r = f(\varphi)$  l'équation de la courbe qui forme le contour de la section ;

$R$  le bras de levier  $Bc$  avec lequel la force  $P$  agit pour produire la torsion ;

$G$  un poids constant pour chaque espèce de corps, représentant la résistance spécifique à la torsion.

L'élément de l'aire de la section transversale placé à l'extrémité du rayon  $r$  étant  $d\varphi dr \cdot r$ , on aura

$$G \frac{\theta}{a} d\varphi dr \cdot r^2$$

pour la résistance provenant de la torsion qui a lieu dans cet

élément; et pour exprimer l'équilibre entre le moment de la force P, et la somme des moments des résistances semblables,

$$PR = \frac{G\theta}{a} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{f(\varphi)} dr \cdot r^3,$$

ou

$$PR = \frac{G\theta}{a} \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \frac{1}{4} [f(\varphi)]^4. \quad (*)$$

(\*) § 1. *Moment d'inertie polaire d'une section. Le moment de torsion ne lui est pas généralement proportionnel.* — M. Persy, dans ses leçons à l'école d'Artillerie et du Génie de Metz, a appelé moment polaire le moment d'inertie d'une section autour de son centre de gravité, ou autour de l'axe perpendiculaire à cette section passant par ce centre. Si on appelle

J ce moment;

$d\omega$  les éléments superficiels de la section  $\omega$ ;

I et I' ses moments d'inertie autour de deux axes coordonnés rectangulaires des  $u$ , des  $v$ , tracés sur la section par le centre;

on a simplement pour le moment d'inertie polaire :

$$J = \int r^2 d\omega;$$

ou comme  $r^2 = v^2 + u^2$  :

$$J = I + I'.$$

C'est ce moment qui se trouve désigné, dans le texte, par

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int dr \cdot r^3 = \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \frac{1}{4} [f(\varphi)]^4, \text{ en sorte que l'expression donnée}$$

pour PR revient à  $G \frac{\theta}{a} J$ .

C'est seulement lorsque la section est un cercle que le moment polaire J est plus facile à calculer directement (n° suivant 157, ou § 1 de la note du n° 84) que les moments  $I = \int v^2 d\omega$ ,  $I' = \int u^2 d\omega$  considérés dans la théorie de la flexion. Il n'est donc pas besoin, pour les autres sections, d'avoir recours à la coordonnée angu-

( Du n° 158 ).

laire  $\varphi$ . Par exemple, pour la section carrée que l'auteur considère au n° 158, comme le moment d'inertie  $I = I'$  autour d'une médiane est (n° 81)  $\frac{b^4}{12}$ , on a, de suite, en doublant,  $\frac{b^4}{6} = J$ .

Mais l'expression  $PR = G \frac{\theta}{a}$  donnée dans le texte pour le moment de torsion ou le moment PR des forces qui font tordre, n'est exacte, comme nous allons voir, que lorsque la section est circulaire, ou encore lorsque la section est de celles qui sont astreintes, par exception, à rester planes et normales à l'axe de torsion.

§ 2. *La cause de la résistance à la torsion n'est pas dans le changement de longueur des fibres longitudinales devenues des hélices. Remarque de Thomas Young.* — Il ne faut pas croire, d'après ce que semble dire d'abord Navier, que les résistances intérieures développées sont dues à l'éloignement mutuel ou à l'augmentation de distance des molécules qui faisaient partie d'une même file longitudinale; on voit que c'est, en définitive, à l'éloignement de leurs deux projections sur un plan perpendiculaire à l'axe qu'il regarde chaque résistance partielle à la torsion comme proportionnelle. Cet éloignement  $\frac{\theta}{a} r$  acquis par les projections, primitivement coïncidentes, de deux molécules à l'unité de distance sur une même file, revient à la projection d'une longueur = 1 de la file sur le plan primitif de la section, ou au glissement principal (note du n° 152, § 4) qui a lieu sur la section à la distance  $r$  si elle est restée plane et perpendiculaire à l'axe de torsion.

Quant à la quantité dont deux molécules non projetées se sont éloignées, elle est, pour l'unité de leur distance primitive

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\theta r}{a}\right)^2} - 1 = \frac{\theta^2 r^2}{a^2 2}$$

si les sections dont les molécules font partie sont restées à la même distance l'une de l'autre; et si elles se sont rapprochées d'une quantité  $k$ , contraction supposée de l'axe du prisme, il reste pour la dilatation éprouvée par la fibre située à la distance  $r$  de l'axe

(Du n° 150).

$$\frac{\theta^2 r^2}{2a^2} - k.$$

Voyons quelle serait la résistance à la torsion que produiraient, seules, les forces  $E d\omega \left( \frac{\theta^2 r^2}{2a^2} - k \right)$  développées par de pareilles dilatations des diverses fibres, dont les sections sont  $d\omega$ . Il faudra d'abord, pour l'équilibre longitudinal, que la somme de ces forces soit nulle, ce qui donnera, en supposant la section circulaire d'un rayon  $r$ , et en remplaçant  $d\omega$  par  $2\pi r dr$ , superficie de la couronne dont tous les éléments  $d\omega$  sont à la distance  $r$  de l'axe :

$$\int_0^r E \cdot 2\pi r dr \left( \frac{\theta^2 r^2}{2a^2} - k \right) = 0, \text{ d'où } k = \frac{\theta^2 r^2}{4a^2}.$$

La somme des moments, autour de l'axe, des mêmes forces ou efforts de traction, s'obtiendra en multipliant l'intensité  $E d\omega \left( \frac{\theta^2 r^2}{2a^2} - \frac{\theta^2 r^2}{4a^2} \right)$  de l'une d'elles par  $\frac{\theta}{a} r$ , cosinus de l'angle qu'elle fait avec un plan perpendiculaire à l'axe, puis par  $r$  qui est son bras de levier si l'on néglige l'influence des contractions latérales accompagnant les dilatations longitudinales, et en ajoutant tous les produits. Remplaçant encore  $d\omega$  par  $2\pi r dr$  pour intégrer de 0 à  $r$  afin d'opérer cette addition, on obtient pour le moment total des résistances des fibres qui, devenues hélicoïdales, se sont allongées vers la circonférence et accourcies vers le centre

$$\frac{\pi E}{24} r^6 \cdot \left( \frac{\theta}{a} \right)^3,$$

avec un nombre très-peu différent à la place de  $E$  si l'on tient compte d'une manière approchée des contractions latérales.

Depuis longtemps Young, sans donner ce calcul, avait remarqué que si la résistance à la torsion résidait dans l'action des fibres longitudinales ainsi étendues vers l'extérieur et (pour l'équilibre) contractées vers l'intérieur, cette résistance serait *comme le cube de l'angle de torsion*  $\frac{\theta}{a}$ ; d'où il concluait, puisqu'elle est d'après l'expérience proportionnelle à cet angle. « qu'elle doit dépendre

(Du n° 153).

principalement, si ce n'est entièrement, de la rigidité ou de l'*adhésion latérale* qui s'oppose à la *détrusion* des particules, c'est-à-dire (§ 1 note du n° 152) à ce que nous avons appelé le *glissement* (1).

Dans les cas que nous considérerons exclusivement, la *torsion*  $\frac{\theta}{\alpha}$  est très-petite. La partie du moment de torsion que nous venons de calculer (et qui serait quadruple, ou égale à  $\frac{\pi E}{6} r^4 \left(\frac{\theta}{\alpha}\right)^2$  si les deux bases du prisme étaient maintenues à la même distance) est donc tout à fait négligeable devant l'autre; les fibres, qui ne se sont dilatées que de quantités très-petites du second ordre, peuvent être regardées comme n'ayant pas changé de longueur, et la contraction latérale est aussi nulle ainsi que le changement de volume du cylindre tordu.

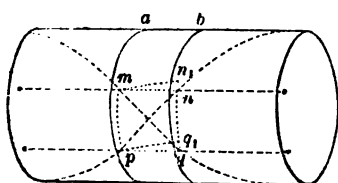
Mais si la torsion  $\frac{\theta}{\alpha}$ , ou l'arc mesurant pour un rayon = 1, la rotation relative de deux sections à l'unité de distance n'est pas très-petite, cette partie du moment qui varie dans un autre rapport que la torsion et que la 4<sup>e</sup> puissance du rayon  $r$  peut être influente et il peut y avoir en même temps une diminution sensible du diamètre et du volume. C'est ce qui a eu lieu dans diverses expériences de M. Wertheim, où cette diminution du volume a été trouvée proportionnelle au carré du rayon.

§ 3. Cette cause se trouve dans la résistance au glissement des sections l'une devant l'autre ou des fibres les unes contre les autres; ou, ce qui revient au même, dans la résistance à l'allongement et à l'accourcissement des diverses lignes matérielles hélicoïdales inclinées à 45 degrés sur l'axe de torsion. Première conséquence si la section reste plane. — Si donc, par une petite torsion, les fibres élémentaires ou fibres longitudinales de molécules telles que  $mn$ ,  $pq$  comprises entre deux sections consécutives sont devenues  $mn_1$ ,  $pq_1$ , la cause de la résistance développée ne doit pas être cherchée dans

(1) *A course of lectures on natural Philosophy and the mechanical Arts*; London, 1807. Vol. I, lecture XIII, p. 439.

Nous n'avons, en français, que les mots *intrusion*, *intrus*, qui viennent du même radical que le mot latin *destrudere*, chasser, pousser dehors.

(Du n° 152).



les augmentations de longueur très-petites du second ordre qu'elles ont éprouvées, mais dans les inclinaisons qu'elles ont été obligées de prendre sur les sections, d'où est résulté un glissement relatif des éléments superficiels correspondants  $pm$ ,  $qn$  de celles-ci, et, en même temps, un glissement relatif des fibres  $mn$ ,  $pq$  elles-mêmes; glissements qui exigent une certaine force pour être opérés. Ce sera, si l'on veut (puisque tout glissement revient, comme on l'a vu au § 6 de la note du n° 152, à une dilatation et à une contraction dans des sens à 45 degrés), la résistance à l'allongement de la diagonale  $pn$  du petit carré  $pmnq$  et à l'accourcissement de sa diagonale  $mq$ , allongement et accourcissement qui sont petits du premier ordre puisque leur proportion est  $\frac{1}{2} \frac{nn_1}{mn}$  comme on a vu.

Il en résulte que si les deux sections consécutives  $pma$ ,  $qnb$  restent planes et normales à l'axe de torsion, comme le glissement relatif  $\frac{nn_1}{mn}$  de leurs deux éléments  $d\omega$  dont les centres sont en  $m$ ,  $n$  à la distance  $r$  de l'axe, a pour grandeur  $\frac{\theta r}{a}$ , et donne lieu à une résistance dont l'intensité est,  $G$  représentant le coefficient d'élasticité de glissement du § 5 de la note du n° 152,

$$G \frac{\theta r}{a} d\omega,$$

on a bien, en multipliant par le bras de levier  $r$  et en intégrant pour toute la section, la valeur suivante du moment de torsion

$$G \frac{\theta}{a} \int r^3 d\omega = G \frac{\theta}{a} J.$$

Cette expression, conforme au texte, est exacte lorsque la section du prisme est circulaire, car comme une pareille section n'a aucune raison de se courber plutôt en un point qu'en un autre également distant du centre, ni de prendre un bombement général

(Du n° 150).

plutôt d'un côté que de l'autre, elle doit être plane après comme avant la torsion.

Elle peut encore être appliquée quelle que soit la forme du contour de la section, dans certaines circonstances exceptionnelles où elle est astreinte à rester plane (§ 10 de la note n° 152) ou empêchée de se gauchir, ce qui a lieu par exemple dans les prismes que M. Vicat appelle *infinitement courts*, ou de longueur nulle, qui sont sollicités à tordre par des forces agissant infiniment proche du plan de leur encastrement dans une matière rigide.

§ 4. *Courbure que prennent par la torsion les sections transversales primitivement planes lorsqu'elles n'en sont pas empêchées et que leur contour n'est pas circulaire. Conservation de leur normalité à la surface extérieure latérale du prisme tordu.* — Mais, dans tout autre cas, c'est-à-dire lorsqu'une section non circulaire sera libre de se courber, elle ne restera pas plane, et les glissements n'y seront pas représentés par  $\frac{0}{a} r$ , en sorte que le moment de torsion ne sera pas proportionnel au moment d'inertie polaire  $J = \int r^2 d\omega$ . Nous verrons même qu'il est égal à  $G \frac{0}{a}$  multiplié par une quantité constamment moindre que  $J$ .

Rappelons en effet ce que nous avons dit (§ 1 de la note du n° 153), à savoir qu'aux points où la surface latérale d'un prisme est libre, ou soumise simplement à une force normale comme la pression atmosphérique, il n'y a, à l'intérieur, si la matière est d'égale élasticité, aucun glissement sur les éléments superficiels de cette surface; par conséquent les petites lignes matérielles tracées primitivement sur ses sections normalement au contour et par conséquent à cette même surface extérieure, restent normales à la surface et au contour quel que soit leur petit changement de forme. Il en résulte qu'après une torsion les arêtes du prisme devenues des hélices doivent (comme toute autre ligne tracée sur la surface extérieure) se projeter, sur la section, normalement à ces petites lignes normales, et par conséquent tangentiellement au contour, en sorte que le glissement principal sur les sections à leur contour ne peut être dirigé que suivant les éléments de ce contour.

(Du n° 156).

Or toute hélice se projette, sur un plan perpendiculaire à son axe, suivant un cercle dont le centre est cet axe, et par conséquent normalement aux rayons vecteurs qui en émanent. Il faut donc, si la section d'un prisme tordu reste plane et perpendiculaire à l'axe de torsion, que son contour soit partout normal aux rayons vecteurs, c'est-à-dire que ce contour soit un cercle.

Il n'y a, ainsi, que les sections transversales circulaires qui restent, après la torsion, dans les endroits où la surface est libre, planes et perpendiculaires à l'axe de torsion. Toutes les sections ayant une autre forme se *gauchissent* ou changent leur plan en surfaces légèrement courbes, *coupant normalement partout la surface latérale après que celle-ci est changée de forme par la torsion.*

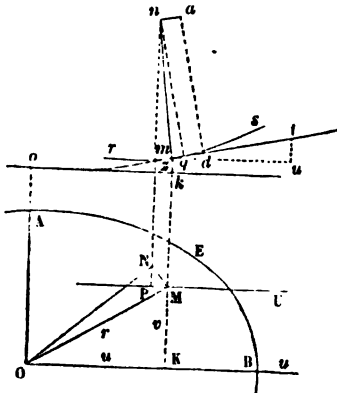
On peut le vérifier expérimentalement, du reste, en tordant un prisme de caoutchouc à base carrée ou rectangulaire. On verra les côtés primitivement rectilignes de ses sections transversales s'infléchir en S, en restant normaux aux quatre arêtes saillantes devenues des hélices qui *doivent, en effet, couper normalement la surface courbe affectée par la section*, puisque chacune d'elles est l'intersection de deux surfaces contiguës, normales l'une et l'autre à cette surface d'après ce qu'on vient de dire.

On peut également s'en convaincre au moyen d'un petit appareil permettant de tordre simultanément, autour d'un axe intermédiaire, deux prismes ou cylindres distants et parallèles, supposés solidaires ou astreints, par des liaisons rigides, à se regarder constamment par le même côté, ou à se comporter comme un seul corps. On verra (et on conçoit facilement qu'il en doit être ainsi) que les bases s'inclineront en sens opposé, sur leur plan primitif commun, de manière à rester à peu près normales aux axes partiels, ce qui exclut la conservation de la forme plane de la section totale qu'elles composent et de sa normalité à l'axe de rotation commun et intermédiaire (voyez plus loin).

§ 5. *Expressions des glissements provenant à la fois de la courbure des fibres en hélices et de la courbure des sections transversales primitivement planes d'un prisme tordu.* — Supposons donc qu'une



(Du n° 150).



section horizontale AEB d'un prisme vertical dont le centre est en O ait pris, au point M dont les coordonnées transversales sont  $u$  et  $v$ , une petite courbure de manière que  $rms$  soit, en projection verticale, la coupe par le plan vertical MU mené parallèlement à l'axe des abscisses  $Ou$ , et qu'en même temps la file verticale de molécules qui se projetait horizontalement en M se soit légèrement inclinée et courbée en hé-

lice, autour de l'axe O du prisme, de sorte qu'une petite longueur de cette ligne se projette horizontalement suivant l'arc très-petit MN dont le centre est en O, et verticalement suivant la ligne presque droite  $mn$ . Appelons :

$r = \sqrt{u^2 + v^2}$  le rayon vecteur OM du point M ;

$\theta$  la torsion (ce qui a été appelé  $\frac{\theta}{a}$  ci-dessus) ou l'arc d'un rayon  $= 1$  mesurant la rotation relative de deux sections du prisme à l'unité de distance l'une de l'autre ;

$g$  le glissement principal sur la section en M, ou la projection, sur son plan tangent en ce point, de l'unité de longueur portée sur la tangente à la ligne matérielle qui lui était primitivement normale ;

$g', g''$  ce glissement estimé suivant les coordonnées  $u, v$ , ou la projection de la même unité de longueur sur ce que sont devenues deux parallèles à ces coordonnées, menées sur la section par le même point M ; en sorte qu'on a  $g^2 = g'^2 + g''^2$ , vu que ces deux lignes n'ont pas cessé d'être sensiblement perpendiculaires ;

$z$  L'ordonnée verticale  $mk$  du point  $m$  de la section courbée, ou sa distance au plan horizontal  $ok$  passant par son centre  $o$  ;

(Du n° 158).

$i = \frac{dz}{du}$  la pente ou l'inclinaison très-petite, au point (M,  $m$ ), de la coupe  $rms$  ou de sa tangente  $mt$  sur  $ok$  ou sur le plan horizontal;

$j = \frac{dz}{dv}$  la pente, aussi en M, de la section dans le sens  $v$ , ou de la coupe de cette surface par un plan vertical parallèle aux ordonnées  $v$ .

Si la section était restée plane et horizontale, on aurait les glissements

$$g = \theta r, \quad g' = -\theta v, \quad g'' = \theta u: \bullet$$

car,  $mn$  étant pris pour unité de longueur, sa projection horizontale  $MN = \theta r$  serait le glissement sur la section, et  $NPM$  étant un petit triangle rectangle semblable au triangle  $OKM$  dont les côtés sont  $u, v, r$ , on aurait bien  $g' = -MP = -\theta v$ ,  $g'' = NP = \theta u$ .

Si, d'un autre côté, la section s'étant courbée, la fibre en M était restée verticale, le glissement  $g'$  serait la projection  $md$ , sur la tangente  $mt$ , de l'unité de longueur  $ma$  portée sur cette verticale  $ma$ ; projection qui ne serait autre chose que la mesure du petit angle d'inclinaison  $\theta mu$  de la tangente  $mt$  sur l'horizontale  $mu$ , en sorte qu'on aurait

$$g' = i = \frac{dz}{du}; \text{ et de même } g'' = j = \frac{dz}{dv}.$$

Les valeurs effectives de  $g'$  et de  $g''$ , d'après le principe de composition géométrique des déplacements très-petits, et par conséquent d'addition algébrique de ceux qui sont estimés dans le même sens, sont sommes de celles qui viennent d'être trouvées dans ces deux hypothèses. Et c'est ce qu'on voit bien sur la figure pour le glissement  $g'$  suivant les  $u$ . En effet, il est mesuré par  $mq$ , projection de  $mn = 1$  sur la tangente  $mt$ ; or  $mq = md - qd$ , et  $qd = na = PM$ .

On a donc, au point (M,  $m$ ), pour les glissements suivant les coordonnées  $u, v$ , dus à la fois à l'inclinaison prise par la fibre et à l'inclinaison prise par l'élément de la section :

$$g' = i - \theta v, \quad g'' = j + \theta u.$$

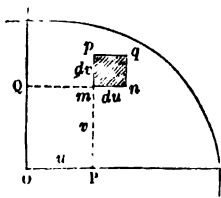
(Du n° 150).

Et, par suite, pour la grandeur du glissement principal ou résultant sur la section :

$$g = \sqrt{(i - \theta v)^2 + (j + \theta u)^2}.$$

Ces glissements  $g'$  et  $g''$  sont aussi, comme on l'a vu au § 4 de la note du n° 152, ceux qui ont lieu sur la fibre en M, dans les plans respectivement parallèles aux  $u$  et aux  $v$ , ou les glissements, estimés verticalement ou longitudinalement, qui ont lieu sur les faces verticales menées en M parallèlement aux  $v$  et parallèlement aux  $u$ .

§ 6. Condition générale que doivent remplir, en tous leurs points, les surfaces légèrement courbes dans lesquelles se changent les plans des sections des prismes tordus. Nullité de la somme des courbures de deux coupes à angle droit. Expression de cette condition par une équation différentielle. — Supposons que toutes les sections d'un prisme aient tourné uniformément l'une devant l'autre d'angles égaux aux produits de  $\theta$  par leurs distances restées les mêmes ainsi que les distances mutuelles transversales des points de chacune,



mais que ces points aient éprouvé de petits déplacements longitudinaux, les mêmes pour ceux qui se correspondaient primitivement sur une même parallèle à l'axe, de manière à faire prendre aux surfaces de toutes les sections la même forme courbe.

Soit  $mnqp$  la base d'une fibre ayant une largeur  $mn = du$  et une épaisseur  $mp = dv$  et supposée terminée, avant la petite déformation provenant de la torsion, par des plans  $mn$ ,  $pq$  et  $mp$ ,  $nq$  parallèles à l'axe de torsion O et respectivement aux coordonnées  $u$ ,  $v$  du point  $m$ .

Établissons l'équation d'équilibre de translation longitudinale de la petite portion de cette fibre rectangulaire contenue entre deux sections très-voisines. On suppose qu'elle n'éprouve aucune traction longitudinale ou parallèle à l'axe, et on abstrait sa pesanteur. Les seules forces longitudinales s'exerçant sur les quatre faces latérales  $mn$ ,  $pq$ ,  $mp$ ,  $nq$ , sont des actions tangentielles provenant des glissements, aussi longitudinaux, qui y ont lieu, ou des petits degrés d'obliquité pris sur les arêtes par les lignes primitivement

( Du n° 156 ).

normales aux faces. Elles sont égales (§ 5 de la note n° 152) à ces glissements multipliés par un même coefficient  $G$  si la contexture est égale dans tous les sens transversaux.

Or le glissement sur la face  $mp$ , estimé longitudinalement ou dans le sens de l'arête  $m$ , a la même grandeur, au point de  $m$  de la section, que le glissement sur la section, estimé suivant la ligne  $mn$  perpendiculaire à cette face latérale  $mp$ , puisque ce sont les projections, nécessairement égales, sur chacune de ces deux lignes primitivement orthogonales (l'arête  $m$  et le côté  $mn$ ) de l'unité de longueur portée sur l'autre, ou puisqu'ils ne sont autre chose que le petit retrécissement éprouvé par leur angle droit.

C'est le glissement appelé  $g'$  au § précédent.

L'action sur la face latérale  $mp$  de la fibre, décomposée longitudinalement, est donc, par unité superficielle,

$$Gg'.$$

L'action sur la face adjacente  $mn$ , décomposée aussi longitudinalement, est par la même raison

$$Gg''.$$

Comme il s'exerce, sur les faces opposées  $nq$ ,  $pq$ , des actions longitudinales opposées à celles-ci, la condition d'équilibre est, en supposant  $mn = mp$ , qu'on ait zéro pour la somme des quantités dont le glissement sur  $nq$  excède le glissement sur  $mp$  et dont le glissement sur  $pq$  excède le glissement sur  $mn$ , ou qu'on ait

$$\frac{dg'}{du} + \frac{dg''}{dv} = 0;$$

ce qui, en mettant pour  $g'$  et  $g''$  leurs valeurs  $i - 0v$  et  $j + 0u$  du § précédent, donne

$$\frac{di}{du} + \frac{dj}{dv} = 0,$$

ou l'équation aux dérivées partielles du second ordre

$$\frac{d^2z}{du^2} + \frac{d^2z}{dv^2} = 0.$$

Mais nous exprimerons cette condition sans cesser de raisonner d'une manière élémentaire si nous appelons :

(Du n° 156).

$i_1$  la valeur que prend la pente  $i$  de la surface courbe de la section dans le sens  $u$  quand on passe du point  $m$  au point très-voisin  $n$  sur une même parallèle à  $u$ ; ou l'inclinaison, sur l'ancien plan de la section, en ce dernier point  $n$ , de la tangente à la coupe de cette surface par le plan vertical mené en  $m$  parallèlement à la coordonnée  $u$ ;

$j_1$  de même la valeur que prend la pente  $j$  dans le sens  $v$ , quand on passe au point  $p$ , supposé à une distance  $mp = mn$  du point  $m$  sur une parallèle à  $v$ ;

L'équilibre exigera que la somme des actions longitudinales  $G(i_1 - \theta v)$ ,  $G(j_1 + \theta u)$  sur les faces  $nq$ ,  $pq$ , égale la somme des actions respectivement opposées  $G(i - \theta v)$ ,  $G(j + \theta u)$  sur les faces  $mp$ ,  $mn$ . Les termes en  $\theta$  disparaissent et il reste

$$(i_1 - i) + (j_1 - j) = 0.$$

La signification géométrique de cette équation générale très-simple est facile à saisir.

Elle montre que la surface peu courbe affectée par la section du prisme tordu doit être telle qu'à partir de chacun de ses points la pente croisse autant dans une direction quelconque qu'elle décroît dans une direction perpendiculaire, ou que, si on la coupe par deux systèmes de plans orthogonaux menés parallèlement à l'axe de torsion, les lignes courbes qui en résultent aient, sur un plan perpendiculaire au même axe, des inclinaisons dont l'une augmente justement de ce dont l'autre diminue lorsqu'on passe d'un point quelconque où deux d'entre elles se croisent à des points voisins également distants sur l'une et sur l'autre coupe.

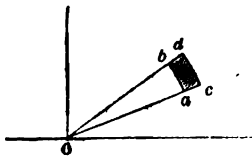
En sorte que les courbures très-petites de ces deux coupes soient partout égales et opposées.

§ 7. *Démonstration plus directe de cette propriété générale des surfaces courbes affectées par les sections transversales des prismes après leur torsion.* — Dans la torsion d'un prisme, supposé vertical pour fixer les idées, les lignes matérielles verticales se courbent, et les sections horizontales se courbent légèrement aussi. Les petits déplacements relatifs des points d'une petite portion du

(Du n° 156).

solide sont résultants géométriques de ceux qui seraient dus séparément à la seule courbure des lignes verticales, les sections restant planes et horizontales, et à la seule courbure des sections, les fibres ou lignes de molécules restant verticales et droites; et les actions exercées longitudinalement sur une fibre ou un élément prismatique vertical quelconque sont sommes de celles qui seraient développées séparément par ces déplacements composants.

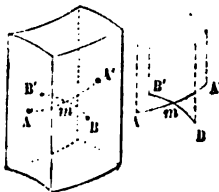
Or les actions qui proviennent de la seule courbure des files verticales de molécules en hélices de même pas et de même axe se font équilibre. On le voit facilement en divisant le prisme en fibres



dont les bases soient de petites portions de secteur  $abdc$  comprises entre deux rayons vecteurs  $Oac$ ,  $Obd$  et deux arcs de cercle  $ab$ ,  $cd$  ayant leur centre sur l'axe  $O$  des hélices; car la fibre n'est pas sollicitée tangentiellement à ses faces cylindriques

$ab$ ,  $cd$ , puisque les lignes telles que  $Oac$ ,  $Obd$  qui leur étaient normales leur sont encore normales; et, comme la base est restée, disons-nous, horizontale, la fibre est sollicitée par des forces contraires justement égales sur ses faces égales  $ac$ ,  $bd$ , qui s'inclinent également toutes deux sur leurs anciennes normales restées horizontales.

Les tendances à la translation verticale ou longitudinale des fibres ne peuvent donc venir que de la seconde cause, ou de la courbure des sections supposée avoir lieu seule. Or considérons une portion de fibre supposée maintenant à base carrée, dont les arêtes sont ainsi restées verticales, mais dont les sections primitivement planes se sont changées en surfaces légèrement courbes. Soient



$A mA'$ ,  $B m B'$  les coupes de la section à égale distance des deux bases, par les deux plans verticaux à égale distance des faces latérales. Il y aura sur ces quatre faces des actions tangentielles proportionnelles aux petits degrés d'obliquité pris sur leurs plans par les coupes qui leur étaient pri-

mitivement perpendiculaires; ces actions décomposées longitudinalement seront proportionnelles aux obliquités estimées longitu-

(Du n° 150).

dinalement aussi. En désignant donc les faces latérales, égales en superficie, par leurs centres A, A', B, B', la face A' est sollicitée par une force de bas en haut proportionnelle à l'obliquité qu'a prise en A', sur la verticale, la ligne AmA' prolongée, ou par une force proportionnelle à l'inclinaison, sur l'horizon, de la tangente en A' à cette courbe. La surface opposée A est sollicitée de haut en bas par une force proportionnelle à l'inclinaison possédée, de même, par la tangente en A. La même chose peut être dite des faces B', B et des inclinaisons, sur l'horizon, des tangentes à la courbe BMB' aux points B' et B.

Donc, pour l'équilibre, la différence des pentes ou inclinaisons de la coupe AA' aux points A' et A doit être compensée par la différence des pentes ou inclinaisons de la coupe BB' aux points B' et B.

Or c'est précisément ce qu'exprime l'équation  $(i_1 - i) + (j_1 - j) = 0$  ci dessus, qui est la même chose que  $\frac{di}{du} + \frac{dj}{dv} = 0$  ou que l'équation aux dérivées partielles  $\frac{d^2z}{du^2} + \frac{d^2z}{dv^2} = 0$  si les côtés des bases carrées des fibres sont pris parallèles aux coordonnées transversales  $u, v$  des points de la section.

§ 8. *Condition particulière aux points du contour des sections des prismes tordus.* — Il faut, avons nous dit, vu la nullité supposée de toute action tangentielle et par suite de tout glissement sur les faces latérales du prisme, que la section courbée les coupe normalement, et que les lignes matérielles qui étaient primitivement normales à ces faces latérales leur restent normales ainsi qu'au contour de la section et aux arêtes devenues des hélices, d'où il suit que ces hélices devront se projeter sur la section, ou sur ses plans tangents, tangentielllement au contour.

Or un élément du contour dont la forme est donnée par une équation entre les coordonnées  $u$  et  $v$ , a pour projections

$$du \text{ sur l'axe des } u, \quad dv \text{ sur l'axe des } v.$$

La fibre en hélice se projette sur le contour dans la direction du glissement principal qui a pour projections

$$i - \theta v \text{ sur l'axe des } u, \quad j + \theta u \text{ sur l'axe des } v.$$

(Du n° 156).

Pour que ces deux directions soient les mêmes il faut que

$$\frac{dv}{du} = \frac{j + \theta u}{i - \theta v};$$

en sorte que la condition particulière aux points du contour qui doit servir, avec la condition  $i_1 - i + j_1 - j = 0$  ou  $\frac{d^2z}{du^2} + \frac{d^2z}{dv^2} = 0$  relative à tous les points de la section, à déterminer la forme courbe de la surface, est

$$(j + \theta u)du - (i - \theta v)dv = 0,$$

ou 
$$\left(\frac{dz}{dv} + \theta u\right)du - \left(\frac{dz}{du} - \theta v\right)dv = 0.$$

§ 9. *Actions tangentielles sur les sections. Moment de torsion. Détermination générale de la torsion quand on donne ce moment.* — Si un prisme a éprouvé d'un bout à l'autre une torsion uniforme et très-petite  $\theta$  en sorte que toutes ses files longitudinales de molécules se soient changées en des hélices ayant le même axe et un même pas  $\frac{2\pi}{\theta}$ , et si les plans de ses sections transversales sont devenus des surfaces courbes satisfaisant, en tous leurs points, à la condition générale ou indéfinie (§§ 6 et 7)

$$(i_1 - i) + (j_1 - j) = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{d^2z}{du^2} + \frac{d^2z}{dv^2} = 0,$$

et, de plus, aux points du contour, à la condition particulière ou définie (§ 8),

$$(j + \theta u)du - (i - \theta v)dv = 0 \quad \text{ou} \quad \left(\frac{dz}{dv} + \theta u\right)du - \left(\frac{dz}{du} - \theta v\right)dv = 0,$$

les éléments  $d\omega$  des sections éprouveront des actions tangentielles

$$G(i - \theta v)d\omega = G\left(\frac{dz}{du} - \theta v\right)d\omega \quad \text{dans le sens } u,$$

$$G(j + \theta u)dv = G\left(\frac{dz}{dv} + \theta u\right)d\omega \quad \text{dans le sens } v.$$

Réciproquement si, les faces latérales étant supposées n'éprouver aucune action, les éléments  $d\omega$  des bases extrêmes  $\omega$  d'un prisme



(Du n° 156).

sont sollicitées par les forces tangentielles dont nous venons d'écrire les expressions, dans lesquelles  $z$  et par conséquent  $i$  et  $j$  sont des fonctions de  $u$  et  $v$  dépendant de la forme du contour et satisfaisant aux conditions *indéfinie* et *définie* qu'on vient aussi dénoncer, *il y aura équilibre* dès que ce prisme se sera tordu uniformément d'un petit angle  $\theta$  par unité de longueur.

En appelant  $M_1$  le *moment de torsion*, c'est-à-dire le moment total, autour de l'axe, des forces extérieures appliquées aux bases, ou des forces intérieures s'exerçant à travers une section quelconque et qui leur font équilibre, on aura, en supposant que ce moment fasse tourner de  $u$  en  $v$ , ou de droite à gauche pour un observateur adossé à l'axe du prisme :

$$M_1 = G \int_0^\omega (g'' d\omega \cdot u - g' d\omega \cdot v) = G \int_0^\omega [(j + \theta u)u - (i - \theta v)v] d\omega.$$

Si les forces qui font éprouver à un prisme une torsion toujours supposée *très-petite*, sans être distribuées sur les éléments des bases extrêmes tout à fait comme l'exigent les expressions ci-dessus des actions tangentielles, et même sans agir sur ces bases, sont appliquées tout auprès des extrémités d'une manière symétrique par rapport à l'axe du prisme, supposé être l'axe de torsion, de manière à former des couples dont les moments aient toujours la valeur  $M_1$ , qu'on vient de donner, et si le prisme a une longueur très-grande par rapport à ses dimensions transversales, un raisonnement comme ceux des §§ 6 des notes des n° 21 et 80 relatives à l'extension simple et à la flexion, et qui sont tirés de la presque indifférence du mode d'application et de distribution des forces, suffira pour convaincre qu'en exceptant des points très-rapprochés de ceux où agissent les forces qui font tordre, le prisme se comportera de la même manière que si les forces avaient été appliquées et distribuées conformément aux expressions  $G(i - \theta v)d\omega$ ,  $G(j + \theta u)d\omega$ .

Il prendra donc d'un bout à l'autre la torsion  $\theta$  supposée très-petite.

Lors donc qu'un prisme est soumis à l'action d'un couple  $M_1$  autour de son axe, il faut en général, pour déterminer sa torsion  $\theta$ ,

(Du n° 156).

intégrer l'équation aux différences partielles  $\frac{d^2z}{du^2} + \frac{d^2z}{dv^2} = 0$ , avec la condition au contour  $\left(\frac{dz}{dv} + \theta u\right) du - \left(\frac{dz}{du} - \theta v\right) dv = 0$  particularisée pour la forme donnée du contour de la base; et après avoir déduit, de l'expression trouvée pour  $z$ , celles des pentes  $\frac{dz}{du} = i$ ,  $\frac{dz}{dv} = j$ , affectées aussi de l'inconnue  $\theta$ , les substituer dans l'expression ci-dessus du moment  $M_1$ , ce qui donnera une équation dont on tirera la valeur cherchée de  $\theta$ .

§ 10. *Contours de sections, en nombre infini, pour lesquels on obtient immédiatement la forme de la surface courbe dans laquelle la torsion change leur plan.* — L'intégration dont on vient de parler, pour une forme donnée du contour, peut être difficile et même impossible. Elle ne s'opère, quand la section est rectangulaire, que par séries transcendantes (voy. ci-après). Mais on n'a pas besoin d'intégrer ni même, en quelque sorte, de se servir des signes de différentiation, en résolvant (ce qui suffit généralement pour les applications) le problème inverse, consistant à se donner la forme de la surface courbe de la section, ou seulement les expressions de ses deux pentes  $i$  et  $j$ , et à chercher les formes correspondantes du contour.

En se bornant ici aux formes algébriques entières, il est facile de vérifier que l'équation générale suivante de la surface courbe des sections primitivement planes d'un prisme ayant éprouvé une torsion  $\theta$ , équation où  $c_1, c_2, c_3, \dots, c'_1, c'_2, c'_3, \dots$  sont des constantes absolument quelconques pouvant être nulles en tel nombre qu'on veut :

$$z = \theta \left\{ \begin{aligned} &c_1 v + c_2 2uv + c_3 (3u^2v - v^3) + c_4 (4u^3v - 4uv^3) + c_5 (5u^4v - 10u^2v^3 + v^5) + \dots \\ &+ c'_1 u + c'_2 (u^2 - v^2) + c'_3 (u^3 - 3uv^2) + c'_4 (u^4 - 6u^2v^2 + v^4) + c'_5 (u^5 - 10u^3v^2 + 5uv^5) + \dots \end{aligned} \right\}$$

et qui donne pour les glissements  $i - \theta v$ ,  $j + \theta u$  :

$$g' = \frac{dz}{du} - \theta v = \theta \left\{ \begin{aligned} &-v + 2c_2 v + 3c_3 \cdot 2uv + 4c_4 (3u^2v - v^3) + 5c_5 (4u^3v - 4uv^3) + \dots \\ &+ c'_1 + 2c'_2 u + 3c'_3 (u^2 - v^2) + 4c'_4 (u^3 - 3uv^2) + 5c'_5 (u^4 - 6u^2v^2 + v^4) + \dots \end{aligned} \right\},$$

$$g'' = \frac{dz}{dv} + \theta u = \theta \left\{ \begin{aligned} &c_1 + 2c_2 u + 3c_3 (u^2 - v^2) + 4c_4 (u^3 - 3uv^2) + 5c_5 (u^4 - 6u^2v^2 + v^4) + \dots \\ &u - 2c'_2 v - 3c'_3 \cdot 2uv - 4c'_4 (3u^2v - v^3) - 5c'_5 (4u^3v - 4uv^3) - \dots \end{aligned} \right\}$$

(Du n° 150).

répond aux contours représentés par l'équation suivante, où la constante  $K$  du second membre peut recevoir toutes les valeurs possibles, en sorte qu'à chaque surface répond une infinité de contours :

$$\frac{u^2 + v^2}{2} + c_1 u + c_2 (u^2 - v^2) + c_3 (u^3 - 3uv^2) + c_4 (u^4 - 6u^2 v^2 + v^4) + c_5 (u^5 - 10u^3 v^2 + 5uv^4) + \dots \\ - c'_1 v - c'_2 2uv - c'_3 (3u^2 v - v^3) - c'_4 (4u^3 v - 4uv^3) - c'_5 (5u^4 v - 10u^2 v^3 + v^5) + \dots = K.$$

En effet, sans invoquer d'autre théorème d'analyse infinitésimale que celui qui est exprimé par

$$(1 + \varepsilon)^n - 1 = n\varepsilon \quad \text{quand } \varepsilon \text{ est infiniment petit } ^{(1)},$$

on peut en donnant, dans la valeur générale de  $z$ , des accroissements infiniment petits successivement à  $u$  et à  $v$  et en divisant, par ces accroissements, ceux qui en résultent pour  $z$ , trouver immédiatement les pentes  $i, j$ , et, par suite, les expressions qu'on vient d'écrire pour  $g' = i - \theta v$  et  $g'' = j + \theta u$ . Ensuite, en faisant croître de quantités infiniment petites et égales,  $u$  dans la première expression, et  $v$  dans la seconde, on a zéro pour la somme des accroissements qu'elles prennent, ce qui vérifie bien la condition  $(i_1 - \varepsilon) + (j_1 - j) = 0$ . Enfin si, dans l'équation générale que nous venons de donner pour le contour, on fait croître infiniment peu les deux coordonnées à la fois, et si l'on retranche membre à membre, de l'équation nouvelle ainsi obtenue, l'équation primitive, on tire pour le rapport de ces deux accroissements de  $v$  et de  $u$ , précisé-

(1) On a démontré élémentairement avec son inverse, au § 3 de la note du n° 84, ce théorème sur lequel on se base à chaque instant, même dans les cours d'Arts-et-métiers, et qui n'est remplaçable que jusqu'à  $n = 4$  par des considérations d'aires, de volumes et de centres de gravité de triangles ou de pyramides.

Quand on l'a prouvé pour  $n$  entier positif quelconque au moyen d'une suite de multiplications par  $1 + \varepsilon$ , il est facile de l'étendre à  $n$  fractionnaire ou négatif; car 1° si l'on extrait la racine  $n^{\text{ième}}$  des deux membres de  $1 + n\varepsilon = (1 + \varepsilon)^n$  avec  $n$  entier positif, et si on les élève ensuite à la puissance  $m$  aussi entière positive, on a  $(1 + n\varepsilon)^{\frac{m}{n}} = (1 + \varepsilon)^m = 1 + m\varepsilon = 1 + \frac{m}{n} \cdot n\varepsilon$ . 2° Si l'on multiplie les deux membres de  $1 + n\varepsilon = (1 + \varepsilon)^n$  par  $(1 - \varepsilon)(1 + \varepsilon)^{-n}$ , on a, en transposant :  $(1 + \varepsilon)^{-n} = 1 - n\varepsilon + n^2 \varepsilon^2 (1 + \varepsilon)^{-n}$ , équation où l'on peut effacer le dernier terme du second membre comme infiniment plus petit que le second.

(Du n° 150).

ment le rapport  $\frac{g''}{g'} = \frac{j + \theta u}{i - \theta v}$ , ce qui vérifie la condition particulière ou définie  $g''du - g'dv = 0$  du § 8 relative aux points du contour de la section.

Il est facile de prolonger autant qu'on veut les expressions de  $z$ , de  $g'$ ,  $g''$ , et le premier membre de l'équation générale  $\frac{u^2 + v^2}{2} + \dots = K$  du contour, car les termes des polynômes de divers degrés en  $u$  et  $v$  multipliés par les coefficients arbitraires  $c_2, c'_2, c_3, c'_3, \dots$  ne sont autre chose que ceux des puissances  $(u + v)^2, (u + v)^3, (u + v)^4, \dots$  du binôme  $u + v$ , mais pris de deux en deux et affectés alternativement des signes  $+$  et  $-$ , en sorte qu'on aurait pour ceux des 6°, 7°, 8° degrés :

$$\begin{aligned} u^6 - 15u^4v^2 + 15u^2v^4 - v^6 & \quad \text{et} \quad 6u^5v - 20u^3v^3 + 6uv^5, \\ u^7 - 21u^5v^2 + 35u^3v^4 - 7uv^6 & \quad \text{et} \quad 7u^6v - 35u^4v^3 + 21u^2v^5 - v^7, \\ u^8 - 28u^6v^2 + 70u^4v^4 - 28u^2v^6 + v^8 & \quad \text{et} \quad 8u^7v - 56u^5v^3 + 56u^3v^5 - 8uv^7, \\ & \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

On peut voir, au reste, que l'expression générale de  $z$  est ce qu'on obtient par la méthode des coefficients indéterminés en cherchant à satisfaire à  $\frac{d^2z}{du^2} + \frac{d^2z}{dv^2} = 0$  par une expression polynôme entière en  $u, v$ ; ou bien en mettant des expressions entières à la place des fonctions arbitraires  $\varphi$  et  $\psi$  de l'intégrale générale connue

$$z = \varphi(u + v\sqrt{-1}) + \psi(u - v\sqrt{-1})$$

de cette équation, et développant puis donnant aux coefficients des valeurs telles que les imaginaires disparaissent.

§ 11. *Formules en coordonnées polaires.* — On manifeste mieux la loi en se servant de ces coordonnées ou en faisant

$$u = r \cos \alpha, \quad v = r \sin \alpha, \quad \text{ou} \quad r = \sqrt{u^2 + v^2}, \quad \alpha = \arctang \frac{v}{u},$$

car, en remplaçant encore les fonctions  $\varphi, \psi$  par des développements suivant des puissances  $n \dots$  de leurs variables, on a,  $A, A'$  étant des coefficients quelconques,

$$z = \Sigma [A_n r^n (\cos n\alpha + \sqrt{-1} \sin n\alpha) + A'_n r^n (\cos n\alpha - \sqrt{-1} \sin n\alpha)];$$

(Du n° 156).

ou, en faisant  $A_n + A'_n = C'_n$ ,  $(A_n - A'_n) \sqrt{-1} = C_n$  pour chasser les Imaginaires, et en supposant les exposants  $n$  entiers et positifs,

$$z = \theta \left\{ \begin{array}{l} c_1 r \sin \alpha + c_2 r^2 \sin 2\alpha + c_3 r^3 \sin 3\alpha + \dots \\ + c'_1 r \cos \alpha + c'_2 r^2 \cos 2\alpha + c'_3 r^3 \cos 3\alpha + \dots \end{array} \right\};$$

à quoi correspondent, pour l'équation du contour,

$$\begin{aligned} \frac{r^3}{2} + c_1 r \cos \alpha + c_2 r^2 \cos 2\alpha + c_3 r^3 \cos 3\alpha + \dots \\ - c'_1 r \sin \alpha - c'_2 r^2 \sin 2\alpha - c'_3 r^3 \sin 3\alpha - \dots = K; \end{aligned}$$

et, pour les glissements suivant les  $u$ , les  $v$  :

$$\begin{aligned} g' = 0 \left\{ \begin{array}{l} -r \sin \alpha + 2c_2 r \sin \alpha + 3c_3 r^2 \sin 2\alpha + 4c_4 r^3 \sin 3\alpha + \dots \\ + c'_1 + 2c'_2 r \cos \alpha + 3c'_3 r^2 \cos 2\alpha + 4c'_4 r^3 \cos 3\alpha + \dots \end{array} \right\}, \\ g'' = 0 \left\{ \begin{array}{l} c_1 + 2c_2 r \cos \alpha + 3c_3 r^2 \cos 2\alpha + 4c_4 r^3 \cos 3\alpha + \dots \\ + r \cos \alpha - 2c'_2 r \sin \alpha - 3c'_3 r^2 \sin 2\alpha - 4c'_4 r^3 \sin 3\alpha - \dots \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

Le glissement principal  $g$ , dont les projections sur les  $u$  et sur les  $v$  sont  $g'$  et  $g''$ , est, comme on voit, en le divisant par  $\theta$ , une résultante générale de lignes

$$r, \quad c_1, \quad 2c_2 r, \quad 3c_3 r^2, \dots; \quad c'_1, \quad 2c'_2 r, \quad 3c'_3 r^2, \dots$$

faisant avec l'axe des  $u$  les angles

$$\frac{\pi}{2} + \alpha, \quad \frac{\pi}{2}, \quad \frac{\pi}{2} - \alpha, \quad \frac{\pi}{2} - 2\alpha, \dots, \quad 0, \quad -\alpha, \quad -2\alpha, \dots$$

Cette résultante  $\frac{g}{\theta}$  est donnée par

$$\begin{aligned} \frac{g^2}{\theta^2} &= r^2 + (c_1^2 + c'^2_1) + (c_2^2 + c'^2_2)(2r)^2 + (c_3^2 + c'^2_3)(3r^2)^2 + (c_4^2 + c'^2_4)(4r^3)^2 + \dots \\ &+ 2.4(c_1 \cos \alpha - c'_1 \sin \alpha)r + 2.2(c_2 \cos 2\alpha - c'_2 \sin 2\alpha)r^2 + 2.3(c_3 \cos 3\alpha - c'_3 \sin 3\alpha)r^3 + \dots \\ &+ 2.4.2[(c_1 c_2 + c'_1 c'_2) \cos \alpha - (c_1 c'_2 - c_2 c'_1) \sin \alpha]r + 2.4.3[(c_1 c_3 + c'_1 c'_3) \cos 2\alpha - (c_1 c'_3 - c_3 c'_1) \sin 2\alpha]r^2 + 2.4.4[\dots \\ &\quad + 2.2.3[(c_2 c_3 + c'_2 c'_3) \cos \alpha - (c_2 c'_3 - c_3 c'_2) \sin \alpha]r^3 + 2.2.4[\dots \\ &\quad + 2.3.4[\dots \\ &= r^2 + \Sigma (c^2_n + c'^2_n) (nr^{n-1})^2 + 2\Sigma n (c_n \cos n\alpha - c'_n \sin n\alpha) r^n + \\ &\quad + 2\Sigma \Sigma nm [(c_n c_m + c'_n c'_m) \cos (m-n)\alpha - (c_n c'_m - c_m c'_n) \sin (m-n)\alpha] r^{m+n-2} \end{aligned}$$

expression dans le dernier terme de laquelle  $n, m$  sont deux indices Inégaux dont le second est plus grand que le premier. On

(Du n° 150).

pourrait la changer en une expression en coordonnées ordinaires  $u, v$  en mettant  $u, v, u^2 - v^2, 2uv, u^3 - 3uv^2, 3u^2v - v^3$ , etc. pour  $r \cos \alpha, r \sin \alpha, r^2 \cos 2\alpha, r^2 \sin 2\alpha, r^3 \cos 3\alpha, r^3 \sin 3\alpha$ , etc.

Mais on a aussi les solutions plus générales suivantes, où les indices  $n, n'$  peuvent être des nombres quelconques entiers ou fractionnaires, positifs, négatifs ou nuls :

$$\text{Équation de la surface } z = \theta (\Sigma C_n r^n \sin n\alpha + \Sigma C'_n r^{n'} \cos n'\alpha),$$

$$\text{Glissements } \begin{cases} g' = \theta [-r \sin \alpha + \Sigma n C_n r^{n-1} \sin (n-1)\alpha + \Sigma n' C'_n r^{n'-1} \cos (n'-1)\alpha] \\ g'' = \theta [r \cos \alpha + \Sigma n C_n r^{n-1} \cos (n-1)\alpha - \Sigma n' C'_n r^{n'-1} \sin (n'-1)\alpha]. \end{cases}$$

$$\text{Équation du contour } \frac{r^2}{2} + \Sigma C_n r^n \cos n\alpha - \Sigma C'_n r^{n'} \sin n'\alpha = K.$$

Il existe, au reste, d'autres intégrales particulières de l'équation aux différences partielles  $\frac{d^2z}{du^2} + \frac{d^2z}{dv^2} = 0$  (voyez § 25). A chacune

d'elles, arbitrairement choisie pour équation de la surface modifiée de la section, répond une forme de contour, et même une infinité de formes représentées par des équations faciles à obtenir, ne diffé-

rant entre elles que par la valeur d'un terme constant tel que le second membre  $K$  ci-dessus. En effet, en écrivant  $\frac{dz}{dv} du - \frac{dz}{du} dv = -\theta d \frac{u^2 + v^2}{2}$  la condition (§ 8)  $\left(\frac{dz}{dv} + \theta u\right) du - \left(\frac{dz}{du} - \theta v\right) dv = 0$

qui appartient aux points du contour, et qui est ainsi son équation différentielle quand on met pour  $z$  une valeur en  $u, v$ , son premier membre forme une différentielle complète comme le second, si  $z$  sa-

tisfait à la condition connue d'intégralité  $\frac{d\left(\frac{dz}{dv}\right)}{dv} = \frac{d\left(-\frac{dz}{du}\right)}{du}$ , qui

revient à l'équation aux différences partielles  $\frac{d^2z}{du^2} + \frac{d^2z}{dv^2} = 0$ .

§ 12. Cas où les contours des sections ont une forme symétrique, etc. — Lorsque la symétrie a lieu par rapport à l'axe des  $u$ , il ne doit y avoir, dans l'équation des contours en coordonnées ordi-

(Du n° 150).

naires  $\frac{u^2 + v^2}{2} + \dots = K$  du § 10, que les termes contenant des puissances paires de  $v$ , afin que l'équation ne change pas quand on met  $-v$  pour  $v$ ; ce qui donne

$$C'_1 = 0, \quad C'_2 = 0, \quad C'_3 = 0, \quad C'_4 = 0, \quad \dots$$

L'expression du petit déplacement longitudinal  $z$  se réduit à la première ligne entre accolades, et on a  $z = 0$  pour  $v = 0$ , en sorte que toute ligne de symétrie reste immobile ou dans le plan primitif de la section quand l'axe de torsion traverse la section en un point de cette ligne; ce qui pouvait être déduit, plus généralement, de cette simple remarque que la ligne de symétrie n'a pas de raison de s'écarter de ce plan primitif d'un côté plutôt que de l'autre, lorsque le prisme est tordu uniformément par des forces agissant d'une manière symétrique aux deux bouts.

Pour des contours symétriques par rapport à l'axe des  $v$ , on doit avoir par une raison semblable :

$$C_1 = 0, \quad C_3 = 0, \quad C_5 = 0, \quad \dots \\ C'_2 = 0, \quad C'_4 = 0, \quad C'_6 = 0, \dots$$

Si les contours sont symétriques par rapport à chacun de ces deux axes, tous ces coefficients s'annulent et il ne reste que les termes en

$$C_2, \quad C_4, \quad C_6, \quad C_8, \quad \dots$$

Et, pour les contours qui sont, en outre, *égaux dans les deux sens*  $u, v$ , l'équation ne doit contenir, avec le terme  $\frac{u^2 + v^2}{2}$  ou  $\frac{r^2}{2}$  obligé pour toutes les équations qui les représentent en termes algébriques entiers, que des termes en

$$C_4, \quad C_8, \quad C_{12}, \quad \dots$$

ou du 4°, du 8°, du 12° ..... degré à puissances paires; ce qui réduit

(Du n° 156).

l'équation  $z = \dots$  de la surface à des termes aussi de ces degrés 4, 8, 12, etc... mais à puissances impaires de  $u$  et de  $v$ .

Pour les contours qui ont simplement un centre sur l'axe de torsion, ou dont l'équation reste la même quand on change à la fois  $u, v$ , en  $-u, -v$ , les coefficients d'indice impair doivent être nuls, ou on doit avoir  $C_1 = 0, C_3 = 0, \dots, C'_1 = 0, C'_3 = 0, \dots$ .

Avant de particulariser de diverses manières les contours des sections, nous allons exposer quelques propriétés communes à tous les prismes tordus.

§ 13. *Réduction, à un couple, des forces tangentielles agissant sur chacune des deux bases ou sur chaque section transversale de tout prisme ainsi tordu uniformément.* — Quels que soient les contours des sections, symétriques ou non, représentés par une équation soit algébrique, soit transcendante, on a toujours sur chaque section  $\omega$ , et pour toute son étendue :

$$\int g'd\omega = 0, \quad \int g''d\omega = 0.$$

En effet, les forces tangentielles extérieures  $Gg'd\omega, Gg''d\omega$  agissant sur les éléments  $d\omega$  d'une des deux bases du prisme parallèlement aux coordonnées  $u, v$ , et les forces égales, aussi extérieures et par conséquent de sens opposés —  $Gg'd\omega, -Gg''d\omega$  qui agissent de même sur les éléments de l'autre base, ces forces, disons-nous, font équilibre aux actions intérieures de ce solide, puisque ses faces latérales ne supportent aucune action par hypothèse. Elles doivent donc se faire équilibre entre elles comme on l'entend en statique élémentaire, ou remplir les conditions connues de l'équilibre des forces sur les systèmes solides. Or c'est ce qui ne saurait avoir lieu si, sur chaque base, leurs sommes  $\pm G \int g'd\omega, \pm G \int g''d\omega$  dans chaque sens ne sont pas nulles séparément; car alors, considérées à la fois sur les deux bases, elles feraient un couple ayant pour bras de levier la longueur du prisme, et l'équilibre n'existerait pas.

Cette nullité des sommes  $\int g'd\omega, \int g''d\omega$  se vérifie d'elle-même lorsque la section a un centre et que l'axe de torsion y passe; car alors on a (§ précédent)  $C_1 = 0, C_3 = 0, \dots, C'_1 = 0, C'_3 = 0, \dots$ , ce qui rend égales, au signe près, deux valeurs, soit de  $g'$ , soit



(Du n° 156).

de  $g''$  relatives à des points ayant les mêmes coordonnées  $u, v$  aussi au signe près, et nulles par conséquent les sommes de leurs produits par des éléments égaux  $d\omega$ . Mais on voit que les mêmes conditions  $\int g'd\omega = 0, \int g''d\omega = 0$  sont remplies aussi lorsque l'axe de rotation ne passe pas au centre ou que la section n'a même pas de centre; nous avons pu le vérifier numériquement pour des sections de diverses formes particulières (1).

§ 14. *Conservation de la forme des équations algébriques des contours des sections, du § 10 ci-dessus, quand on change l'origine et les axes des coordonnées transversales.* — Mettons :

(1) Nous ne l'avons pas encore fait lors de l'impression de notre Mémoire sur la torsion; aussi nous y énoncions, à l'article 59, la possibilité de restrictions qui n'ont pas lieu.

On peut vérifier encore de la manière suivante, qui est une particularisation de la méthode générale donnée par M. Lamé à sa 2<sup>e</sup> Leçon (1852) sur l'élasticité, que la nullité des deux intégrales  $\int g'd\omega, \int g''d\omega$  est une conséquence des équations différentielles indéfinie et définie du problème de la torsion, équations (§§ 6 et 8 ci-dessus) qui peuvent être écrites ainsi, en appelant  $x$  la coordonnée longitudinale des points du prisme dont  $u, v$  sont les coordonnées transversales, et  $\xi, \gamma$  les angles que fait, avec les  $u$  et les  $v$ , la normale au contour de la section ou bien aux faces latérales :

$$\frac{dg'}{du} + \frac{dg''}{dv} = 0, \quad \frac{dg'}{dx} = 0, \quad \frac{dg''}{dx} = 0 \text{ partout;}$$

$$g'' \cos \gamma + g' \cos \xi = 0 \text{ sur ces faces latérales.}$$

En multipliant par  $v$  la première de ces équations, par  $x$  la deuxième, et en les retranchant respectivement de la troisième multipliée par  $x$  et de la première multipliée par  $u$ , on obtient celles-ci :

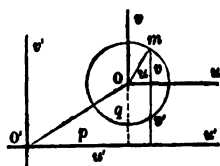
$$\frac{d(xg'')}{dx} - \frac{d(vg')}{du} - \frac{d(vg'')}{dv} = 0, \quad \frac{d(xg')}{dx} - \frac{d(ug'')}{du} - \frac{d(vg'')}{dv} = 0,$$

qui, multipliées par l'élément solide  $dxdu dv$  et intégrées pour tout le volume du prisme, donnent facilement (Lamé, § 40), en appelant  $a$  sa longueur ou hauteur, et  $d\omega$  l'élément de la surface latérale de même que  $d\omega = du dv$  est l'élément des bases :

$$a \int g'd\omega - \int v(g' \cos \xi + g'' \cos \gamma) d\omega = 0, \quad a \int g'd\omega - \int u(g' \cos \xi + g'' \cos \gamma) d\omega = 0,$$

d'où  $\int g''d\omega = 0, \int g'd\omega = 0$ , eu égard à l'équation  $g'' \cos \gamma + g' \cos \xi = 0$  ci-dessus.

(Du n° 158).

 $u' - p$  à la place de  $u$ , $v' - q$  à la place de  $v$ dans l'équation générale  $\frac{u^2 + v^2}{2} + \dots = K$ 

des contours algébriques du § 10; c'est-à-dire transportons l'origine des coordonnées de O en un point O' pour lequel

 $u = -p, v = -q$ , en changeant  $u, v$ en d'autres coordonnées  $u', v'$  parallèles, dont les axes passent par O'. Comme cette équation peut être écrite

$$\frac{u^2 + v^2}{2} + C_1 u + C_2 v + C_3 u^2 + \dots - C'_1 v - C'_2 v^2 - C'_3 v^3 - \dots = K$$

lorsqu'on fait, pour abrégier

$$u^2 - v^2 = u_2, \quad u^3 - 3uv^2 = u_3, \quad u^4 - 6u^2v^2 + v^4 = u_4, \quad \dots$$

$$2uv = v_2, \quad 3u^2v - v^3 = v_3, \quad 4u^3v - 4uv^3 = v_4, \quad \dots$$

(ce qui revient à appeler généralement  $u_n, v_n$  les produits  $r^n \cos n\alpha, r^n \sin n\alpha$ ), si nous nommons encore

$$u'_n, v'_n, \text{ et } p_n, q_n$$

des expressions composées en  $u', v'$ , ou en  $p, q$ , comme  $u_n, v_n$  le sont en  $u, v$ , nous trouverons d'abord facilement par cette substitution de  $u' - p, v' - q$  à  $u, v$  :

$$u_n = u'_n - \frac{n}{4} (pu'_{n-1} - qv'_{n-1}) + \frac{n}{4} \frac{n-1}{2} (p_2 u'_{n-2} - q_2 v'_{n-2}) - \dots$$

$$v_n = v'_n - \frac{n}{4} (pv'_{n-1} + qu'_{n-1}) + \frac{n}{4} \frac{n-1}{2} (p_2 v'_{n-2} + q_2 u'_{n-2}) - \dots$$

En sorte que l'équation du contour avec les coordonnées nouvelles sera bien de cette forme, semblable à sa forme primitive

$$\frac{u'^2 + v'^2}{2} + D_1 u' + D_2 u'^2 + D_3 u'^3 + \dots - D'_1 v' - D'_2 v'^2 - D'_3 v'^3 - \dots = L,$$

(Du n° 156).

$D_1, D_2 \dots, D'_1, D'_2 \dots$  étant des polynômes en  $C_1, C_2 \dots, C'_1, C'_2 \dots, p$  et  $q$  <sup>(1)</sup>.

Cette forme se conservera encore la même si, au lieu de changer l'origine des coordonnées, on remplace les anciens axes des  $u$ , des  $v$ , par des axes nouveaux faisant avec ceux-ci un angle quelconque  $\delta$ ; car si l'on pose l'équation du contour en coordonnées polaires, ou si on l'écrit (§ 11) :

$$\frac{r^2}{2} + C_1 r \cos \alpha + C'_1 r^2 \cos 2\alpha + \dots - C'_1 r \sin \alpha - C'_2 r^2 \sin 2\alpha - \dots = K,$$

la transformation s'opérera en y faisant  $\alpha = \delta + \alpha'$ ,  $\alpha'$  étant l'angle du rayon vecteur  $r$  avec le nouvel axe des  $u$ ; or cette substitution donnera :

$$\begin{aligned} \frac{r^2}{2} + (C_1 \cos \delta - C'_1 \sin \delta) r \cos \alpha' + (C_2 \cos 2\delta - C'_2 \sin 2\delta) r^2 \cos 2\alpha' + \dots \\ - (C_1 \sin \delta + C'_1 \cos \delta) r \sin \alpha' - (C_2 \sin 2\delta + C'_2 \cos 2\delta) r^2 \sin 2\alpha' - \dots = K, \end{aligned}$$

ou une équation toujours de même forme, *quels que soient les axes des coordonnées transversales.*

§ 15. *Torsion d'un prisme autour de divers axes intérieurs ou extérieurs, parallèles à ses arêtes. Identité des glissements, du moment de torsion, et de la surface courbe affectée par les sections, quel que soit l'axe de torsion.*— Si nous faisons, comme au § précédent,  $u = u' - p$ ,  $v = v' - q$  dans les expressions des glissements données § 10, et qui peuvent être écrites, avec les notations dont nous venons de faire usage :

(<sup>1</sup>) On trouve pour ces polynômes

$$\begin{aligned} L = K - \frac{p^2 + q^2}{2} + C_1 p - C_2 p^2 + \dots - C'_1 q + C'_2 q^2 - \dots \\ D_1 = -p + C_1 - 2C_2 p + 3C_3 p^2 - \dots + 2C'_1 q - 3C'_2 q^2 + \dots \\ 1.2 D_2 = 2.4 C_2 - 3.2 C_3 p + 4.3 C_4 p^2 - \dots + 3.2 C'_1 q - 4.3 C'_2 q^2 + \dots \\ 1.2.3 D_3 = 3.2.4 C_3 - 4.3.2 C_4 p + 5.4.3 C_5 p^2 - \dots + 4.3.2 C'_1 q - 5.4.3 C'_2 q^2 + \dots \\ \dots \dots \dots \\ D'_1 = q + C'_1 - 2C'_2 p + 3C'_3 p^2 - \dots - 2C_2 q + 3C_3 q^2 - \dots \\ 1.2 D'_2 = 2.4 C'_2 - 3.2 C'_3 p + 4.3 C'_4 p^2 - \dots - 3.2 C_3 q + 4.3 C_4 q^2 - \dots \\ \dots \dots \dots \end{aligned}$$

(Du n° 156).

$$\begin{aligned} g' &= \theta (C'_1 + 2C'_2u + 3C'_3u_2 + \dots - v + 2C_2v + 3C_3v_2 + \dots), \\ g'' &= \theta (u + C_1 + 2C_2u + 3C_3u_2 + \dots - 2C'_2v - 3C'_3v_2 - \dots), \end{aligned}$$

nous obtenons, tout calcul fait, avec les mêmes notations du § précédent :

$$\begin{aligned} g' &= \theta (D'_1 + 2D'_2u' + 3D'_3u'_2 + \dots - v' + 2D_2v' + 3D_3v'_2 + \dots), \\ g'' &= \theta (u' + D_1 + 2D_2u' + 3D_3u'_2 + \dots - 2D'_2v' - 3D'_3v'_2 - \dots), \end{aligned}$$

c'est-à-dire, d'après l'équation du contour en  $u'$ ,  $v'$  obtenue au même §, précisément les glissements qu'on aurait eus si la torsion avait été opérée autour de l'axe passant en  $O'$  au lieu de l'être autour de l'axe passant en  $O$ .

*Les glissements, ou les inclinaisons prises par les fibres devenues des hélices, sur les divers éléments des sections devenues des surfaces courbes, sont donc les mêmes, quel que soit l'axe, parallèle aux arêtes, autour duquel on opère une torsion  $\theta$ .*

Comme les inclinaisons mutuelles des fibres devenues des hélices sont aussi les mêmes, quel que soit l'axe, il est facile d'en déduire, soustractivement, que les inclinaisons mutuelles des éléments des sections, et par conséquent *les formes des surfaces courbes qu'elles affectent* sont constamment les mêmes aussi, et que la seule différence est dans les inclinaisons diverses qu'elles prennent sur les axes de torsion diversement situés.

Mais on peut démontrer ces théorèmes d'une manière plus générale, ou applicable également aux formes transcendentes, en partant des équations différentielles indéfinie et définie (§ 6 et § 8) :

$$\frac{d^2z}{du^2} + \frac{d^2z}{dv^2} = 0, \quad \left(\frac{dz}{dv} + \theta u\right) du - \left(\frac{dz}{du} - \theta v\right) dv = 0,$$

qui déterminent le déplacement longitudinal  $z$  d'un point pour une torsion  $\theta$  autour de l'axe passant par l'origine  $O$  de ses coordonnées  $u, v$ . En effet, si l'on y change les variables  $u, v$  en d'autres  $u' = u + p$ ,  $v' = v + q$ , elles deviennent

$$\frac{d^2z}{du'^2} + \frac{d^2z}{dv'^2} = 0, \quad \left(\frac{dz}{dv'} + \theta u' - \theta p\right) du' - \left(\frac{dz}{du'} - \theta v' + \theta q\right) dv' = 0;$$

et ces équations sont satisfaites par

(Du n° 156).

$$z = z' + \theta(pv' - qu')$$

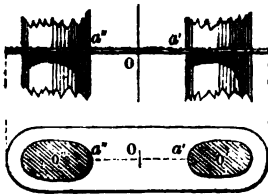
en appelant  $z'$  la valeur du déplacement longitudinal  $z$  qui y satisfait si l'on avait  $p = 0, q = 0$ , ou si la torsion s'opérait autour de l'axe nouveau  $O'$  au lieu de s'opérer autour de l'axe ancien  $O$ .

On voit que les ordonnées  $z, z'$  des deux surfaces dans lesquelles ces deux torsions ont transformé les plans des sections ne diffèrent que par la petite ordonnée  $\theta(pv' - qu') = \theta(pv - qu)$  d'un plan très-peu incliné, d'où il suit que ces deux surfaces sont superposables et peuvent être amenées à coïncider moyennant de petites rotations  $\theta p, -\theta q$  de l'une d'elles autour de parallèles aux  $u$  et aux  $v$ .

On voit aussi que  $\frac{dz}{dv} + \theta u = \frac{dz'}{dv'} + \theta u', \frac{dz}{du} - \theta v = \frac{dz'}{du'} - \theta v'$ , ou que les glissements  $g', g''$  déterminés par l'une et par l'autre torsion sont les mêmes aux mêmes points, comme nous venons de le démontrer autrement pour les sections dont les contours ont une équation de la forme algébrique  $\frac{u^2 + v^2}{2} + \dots = K$  du § 10.

Il s'ensuit que le moment de torsion (§ 9) a la même grandeur, quel que soit l'axe (parallèle aux arêtes), autour duquel on tord le prisme, puisque les forces  $Gg'd\omega, Gg''d\omega$  agissant sur chaque section et dont il est le moment total, sont toujours les mêmes, et qu'elles n'ont pas de résultante ou qu'elles se réduisent constamment à un couple comme on a vu § 13.

La torsion d'un prisme autour d'un axe extérieur est réalisable en l'unissant à cet axe par des liens transversaux qui l'astreignent à présenter toujours à celui-ci la même arête, sans que ces liens gênent du reste l'inclinaison et la courbure que tendent à prendre ses fibres et ses sections. Elle est opérée plus facilement en tordant deux



prismes égaux, parallèles et distants, liés de manière que leurs sections correspondantes  $o', o''$  se regardent constamment par les mêmes points  $a', a''$ , astreints à rester sur une même droite passant par l'axe de torsion intermédiaire  $O$  (voy. ci-après, § 36).

On voit que les mêmes forces  $Gg'd\omega, Gg''d\omega$  appliquées aux élé-

( Du n° 156 ).

ments des bases d'un prisme le maintiennent tordu indifféremment autour de tout axe parallèle à ses arêtes, et que le moment de la torsion simultanée de deux prismes égaux et distants est justement double de celui qui maintiendrait tordu chacun d'eux d'un même angle autour d'un axe intérieur.

Il faut toutefois, évidemment, lorsque l'axe de torsion n'est pas l'axe qu'on a considéré en traitant de la flexion et qui traverse les sections à leurs centres de gravité, ajouter aux forces  $Gg'd\omega$ ,  $Gg''d\omega$  des forces capables de fléchir le prisme de manière que ce dernier axe devienne une hélice. Mais ces dernières forces sont très-petites du second ordre si, comme nous l'avons constamment supposé, la torsion  $\theta$  est très-petite du premier ordre <sup>(1)</sup>; elles ne devaient donc pas être fournies par notre calcul, où les quantités du second ordre sont négligées.

§ 16. Expression générale du moment de torsion des prismes dont les sections ont des contours représentés par l'équation algébrique

du § 10. — En mettant dans  $M_1 = G \int_0^\omega (g''u - g'v) d\omega$  (§ 9) les valeurs (§ 10) des glissements  $g''$  et  $g'$ , on trouve pour le moment de torsion

$$M_1 = G\theta \int_0^\omega d\omega \left[ \begin{array}{l} u^3 + v^3 + C_1u + 2C_2(u^2 - v^2) + 3C_3(u^3 - 3uv^2) + 4C_4(u^4 - 6u^2v^2 + v^4) + \dots \\ - C'_1v - 2C'_2 \cdot 2uv - 3C'_3(3u^2v - v^3) - 4C'_4(4u^3v - 4uv^3) - \dots \end{array} \right]$$

expression dans laquelle on peut prolonger ou réduire autant qu'on veut la quantité entre crochets par l'addition de nouveaux termes (§ 10) ou par la suppression d'un ou plusieurs de ceux que nous écrivons ici.

(1) En effet, soit  $a = Oo'$  la distance entre l'axe de figure  $o'$  passant par les centres de gravité des sections, et l'axe de torsion  $O$ . La tangente de l'angle que fait, avec un plan perpendiculaire à celui-ci, l'hélice dans laquelle celui-là se change, est  $\frac{1}{6a}$ ; on a, pour le rayon de courbure  $\rho$  de cette hélice,  $\rho = \left(1 + \frac{1}{6^2 a^2}\right) a$ ; d'où, pour le moment de flexion,

$$\frac{EI}{\rho} = \frac{EI}{a + \frac{1}{6^2 a}} = 6^2 a \cdot \frac{EI}{1 + 6^2 a^2}$$

quantité très-petite du second ordre.

(Du n° 156).

En coordonnées polaires (§ 11), on aurait

$$M_1 = G\theta \int d\omega \left[ r^2 + C_1 r \cos \alpha + 2C_2 r^2 \cos 2\alpha + 3C_3 r^3 \cos 3\alpha + \dots \right. \\ \left. - C_1' r \sin \alpha - 2C_2' r^2 \sin 2\alpha - 3C_3' r^3 \sin 3\alpha - \dots \right]^2$$

ou, plus généralement,  $n, n'$  pouvant être fractionnaires ou négatifs (§ 11) :

$$M_1 = G\theta \int d\omega (r^2 + \sum n C_n \cos n\alpha - \sum n' C_{n'} r^{n'} \sin n'\alpha).$$

§ 17. *Plus grands glissements. Points dangereux. Équation de cohésion permanente ou de résistance à la rupture éloignée par torsion.* — Afin de ne pas interrompre des considérations naturellement liées, nous donnerons ici, et dans chacune des particularisations des §§ suivants, après l'expression du moment de torsion, l'équation de cohésion permanente ou de résistance à la rupture éloignée par torsion (<sup>1</sup>), bien que Navier n'ait parlé de cette résistance qu'à un article suivant, VI.

En appelant, comme au § 7 de la note du n° 152, p. 196 :

$T_0$ , la limite des efforts tangentiels que la matière peut supporter sans danger par unité de surface pendant un temps indéfini, la limite des glissements non dangereux sera

$$\frac{T_0}{G}.$$

Il faut exprimer que nulle part cette limite n'est dépassée, ou que le plus grand glissement principal  $g = \sqrt{g'^2 + g''^2}$  lui est égal ou inférieur. La condition de résistance permanente à la rupture par torsion sera donc

$$\left(\frac{T_0}{G}\right)^2 = \text{ou } > \text{ maximum de } g'^2 + g''^2.$$

Pour trouver les points dangereux ou de maximum de  $g^2 = \frac{g'^2 + g''^2}{\theta^2}$ .

il convient de remarquer, d'abord, d'après les expressions de  $g'$  et  $g''$ , ou celle de  $g^2 = g'^2 + g''^2$  en  $r$  et  $\alpha$  du § 11, que, sur le plan

(\*) On verra, à la note du n° 465, quelle formule on pourrait adopter pour la résistance à la rupture immédiate ou prochaine par torsion, ou moins dans le cas du cylindre à base circulaire.

(Du n° 153).

indéfini de la section, elles peuvent toujours prendre des grandeurs aussi considérables qu'on veut, car, en rendant  $r$  suffisamment grand, le terme où il est à la plus haute puissance surpassera tous les autres, et comme il est toujours positif dans  $g^2$ , ce carré devient infini avec  $r$  dans toutes les directions ou pour toutes les valeurs de l'angle  $\alpha$ . Si  $g^2$  croissait toujours de l'intérieur à l'extérieur de la section pour chaque direction, ce serait constamment sur son contour qu'il faudrait chercher les points dangereux. Mais nous savons qu'il y a souvent des points du contour où le glissement est nul, et il peut y avoir, dans l'intérieur, quelque point de maximum absolu de  $g^2$  (quoique cela ne se soit présenté dans aucun des exemples ci-après traités); et il n'est pas impossible que ce maximum excède toutes les valeurs de  $g^2$  relatives aux points du contour.

Il faudra donc chercher d'abord les points de maximum absolu de  $g^2$ , ou s'assurer qu'il n'y en a pas. Ils doivent, comme on sait, s'ils existent, satisfaire à

$$\frac{d \frac{g^2}{\theta^2}}{d\alpha} = 0, \quad \frac{d \frac{g^2}{\theta^2}}{dr} = 0; \quad \frac{d^2 \frac{g^2}{\theta^2}}{d\alpha^2} \text{ et } \frac{d^2 \frac{g^2}{\theta^2}}{dr^2} \text{ négatifs; } \left( \frac{d^2 \frac{g^2}{\theta^2}}{d\alpha dr} \right)^2 - \frac{d^2 \frac{g^2}{\theta^2}}{d\alpha^2} \cdot \frac{d^2 \frac{g^2}{\theta^2}}{dr^2} \text{ négatif ou nul.}$$

On les cherchera analytiquement ou numériquement sur les li-

gnes droites ou courbes représentées par l'équation  $\frac{d \frac{g^2}{\theta^2}}{d\alpha} = 0$  (qui en fournira toujours plusieurs, et qui est généralement plus simple

que l'équation  $\frac{d \frac{g^2}{\theta^2}}{dr} = 0$ , susceptible de servir au même objet) et on essayera s'ils remplissent les conditions relatives aux dérivées du second ordre  $\frac{d^2}{d\alpha^2}$ ,  $\frac{d^2}{dr^2}$ , et s'ils tombent à l'intérieur du contour.

La double recherche sur les lignes ayant pour équation  $\frac{d \frac{g^2}{\theta^2}}{d\alpha} = 0$  et sur le contour, conduira donc, dans tous les cas, à la détermi-



(Du n° 156).

nation de ces points de la section où  $g^2$  a une valeur plus grande qu'aux autres points.

Souvent ces points dangereux seront les intersections de lignes  $\frac{d g^2}{d x} = 0$  avec le contour de la section; mais quelquefois aussi ils se trouveront en d'autres endroits du contour, comme nous en verrons des exemples aux §§ 33, 35.

Lorsque la section est partagée symétriquement par une ou plusieurs lignes droites, ces lignes de symétrie sont nécessairement au nombre de celles de maximum ou de minimum relatif de  $g^2$  qui satisfont à  $\frac{d g^2}{d \alpha} = 0$ ; car, en prenant l'une d'elles pour l'axe à partir duquel on compte les angles  $\alpha$  (ou pour l'axe des  $u'$ , les coefficients  $C'_1, C'_2, C'_3, \dots$  des équations et expressions des §§ 10 et 11 sont nuls, et il ne reste que les termes affectés de  $C_1, C_2, C_3, \dots$ , comme on a vu § 12; l'expression (§ 11) de  $\frac{g^2}{\theta^2}$  ne contient donc que des cosinus de  $\alpha$  et de ses multiples; son coefficient différentiel ne contient que des sinus et devient nul pour  $\alpha = 0$ , c'est-à-dire pour les points de la ligne de symétrie.

Et les intersections de chacune de ces lignes de symétrie avec le contour de la section sont des points de maximum ou de minimum de  $g^2$  sur ce contour; car elles le coupent à angle droit;  $r$  y est constant sur une petite étendue, en sorte que la condition  $\frac{d \cdot g^2}{d \alpha} = 0$  pour  $r$  constant s'y trouve remplie par les valeurs de  $g^2$  relatives aux points du même contour.

C'est ce qu'il était facile de prévoir en se rappelant (§ 12) que lorsqu'on place l'axe de torsion de manière qu'il rencontre une ligne de symétrie, elle reste tout entière dans le plan primitif de la section, ce qui donne pour tous ses points, en la prenant pour axe des  $u$ ,  $v = 0$ , la pente  $i = 0$ , et  $g' = i - \theta v$  nul aussi, ainsi que son coefficient différentiel  $\frac{d g'}{d u}$ ; d'où  $g = g''$ , et, vu que  $\frac{d g'}{d u} + \frac{d g''}{d v} = 0$  (§ 6),

$$\frac{d g}{d v} = 0,$$

(Du n° 156).

c'est-à-dire que le glissement principal est bien un maximum ou un minimum, en tous les points de cette ligne de symétrie, parmi les autres points situés sur des lignes qui la coupent à angle droit.

Aussi, dans presque tous les exemples ci-après (mais non dans tous, voyez §§ 33, 35), c'est aux extrémités des plus grands et des plus petits diamètres que se sont trouvés les points de maximum et de minimum de glissement. Les points dangereux ou de maximum ont été, pour ces mêmes exemples, *les extrémités des plus petits diamètres*, ou *les points du contour les plus rapprochés des centres des sections*. Mais cela ne saurait être général, car, *lorsque le contour offre des angles rentrants*, les arêtes y restent normales aux sections, et le glissement y est nul comme aux angles saillants, par la même raison qu'on a dite au § 4, et qui est dérivée de la condition de normalité des sections infléchies à la surface latérale modifiée par la torsion; d'où l'on doit inférer que lorsque les contours des sections offrent des parties rentrantes arrondies, mais d'une courbure très prononcée, le glissement doit y être un minimum et non un maximum parmi les points du contour.

En tous cas il est bien entendu, si seulement on se rappelle l'indépendance où sont les glissements de la position de l'axe de torsion (§ 15) que leurs grandeurs ne sauraient être constamment en raison directe des distances, à cet axe, des points des sections où ils ont lieu, comme il fallait le supposer dans l'ancienne théorie basée sur l'hypothèse que les sections restent planes et perpendiculaires au même axe. Il n'est donc nullement étonnant que les plus grands glissements se trouvent le plus souvent aux points les plus proches de l'axe de torsion supposé passer au centre.

§ 18. *Premier exemple ou première particularisation. Section circulaire. Torsion d'un cylindre autour de son axe de figure.* — On obtient une section circulaire en supposant les coefficients  $C_1, C_2, C_3, \dots, C'_1, C'_2, C'_3, \dots$  tous nuls, ou les pentes  $i, j$  nulles; car l'équation du contour est alors, en faisant  $2K = r^2$ :

$$u^2 + v^2 = r^2;$$

et l'équation de la surface de la section, qui se réduit à

(Du n° 156).

$$z = 0,$$

vérifie bien que cette surface reste plane comme on l'a vu au § 4. Alors on a le moment de torsion

$$M_1 = G\theta \int (u^2 + v^2) du = G\theta J,$$

J étant le moment d'inertie de la section autour de son centre, ainsi qu'il a déjà été dit, ou bien, vu que  $J = \frac{\pi r^4}{2}$  (§ 1),

$$M_1 = G\theta \frac{\pi r^4}{2}.$$

Une pareille torsion d'un cylindre circulaire de rayon quelconque  $r$  est déterminée par des forces qui ont pour valeur, en appelant toujours  $r$  le rayon vecteur du milieu d'un élément quelconque  $d\omega$  de la section

$$Gg d\omega = Gd\omega \sqrt{g'^2 + g''^2} = Gd\omega \sqrt{(\theta u)^2 + (-\theta v)^2} = G\theta r \cdot d\omega,$$

c'est-à-dire par des forces appliquées sur les bases extrêmes, tangentiellement ou dans leurs plans, et perpendiculairement aux rayons vecteurs auxquels elles sont proportionnelles, ainsi qu'aux superficies des éléments  $d\omega$ .

Et tout autre mode de sollicitation ou de distribution des forces aux extrémités donnera très-approximativement, d'après ce qu'on a dit au § 9 et d'après l'expérience, la même torsion pour le même moment total  $M_1$ .

Comme le plus grand glissement répond à  $r = r$ , l'équation de cohésion permanente ou de résistance à la rupture *éloignée* sera (§ précédent) :

$$T_1 = \text{ou } > G\theta r;$$

ou, en éliminant  $G\theta$  au moyen de l'expression  $M_1 = G\theta \frac{\pi r^4}{2}$  du moment de torsion :

$$\text{Limite de } M_1 = \frac{\pi r^3}{2} T_1;$$

équation qu'on aurait obtenue immédiatement en regardant les résistances comme proportionnelles aux distances au centre (ce qui

(Du n° 156).

est vrai pour le cas de la section circulaire), en sorte que si  $T_0$  est la résistance par unité superficielle à la distance  $r$  ou à la circonférence, on a  $T_0 \frac{r}{R}$  à la distance quelconque  $r$ , d'où, en faisant  $d\omega = 2\pi r dr$ , superficie d'une couronne infiniment étroite :

$$M_1 = \int_0^R T_0 \frac{r}{R} 2\pi r dr. r = \frac{\pi R^3}{2} T_0.$$

Cette manière directe d'arriver à l'équation de résistance permanente n'est applicable qu'au cylindre à base circulaire.

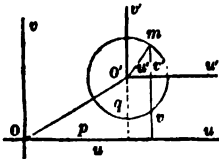
§ 19. *Deuxième exemple ou deuxième particularisation. Section encore circulaire, mais torsion du cylindre autour d'un axe excentrique intérieur ou extérieur.* — Si nous conservons seulement, dans les formules du § 10, les termes du premier degré ou en  $C_1$ ,  $C'_1$ , en annulant toujours les autres coefficients, nous aurons encore une section circulaire, car l'équation du contour

$$\frac{u^2 + v^2}{2} + C_1 u - C'_1 v = K$$

peut, en faisant  $C_1 = -p$ ,  $C'_1 = q$ ,  $2K + C_1^2 + C'^2_1 = r^2$ , être mise sous la forme

$$(u-p)^2 + (v-q)^2 = r^2;$$

elle représente un cercle dont le centre  $O'$  a pour coordonnées  $p, q$  par rapport aux axes  $Ou, Ov$  passant par celui de torsion  $O$ .



Cette section circulaire reste plane comme quand la torsion se fait autour de l'axe de figure  $O'$  (§ 14); mais son plan devient oblique à l'axe de torsion  $O$ . Ce

plan a pour équation (§ 10)

$$z = \theta(C_1 v + C'_1 u) = \theta(qu - pv).$$

On peut vérifier que l'on a toujours (§ 13)  $\int g' d\omega = 0$ ,  $\int g'' d\omega = 0$ , car (§ 10)

$$\begin{aligned} g' &= \theta(-v + C'_1) = -\theta(v - q), \\ g'' &= (u + C_1) = \theta(u - p), \end{aligned}$$

(Du n° 150).

et  $\int v d\omega = q\omega$ ,  $\int u d\omega = p\omega$  en vertu de la propriété connue du centre de gravité  $O'$  dont  $p$ ,  $q$  sont l'abscisse  $u$  et l'ordonnée  $v$ .

On peut vérifier également que les glissements  $g'$ ,  $g''$ , conformément à ce qu'on a démontré en général au § 15, sont les mêmes que si l'axe de torsion passait au centre  $O'$ ; car  $u - p$ ,  $v - q$  seraient les coordonnées, par rapport à des axes parallèles à  $Ou$ ,  $Ov$  et tirés du même centre, de l'élément dont les coordonnées, par rapport à  $Ou$ ,  $Ov$ , sont  $u$ ,  $v$ .

Le moment de torsion est bien aussi le même, car  $\int d\omega(u^2 + v^2 + C_1u - C'_1v)$  (§ 16) revient à  $\int [(u-p)^2 + (v-q)^2] d\omega$ , vu que  $C_1 = -p$ ,  $C'_1 = q$ ,  $\int u d\omega = p\omega$ ,  $\int v d\omega = q\omega$ .

§ 20. *Observation générale sur les termes du premier degré ou en  $C_1$ ,  $C'_1$ , des équations du contour des sections.* — En faisant  $u = 0$ ,  $v = 0$  dans les expressions générales des glissements du § 10, on a

$$g' = \theta C'_1, \quad g'' = \theta C_1, \quad g = \sqrt{g'^2 + g''^2} = \theta \sqrt{C_1^2 + C'^2_1};$$

en sorte que l'inclinaison  $g$  prise sur l'axe de torsion par les surfaces dans lesquelles se change le plan des sections a pour grandeur

$$\theta \sqrt{C_1^2 + C'^2_1}.$$

Les sections ne restent normales à l'axe de torsion passant par l'origine des coordonnées que quand  $C_1 = 0$ ,  $C'_1 = 0$  ou quand il n'y a pas de terme du premier degré dans l'équation de leur contour.

Dans l'intérieur de tout prisme, il existe une fibre à laquelle les sections restent normales, soit que cette fibre demeure rectiligne comme quand on la prend pour axe de torsion, soit qu'elle se courbe en hélice comme quand l'axe est pris ailleurs. On obtient les coordonnées du point où elle traverse la section en égalant à zéro les expressions de  $g'$ ,  $g''$  et éliminant pour tirer  $u$  et  $v$ . Il est au centre de figure lorsque la section en a un.

Mais il peut exister plusieurs fibres jouissant de cette propriété de rester normale à la section infléchie, notamment lorsque son contour offre des angles (§ 4).

§ 21. *Troisième particularisation. Section elliptique.* — On obtient cette section en ne conservant dans le premier membre de

(Du n° 156).

l'équation générale des contours du § 10, p. 256, que les termes du premier et du second degré, ou les coefficients  $C_1, C'_1, C_2, C'_2$ . Nous supprimerons ceux du premier degré qui ne feraient que rendre l'axe de torsion excentrique (§§ précédents); nous annulerons aussi le terme  $2C'_1 uv$ , afin que les axes ou diamètres principaux de l'ellipse soient dans la direction des coordonnées  $u, v$ . Restera le coefficient  $C_2$ , d'où :

1° Pour l'équation du contour de la section,

$$\frac{u^2 + v^2}{2} + C_2(u^2 - v^2) = K,$$

ou

$$h \frac{u^2}{b^2} + h \frac{v^2}{c^2} = 1 \quad \text{en faisant} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{2K}{1 + 2C_2} = \frac{b^2}{4}; \quad \frac{2K}{1 - 2C_2} = \frac{c^2}{4}; \\ 2C_2 = -\frac{b^2 - c^2}{b^2 + c^2}, \quad 4K = \frac{b^2 c^2}{b^2 + c^2}; \end{array} \right.$$

2° Pour l'équation de la surface courbe dans laquelle se sera changé son plan,  $z = 0C_2 \cdot 2uv$ , ou

$$z = -0 \frac{b^2 - c^2}{b^2 + c^2} uv;$$

3° Pour les glissements,

$$g' = \frac{-2b^2}{b^2 + c^2} \theta v, \quad g'' = \frac{2c^2}{b^2 + c^2} \theta u.$$

On pourrait y arriver plus élémentairement en parlant de la supposition de *pentés constantes* pour chaque coupe parallèle à l'axe de torsion et aux  $v$  ou aux  $u$ , ou de

$$i = i_1 = 2C_2 \theta v, \quad j = j_1 = 2C_2 \theta u,$$

qui satisfait bien à  $(i_1 - i) + (j_1 - j) = 0$  du § 6, et en remarquant que l'équation de condition (§ 8)  $(j + \theta u) du - (i - \theta v) dv = 0$  relative au contour, et qui exprime la normalité des sections à la surface latérale modifiée, se réduit alors, en faisant  $\frac{1 - 2C_2}{1 + 2C_2} = \frac{b^2}{c^2}$ , à

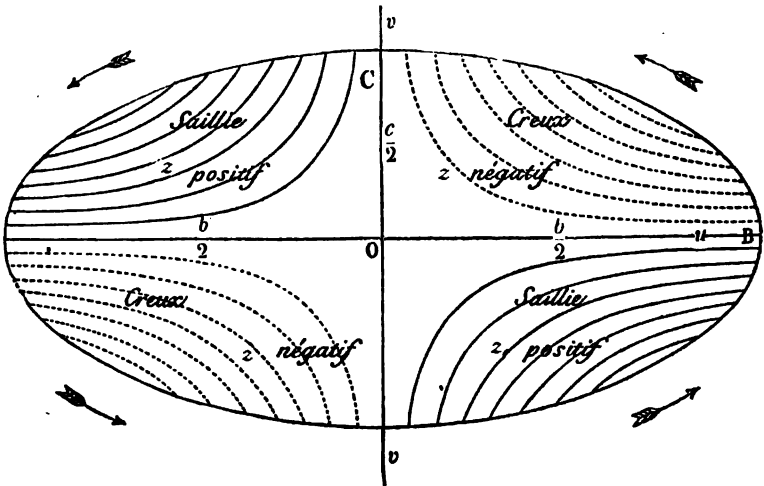
$$u du + \frac{bv}{c} \cdot \frac{bdv}{c} = 0,$$

représentant une courbe telle que si l'on amplifie toutes ses or-

(Du n° 150).

données  $v$  dans le rapport  $\frac{b}{c}$  l'on obtient un cercle ; car  $v'$  étant les ordonnées nouvelles  $= \frac{bv}{c}$ , il en résulte  $\frac{u}{v'} = \frac{-dv'}{du}$ , équation dont on déduit facilement, par la considération de la similitude des deux triangles qui ont pour côtés, l'un  $u, v'$ , et l'autre  $-dv', du$ , que les éléments du contour sont perpendiculaires aux rayons vecteurs, ce qui caractérise bien le cercle, d'où une ellipse en réduisant toutes les ordonnées  $v'$  dans un rapport constant.

La surface courbe  $z = -0 \frac{b^2 - c^2}{b^2 + c^2} uv$  affectée, après la torsion, par les plans des sections, est le *plan gauche* ou le paraboloidé hyperbolique engendré à volonté par une ligne droite restant parallèle au plan ( $uz$ ) ou par une ligne droite restant parallèle au plan ( $vz$ ) et s'appuyant sur deux des lignes droites de l'autre génération. En décrivant cette surface topographiquement ou à la manière des terrains par coupes équidistantes parallèles à son plan primitif ou perpendiculaires à l'axe de figure du prisme, autour duquel la torsion s'est effectuée, et projetées toutes sur ce plan, on a la suite d'hyperboles représentées par l'épure ci-dessous, et qui ont pour asymptotes les axes de l'ellipse-contour.



(Du n° 156).

Le coefficient  $\theta \frac{b^2 - c^2}{b^2 + c^2}$  représente le degré du *gauchissement* très-petit qu'a éprouvé le plan de la section; il est, comme l'on voit, proportionnel à la torsion  $\theta$  et d'autant plus grand que les axes de l'ellipse sont plus inégaux, sans toutefois dépasser la valeur  $\theta$  qu'il prend



pour  $\frac{b}{c}$  très-grand. La petite ordonnée  $z$ , perpendiculaire au plan primitif de la section, est négative dans les régions des  $u$  et  $v$  positifs et des  $u$  et  $v$  négatifs lorsque  $b$  est plus grand que  $c$ , la torsion étant supposée avoir lieu de  $u$  et  $v$  pour un observateur placé du côté des  $z$  positifs; et  $z$  est positif dans les deux autres régions ou quarts d'ellipse, en sorte que la section *gauchie* offre deux saillies et deux creux séparés par les deux *lignes de symétrie* restées immobiles (§ 12).

L'épure ombrée ci-contre donne, à une plus petite échelle, les projections BCB, sur un plan parallèle à l'axe de torsion, des contours d'un grand nombre de sections ainsi modifiées. La torsion y a été *exagérée* pour en rendre les effets plus apparents; car elle est supposée d'une demi-circonférence sur une longueur égale à  $\pi$  fois, ou 3<sup>fois</sup>, 1416 le grand diamètre  $b = BB$  de la base; en sorte que  $\theta = \frac{\pi}{\pi b} = \frac{1}{b}$ , et le *pas* des hé-



(Du n° 156).

lices dans lesquelles une torsion  $\theta$  par unité de longueur change toutes les fibres et les arêtes et dont l'expression générale est

$$\frac{2\pi}{\theta}$$

a pour grandeur seulement  $2\pi b$  ou 6<sup>fois</sup>,28 ce diamètre. Or, avec une torsion pareille, les proportions des accroissements des distances moléculaires cesseraient de pouvoir être considérées comme très-petites, et les lois analytiques de l'élasticité qu'on a invoquées ne s'observeraient plus (1).

§ 22: *Moment de torsion et résistance à la rupture éloignée par torsion d'un cylindre elliptique. Position des points dangereux. Explication des différences avec la théorie ancienne.*— On trouve pour le moment de torsion de ce cylindre elliptique dont la base a pour diamètres principaux  $b$  et  $c$ , soit en faisant  $C_1 = 0$ ,  $C'_1 = 0$ ,  $C'_2 = 0$ ,  $C_3 = 0 \dots$  dans la formule générale  $M_1 = \dots$  du § 16, soit en mettant dans celle  $M_1 = G \int_{\omega} (g''u - g'v) d\omega$  du § 9 les valeurs de  $g'$ ,  $g''$  du § précédent

$$M_1 = 2G\theta \frac{b^3 \int v^2 d\omega + c^3 \int u^2 d\omega}{b^3 + c^3}.$$

Comme on a (§ 4 de la note du n° 84, p. 66) pour les moments d'inertie de l'ellipse autour de ses axes  $b$ ,  $c$  :

$$I = \int v^2 d\omega = \frac{\pi b c^3}{64}, \quad I' = \int u^2 d\omega = \frac{\pi b^3 c}{64},$$

cette expression du moment revient à

$$M_1 = \frac{G\theta}{16} \frac{\pi b^3 c^3}{b^3 + c^3} = \frac{4G\theta}{\frac{1}{I} + \frac{1}{I'}}.$$

(1) On va voir en effet tout à l'heure que le glissement maximum est  $\frac{\delta^2}{b^2 + c^2} \theta c$ , ce qui, avec  $\theta = \frac{4}{b}$ , donnerait  $\frac{bc}{b^2 + c^2}$ , dont la valeur numérique, si  $b = 2c$  comme le suppose la figure, serait  $\frac{2}{5}$  et donnerait lieu, dans un sens oblique (§ 6 de la note du n° 152), à une dilatation d'un peu plus d'un cinquième.

(Du n° 150).

Il est égal au coefficient d'élasticité de glissement  $G$  multiplié par la torsion  $\theta$  et par deux fois l'inverse de la demi-somme des inverses des moments d'inertie principaux de la section.

Pour poser l'équation de cohésion permanente ou de résistance à la rupture éloignée, il faut d'abord chercher, sur la section, le point *dangereux*, pour lequel  $g = \sqrt{g'^2 + g''^2}$  est le plus grand. La valeur générale de ce glissement principal, d'après celles de  $g'$ ,  $g''$  du § précédent, est

$$g = \frac{20}{b^2 + c^2} \sqrt{b^4 v^2 + c^4 u^2}.$$

C'est sur le contour qu'il faut en chercher le maximum, car la quantité sous le radical, pour chaque direction du rayon vecteur ou chaque valeur du rapport  $\frac{v}{u}$ , est d'autant plus grande que  $v$  et  $u$  sont plus grands. Or comme on a aux points du contour

$$\frac{u^2}{b^2} + \frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{h},$$

on obtient pour le glissement, en tirant  $v^2$  et substituant

$$g = \frac{c0}{b^2 + c^2} \sqrt{b^4 - h(b^2 - c^2)u^2}.$$

La plus grande valeur de ce glissement, si  $b > c$  comme nous supposons, a lieu évidemment pour

$$u = 0,$$

et sa plus petite valeur pour  $u = \pm$  (le demi grand axe  $\frac{b}{2}$ ).

C'est donc aux extrémités du petit axe de la section elliptique que se trouvent les points dangereux ou de plus grand glissement. Et c'est aux extrémités du grand axe que sont, parmi les points du contour, ceux de plus petit glissement, où la matière court le moins de risque de se désagréger, si, bien entendu, le solide n'est que tordu sans être en même temps fléchi, et pourvu toujours que la torsion soit peu considérable, en sorte que la dilatation longitudinale des fibres courbées en hélice ne dépasse pas une proportion très-petite du second ordre (§ 2).

(Du n° 156).

Le glissement maximum a ainsi pour grandeur

$$\frac{b^2}{b^2 + c^2} c \theta.$$

En l'égalant à la limite des glissements permanents non dangereux, ou à (§ 17) :

$$\frac{T_0}{G},$$

on a pour équation de non-rupture ou de cohésion permanente

$$\frac{T_0}{G} = \text{ou} > \frac{b^2 c \theta}{b^2 + c^2};$$

ou, en éliminant  $\theta$  au moyen de l'expression  $M_1 = \frac{G\theta}{16} \frac{\pi b^2 c^2}{b^2 + c^2}$  du moment de torsion,

$$\text{Limite de } M_1 = \frac{\pi b c^2}{16} T_0 = \frac{4I}{c} T_0;$$

équation qui, comme toutes celles du même genre, ne contient plus que le coefficient de cohésion permanente  $T_0$ .

Les expressions ci-dessus de  $M_1$  en fonction de  $\theta$  et  $G$ , et de limite  $M_1$  en fonction de  $T_0$  sont très-différentes de ce qu'on aurait par l'ancienne théorie (n° 156 et § 4 de sa note), car cette théorie, qui supposait que les sections des prismes tordus conservent leur forme plane primitive, aurait donné pour notre cylindre elliptique

$$\text{Moment de torsion } M_1 = G\theta J = G\theta(I + I') = G\theta \frac{\pi bc}{64} (b^2 + c^2).$$

$$\text{Plus grand glissement, aux extrémités du grand axe } 2b, \frac{T_0}{G} = \frac{b}{2} \theta.$$

$$\text{Équation de cohésion permanente : limite } M_1 = \frac{\pi}{32} (b^2 + c^2) c T_0 = 2 \frac{I + I'}{b} T_0.$$

Voici les rapports entre les vraies valeurs de  $M$  et de limite  $M_1$ , et celles que nous venons d'écrire :

(Du n° 156).

Rapport des vraies valeurs aux valeurs fausses		
	de $M_1$ .	de Limite $M_1$ .
Pour $\frac{b}{c}$ quelconque . . . . .	$\frac{4b^2c^2}{(b^2+c^2)^2}$	$\frac{2bc}{b^2+c^2}$
$\frac{b}{c} = 1$ . . . . .	1	1
2 . . . . .	$\frac{16}{25} = 0,64$	$\frac{4}{5} = 0,8$
3 . . . . .	$\frac{9}{25} = 0,36$	$\frac{3}{5} = 0,6$
4 . . . . .	$\frac{64}{289} = 0,2215$	$\frac{8}{47} = 0,1706$
5 . . . . .	$\frac{25}{169} = 0,14792$	$\frac{5}{43} = 0,3846$
$\frac{b}{c}$ très-grand . . . . .	$\frac{4c^2}{b^2}$ très-petit.	$\frac{2c}{b}$ très-petit.

Les formules, basées sur la théorie ancienne, inspireraient donc aux constructeurs une fausse sécurité, soit pour la résistance à la rupture, soit, et encore plus, pour la rigidité ou la résistance élastique. Le rapport des charges regardées comme non dangereuses d'après cette théorie et d'après celle que nous venons d'exposer peut prendre toutes les valeurs de 1 à l'infini.

Cette diminution du moment des résistances élastiques par l'effet du *gauchissement* du plan des sections s'explique en observant que, comme les éléments des sections s'inclinent en même temps que les éléments des fibres devenues des hélices, l'inclinaison résultante, ou l'inclinaison mutuelle des fibres et des éléments, est moyennement moindre que si les fibres s'inclinaient seules ou que si les sections restaient planes et perpendiculaires à l'axe de torsion. Cette inclinaison mutuelle, ce *glissement*, est même presque zéro aux extrémités du grand diamètre  $b$  de l'ellipse, s'il est considérable par rapport au petit diamètre  $c$ ; ce qui vient de ce que les fibres exercent sur les éléments des sections une action qui maintient presque leur perpendicularité aux extrémités des sections très-allongées, ou aux parties où le contour a une courbure très-prononcée.

(Du n° 156).

Mais aux parties d'une faible courbure, comme sont les extrémités du petit diamètre de l'ellipse, il en est autrement; les éléments superficiels, retenus par d'autres éléments qui les précèdent et les suivent, non-seulement ne cèdent pas à la sollicitation des fibres, mais encore sont entraînés à s'incliner dans un sens opposé à l'action qu'elles exercent en cet endroit.

Il en résulte que, contrairement à ce qui se passerait si les sections restaient planes, c'est aux points du contour les plus rapprochés du centre qu'a lieu le maximum de glissement, de résistance et de danger. Là, les fibres s'inclinent moins sur l'axe central, et les éléments superficiels s'inclinent aussi moins sur leur ancien plan qu'aux points les plus éloignés, mais leurs deux inclinaisons conspirent ou s'ajoutent pour produire un glissement plus considérable, tandis qu'aux points les plus éloignés, elles se soustraient l'une de l'autre pour produire un glissement presque nul.

C'est ce que met très-bien en lumière l'épure ombrée du § précédent (et encore mieux un relief en carton, sept fois plus grand, que nous avons d'abord construit). L'arête BBB ....., l'une des deux plus éloignées de l'axe de figure, reste sensiblement normale aux contours BCB, BCB ..... des diverses sections, tandis que les deux arêtes CCCC..., CCCC..., qui sont les plus rapprochées du même axe, ont sur ces contours des inclinaisons très-prononcées, représentant le glissement maximum ou le plus dangereux, dont on a

trouvé la valeur égale à  $\frac{b^2}{b^2 + c^2} c\theta$ ; valeur toujours supérieure à

celle  $\frac{c}{2}\theta$  qu'il aurait si la section restait plane; supérieure aussi à

celle  $\frac{c^2}{b^2 + c^2} b\theta$  du glissement aux points B, B, B ....., ou les plus

éloignés, dans le rapport  $\frac{b^2c}{bc^2} = \frac{b}{c}$  (1).

(1) En attendant que nous rapportions, dans le complément aux articles I à VI, les diverses expériences de flexion, de torsion, etc., qui ont été faites, nous pouvons dire que celles de M. Wertheim, consignées dans son Mémoire annoncé dès 1853, présenté à l'Académie le 19 février 1855, et publié au numéro de juin 1857 des *Annales de physique et de chimie*, ont confirmé la théorie nouvelle que nous exposons ici pour la torsion; car, en ce qui concerne d'abord les cylindres ellip-

(Du n° 156).

§ 23. *Quatrième particularisation. Prisme à section triangulaire équilatérale.* — On donne rarement une pareille section aux pièces tordues ; mais elle est, après le cercle, celle pour laquelle les formules sont les plus simples, et sa considération fournira d'ailleurs, avec des remarques utiles, des chiffres pour une petite table à l'aide de laquelle on peut, en intercalant, se dispenser quelquefois de longs calculs dans la pratique (voy. § 38).

On obtient cette section triangulaire en réduisant les expressions et équations du § 10 aux termes affectés du coefficient  $C_3$ , et en particulierisant convenablement le second membre désigné par  $K$ . En effet, l'équation

$$\frac{u^2 + v^2}{2} + C_3(u^2 - 3uv^2) = K$$

convient, tant qu'on n'établit aucune relation entre  $C_3$  et  $K$ , à une infinité de contours courbes à trois sommets, dont chacun est compris entre un cercle et le triangle équilatéral inscrit. Mais en y faisant

$$C_3 = -\frac{1}{6b}, \quad K = \frac{2b^2}{3},$$

cette équation multipliée par  $2b$  peut être écrite

$$(u + b) \left( v - \frac{2b - u}{\sqrt{3}} \right) \left( v + \frac{2b - u}{\sqrt{3}} \right) = 0,$$

et représente bien, en égalant à zéro successivement les facteurs entre parenthèses, les trois côtés  $BC$ ,  $BA$ ,  $CA$  d'un triangle équilatéral dont le centre de gravité  $o$  est pris pour origine

tiques, la formule de moment de torsion dont il se sert, sous le n° 44, pour représenter très-approximativement ses expériences sur l'acier et sur le cuivre (à l'article XII de son Mémoire, page 238 du volume des *Annales*), coïncide avec

la nôtre ci-dessus  $M_1 = \frac{G\theta}{46} \frac{\pi b^3 c^3}{b^2 + c^2}$ , en appelant  $G$ ,  $M_1$ ,  $\theta$ ,  $b$ ,  $c$  ce qu'il appelle

$\frac{3}{8} E$ ,  $pR'$ ,  $\frac{\pi \cdot \psi}{480^\circ \cdot l}$ ,  $2c_1$ ,  $2c_2$ . La remarque que l'habile physicien fait à la page suivante de son Mémoire prouve qu'il n'a pas aperçu cette coïncidence avec une formule que nous avons donnée dès 1847, aux *Comptes rendus* de l'Académie, t. XXIV, p. 849.



(Du n° 156).

Pour le calculer, observons d'abord que les deux moments d'inertie  $\int u^2 d\omega$ ,  $\int v^2 d\omega$  autour de  $ov$ ,  $oAu$  sont égaux ; car les moments autour des trois hauteurs du triangle ont évidemment la même grandeur ; or lorsque les moments d'inertie d'une figure autour de deux droites, même obliques l'une à l'autre, et passant par son centre de gravité, sont égaux, ils le sont autour de toutes les droites tracées sur son plan par le même centre (\*). On a donc d'abord pour le moment polaire du triangle (§ 1 de la note du n° 82) :

$$J = \int (u^2 + v^2) d\omega = 2 \int v^2 d\omega = 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{12} \cdot 3b \left(\frac{k}{2}\right)^2 = \frac{bk^2}{8} = 3b^4 \sqrt{3}.$$

Observons ensuite que si  $r$  est le rayon vecteur d'un élément  $d\omega$ , on a  $\int r^2 v d\omega = 0$ , et de même  $\int r^2 u d\omega = 0$ ,  $u'$  étant la distance de cet élément à l'autre hauteur ou axe de symétrie CoF du triangle ; car chacune de ces deux sommes se compose de termes égaux deux à deux au signe près ; d'où résulte  $\int r^2 u d\omega = 0$ , car  $u'$  est somme ou différence des projections de  $u$  et de  $v$  sur CF et sur sa perpendiculaire. En sorte qu'on a

$$\int (u^2 + v^2) u d\omega = 0, \quad \int uv^2 d\omega = - \int u^2 d\omega,$$

$$\text{d'où} \quad \int (u^2 - 3uv^2) d\omega = 4 \int u^2 d\omega ;$$

$$\text{or} \quad \int u^2 d\omega = \int u^2 du \int dv = \int_{-b}^{2b} u^2 du \cdot k \cdot \frac{2b-u}{3b} = \frac{3b^4 k}{10} = \frac{3b^4 \sqrt{3}}{5}.$$

Donc, définitivement

$$M_1 = G\theta \cdot 3b^4 \sqrt{3} \left(1 - \frac{4}{10}\right) = \frac{9}{5} G\theta b^4 \sqrt{3} = 0,6 \cdot G\theta J.$$

Le moment de torsion du prisme triangulaire équilatéral est les 0,6 ou les 3/5 de ce qu'il serait si ses sections restaient planes.

Les glissements  $g'$ ,  $g''$  sont nuls pour  $v = 0$ ,  $u = 2b$ , ou pour  $u = -b$ ,  $v = \pm b\sqrt{3}$ , c'est-à-dire aux angles A, B, C ; ce que nous

(\*) Car, d'après l'expression  $I_1 = I'' + (I' - I'') \left(\frac{y}{r}\right)^2$  du § 8 de la note du n° 83,  $I_1$  ne saurait avoir la même grandeur pour deux valeurs différentes de  $\frac{y}{r}$  qui détermine l'angle des axes de  $I_1$  et de  $I'$ , à moins qu'on n'ait  $I' = I'' = I_1$ .



(Du n° 156).

savons déjà, car (§§ 4 et 14) les arêtes doivent y rester normales aux sections.

Pour trouver les points dangereux ou de plus grand glissement par la méthode du § 17, égalons à zéro la différentielle, par rapport à l'angle  $\alpha$ , de l'expression (§ 11)

$$\frac{g^2}{8b} = r^2 + C_1^2 (3r^2)^2 + 2.3 C_1 r^3 \cos 3\alpha = r^2 + \frac{r^4}{4b^4} - \frac{r^3 \cos 3\alpha}{b}.$$

Nous aurons l'équation

$$3 \frac{r^3}{b} \sin 3\alpha = 0,$$

satisfaite par  $r = 0$ , qui ne saurait convenir, et par

$$\begin{aligned} \sin 3\alpha = 0, \text{ d'où } 3\alpha = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi, 5\pi, 6\pi \\ \alpha = 0, \frac{1}{3}\pi, \frac{2}{3}\pi, \pi, \frac{4}{3}\pi, \frac{5}{3}\pi, 2\pi; \end{aligned}$$

en sorte que (même § 17) les points dangereux doivent être cherchés concurremment sur les trois lignes telles que AD abaissées des angles du triangle sur les côtés opposés, et sur le contour, c'est-à-dire sur les trois côtés tels que BC du triangle.

Or, sur la ligne AD, on a  $v = 0$ ,  $g' = 0$ ,  $g = g'' = 0 \left( u - \frac{u^2}{2b} \right)$ ;

et, sur la ligne BC,  $u = -b$ ,  $g' = 0$ ,  $g = g'' = -0 \frac{3b^2 - v^2}{2b}$ . La

plus grande valeur du glissement, abstraction faite du signe, a lieu sur l'une comme sur l'autre à leur intersection en D, pour laquelle  $v = 0$ ,  $u = -b$ , d'où

$$g = -\frac{3}{2} 0b;$$

car, au point du maximum par rapport à  $r$  ou à  $u$  répondant sur AD à  $u = b$ , ou placé à mi-distance entre O et A, ce glissement n'est que  $\frac{1}{2} 0b$  ou trois fois moindre.

Les points dangereux sont donc aux milieux des côtés de la base triangulaire équilatérale, ou (comme pour l'ellipse, etc.) aux endroits les plus proches du centre de gravité.

Égalée ou comparée à la limite  $\frac{T_0}{G}$  des dilatations (§ 17), cette va-

(Du n° 156).

leur  $\frac{3}{2} 0b$  du plus grand glissement donne pour équation de cohésion permanente ou de non-rupture

$$\frac{T_0}{G} = \text{ou} > \frac{3}{2} 0b;$$

d'où, en éliminant  $\theta$  au moyen de  $M_1 = \frac{9}{5} G\theta b^3 \sqrt{3} = 0,6 G\theta J$ ,

$$\text{Limite } M_1 = 0,4 \frac{J}{b} T_0 = 1,2 T_0 b^3 \sqrt{3} = \frac{k^3}{20} T_0.$$

ou les  $0,8 = 4/5$  de  $\frac{JT_0}{2b}$  qu'on aurait par la théorie ancienne qui supposait que les sections restent planes.

Il est bon de voir quels résultats aurait donnés l'application complète de la méthode de recherche des points de maximum absolu s'il y en a sur le plan de la section, parce que, dans d'autres cas, on ne peut pas se passer de l'employer.

On d'abord pour ces points, s'ils existent,

$$\frac{d}{d\alpha} \frac{g^3}{\theta^2} = 3 \frac{r^3}{b} \sin 3\alpha = 0, \quad \frac{d}{dr} \frac{g^3}{\theta^2} = 2r + \frac{r^3}{b^2} - \frac{3r^3 \cos 3\alpha}{b} = 0,$$

équations satisfaites par  $r = 0$  ou par

$$\sin 3\alpha = 0, \quad \frac{r}{b} = \frac{3}{2} \cos 3\alpha \pm \frac{1}{2} \sqrt{9 \cos^2 3\alpha - 8}$$

et qui donnent en conséquence :

1°  $r = 0$  ou le centre  $o$

$$2^\circ \alpha = 0, \frac{2}{3} \pi, \frac{4}{3} \pi, \cos 3\alpha = 1 \begin{cases} r = 2b \text{ ou les trois angles } A, B, C, \\ r = b \text{ ou des points tels que } P, \end{cases}$$

$$3^\circ \alpha = \frac{1}{3} \pi, \pi, \frac{5}{3} \pi, \cos 3\alpha = -1 \begin{cases} r = -b \text{ ou les milieux } D, E, F \text{ des côtés,} \\ r = -2b \text{ ou les trois angles } A, B, C. \end{cases}$$

Mais on a pour les coefficients différentiels du second ordre de  $\frac{g^3}{\theta^2}$

$$\frac{d^2}{d\alpha^2} = 9 \frac{r^3}{b} \cos 3\alpha, \quad \frac{d^2}{d\alpha dr} = 9 \frac{r^3}{b} \sin 3\alpha, \quad \frac{d^2}{dr^2} = 2 + \frac{3r^2}{b^2} - \frac{6r \cos 3\alpha}{b}.$$

( Du n° 156 ).

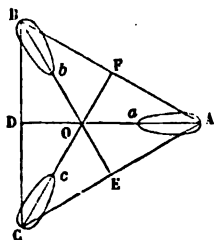
Tous les systèmes de valeurs ci-dessus de  $r$  et de  $\alpha$  donnent  $\frac{d^2}{da dr} = 0$ . Ceux où l'on a  $r = \pm b$ , représentant les points tels que P à mi-distance sur les lignes de jonction du centre O aux angles donnent  $\frac{d^2}{da^2}$  et  $\frac{d^2}{dr^2}$  de signe contraire, et par conséquent aucun maximum ni minimum absolu. Il n'y a que les trois angles et le centre  $o$  pour lesquels on ait  $\frac{d^2}{da dr} - \frac{d^2}{da^2} \frac{d^2}{dr^2}$  négatif; mais comme  $\frac{d^2}{da^2}$ ,  $\frac{d^2}{dr^2}$  sont positifs, ce sont des points de minimum de  $g^2$ , et il n'y a pas, sur le plan de la section, de point de maximum absolu de ce carré du glissement, qui augmente indéfiniment avec  $r$  pour toutes les valeurs de l'angle  $\alpha$  rendant  $\cos 3\alpha$  négatif.

Les points de plus grand glissement peuvent donc être cherchés seulement sur le contour, et nous les avons trouvés ci-dessus aux milieux des côtés du triangle.

Nous aurions pu (§ 17), au lieu de les chercher d'abord sur les lignes droites  $\frac{d}{da} \frac{g^2}{\theta^2} = 0$  ou  $\sin 3\alpha = 0$ , considérer (toujours concurremment avec le contour) les lignes dont l'équation est donnée en égalant à zéro la différentielle première de  $\frac{g^2}{\theta^2}$  par rapport à  $r$ . Mais ces lignes dont l'équation est

$$2 + \frac{r^2}{b^2} - \frac{3r \cos 3\alpha}{b} = 0, \text{ ou } r = \frac{b}{2} (3 \cos 3\alpha \pm \sqrt{9 \cos^2 3\alpha - 8}),$$

sont moins simples que les trois droites  $\sin 3\alpha = 0$ , car ce sont trois petites courbes ovoïdes égales  $aA$ ,  $bB$ ,  $cC$  limitées par les deux circonférences  $r = Oa = b$  et  $r = OA = 2b$ , et par six rayons vecteurs qui leur sont aussi tangents et qui font des angles  $\pm \frac{1}{3}$  arccos  $\sqrt{\frac{8}{9}} = \pm 6^\circ 29'$  avec les lignes de jonction  $OA$ ,  $OB$ ,  $OC$  du centre  $O$  aux angles du triangle. C'est un exemple de ce qui a été



(Du n° 156).

annoncé au § 17, à savoir que la recherche des points de maximum absolu est plus facile en se servant des lignes données par  $\frac{d}{dx} \frac{g^2}{\theta^2} = 0$  que de celles qui sont données par  $\frac{d}{dr} \frac{g^2}{\theta^2} = 0$ .

§ 24. *Assimilation, à l'ellipse, des sections allongées de forme symétrique quelconque, quant à la courbure prise par leurs plans. Formule approchée de M. Cauchy relative au prisme rectangle.* — Si l'on suppose approximativement qu'une section de forme quelconque symétrique par rapport à deux axes rectangulaires, et dont une des dimensions est beaucoup plus grande que l'autre, prenne, par la torsion du prisme à laquelle elle appartient, la même forme de plan gauche que l'ellipse ayant les mêmes dimensions principales  $b, c$ , ou qu'on ait (§ 21)

$$g' = \frac{-2b^2}{b^2 + c^2} \theta v, \quad g'' = \frac{2c^2}{b^2 + c^2} \theta u,$$

la valeur du moment de torsion, aussi approximative, sera l'expression suivante, trouvée § 22, où, sous sa seconde forme,  $I$  et  $I'$  sont les moments d'inertie principaux de la section donnée

$$M_1 = 2G\theta \frac{b^2 \int v^2 d\omega + c^2 \int u^2 d\omega}{b^2 + c^2} = 2G\theta \frac{b^2 I + c^2 I'}{b^2 + c^2}.$$

Si l'assimilation se fait avec une ellipse ayant, au lieu des mêmes diamètres principaux  $b, c$ , les mêmes moments d'inertie principaux  $I, I'$  que la section donnée, comme, dans l'ellipse,  $I$  et  $I'$  sont proportionnels aux carrés de ces diamètres, il faudra prendre

$$M_1 = G\theta \frac{4I I'}{I + I'} \approx \frac{4G\theta}{\frac{1}{I} + \frac{1}{I'}}.$$

Ces deux formules se confondent pour les sections ayant la même forme dans les deux sens, ou qu'on peut faire coïncider avec elles-mêmes en les faisant tourner d'un quart de cercle après avoir amplifié leurs abscisses et réduit leurs ordonnées dans deux rapports constants.

Si, par exemple, la section est un rectangle ayant  $b, c$  pour grand et pour petit côté, et supposé ainsi se *gauchir* comme ferait

(Du n° 150).

l'ellipse *inscrite* ayant  $b, c$  pour diamètres principaux, comme

$$I = \frac{bc^3}{12}, I' = \frac{b^3c}{12} \text{ (n° 81), on aura}$$

$$M_1 = \frac{G\theta}{3} \frac{b^3c^3}{b^2 + c^2}.$$

Cette expression *approchée* du moment de torsion d'un prisme à base rectangle est celle que rapporte Navier au n° 159 ci-après (en faisant  $\alpha = 1$ ); c'est celle qu'a trouvée, en 1829, M. Cauchy, en se basant sur d'autres considérations et sur d'autres hypothèses (1).

Si l'on regarde comme exactes les expressions précédentes des glissements  $g'$  et  $g''$ , le plus grand glissement  $\sqrt{g'^2 + g''^2}$  a lieu pour  $v = \pm \frac{c}{2}$ ,  $u = \pm \frac{b}{2}$ , et sa valeur est pour le rectangle

$$g = \frac{\theta bc}{\sqrt{b^2 + c^2}}.$$

En l'égalant à la limite  $\frac{T_0}{G}$  des glissements non dangereux et éliminant ensuite  $G\theta$  au moyen de l'expression précédente de  $M_1$ , on trouve pour équation de résistance à la rupture

$$\text{Limite } M_1 = \frac{b^3c^3}{3\sqrt{b^2 + c^2}} T_0.$$

donnée aussi par Navier au n° 167 ci-après.

Ces valeurs de  $M_1$  et de  $\text{lim. } M_1$  ne sont exactes, comme on verra, que lorsque le prisme est très-plat, ou qu'un des côtés de sa base est fort considérable par rapport à l'autre; on a alors, si  $c$  est le petit côté, dont on puisse négliger le carré devant  $b^2$  aux dénominateurs :

$$M_1 = G\theta \frac{bc^3}{8} = 4G\theta I, \quad \text{lim. } M_1 = \frac{bc^2}{8} T_0 = \frac{2I}{\frac{1}{4}c} T_0,$$

formules semblables à celles qu'on a pour une ellipse très-allongée.

Mais, pour  $b = c$ , ou pour la section carrée, elles sont fautives.

Elles donnent en effet, alors, la même chose que si les sections restaient planes; et, par conséquent, un moment de torsion  $M_1$  trop fort, puisque, dans la réalité, les sections se courbent vers les angles

(1) Exercices de mathématiques, 4<sup>e</sup> année, p. 59, formule (105).

(Du n° 156).

de manière à rester normales aux quatre arêtes saillantes changées en hélices (§§ 4 et 17), ce qui rend nulle la résistance ou la réaction élastique en ces endroits, et diminue la résistance moyenne.

On peut remarquer, aussi, que pour un rectangle ou un carré, le glissement, d'après ces formules, aurait la plus grande valeur aux angles, *c'est-à-dire précisément aux points où il est égal à zéro.*

Aussi l'expérience, et le calcul exact par séries transcendentes, dont nous allons donner le résultat, prouvent qu'il faut corriger la formule de torsion de M. Cauchy en la multipliant par des coefficients numériques compris entre 0,84346 (répondant à  $b = c$ ) et 1 (répondant à  $c$  très-petit devant  $b$ ).

§ 25. *Prisme à base rectangle. Formules transcendentes et exactes de sa torsion.*— Soient toujours  $b$  les côtés de la section rectangle parallèles aux  $u$ , et  $c$  les côtés parallèles aux  $v$ .

Sur les premiers, ou pour  $v = \pm \frac{c}{2}$ , on a  $dv = 0$ , et, sur les seconds, ou pour  $u = \pm \frac{b}{2}$ , on a  $du = 0$ . La condition définie (§ 8)  $\left(\frac{dz}{dv} + \theta u\right) du - \left(\frac{dz}{du} - \theta v\right) dv = 0$  relative au contour se partage en deux autres

$$\frac{dz}{du} = \theta v \text{ pour } u = \pm \frac{b}{2} \text{ quel que soit } v \text{ entre } -\frac{c}{2} \text{ et } \frac{c}{2}$$

$$\frac{dz}{dv} = -\theta u \text{ pour } v = \pm \frac{c}{2} \text{ quel que soit } u \text{ entre } -\frac{b}{2} \text{ et } \frac{b}{2}.$$

On ne peut pas satisfaire à ces conditions par une intégrale de forme algébrique de l'équation *indéfinie*

$$\frac{d^2z}{du^2} + \frac{d^2z}{dv^2} = 0.$$

Mais cette équation a aussi des intégrales transcendentes car elle est résolue par une somme quelconque de termes  $Ae^{mu}e^{m'v}$  où  $e$  est la base népérienne 2,71828... et  $A$  un nombre quelconque si ceux  $m, m'$  sont liés par  $m^2 + m'^2 = 0$  en sorte que l'un est imaginaire quand l'autre est réel, ce qui revient à prendre pour intégrale générale,  $\Sigma$  s'étendant à toutes les valeurs possibles de  $A_m$ , de  $A'_m$  et de  $m$ ,  $z = \Sigma e^{mu} (A_m \sin mv + A'_m \cos mv)$  ou  $\Sigma e^{m'v} (A_m \sin mu + A'_m \cos mu)$ .

(Du n° 156).

On trouvera ainsi, en déterminant  $m$ ,  $A_m$ ,  $A'_m$  par des procédés connus, et en appelant, pour abrégér,  $\sinh$ ,  $\cosh$ ,  $\tanh$  des sinus, cosinus et tangentes hyperboliques en sorte qu'on ait en général

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}};$$

on trouvera, dis-je, ces expressions doubles en série transcendante, où la somme  $\Sigma$  s'étend à toutes les valeurs entières et positives du nombre  $n$  de 1 à l'infini :

$$\begin{aligned} z &= \theta bc \left[ -\frac{u v}{\delta \frac{b}{c}} + \frac{1}{8} \left(\frac{h}{\pi}\right)^3 \frac{c}{\delta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \sinh \frac{2n-1}{c} \pi u \cdot \sin \frac{2n-1}{c} \pi v}{(2n-1)^3 \cosh \frac{2n-1}{2c} \pi b} \right] = \\ &= \theta bc \left[ \frac{u v}{\delta \frac{b}{c}} - \frac{1}{8} \left(\frac{h}{\pi}\right)^3 \frac{b}{c} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \sinh \frac{2n-1}{b} \pi v \cdot \sin \frac{2n-1}{b} \pi u}{(2n-1)^3 \cosh \frac{2n-1}{2b} \pi c} \right] \quad (1) \end{aligned}$$

(1) En effet, en faisant  $z = z' - \theta uv$ , la deuxième condition définie se simplifie, et on a à intégrer l'équation  $\frac{d^2 z'}{du^2} + \frac{d^2 z'}{dv^2} = 0$  de manière que

$$\begin{aligned} \frac{dz'}{du} &= 2\theta v \quad \text{pour } u = \pm \frac{b}{2} \text{ quel que soit } v \text{ entre } -\frac{c}{2} \text{ et } \frac{c}{2}, \\ \frac{dz'}{dv} &= 0 \quad \text{pour } v = \pm \frac{c}{2} \text{ quel que soit } u \text{ entre } -\frac{b}{2} \text{ et } \frac{b}{2}. \end{aligned}$$

Vu la symétrie de la section par rapport aux axes des  $u$  et des  $v$ , on satisfera à ces équations en donnant, dans la première des deux intégrales générales transcendantes du bas de la page précédente, aux coefficients  $A$ , des valeurs telles que  $z'$  reste le même au signe près quand on change soit  $u$  en  $-u$ , soit  $v$  en  $-v$  d'où  $A'_m = 0$ , et

$$z' = \Sigma A_m (e^{mu} - e^{-mu}) \sin mv,$$

et en déterminant convenablement  $m$  et  $A_m$ . La deuxième condition définie  $\frac{dz'}{dv} = 0$  pour  $v = \pm \frac{c}{2}$ , appliquée au terme général du  $\Sigma$ , servira à déterminer  $m$ ; il en résulte,  $n$  étant tous les nombres entières et positifs de 1 à  $\infty$  :

$$\cos \frac{mc}{2} = 0, \quad \frac{mc}{2} = \frac{2n-1}{2} \pi, \quad m = \frac{2n-1}{c} \pi.$$

Et il faudra que les coefficients  $A_m$  soient tels que la première condition définie

(Du n° 156).

$$\text{D'où, vu qu'en général } \frac{d. \operatorname{sh} x}{dx} = \operatorname{ch} x, \quad \frac{d. \operatorname{ch} x}{dx} = \operatorname{sh} x :$$

soit satisfaite, ou qu'on ait (en divisant par 2b)

$$v = \sum \left[ \frac{2n-1}{2c\theta} \pi \Lambda_n \left( e^{\frac{2n-1}{2c} \pi b} + e^{-\frac{2n-1}{2c} \pi b} \right) \right] \sin \frac{2n-1}{c} \pi v,$$

ou, en représentant par  $B_n$  la quantité entre crochets,

$$v = B_1 \sin \frac{\pi v}{c} + B_2 \sin \frac{3\pi v}{c} + \dots + B_n \sin \frac{2n-1}{c} \pi v + \dots$$

Les coefficients  $B$  peuvent être déterminés par l'expression entre parenthèses de la formule suivante, qui se trouve, sous le n° 7, au bas de la page 649 article 328 de la seconde édition (1833) de la *Mécanique* de M. Poisson,

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{i=\infty} \left( \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x') \sin \frac{2i-1}{2l} \pi x' dx' \right) \sin \frac{2i-1}{2l} \pi x,$$

en faisant  $l = \frac{c}{2}$ ,  $i = n$ ,  $x = v$ ,  $\varphi(x) = v$ , et par conséquent  $\varphi(x') = x'$ . Mais nous pouvons les déterminer directement sans supposer connue cette formule.

Pour cela, multiplions l'équation précédente  $v = B_1 \sin \frac{\pi v}{c} + \dots$  par  $dv \cdot \sin \frac{2n-1}{c} \pi v$  et intégrons ses deux membres de  $v=0$  à  $v = \frac{c}{2}$ . Tous les termes du second membre disparaîtront, excepté celui qui vient de  $B_n \sin \frac{2n-1}{c} \pi v$ , où  $n$  a la même valeur que dans le multiplicateur, car comme on a, en général,

$$\int dv \sin k'v \sin k''v = \int dv \frac{\cos(k-k')v - \cos(k+k')v}{2} = \frac{\sin(k-k')v}{2(k-k')} - \frac{\sin(k+k')v}{2(k+k')} + \text{constante},$$

on a bien, si  $n'$  est un nombre entier différent de  $n$ , en faisant  $k = \frac{2n-1}{c} \pi$ ,  $k' = \frac{2n'-1}{c} \pi$ :

$$\int_0^{\frac{c}{2}} dv \sin \frac{2n-1}{c} \pi v \cdot \sin \frac{2n'-1}{c} \pi v = 0.$$

L'équation multipliée et intégrée n'a plus, en conséquence, que le terme affecté de  $B_n$  dans son second membre, ou se réduit à

$$\int_0^{\frac{c}{2}} v dv \sin \frac{2n-1}{c} \pi v = B_n \int_0^{\frac{c}{2}} dv \cdot \sin^2 \frac{2n-1}{c} \pi v.$$



(Du n° 150).

$$g' = \frac{dz}{du} - \theta v = -\theta c \left[ 2 \frac{v}{c} - \frac{1}{2} \left( \frac{h}{\pi} \right)^2 \sum \frac{(-1)^{n-1} \operatorname{coth} \frac{2n-1}{c} \pi u \cdot \sin \frac{2n-1}{c} \pi v}{(2n-1)^2 \operatorname{coth} \frac{2n-1}{2c} \pi b} \right] =$$

$$= -\frac{\theta c}{2} \left( \frac{h}{\pi} \right)^2 \frac{b}{c} \sum \frac{(-1)^{n-1} \operatorname{sh} \frac{2n-1}{b} \pi v \cdot \cos \frac{2n-1}{b} \pi u}{(2n-1)^2 \operatorname{coth} \frac{2n-1}{2b} \pi c};$$

$$g'' = \frac{dz}{dv} + \theta u = \frac{\theta b}{2} \left( \frac{h}{\pi} \right)^2 \frac{c}{b} \sum \frac{(-1)^{n-1} \operatorname{sh} \frac{2n-1}{c} \pi u \cdot \cos \frac{2n-1}{c} \pi v}{(2n-1)^2 \operatorname{coth} \frac{2n-1}{2c} \pi b} =$$

$$= \theta b \left[ 2 \frac{u}{b} - \frac{1}{2} \left( \frac{h}{\pi} \right)^2 \sum \frac{(-1)^{n-1} \operatorname{coth} \frac{2n-1}{b} \pi v \cdot \sin \frac{2n-1}{b} \pi u}{(2n-1)^2 \operatorname{coth} \frac{2n-1}{2b} \pi c} \right];$$

$$\text{Or } \int_0^{\frac{c}{2}} dv \cdot \sin^2 \frac{2n-1}{c} \pi v = \left[ \frac{v}{2} - \frac{c}{2(2n-1)\pi} \sin \frac{2n-1}{c} \pi v \cdot \cos \frac{2n-1}{c} \pi v \right]_0^{\frac{c}{2}} = \frac{c}{4};$$

$$\int_0^{\frac{c}{2}} v dv \cdot \sin \frac{2n-1}{c} \pi v = \left[ -v \frac{c}{(2n-1)\pi} \cos \frac{2n-1}{c} \pi v + \left( \frac{c}{(2n-1)\pi} \right)^2 \sin \frac{2n-1}{c} \pi v \right]_0^{\frac{c}{2}} =$$

$$= \left( \frac{c}{(2n-1)\pi} \right)^2 (-1)^{n-1}; \text{ d'où on tire le coefficient}$$

$$B_n = \frac{(-1)^{n-1} c^2}{(2n-1)^2 \pi^2} \cdot \frac{1}{c}$$

qui, égalé à la quantité entre crochets de l'équation  $v = \Sigma [ \quad ] \sin \frac{2n-1}{c} \pi v$ ,

donne la valeur de  $A_n$ ; celle-ci, mise dans  $x' = \Sigma A_n (e^{-nu} - e^{-nv}) \sin n\pi v$ , mise à son tour dans  $x = x' - \theta uv$ , donne l'intégrale satisfaisant à toutes les conditions, et qui n'est autre chose que la première des deux valeurs  $x = \theta bc [ \quad ]$ , données ci-dessus, page 292, et qu'il s'agissait ici de démontrer.

La seconde valeur de  $x$  aurait été obtenue absolument de la même manière en faisant  $x = x' + \theta uv$  au lieu de  $x = x' - \theta uv$ , ce qui réduit à zéro le second membre de la première condition définie au lieu de celui de la deuxième, et en prenant  $x' = \Sigma A_n (e^{nv} - e^{-nv}) \sin n\pi v$ .

Ces deux valeurs de  $x$ , très-différentes en apparence, sont identiques, comme nous avons été à même de le vérifier en calculant un grand nombre de valeurs numériques de l'une et de l'autre.

(Du n° 156).

$$\begin{aligned} \text{Et } M_1 &= G\theta bc^3 \left[ \frac{1}{3} - \frac{1}{16} \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 \frac{c}{b} \sum \frac{\text{tah } \frac{2n-1}{2c} \pi b}{(2n-1)^2} \right] = \\ &= G\theta b^3 c \left[ \frac{1}{3} - \frac{1}{16} \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 \frac{b}{c} \sum \frac{\text{tah } \frac{2n-1}{2b} \pi c}{(2n-1)^2} \right] \quad (1). \end{aligned}$$

§ 26. *Conséquences. Moments de torsion des prismes carrés et des prismes rectangles.* — On calcule facilement le moment  $M_1$  quand  $b$  n'est pas plus petit que  $c$  en mettant la première des deux expressions que nous venons d'en donner sous la forme suivante, eu égard à ce que (Lacroix, Calcul diff., n° 1005 et 1184)

$$\sum \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{1}{1} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = \frac{1}{1} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 2 \cdot 5} + \dots = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \frac{\pi^2}{295,1215}$$

dont le produit par  $\frac{1}{16} \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 = 0,209137$  est  $0,210083$  :

(1) En effet, en ayant égard à ce que

$$\int dv \cos kv = \frac{\sin kv}{k} + \text{const.}; \quad \int v dv \sin kv = -v \frac{\cos kv}{k} + \frac{\sin kv}{k^2} + \text{const.};$$

$$\int u du \sinh ku = u \frac{\cosh ku}{k} - \frac{\sinh ku}{k^2} + \text{const.}; \quad \int du \cosh ku = \frac{\sinh ku}{k} + \text{const.},$$

on obtient facilement avec les premières expressions de  $g''$ ,  $\alpha'$  :

$$\begin{aligned} M_1 &= \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} Mv (g''u - g'v) = \\ &= G\theta \left[ \frac{bc^3}{6} + \frac{16bc^3}{\pi^2} \sum \frac{1}{(2n-1)^2} - \frac{64c^4}{\pi^2} \sum \frac{\sinh \frac{2n-1}{2c} \pi b}{(2n-1)^2} \cdot \frac{2n-1}{2c} \pi b \right] \end{aligned}$$

qui revient à la première des deux expressions données pour  $M_1$  si l'on se rappelle (Lacroix, Calcul différentiel et intégral 4848, t. III, n° 4483) que

$$\sum \frac{1}{(2n-1)^2} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = \frac{2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{\pi^2}{2^2}.$$

Et la seconde expression de  $M_1$ , s'obtiendrait de même avec les secondes expressions de  $g''$ ,  $\alpha'$ .

(Du n° 136).

$$M_1 = G\theta bc^3 \left[ \frac{1}{3} - 0,210083 \frac{c}{b} + 0,209137 \frac{c}{b} \left( \frac{1 - \operatorname{tanh} \frac{\pi b}{2c}}{1} + \frac{1 - \operatorname{tanh} \frac{3\pi b}{2c}}{243} + \frac{1 - \operatorname{tanh} \frac{5\pi b}{2c}}{3125} + \dots \right) \right]$$

On n'a besoin de prendre qu'un petit nombre de termes de la série entre parenthèses, car les tangentes hyperboliques de quantités croissantes convergent vers l'unité <sup>(1)</sup>.

Lorsque le côté  $b$  est plus de quatre ou cinq fois le côté  $c$ , toutes ces tangentes sont même sensiblement = 1, et

l'on peut prendre

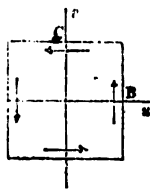
$$M_1 = G\theta bc^3 \left( \frac{1}{3} - 0,210083 \frac{c}{b} \right) = G\theta \frac{bc^3}{3} \left( 1 - 0,630249 \frac{c}{b} \right).$$

Et si  $\frac{c}{b}$  est assez petit pour qu'on puisse négliger le second terme

entre parenthèses, on a  $G\theta \frac{bc^3}{3} = 4G\theta I$  ou ce que nous avons trouvé au § 24 par l'assimilation de cette section allongée à l'ellipse inscrite quant à la forme courbe affectée par son plan après la torsion.

Si la section est carrée  $b = c$  on trouve, puisque  $J = 2 \frac{b^4}{12}$ ,

$$M_1 = 0,440577 G\theta b^4 = 0,843462 G\theta J,$$



c'est-à-dire les 0,843462 du moment de torsion d'un cylindre dont la base circulaire a même moment d'inertie polaire que la base carrée, ou de ce qu'on aurait si les sections carrées restaient planes comme le supposait l'ancienne théorie, même avec la modification de M. Cauchy.

Nous donnerons plus loin (§ 38) un tableau des valeurs du moment  $M_1$ , d'après la formule générale précédente, et une formule

(1) On a en effet

$$1 - \operatorname{tanh} i \frac{\pi}{2} = 0,003728; 0,0004645; 0,000007; 0,0000008;$$

pour  $i = 2; 3; 4; 5$

(Du n° 150).

empirique simple qui les représente à peu près. Ces valeurs sont généralement confirmées par l'expérience (1).

27. *Suite des conséquences. Forme courbe que la torsion donne aux plans des sections des prismes carrés ou rectangles.*— Les valeurs du déplacement longitudinal  $z$ , ou plutôt des rapports numériques

$\frac{z}{\theta \cdot \frac{1}{2} b \cdot \frac{1}{2} c}$  pour diverses valeurs de  $\frac{u}{\frac{1}{2} b}$ ,  $\frac{v}{\frac{1}{2} c}$  croissant de

dixième en dixième entre zéro et un, ont été obtenues par le calcul d'un nombre suffisant de termes des séries transcendantes du § 25 dans les deux cas  $b = c$  et  $b = 2c$  pour les *quarts de section* répondant aux  $u, v$  positifs. Des coupes parallèles aux plans des  $zu$  et des

(1) Nous dirons en effet ici, en attendant la partie expérimentale, 1° que des expériences de Savart (*Annales de chimie et de physique*, t. XLI, 4829, p. 373 et suiv.) sur des lames de verre à vitre et sur des règles de bois de chêne ont confirmé depuis longtemps la proportionnalité du moment de torsion donné par la formule  $M_1 = \frac{4}{3} G\theta bc^2$ , à la largeur de ces lames ou règles minces et au cube

de leur épaisseur; 2° que celles de Duleau (*Essai théorique et expérimental sur la résistance du fer forgé*, 1820) ont donné pour les barres de fer carrées, à égal moment d'inertie  $J$  des sections, une résistance moindre que pour les barres rondes dans une proportion moyenne 0,84644, nombre peu différent de 0,843462 que donne notre théorie; 3° que celles de Savart sur des tiges de cuivre ont donné aux sections carrées une infériorité de résistance encore plus marquée, car le rapport moyen a été trouvé 0,8406, ce qui s'explique facilement si leurs faces offraient une légère concavité, etc.; 4° enfin que les expériences de M. Wertheim (*Ann. de ch. et de ph.*, juin 1857), bien que plusieurs d'entre elles aient été poussées jusqu'à des torsions excédant celles auxquelles la théorie s'applique, ont confirmé, à deux centièmes près, la formule pour des rapports variés des dimensions des bases rectangulaires (ce qu'avaient déjà fait quelques-unes de celles de Duleau et de Savart), car l'habile physicien trouve qu'il faut, pour représenter les faits (art. xv de son Mémoire, p. 247), affecter la formule de M. Cauchy de coefficients de correction

0,8196; 0,8169; 0,8474; 0,9082; 0,9438; 0,9453; 0,9390;

pour des rapports  $\frac{b}{c} = 1; 4,333; 2; 3; 4; 5; 6;$

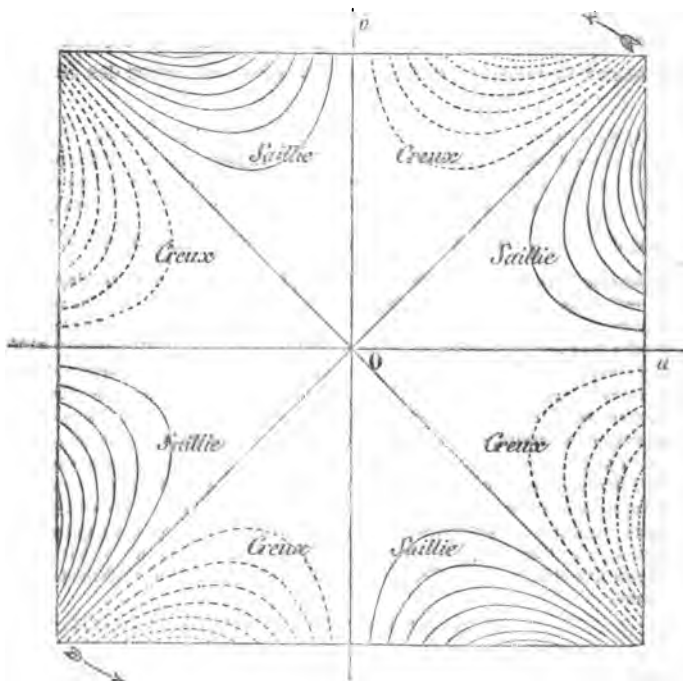
et notre formule en série transcendante donne pour ces mêmes coefficients les valeurs

0,843; 0,846; 0,857; 0,878; 0,896; 0,909; 0,920.

(Du n° 156).

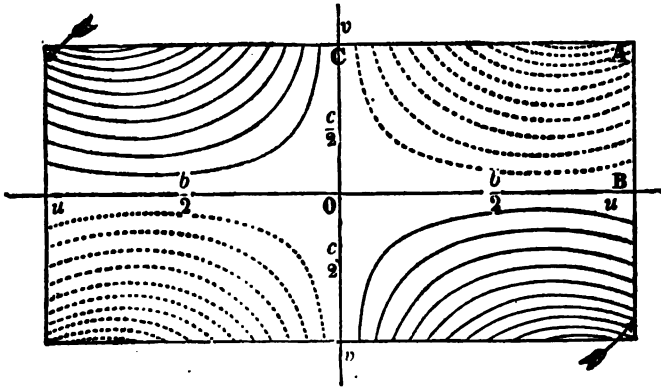
z<sup>0</sup> que ces dix suites de dix valeurs de  $z$  ont permis de construire pour ces quarts de section, et par suite pour les trois autres quarts où elles ont les mêmes grandeurs numériques, on a pu déduire, graphiquement, des coupes équidistantes parallèles aux  $w$  ou à l'ancien plan de la section; d'où les *topographies* ci-dessous:

1° De la surface affectée par la section carrée  $b = c$ , et qui offre quatre parties faisant saillie sur le plan primitif de la section et quatre parties faisant creux au-dessous parce qu'on a  $z = 0$  soit pour  $u = 0$  ou  $v = 0$  soit pour  $u = \pm v$ ;



(Du n° 158).

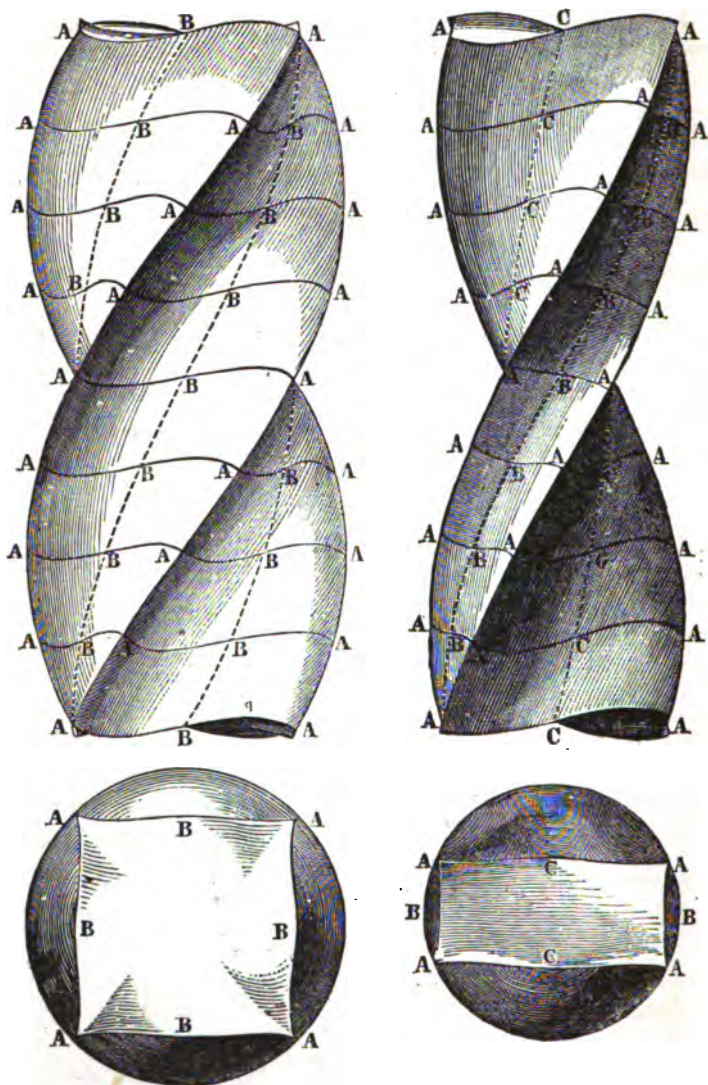
2° De la surface affectée par la section rectangle  $b = 2c$  et qui offre seulement quatre parties égales et symétriques, dont deux en saillie et deux en creux.



Elle serait coupée par le plan primitif en huit parties si  $b$  était compris entre  $c$  et  $1,4513 c$ , mais le creux ne serait pas symétrique à la saillie dans chaque quart de section comme lorsque  $b = c$ .

Les épreuves ombrées suivantes offrent, pour une torsion *exagérée* (d'une demi-circonférence pour une longueur égale à  $\pi = 3,1416$  fois le grand côté  $b$  de la base, comme pour le cylindre elliptique du § 21), l'élévation du prisme tordu, placée au-dessus de son plan. Les lignes en double doucine ABABA ou ABACA offrent les projections verticales des contours modifiés d'un grand nombre de sections primitivement planes. Ils sont conformes à ce que présente la torsion de prismes carrés ou rectangles en caoutchouc.

(Du n° 156).



(Du n° 156).

§ 28. *Plus grands glissements, points dangereux et équations de non-rupture des prismes à base carrée et à base rectangle soumis à la torsion.* — Les glissements  $g'$  et  $g''$ , ou plutôt les quotients  $\frac{-g'}{\theta c}$ ,  $\frac{g''}{\theta b}$  ont été calculés par les formules transcendentes du § 25 pour un grand nombre de points du contour des sections, c'est-à-dire pour les points des côtés  $u = \pm \frac{1}{2} b$ , sur lesquels on a  $g' = 0$ , et pour les points des côtés  $v = \pm \frac{1}{2} c$ , sur lesquels on a  $g'' = 0$ .

C'est, comme on s'en assure facilement, sur le contour qu'il faut chercher les points de plus grand glissement principal  $g = \sqrt{g'^2 + g''^2}$ . C'est, sur chaque côté, au milieu de ce côté que le glissement  $g$  a la valeur la plus considérable; et, lorsque les côtés  $b$ ,  $c$  sont inégaux, c'est au milieu des grands côtés que se trouve ce point dangereux ou de plus grand glissement.

C'est comme aux §§ 22 et 23 où nous avons déjà trouvé (pour les sections elliptiques et triangulaires) que les points dangereux sont placés, sur le contour, aux endroits les plus rapprochés du centre.

C'est ce qu'indiquent, au reste, assez clairement les épures ombrées du § précédent, car c'est en ces points (B, B, B... pour le prisme carré, et C, C, C... pour le prisme rectangle) que l'arête ou fibre BBB..., CCC..., changée en hélice, coupe sous l'angle le plus aigu le contour ABA, ou ACA, de la section modifiée, tandis que les arêtes vives AAA... lui restent normales.

C'est ce qu'on remarque aussi sur les prismes de caoutchouc.

Le calcul donne pour le plus grand glissement, aux quatre milieux des côtés des sections du prisme carré, ou quand  $\frac{b}{c} = 1$ ,

$$g = g' \text{ ou } g'' = 0,675315 \theta b = 1,350630 \frac{\theta b}{2}.$$

En l'égalant (§ 17) à la limite  $\frac{T_0}{G}$  des glissements non dangereux, on a pour l'équation de cohésion permanente

$$T_0 = \text{ou } > 0,675315 G \theta b;$$



(Du n° 156).

d'où, en éliminant  $G\theta$  au moyen (§ 26) de  $M_1 = 0,843462 G\theta J$  :

$$\text{Limite de } M_1 = \frac{0,843462 J}{0,675315 b} T. = 1,24900 \frac{J}{b} T. = 0,208165 . b^3 T.$$

Si la section restait plane, on aurait pour la même limite

$$\frac{J}{\frac{1}{2} b \sqrt{2}} T. = J \frac{\sqrt{2}}{b} T. \text{ Sa valeur véritable n'est donc que les}$$

$$\frac{1,24900}{\sqrt{2}} = 0,88318 \text{ de la valeur que donnait l'ancienne théorie.}$$

Pour des grandeurs quelconques de  $\frac{b}{c} > 1$ , on a pour les valeurs du plus grand glissement, vu que le sinus  $= (-1)^{n-1}$ ,

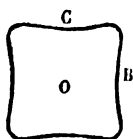
$$g = -g' = 6c \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{4}{\pi} \right)^2 \sum_1^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2 \coth \frac{2n-1}{2} \pi \frac{b}{c}} \right].$$

On donnera plus loin le tableau de ces valeurs.

§ 29. *Détermination élémentaire et très-approchée de la torsion d'un prisme à base carrée rectiligne par l'assimilation de ses sections à des carrés curvilignes quant à la courbure prise par leurs plans.* — Comme les considérations transcendantes des §§ 25, 26, 27, 28 ne sauraient être présentées dans tous les cours où l'on traite de la résistance des matériaux, il est bon d'arriver, au moins approximativement, à une partie des résultats ci-dessus d'une manière élémentaire.

Nous le ferons facilement, en ce qui concerne le prisme à base carrée dont le côté est  $b$ , en assimilant ses sections, quant au mode de courbure de leurs plans, à des carrés curvilignes à angles légèrement arrondis dont l'équation est

$$10b^2 (u^2 + v^2) + 8(u^4 - 6u^2v^2 + v^4) = 3b^4$$



et qui ont avec ces sections carrées rectilignes inscrites huit points communs, savoir les quatre angles ou extrémités des diagonales ou plus grands diamètres, et les milieux des quatre côtés auxquels ils sont tangents, car l'équation précédente est sa-

(Du n° 156).

tisfaite par  $u$  ou  $v = \frac{1}{2}b$  ou 0 avec  $v$  ou  $u = 0$  ou  $\frac{1}{2}b$ . Comme cette équation est un cas particulier de celle  $\frac{u^2 + v^2}{2} + C_1 u + \dots = K$  des contours considérés § 10, p. 256, en faisant

$$K = \frac{3b^4}{20}, C_1 = \frac{2}{5b^2} \text{ et tous les autres } C \text{ nuls,}$$

la surface courbe dans laquelle se changeraient, par une torsion  $\theta$ , les sections d'un prisme ayant pour base le carré curviligne qu'elle donne, est représentée par (même § 10, p. 255)

$$z = \frac{2\theta}{5b^2} (4u^2v - 4uv^2),$$

ou, en coordonnées polaires (§ 11, p. 258), par

$$z = \frac{2\theta}{5b^2} r^4 \sin 4\alpha,$$

ce qui permet de construire facilement une suite de coupes de cette surface, et de voir qu'elle a une forme très-analogue à celle dont la première épure du § 27 donne la topographie.

Les glissements auront, en même temps, pour expressions (même § 10, p. 255) :

$$-g' = \theta v \left( 1 - 8 \frac{3u^2 - v^2}{5b^2} \right), \quad g'' = \theta u \left( 1 + 8 \frac{u^2 - 3v^2}{5b^2} \right),$$

et le moment de torsion (§ 16)

$$M_1 = G\theta \left[ \int (u^2 + v^2) d\omega - \frac{8}{5b^4} \int (6u^2v^2 - u^4 - v^4) d\omega \right].$$

Cette expression du moment est exacte pour la section curviligne. L'appliquer approximativement à la section carrée rectiligne inscrite dont le côté est son petit diamètre  $b$  c'est supposer approximativement que le plan de celle-ci prend par la torsion à peu près la même forme courbe que l'autre. On a, en prenant les intégrales pour l'étendue de la section rectiligne

$$J = \int (u^2 + v^2) d\omega = 2 \int u^2 d\omega = \frac{b^4}{6};$$

(Du n° 156).

puis

$$\int u^2 v^2 d\omega = \int_{-\frac{1}{2}b}^{\frac{1}{2}b} u^2 du \int_{-\frac{1}{2}b}^{\frac{1}{2}b} v^2 dv = 4 \int_0^{\frac{1}{2}b} u^2 du \int_0^{\frac{1}{2}b} v^2 dv = \frac{b^4}{144}$$

$$\int (u^4 + v^4) d\omega = 2 \int v^4 d\omega = 2b \cdot 2 \int_0^{\frac{1}{2}b} v^4 dv = \frac{b^5}{40},$$

expressions qui peuvent être démontrées élémentairement (§ 3 de la note du n° 81). Substituant il vient

$$M_1 = G\theta \left[ \frac{b^4}{6} - \frac{8}{5b^2} \left( 6 \frac{b^5}{144} - \frac{b^5}{40} \right) \right] = G\theta \frac{b^4}{6} \left( 1 - \frac{4}{25} \right)$$

ou

$$M_1 = 0,84 G\theta J$$

c'est-à-dire les  $0,84 = \frac{21}{25}$  de ce qu'on aurait si la section restait plane.

On arrive, comme on voit, très-près du résultat exact qui a été trouvé (§ 26) des  $0,843462$  (1).

Quant au glissement  $g = \sqrt{g'^2 + g''^2}$  il est facile de voir, d'après les expressions de  $g'$ ,  $g''$  qu'on vient de donner, que sa plus grande valeur a lieu aux milieux des côtés du carré, ou pour  $u = 0$ ,  $v = \pm \frac{b}{2}$ , et est ainsi :

$$0,7\theta b.$$

C'est très-près de la valeur exacte  $0,675315 \theta b$  trouvée au § 28; et il en résulte pour équation de cohésion

$$\text{lim. } M_1 = \frac{0,84}{0,7} \frac{J}{b} T. = 1,2 \frac{J}{b} T. \text{ au lieu de } 1,249 \frac{J}{b} T.$$

On peut donc, dans les cours d'Arts et métiers, présenter élémentairement une théorie très-approchée de la torsion des prismes à section carrée rectiligne par assimilation de sa courbure à celle de la section carrée curviligne circonscrite. Et comme l'assimilation d'un rectangle *très-allongé* à l'ellipse inscrite nous a donné,

(1) Au § 35 ci-après on calculera le moment de torsion du prisme qui aurait pour base le carré curviligne lui-même, et on trouvera  $0,8486G\theta J$ .

(Du n° 156).

de même (§ 24) les expressions relatives aux prismes plats, qui constituent le second cas extrême des prismes rectangulaires, on pourra ordinairement dans les mêmes Cours, pour les cas intermédiaires, ou pour des rapports quelconques des deux côtés  $c$  et  $b$  des bases rectangulaires, se contenter de citer les résultats numériques de l'analyse transcendante et exacte qui seront, ainsi, acceptés sans difficulté.

§ 30. *Sections à contours curvilignes du quatrième degré symétriques dans les deux sens.* — L'ellipse et la section carrée à angles arrondis qui a été considérée au § précédent ne sont que des cas particuliers de celles qui sont représentées par l'équation du quatrième degré (§ 10), ne contenant que des puissances paires de  $u$  et  $v$  :

$$\frac{u^2 + v^2}{2} + C_2(u^2 - v^2) + C_4(u^4 - 6u^2v^2 + v^4) = K,$$

ou (§ 11)

$$\frac{r^2}{2} + C_2r^2 \cos 2\alpha + C_4r^4 \cos 4\alpha = K.$$

Elle représente des contours symétriques par rapport à l'axe des  $u$  et aussi par rapport à l'axe des  $v$ , mais qui ne sont égaux dans les deux sens que lorsque  $C_2 = 0$ .

On leur donne une largeur  $b$  mesurée sur l'axe des  $u$  et une hauteur  $c$ , supposée moindre, mesurée sur l'axe des  $v$ , en faisant

$$\left\{ \begin{array}{l} C_2 = -\frac{1 + 2n}{2} \frac{b^2 - c^2}{b^2 + c^2}, \quad C_4 = \frac{4n}{b^2 + c^2}, \quad K = \frac{1 + n}{4} \frac{b^2 c^2}{b^2 + c^2}; \quad c < b, \\ n \text{ étant un nombre arbitrairement choisi entre } \frac{\sqrt{2}-1}{2} = 0,207107 \text{ et } -\frac{c^2}{b^2 + c^2}; \end{array} \right.$$

car l'équation, qui peut alors être écrite

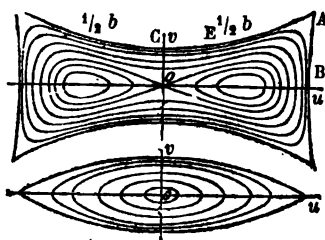
$$c^2 u^2 + b^2 v^2 - n(b^2 - c^2)(u^2 - v^2) + 4n(u^4 - 6u^2 v^2 + v^4) = \frac{1 + n}{4} b^2 c^2,$$

est satisfaite par  $u^2 = \frac{b^2}{4}$ ,  $v = 0$ , ou par  $u = 0$ ,  $v^2 = \frac{c^2}{4}$ ; mais elle ne fournit des courbes fermées, ayant bien cette largeur et cette hauteur, que pour des valeurs de  $n$  comprises entre les deux limites, l'une positive, l'autre négative, qu'on vient d'indiquer (1).

(1) En effet, quand  $n$  est négatif, l'axe des  $u$  est coupé non-seulement aux

(Du n° 156).

Lorsque  $n = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$  ou sa limite positive, on a un quadrilatère à angles aigus et côtés concaves comme celui qui enveloppe les autres courbes de la partie supérieure de la figure ci-contre, et qui est formé par la rencontre de deux hyperboles ayant des asymptotes  $u = \pm(\sqrt{2}-1)v$  et  $v = \pm(\sqrt{2}-1)u$ , car alors l'équation multipliée par  $-n$  peut être mise sous la forme



$$\left[ v^2 - (\sqrt{2}-1)^2 u^2 - \frac{c^2}{4} \right] \left[ u^2 - (\sqrt{2}-1)^2 v^2 - \frac{b^2}{4} \right] = 0.$$

Lorsque  $n = \frac{-c^2}{b^2+c^2}$  ou sa limite négative ( $b$  étant  $> c$ ), on a un contour avec deux points multiples pour  $u = \pm b$  sur l'axe des  $u$  comme celui qui enveloppe les courbes en olive de la partie inférieure de la figure.

Les divers contours enveloppés par ceux-ci répondent à des valeurs intermédiaires de  $n$ , et aussi à d'autres valeurs de  $b$ ,  $c$ . Ils peuvent être donnés tous par une même équation  $\frac{u^2 + v^2}{2} + C_2(u^2 - v^2) + C_4(u^4 - 6u^2v^2 + v^4) = K$  en faisant varier seulement le second membre  $K$ .

Si l'on fait  $c^2 = 0$ ,  $n$  étant positif, on a la courbe en  $\infty$ .

On peut faire aussi  $c^2$  négatif. Il en résulte,  $n$  étant encore positif, des contours composés de deux orbes séparés, coupant l'axe des  $u$  chacun en deux points qui sont déterminés, savoir, le plus

points  $u = \pm \frac{b}{2}$  mais encore aux points  $u = \pm \frac{c}{2} \sqrt{\frac{4+n}{-n}}$ . Pour que ces derniers points n'appartiennent qu'à des branches indéfinies de la courbe, il faut qu'ils soient plus éloignés de l'origine que les premiers, ou qu'on ait  $-n < \frac{c^2}{b^2+c^2}$ .

Et si  $n$  est positif  $> \frac{\sqrt{2}-1}{2}$  il est facile de voir que la courbe représentée par l'équation se compose de quatre branches indéfinies ne se rencontrant pas.

(Du n° 156).

éloigné de l'origine 0, par  $u^2 = \frac{b^2}{4}$ , et, le plus rapproché, par  $u^2 = \frac{-c^2}{4} \frac{1+n}{n}$ , ce qui exige que  $-c^2$  ne surpasse pas  $\frac{n}{1+n} b^2$ , valeur pour laquelle chaque orbe se réduit à un point, et qui elle-même a pour maximum  $(\sqrt{2}-1)^2 b^2$ . Les orbes ont la forme de croissants quand  $n = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$  parce qu'ils sont formés par la rencontre de deux hyperboles ayant l'une et l'autre l'axe des  $u$  pour axe réel.

Si  $n = 0,2$ ,  $c^2$  étant positif, le contour passe par huit points du rectangle dont  $b$  est la base et  $c$  la hauteur; mais ce n'est guère que dans le cas  $c = b$  du § précédent qu'on peut utilement l'assimiler à la figure rectiligne inscrite (1).

La surface dans laquelle se changent les plans des sections a pour équation (§ 11)

$$\frac{z}{\theta} = -\frac{1+2n}{2} \frac{b^2-c^2}{b^2+c^2} r^2 \sin 2\alpha + \frac{4n}{b^2+c^2} r^4 \sin 4\alpha,$$

qui peut servir à la décrire par coupes en se donnant  $\frac{z}{\theta b^2}$  et  $\alpha$  et tirant  $r$ .

Le moment de torsion est (§ 16)

$$M_1 = G\theta \left[ \int (u^2 + v^2) d\omega - (1+2n) \frac{b^2-c^2}{b^2+c^2} \int (u^2 - v^2) d\omega + \frac{46n}{b^2+c^2} \int (u^4 - 6u^2v^2 + v^4) d\omega \right].$$

Et les glissement ont pour grandeurs (§ 11)

$$g' = \theta [-(1-2C_2) r \sin \alpha + 4C_1 r^3 \sin 3\alpha],$$

$$g'' = \theta [(1+2C_2) r \cos \alpha + 4C_1 r^3 \cos 3\alpha];$$

$$\text{ou } g' = \theta v \left[ -1 - (1+2n) \frac{b^2-c^2}{b^2+c^2} + \frac{46n}{b^2+c^2} (3u^2 - v^2) \right],$$

$$g'' = \theta u \left[ 1 - (1+2n) \frac{b^2-c^2}{b^2+c^2} + \frac{46n}{b^2+c^2} (u^2 - 3v^2) \right].$$

(1) Ces divers contours, au reste, pour  $b^2$  et  $c^2$  inégaux, ne sont pas dénués d'intérêt pratique. On peut assimiler plusieurs d'entre eux à ceux des sections des rails de chemins de fer, dont on est quelquefois dans le cas de considérer la torsion (voyez § 35).

(Du n° 156).

§ 31. Recherche des plus grands glissements et des points dangereux sur ces sections du quatrième degré. Ils ne se trouvent que sur le contour. — On tirera de ces expressions ou de la formule générale du § 11 :

$$\frac{g^2}{\theta^2} = r^2 + 4C_2 r^2 + 4C_3 (r^2 + 4C_4 r^4) \cos 2\alpha + 8C_1 r^4 \cos 4\alpha + 16C_5 r^6.$$

Voyons d'abord si  $g^2$  a un maximum absolu sur le plan de la section. Pour cela tirons :

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\alpha} \frac{g^2}{\theta^2} &= -8C_2 (r^2 + 4C_4 r^4) \sin 2\alpha - 32C_1 r^4 \sin 4\alpha, \\ \frac{d^2}{d\alpha^2} \frac{g^2}{\theta^2} &= -16C_2 (r^2 + 4C_4 r^4) \cos 2\alpha - 128 C_1 r^4 \cos 4\alpha. \end{aligned}$$

On satisfait à  $\frac{d}{d\alpha} = 0$  :

1° Par  $\sin 2\alpha = 0$ ,  $\alpha = 0$ , ou en prenant les points de l'axe des  $u$ ;

2° Par  $\sin 2\alpha = 0$ ,  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ , ou les points de l'axe des  $v$ ;

3° Par  $\cos 2\alpha = -C_2 \frac{1 + 4C_4 r^2}{8C_1 r^2}$  ou les points d'une hyperbole dont l'équation en coordonnées ordinaires (vu que  $r^2 = u^2 + v^2$ ,  $r^2 \cos 2\alpha = u^2 - v^2$ ) est

$$(2 + C_2) u^2 - (2 - C_2) v^2 = \frac{-C_2}{4C_1},$$

et dont l'axe réel est celui des  $u$  ou celui des  $v$  selon que le signe de  $C_2$ , le même que celui de  $n$ , est positif ou négatif, car  $-C_2$  est toujours positif  $< 2$  d'après les limites  $b^2$  et  $-(\sqrt{2} - 1)^2 b^2$  assignées à  $c^2$  au § précédent.

Examinons successivement les points donnés par chacune de ces trois solutions en considérant d'abord le cas où  $n$ , et par conséquent  $C_2$ , est positif, ce qui est le cas des courbes du haut de la figure du § précédent.

La solution (1°) ou  $\alpha = 0$  donne

$$\frac{g^2}{\theta^2} = [(1 + 2C_2) r + 4C_4 r^3]^2,$$

dont le maximum ou le minimum autre que  $g^2 = 0$  répond à

(Du n° 156).

$$r^2 = \frac{-1 - 2C_2}{12C_4}, \text{ d'où } \frac{d^2}{d\alpha^2} \frac{g^2}{\theta^2} = \frac{32r^2}{3} (1 + C_2 + C_2^2),$$

quantité toujours positive quand  $r$  est réel, car  $1 + C_2 + C_2^2$  peut être écrit  $\left(1 + \frac{C_2}{2}\right)^2 + \frac{3C_2^2}{4}$ . Il n'y a donc pas de point de maximum absolu sur la droite  $\alpha = 0$  ou sur l'axe des  $u$ .

La solution (2°) ou  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  donne

$$\frac{g^2}{\theta^2} = [(1 - 2C_2)r + 4C_4r^2]^2,$$

qui, vu que  $C_2$  est négatif et  $C_4$  positif, croît constamment avec  $r$ . Il n'y a donc pas de maximum absolu de  $g^2$  sur la droite  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  ou sur l'axe des  $v$ .

Enfin la solution (3°) ou  $\cos 2\alpha = -C_2 \frac{1 + 4C_4r^2}{8C_4r^2}$  donne, en substituant et réduisant

$$\frac{g^2}{\theta^2} = (1 - 4C_4r^2)^2 \left(r^2 - \frac{C_2^2}{4C_4}\right)$$

dont la dérivée par rapport à  $r$  s'annule ou par  $r = 0$  qui donnerait  $g^2 = 0$ , ou par  $r^2 = \frac{1}{4C_4}$ ,  $\cos 2\alpha = -C_2$  qui rendrait également  $g^2$  nul <sup>(1)</sup>, ou enfin par  $r^2 = \frac{1 + 2C_2^2}{12C_4}$  qui, substitué, donne pour les dérivées du second ordre

$$\frac{d^2}{dr^2} \frac{g^2}{\theta^2} = -\frac{8}{3} (1 + 2C_2^2)(1 - C_2^2), \quad \frac{d^2}{d\alpha^2} \frac{g^2}{\theta^2} = \frac{8}{9C_4} (1 - C_2^2),$$

quantités de signe contraire soit que  $C_2^2$  ait une grandeur au-dessus ou une grandeur au-dessous de 1.

<sup>(1)</sup> Il est facile de voir que dans le cas extrême où  $n$  a sa plus grande valeur  $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$ , l'hyperbole  $\cos 2\alpha = -C_2 \frac{1 + 4C_4r^2}{8C_4r^2}$  coupe celles dont se compose le contour aux angles où elles se coupent elles-mêmes, et que la solution  $r^2 = \frac{1}{4C_4} = \frac{b^2 + c^2}{8(\sqrt{2}-1)}$  pour laquelle le glissement est nul, donne précisément ces points d'angle.



(Du n° 156).

Par conséquent il n'y a pas non plus de maximum absolu sur les hyperboles représentées par  $\cos 2\alpha = -C_2 \frac{1 + 4C_4 r^2}{8C_3 r^2}$ .

Lorsque  $n$  et par conséquent  $C_4$  est négatif, et  $c^2$  positif  $< b^2$ , ce qui est le cas des courbes en olive de la partie inférieure de la figure du § précédent, il n'y a toujours évidemment pas de maximum absolu sur la droite  $\alpha = 0$ ; il n'y en a pas non plus sur l'hyperbole  $\cos 2\alpha = -C_2 \frac{1 + 4C_4 r^2}{8C_3 r^2}$ , car  $r^2 = \frac{1 + 2C_2}{12C_4}$  donne  $r$  imaginaire.

Et il n'y en a pas davantage sur la ligne  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ , car la valeur  $\frac{g^2}{\theta^2} = [(1 - 2C_2)r + 4C_4 r^2]^2$  a son maximum sur cette ligne pour  $r^2 = \frac{1 - 2C_2}{-12C_4}$  qui donne  $\frac{d^2}{d\alpha^2} \frac{g^2}{\theta^2} = \frac{32r^2}{3} (2 - C_2)$  ou qui rend positive cette dérivée du second ordre par rapport à  $\alpha$ .

D'où nous concluons (§ 17) que c'est sur leur contour qu'il faut chercher les points dangereux des sections symétriques du 4<sup>me</sup> degré représentées par les équations ci-dessus.

§ 32. Suite. Recherche de ces points sur les contours des mêmes sections. Cas particuliers où les dimensions sont égales dans les deux sens  $u$  et  $v$ . — Dans ces cas par lesquels nous commençons on a

$$C_2 = 0, \quad b = c$$

et l'équation des contours est

$$\frac{r^2}{2} + C_4 r^4 \cos 4\alpha = K, \quad \text{ou} \quad r^2 + \frac{4n}{b^2} r^4 \cos 4\alpha = (1 + n) \frac{b^4}{4};$$

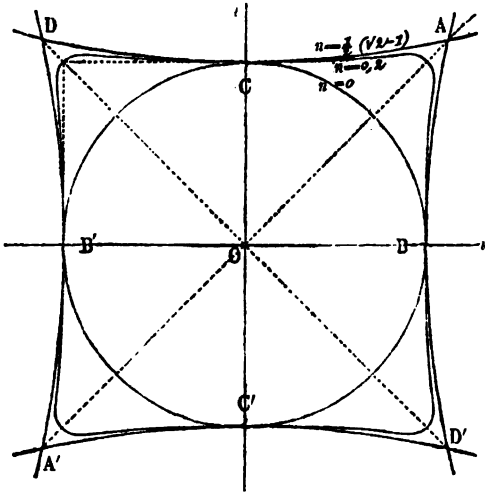
$$\text{ou} \quad u^2 + v^2 + 4n \frac{u^4 - 6u^2v^2 + v^4}{b^2} = (1 + n) \frac{b^2}{4}.$$

Le contour carré à angles aigus et côtés concaves ADA'D' formé de deux hyperboles égales répond à

$$n = \frac{\sqrt{2} - 1}{2} = 0,207107.$$

(Du n° 156).

Le contour carré à angles arrondis qui lui est intérieur répond à  
 $n = 0,2.$



C'est celui dont on s'est servi au § 29, et qui a huit points communs avec le carré rectiligne inscrit. Des valeurs de  $n$  décroissantes donneraient une infinité d'autres contours, compris entre celui-ci et le cercle inscrit qui répond lui-même à

$$n = 0.$$

On a, pour les points de ces contours

$$\frac{g^2}{\theta^2} = r^2 + \frac{16n}{b^2} r^4 \cos 4\alpha + \frac{64n^2}{b^4} r^6.$$

Pour obtenir sa plus grande valeur relative à ces mêmes points, éliminons en  $\cos 4\alpha$  au moyen de l'équation du contour; nous avons, en fonction de  $r$  seul

$$\frac{g^2}{\theta^2} = (1 + n) b^2 - 3r^2 + \frac{64n^2}{b^4} r^6,$$

dont les dérivées première et seconde par rapport à  $r$  sont

$$- 6r + 384 \frac{n^2}{b^4} r^5, \text{ et } - 6 + 1920 \frac{n^2}{b^4} r^4;$$

d'où, en égalant la première à zéro,

$$r = 0 \text{ donnant un maximum; } r = \frac{b}{2} \sqrt{\frac{1}{2n}} \text{ donnant un minimum.}$$

Mais la fonction  $g^2$  peut avoir d'autres maxima et minima, vu que sa variable  $r$  en a elle-même pour les points du contour, ce qui est une cause de *discontinuité*. On les obtiendra en examinant sa marche.

(Du n° 156).

Remarquons pour cela que les deux valeurs du rayon vecteur  $r$  qu'on vient de trouver sont la première plus petite et la seconde plus grande que toutes celles qui appartiennent à des points du contour, à la seule exception du cas extrême  $n = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$  où les points  $r = \frac{b}{2} \sqrt{\frac{1}{2n}}$  ne sont autre chose que les quatre angles aigus A, D, A', D'; car, en faisant  $\alpha = \frac{\pi}{4}$  dans l'équation générale du contour, elle donne pour le carré de la demi-diagonale

$$r^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 \frac{1 - \sqrt{1 - 4n - 4n^2}}{2n}$$

qui est toujours plus petit que  $\left(\frac{b}{2}\right)^2 \frac{1}{2n}$ , excepté quand le radical s'anéantit, c'est-à-dire quand  $2n = \sqrt{2} - 1$ .

L'expression ci-dessus de  $g^2$  en fonction du rayon vecteur  $r$  décroît donc de  $r = 0$  à  $r =$  une valeur relative à des points extérieurs, ou, dans un seul cas, aux points du contour les plus éloignés du centre.

*Les plus grandes valeurs du glissement principal  $g$  sur le contour ont donc lieu aux points les plus rapprochés du centre de la section.*

Ces points, ou les extrémités B, C, B', C' des médianes ou plus petits diamètres sont en conséquence les points dangereux des sections égales dans les deux sens. Comme ils répondent à  $\cos 4\alpha = 1$ ,

$r^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2$ , le plus grand glissement sur la section a pour valeur

$$g = 0 \frac{b}{2} (1 + 2n)$$

§ 33. *Suite. Recherche des mêmes points dangereux sur les contours du quatrième degré symétriques mais non égaux dans les deux sens.* — Considérons d'abord, parmi ces contours dont les deux dimensions principales  $b, c$  sont inégales, ceux qui répondent à

$$n = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$$

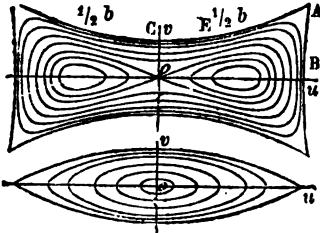
et qui sont formés, avons nous dit, par les hyperboles

(Du n° 156).

$$BA, \text{ ayant pour équation } u^2 = \frac{b^2}{4} + (\sqrt{2} - 1)^2 v^2$$

$$CA \dots \dots \dots v^2 = \frac{c^2}{4} + (\sqrt{2} - 1)^2 u^2.$$

Comme les glissements  $g', g''$  doivent être nuls à l'angle A, où ces hyperboles se coupent, et dont les coordonnées sont fournies, eu égard à  $(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1) = 1$ , par



$$16\sqrt{2} \cdot u^2 = c^2 + (\sqrt{2} + 1)^2 b^2,$$

$$16\sqrt{2} \cdot v^2 = b^2 + (\sqrt{2} + 1)^2 c^2,$$

les expressions de ces glissements  $g', g''$  en fonction de  $u$  seul doivent contenir comme facteur  $16\sqrt{2} \cdot u^2 - c^2 - (\sqrt{2} + 1)^2 b^2$ .

Effectivement, en s'occupant d'abord des points de CA, comme on a vu que  $3 - 2\sqrt{2} = (\sqrt{2} - 1)^2$  :

$$3u^2 - v^2 = 2\sqrt{2} \cdot u^2 - \frac{c^2}{4}, \quad u^2 - 3v^2 = 2\sqrt{2} \cdot (\sqrt{2} - 1)^2 u^2 - \frac{3c^2}{4},$$

il est facile de reconnaître en substituant, réduisant et ayant égard à  $5\sqrt{2} - 7 = (\sqrt{2} - 1)^2$ , que  $g'$  et  $g''$  sont égaux à ce facteur multiplié respectivement par  $\frac{(\sqrt{2} - 1)^2 v}{b^2 + c^2}$  et par  $\frac{(\sqrt{2} - 1)^2 v u}{b^2 + c^2}$ ; en sorte que si l'on ajoute leurs carrés on a, en remplaçant  $v^2$  par  $\frac{c^2}{4} + (\sqrt{2} - 1)^2 u^2$ , et en ayant aussi égard à ce que  $1 + (\sqrt{2} - 1)^2 = 2\sqrt{2} \cdot (\sqrt{2} - 1)$  :

$$\frac{(b^2 + c^2)^2 g^2}{(\sqrt{2} - 1)^2 \theta^2} = \left[ 2\sqrt{2} \cdot (\sqrt{2} - 1)^2 u^2 + \frac{c^2}{4} \right] [16u^2 \sqrt{2} - c^2 - b^2 (\sqrt{2} + 1)^2].$$

En égalant à zéro la dérivée de cette expression par rapport à  $u$  et en divisant par la seconde quantité entre crochets, dont l'annulation ne fait que donner l'abscisse de l'angle A où  $g^2$  est nul, on obtient, en remarquant que  $4 - (\sqrt{2} - 1)^2$  divisé par  $\sqrt{2} - 1$  donne  $4(\sqrt{2} + 1) - (\sqrt{2} - 1)^2 = 6\sqrt{2} + 1$ , les deux solutions suivantes de

$$\text{l'équation } \frac{d \cdot g^2}{du} = 0 :$$

(Du n° 153).

$$u = 0, \text{ et } u = \sqrt{\frac{b^3 - c^3(6\sqrt{2} + 1)}{48\sqrt{2} \cdot (\sqrt{2} - 1)^2}}.$$

On trouverait, sur la partie BA du contour, par une analyse semblable, les solutions  $v = 0$  et  $v =$  un radical semblable à celui qu'on vient d'écrire pour  $u$ , mais qui serait toujours imaginaire, car  $b^3$  y tiendrait la place de  $c^3$  et réciproquement, et on a, par hypothèse,  $c^3 < b^3$ . Le point de plus grand glissement, à ne considérer que cette partie BA, est donc constamment B, où l'on a

$$v = 0, \quad u = \frac{b}{2}, \quad g = \frac{\theta b}{2} \left( \sqrt{2} - \frac{b^3 - c^3}{b^3 + c^3} \right).$$

Mais B n'est pas, lorsqu'on a  $c^3$  positif  $< b^3$ , le point dangereux. Celui-ci se trouve toujours sur la partie CA, savoir :

1° Si  $b^3 < c^3(6\sqrt{2} + 1)$  ou si  $\frac{c}{b} > \sqrt{\frac{1}{6\sqrt{2} + 1}} = 0,32469$ , au point C pour lequel

$$u = 0 \text{ d'où } v = \frac{c}{2}, \text{ et } -g = \frac{\theta c}{2} \left( \sqrt{2} + \frac{b^3 - c^3}{b^3 + c^3} \right).$$

2° Si  $\frac{c}{b} < 0,32469$ , en un point E du contour, intermédiaire entre C et A, et déterminé par la seconde des valeurs ci-dessus de l'abscisse répondant à un maximum, c'est-à-dire :

$$u = \sqrt{\frac{b^3 - c^3(6\sqrt{2} + 1)}{48\sqrt{2}(\sqrt{2} - 1)^2}}, \text{ d'où } v = \sqrt{\frac{b^3 + c^3(6\sqrt{2} - 1)}{48\sqrt{2}}}, \quad -g = \theta \frac{\sqrt{6(\sqrt{2} + 1)(b^3 + 5c^3)^3}}{48(b^3 + c^3)}.$$

Cette valeur du glissement  $-g$  au point du maximum E surpasse en effet toujours celle  $\frac{\theta c}{2} \left( \sqrt{2} + \frac{b^3 - c^3}{b^3 + c^3} \right)$  qui est relative au point C quand le rapport  $\frac{c}{b}$  est plus petit que  $\sqrt{\frac{1}{6\sqrt{2} + 1}} = 0,32469$ ; et elle est, aussi, toujours plus grande que la valeur  $\frac{\theta b}{2} \left( \sqrt{2} - \frac{b^3 - c^3}{b^3 + c^3} \right)$  du glissement au point B, même quand celle-ci vient à surpasser la valeur au point C [ce qui arrive quand  $(b^3 + c^3)\sqrt{2} < (b + c)^3$  d'où  $\frac{c}{b} < \sqrt{2} + 1 - \sqrt{(\sqrt{2} + 1)^2 - 1}$ , c'est-à-dire 0,216846]. Par

(Du n° 156).

exemple, dans le cas extrême  $c = 0$ , où la section se réduit à un  $\infty$ , ou plutôt à deux triangles isocèles opposés par le sommet, ayant pour côtés les droites  $v = \pm (\sqrt{2} - 1) u$  et pour bases légèrement curvillignes les deux branches de l'hyperbole  $u^2 = \frac{b^2}{4} + (\sqrt{2} - 1)^2 v^2$ , on a encore 0,21144  $\theta b$  pour le glissement en E, et 0,20711  $\theta b$  seulement pour le glissement en B.

Le point E est alors, à peu de chose près, celui du contour qui se trouve le plus proche du centre de gravité de chacun des deux triangles isocèles à base courbe.

Mais il en est autrement lorsque,  $c^2$  devenant négatif, ou la section se partageant en ces deux croissants dont on a parlé § 30, —  $\frac{c^2}{b^2}$  s'abaisse au-dessous de 0,01223, valeur pour laquelle on a

$$\frac{\sqrt{6(\sqrt{2} + 1)(b^2 + 5c^2)^3}}{18(b^2 + c^2)} = \frac{b}{2} \left( \sqrt{2} - \frac{b^2 - c^2}{b^2 + c^2} \right).$$

En effet, alors, le glissement en B excède le glissement en E, et les points dangereux sont désormais déterminés par  $u = \pm \frac{b}{2}$  sur l'axe des  $u$ . Il est remarquable que ce sont encore (comme dans les cas §§ 24, 23, 28, 32, 36, les points les plus rapprochés des centres de gravité.

Maintenant, lorsque le paramètre  $n$  a une grandeur quelconque positive (mais moindre que  $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$ ), le point dangereux se trouve en C ou aux extrémités du petit diamètre  $2c$ , et a en conséquence pour valeur

$$g = \left( -g' \text{ pour } u = 0, v^2 = \frac{c^2}{4} \right) = \theta c \left( n + \frac{b^2}{b^2 + c^2} \right),$$

à moins que le rapport  $\frac{c}{b}$  de ce diamètre au plus grand ne descende au-dessous d'une certaine valeur, variable avec  $n$ , à savoir que

Pour  $n = 0,207107; 0,2; 0,1; 0,09266; 0,05; 0,04; 0$   
on n'ait  $\frac{c}{b} < 0,324694; 0,3203; 0,2487; 0,2332; 0,1924; 0,0967; 0;$

( Du n° 150 ).

On obtient ces valeurs limites en exprimant la condition pour que,  $\frac{c}{b}$  devenant plus petit après avoir été plus grand, le point C devienne point de minimum après avoir été point de maximum du glissement sur le contour, ou que le coefficient différentielle du second ordre de  $g^2$  passe, en ce point, du signe — au signe + ou qu'on ait  $\frac{d^2 \cdot g^2}{du^2} = 0$  pour les valeurs de  $\frac{c}{b}$  cherchées. Pour arriver simplement à cette expression faisons

$$\frac{1 - 2C_2}{4C_4} = \frac{(1+n)b^3 - nc^3}{8n} = p, \quad \frac{1 + 2C_2}{4C_4} = \frac{(1+n)c^3 - nb^3}{8n} = q,$$

nous avons d'abord, pour l'équation de la courbe,

$$qu^2 + pv^2 + \frac{u^4 - 6u^2v^2 + v^4}{2} = \frac{K}{2C_4},$$

qui, différenciée deux fois, donne

$$\frac{d \cdot v^2}{du} = 0, \quad \frac{d^2 \cdot v^2}{du^2} = 2 \frac{3c^2 - 4q}{c^2 + 4p} \text{ au point C pour lequel } u = 0, v^2 = \frac{c^2}{4}.$$

Mais on a l'expression

$$\frac{g^2}{16C_4^2 \theta^2} = v^2(p - 3u^2 + v^2)^2 + u^2(q - 3v^2 + u^2)^2$$

qui différenciée aussi deux fois par rapport à  $u$ , donne, en égalant à zéro la valeur, au même point C, de sa différentielle seconde, la condition

$$(3c^2 - 4q)(3c^2 + 2p - 2q) - 3c^2(c^2 + 4p) = 0$$

ou l'équation

$$(1 - 15n + 38n^2) \left(\frac{c^2}{b^2}\right)^2 - (1 + 10n - 8n^2) \frac{c^2}{b^2} = -n(1 + 2n),$$

d'où l'on tire pour  $\frac{c}{b}$  la suite des valeurs numériques qui viennent d'être écrites. Elle se réduit au premier degré quand  $1 - 15n + 38n^2 = 0$  ou  $n = 0,08266$ ; au-dessus de cette valeur de  $n$  il faut donner le signe + au radical de la formule obtenue pour  $\frac{c^2}{b^2}$ ; au-dessous, le signe —.

(Du n° 158).

Lorsque  $\frac{c}{b}$  descendra au-dessous des limites que nous venons de donner, et que  $n$  aura une autre valeur que  $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$ , il faudrait, pour trouver analytiquement le point dangereux E sur le contour, combiner l'expression de  $\frac{g^2}{\theta^2}$  différenciée par rapport aux deux variables  $r$  et  $\alpha$  et égalée à zéro, avec l'équation du contour aussi différenciée; ce qui donnerait, en divisant par  $r^2 \sin 2\alpha$ , une équation où  $r^2 \cos 2\alpha$  et  $r^2$ , considérées comme deux inconnues, seraient l'une et l'autre engagées au second degré; et, en éliminant la première au moyen de l'équation du contour, l'autre inconnue,  $r^2$ , resterait engagée dans une équation du sixième degré fort compliquée.

Aussi il est préférable, alors, et dans les cas analogues, de se servir d'une méthode de recherche numérique du point de maximum par approximations successives, qui sera donnée au § suivant.

Quand  $c^2$  est négatif,  $n$  toujours positif, ou quand la section se sépare en deux orbes, le point dangereux doit être cherché de même numériquement sur le contour, mais il se trouvera presque toujours aux extrémités  $u = \pm \frac{b}{2}$ ,  $v = 0$ , du diamètre commun.

Enfin, quand  $n$  est négatif,  $c^2$  positif, les valeurs de  $\frac{c^2}{b^2}$  tirées de l'équation qu'on vient de trouver entre  $\frac{c^2}{b^2}$  et  $n$ , sont négatives, et  $\frac{c}{b}$  est imaginaire. Aussi, pour les sections en olive de la moitié inférieure de la figure, les points dangereux sont toujours aux extrémités du petit diamètre  $c$ .

On pense que cette discussion de la position du point dangereux sur les sections du quatrième degré, complétée au § 35, et celles des §§ précédents et du § 37 pour d'autres sections, suffiront pour indiquer la manière de les trouver dans tous les cas (1).

(1) Cette recherche serait abrégée si l'on reconnaissait et parvenait à établir d'une manière générale et certaine ce que l'ensemble des résultats partiels semble indiquer, à savoir que sur les plans des sections il n'y a jamais de points de maximum absolu du glissement  $g$ , et qu'en conséquence il suffit toujours de chercher les points dangereux sur les contours qui les limitent.



(Du n° 150).

§ 34. *Méthode générale de recherche numérique du maximum ou du minimum d'une fonction d'une variable, dont la forme est donnée explicitement ou implicitement.* — On connaît la méthode dite de *fausse position* ou des *différences proportionnelles*, servant à la résolution d'une équation numérique

$$f(x) = 0$$

de forme quelconque algébrique ou transcendante, et qui consiste, après avoir essayé pour  $x$  deux nombres  $a$  et  $b$  choisis plus ou moins arbitrairement, à regarder, dans une certaine étendue, les variations de  $fx$  comme à peu près proportionnelles à celles de  $x$ , ou  $a$  et  $b$  comme s'écartant de la racine cherchée dans le rapport des résultats de leur substitution à  $x$  dans  $fx$ , et à poser en conséquence  $\frac{x-b}{b-a} = \frac{fx-fb}{fb-fa}$  qui, en faisant  $fx = 0$ , revient bien à  $\frac{x-b}{x-a} = \frac{fb}{fa}$  et d'où l'on tire

$$x = \frac{afb - bfa}{fb - fa} = b - (b-a) \frac{fb}{fb - fa},$$

première solution approchée qui, désignée par  $c$ , conduit à en obtenir une seconde en la substituant dans le premier membre  $fx$  et en combinant de la même manière le résultat nouveau  $fc$  avec le plus petit des deux résultats précédents  $fa$  et  $fb$ , d'où (si c'est  $fb$ )

$x = c - (c-b) \frac{fc}{fc - fb}$ , solution qui, représentée à son tour par  $d$  et combinée de la même manière avec  $c$ , donnera  $d - (d-c) \frac{fd}{fd - fc}$

pour troisième solution, et ainsi successivement jusqu'à ce que deux ou trois solutions de suite s'accordent au degré d'approximation ou avec le nombre de chiffres décimaux qu'on veut. Cette méthode généralement expéditive, qui se présente naturellement et qui ne saurait tromper finalement puisqu'elle fournit d'elle-même, avec les rectifications, des vérifications continuelles, s'applique, comme on sait, à la résolution des problèmes sans avoir besoin de développer leurs équations, ni même de les poser en équation, puisqu'il suffit qu'on sache, d'après leurs conditions, quel résultat doit donner l'inconnue  $x$  traitée d'une certaine manière numériquement et même géométriquement ou mécaniquement pour y satisfaire.



(Du n° 156).

$$p_1 p_0 = x_1 - x_0 = h, \quad p_2 p_1 = x_2 - x_1 = h_1, \\ y_1 - y_0 = d, \quad y_1 - y_2 = d_1.$$

Et appelons  $x_m$  l'abscisse du sommet cherché  $s$  de la parabole,  
 $y_n = ts$  son ordonnée,  
 $y_m$  l'ordonnée correspondante de la courbe  $y = fx$ .

Nous aurons aux points  $m_1, m_0, m_2$ , en vertu de la constante proportionnalité d'une des coordonnées de la parabole au carré de l'autre quand on les compte à partir du sommet parallèlement à l'axe et sur la tangente

$$\frac{(x_m - x_1)^2}{y_n - y_1} = \frac{[h + (x_m - x_1)]^2}{d + y_n - y_1} = \frac{[h_1 - (x_m - x_1)]^2}{d_1 + y_n - y_1}$$

$$d'où \frac{[h + (x_m - x_1)]^2 - (x_m - x_1)^2}{d} = \frac{[h_1 - (x_m - x_1)]^2 - (x_m - x_1)^2}{d_1},$$

équation qui se réduit au premier degré en  $x_m - x_1$  et qui donne

$$x_m = x_1 + \frac{\frac{1}{2} h^2 d - h^2 d_1}{h^2 d + h d_1}; \quad d'où \quad y_n = y_1 + \frac{(h^2 d - h^2 d_1)^2}{4 h h_1 (h + h_1) (h_1 d + h d_1)}.$$

Ordinairement les trois ordonnées  $y_0, y_1, y_2$  se calculent à intervalles égaux, ou on suppose

$$h_1 = h.$$

Alors on a simplement

$$x_m = x_1 + \frac{h}{2} \frac{d - d_1}{d + d_1} = x_1 + \frac{h}{2} \frac{y_2 - y_0}{2y_1 - y_0 - y_2} \\ y_n = y_1 + \frac{1}{8} \frac{(d - d_1)^2}{d + d_1} = y_1 + \frac{1}{8} \frac{(y_2 - y_0)^2}{2y_1 - y_0 - y_2}.$$

Il ne convient pas, en général, de prendre pour le maximum cherché de  $y$  la valeur de  $y_n$  donnée par ces formules, car  $y_n$  est l'ordonnée d'un point de la parabole substituée et non celle d'un point appartenant à la courbe  $y = fx$  elle-même. On en obtiendra une en mettant dans  $fx$  l'abscisse trouvée  $x_m$ , d'où pour une première valeur approchée du maximum :

$$y_m = f(x_m).$$

Généralement cette première approximation sera suffisante, car

(Du n° 156).

si  $x_m$ , déterminé comme il vient de l'être, diffère légèrement de la véritable abscisse du maximum de  $y$ , l'ordonnée correspondante  $y_m$  ne différera de ce maximum que d'une manière insensible, vu qu'aux environs d'un point de maximum les différences très-petites du premier ordre sur l'abscisse ne produisent que des différences très-petites du second ordre sur l'ordonnée.

Mais je suppose qu'on veuille s'assurer du degré de l'approximation, ou en obtenir une plus grande pour l'ordonnée, ou bien avoir plus exactement sa position ou son abscisse. On y arrivera en se servant du nouveau point  $(x_m, y_m)$  de la courbe  $y = fx$ , avec deux des points déjà connus, savoir  $m_1$  et  $m_2$  si c'est entre eux que tombe ce point nouveau, pour faire un calcul tout semblable à celui qui a eu lieu sur  $m_1, m_0, m_2$ , ce qui reviendra à déterminer le sommet d'une nouvelle parabole passant par  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_m, y_m)$ ,  $(x_2, y_2)$  et qui sera nécessairement bien plus rapprochée que la première de la courbe  $y = fx$  aux environs de son point de maximum.

Cette fois-ci on pourra calculer d'abord l'ordonnée du sommet; en l'appelant  $y'_n$  et en faisant  $y_m - y_1 = d'$ ,  $y_m - y_2 = d'_1$ ,  $x_m - x_1 = h'$ ,  $x_2 - x_m = h'_1$ , la formule donnera

$$y'_n = y_m + \frac{(h'_1{}^2 d' - h'^2 d'_1)^2}{4h'h'_1(h' + h'_1)(h'_1 d' + h' d'_1)}$$

Si, ce qui arrivera le plus souvent, le second terme de cette expression est insensible, ou si  $y'_n$  ne diffère de  $y_m$  que d'une des décimales qu'on néglige, on se tiendra à la valeur trouvée  $y_m$  pour le maximum. Sinon, on calculera la nouvelle abscisse

$$x'_m = x_m + \frac{1}{2} \frac{h'_1{}^2 d' - h'^2 d'_1}{h'_1 d' + h' d'_1}$$

qu'on substituera à  $x$  dans l'équation de la courbe afin d'avoir une deuxième approximation  $y'_m$  du maximum, qui sera ainsi

$$y'_m = f(x'_m).$$

Si elle différait trop de la première approximation  $y_m$  (ce qui proviendrait de ce que primitivement les points  $m_0, m_1, m_2$  ont été pris trop éloignés l'un de l'autre), on en obtiendrait une troisième

(Du n° 156).

en se servant de même du nouveau point  $(x'_m, y'_m)$  avec deux des points déjà connus, ou d'autres plus proches dont on calculera l'ordonnée  $fx$ .

On peut, aussi, s'élever à des approximations de plus en plus grandes en ne faisant usage que de la formule simple à intervalles  $h$  égaux  $x_m = x_1 + \frac{h}{2} \frac{y_2 - y_0}{y_1 - y_0 - y_2}$  si l'on calcule, après une première opération, deux ordonnées  $y = fx$  de la courbe proches de celle qui répond à  $x_m$ , et également distantes en deçà et au delà, et en se servant de ces trois ordonnées équidistantes comme on s'est servi des premières  $y_0, y_1, y_2$ .

Cette méthode s'applique aussi bien à la recherche d'un minimum qu'à la recherche d'un maximum. Alors, par  $d$  et  $d_1$  il est commode de désigner  $y_0 - y_1$  et  $y_2 - y_1$  au lieu de  $y_1 - y_0$  et  $y_1 - y_2$ , car l'ordonnée intermédiaire est la plus petite des trois quand c'est un minimum qui tombe dans l'étendue supposée petite  $m, m_1, m_2$  de la courbe  $y = fx$ .

De même qu'on peut *extrapoler* légèrement lorsqu'on cherche par la méthode de fausse position la racine d'une équation  $fx = 0$ , ou obtenir utilement une des approximations successives en se servant de deux résultats  $fa, fb$  de même signe ou répondant à des valeurs  $a, b$  de  $x$  entre lesquelles la racine cherchée n'est pas comprise, on peut, aussi, lorsqu'on cherche le maximum ou le minimum, appliquer les formules quand le sommet cherché d'une des paraboles sort un peu de l'intervalle des deux ordonnées extrêmes; mais il doit y être compris lors de l'opération finale.

Cette méthode n'exige nullement que la quantité  $y$  dont on cherche la plus grande ou la plus petite valeur soit donnée d'une manière explicite en fonction de la variable  $x$  dont elle dépend. Elle peut être fonction de deux, de trois.... variables liées entre elles par une, ou deux.... équations, et la résolubilité algébrique de celles-ci n'est pas même nécessaire. Il suffit que pour chaque valeur de  $x$  on puisse avoir la valeur de  $y$  soit par un calcul simple ou complexe, soit par une construction, soit même par une expérience précise.

Aussi convient-elle parfaitement à la recherche numérique du

(Du n° 156).

plus grand glissement  $g = \sqrt{g'^2 + g''^2}$  sur le contour des sections des prismes tordus, lorsque les coordonnées ordinaires ou polaires du point où il a lieu dépendent de deux équations compliquées et trop difficiles à résoudre même numériquement. On en verra l'application au troisième exemple du § suivant.

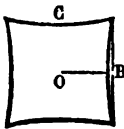
§ 35. Calcul du moment de torsion et de sa limite pour divers contours du quatrième degré. — Ces contours seront, 1° et 2°, ceux du § 32, c'est-à-dire le carré curviligne à angles aigus et côtés concaves, et le carré à angles arrondis ayant huit points communs avec le carré rectiligne inscrit; 3° et 4°, des courbes dont la largeur  $2b$  est cinq fois et environ sept fois la hauteur  $2c$  au milieu.

1° Sur le premier contour, répondant à

$$n = \frac{\sqrt{2}-1}{2}, \quad b = c,$$

les deux hyperboles  $4u^2 - 4(\sqrt{2}-1)^2v^2 = b^2$ ,  $4v^4 - 4(\sqrt{2}-1)^2u^2 = b^2$ , qui le composent, se coupent en quatre points

$$u^2 = v^2 = \frac{b^2}{4} \frac{\sqrt{2}+1}{2} = \left(\frac{b}{2} \cdot 1,09868\right)^2;$$



en sorte que la flèche de courbure des côtés est le  $\frac{0,09868}{2 \cdot 1,09868} = \frac{1}{22,268}$  de leur corde. Nous avons trouvé, en calculant par la méthode de quadrature de Simpson l'aire  $\omega$ , le moment d'inertie polaire  $J = 2 \int v^2 d\omega$

et le moment de torsion  $M_1 = G\theta \left[ J - \frac{8n}{b^2} \int (6u^2v^2 - 2v^4) d\omega \right]$  (1)

$$\omega = 4,25570 \left(\frac{b}{2}\right)^2, \quad J = 3,06533 \left(\frac{b}{2}\right)^4, \quad M_1 = 2,38339 G\theta \left(\frac{b}{2}\right)^4 = 0,77832 G\theta J.$$

(1) Pour calculer en général  $\int u^m v^n d\omega$  on remplace  $d\omega$  par  $du dv$ ; et, en intégrant d'abord par rapport à  $v$ , on a,  $v_1, -v_0$  désignant les ordonnées des parties supérieure et inférieure du contour, exprimées en fonction de l'abscisse  $u$ ,

$$\int u^m v^n d\omega = \frac{4}{m'+4} \int u^{m'} [v_1^{m'+4} - (-v_0)^{m'+4}] du$$

expression au calcul de laquelle on peut appliquer la méthode de quadrature, même quand on ne peut obtenir que par approximation numérique les ordonnées  $v_1, -v_0$  pour chaque valeur numérique de  $u$ .

(Du n° 150).

On a aussi, pour le plus grand glissement  $\theta b \left( n + \frac{b^2}{b^2 + c^2} \right)$  au point B du contour, pour lequel  $u = \frac{b}{2}$ ,  $v = 0$

$$g = \theta \frac{b}{2} \sqrt{2} = 1,4142 \theta \frac{b}{2}.$$

En l'égalant à la limite  $\frac{T_0}{G}$  des glissements non dangereux et en éliminant  $G\theta$  au moyen de l'expression de  $M_1$ , on obtient pour équation de cohésion ou de résistance permanente

$$\text{Limite } M_1 = T_0 \frac{0,77832 J}{1,4142 \frac{b}{2}}$$

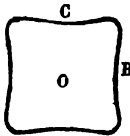
ou, en appelant  $r$  la demi-diagonale  $\sqrt{2} \cdot \frac{b}{2} \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}$  :

$$\text{Limite } M_1 = T_0 \frac{J}{r} \frac{0,77832}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{2}+1} = 0,85513 \frac{J}{r} T_0.$$

2° Pour le second, ou le carré à angles arrondis et côtés légèrement concaves, considéré dès le § 29 dans un autre objet, et qui répond à

$$n = 0,2, \quad b = c,$$

ou qui est représenté par l'équation



$$u^2 + v^2 + \frac{0,8}{b^2} (u^4 - 6u^2v^2 + v^4) = 0,3b^2,$$

nous avons trouvé de même

$$\omega = 4,12712 \left( \frac{b}{2} \right)^2, \quad J = 2,86967 \left( \frac{b}{2} \right)^4, \quad M_1 = 2,34917 \left( \frac{b}{2} \right)^4 = 0,81862 G \theta J.$$

Le plus grand glissement  $\theta \left( n + \frac{b^2}{b^2 + c^2} \right)$ , au point  $u = \frac{b}{2}$ ,  $v = 0$ , est

$$g = 1,4 \theta \frac{b}{2},$$

d'où, pour l'équation de résistance permanente,  $r$  étant encore la demi-diagonale ou la moitié du plus grand diamètre  $b\sqrt{2}$  :

(Du n° 150).

$$\text{Limite } M_1 = 0,82693 \frac{J}{r} T_1.$$

Pour ces deux sections, la résistance élastique à la torsion est donc respectivement les 0,778 et les 0,819, et la résistance à la rupture par torsion les 0,855 et les 0,827 de ce qu'elles seraient si les sections restaient planes au lieu de se gauchir. Nous avons trouvé, pour le carré rectiligne ou ordinaire (§§ 26 et 28), les 0,843 pour la première résistance et les 0,883 pour la seconde. On voit qu'une légère concavité dans les côtés d'un carré suffit pour diminuer très-sensiblement la résistance d'un prisme tordu auquel il sert de base; ce qui peut rendre compte de quelques résultats d'expérience (sous-note du § 26, page 297).

3° Soit, en troisième lieu, la section symétrique mais inégale dans les deux sens représentée par l'équation  $c^2u^2 + b^2v^2 - \dots = \frac{1+n}{h} b^2c^2$  du § 30, p. 305, quand on y suppose

$$n = 0,2, \quad \frac{c}{b} = 0,2 \quad \text{ou} \quad b = 5c;$$

$$\text{d'où } C_1 = -0,7 \frac{96}{104}, \quad C_2 b^2 = \frac{80}{104}$$

C'est l'espèce de *double spatule* qui est figurée page suivante<sup>(1)</sup> avec les *coupes topographiques* de la surface courbe dans laquelle elle se transforme, par des plans  $z = \pm 0,2z_m, \pm 0,4z_m, \pm 0,6z_m, \pm 0,8z_m,$   $z_m$  étant sa plus grande ordonnée  $z = 0,28372 \theta \left(\frac{b}{2}\right)^2$  répondant aux points A, A', D, D' dont les abscisses sont  $\pm 0,8895 \frac{b}{2}$  (2).

(1) Sa forme, et celle de la courbe du 4<sup>e</sup> exemple, sont assez rapprochées de celles des sections des rails de chemin de fer pour qu'on puisse, par leur considération, se faire une idée de la résistance de ceux-ci à la torsion. Si l'on voulait des courbes qui s'en rapprochassent bien plus, il faudrait recourir à des équations du huitième, du douzième ou du seizième degré.

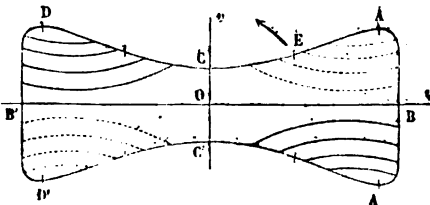
(2) On obtient facilement chacune de ces coupes, répondant à une valeur déterminée de  $z$ , en donnant diverses valeurs à l'angle  $\alpha$ , et en calculant le rayon vecteur  $r$  correspondant au moyen de l'équation  $z = \theta(C_2 r^2 \sin 2\alpha + C_1 r^4 \sin 4\alpha)$  qui est du second degré en  $r^2$ . Elles sont tangentes au rayon vecteur pour lequel  $\text{tang. } 2\alpha = -\frac{8C_1}{\theta C_2} z$ , et elles ont pour asymptote l'axe  $Ov$ , pour lequel  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ .



(Du n° 156).

Comme le rapport  $\frac{c}{b}$  des deux diamètres a une valeur plus petite que 0,3203 qui répond à  $n = 0,2$  dans la petite table du § 33, page 315, les points dangereux ne sont pas aux extrémités du petit diamètre; il faut les chercher numériquement à droite et à gauche sur le contour. Or, en résolvant l'équation du contour par rapport à l'ordonnée  $v$  ou plutôt son rapport  $\frac{2v}{b}$  au demi-grand diamètre, et en calculant ensuite les glissements pour diverses valeurs de  $\frac{2u}{b}$ , rapport de l'abscisse à ce demi-diamètre  $\frac{b}{2}$ , on trouve facilement

Pour $\frac{2u}{b} =$	$\frac{2v}{b}$	$\frac{2g'}{bb}$	$\frac{2g''}{bb}$	$(\frac{2g}{bb})^2$	Pour $\frac{2u}{b} =$	$\frac{2v}{b}$	$\frac{2g'}{bb}$	$\frac{2g''}{bb}$	$(\frac{2g}{bb})^2$
0	0,2000	-0,4646	0,0000	0,21584	0,85	0,3879			
0,1	0,2044	-0,4697	0,0381	0,22209	0,90	0,3981	0,2170	-0,0313	0,04808
0,2	0,2159	-0,4827	-0,0738	0,23845	0,92	0,4002			
0,3	0,2342	-0,4984	-0,1045	0,25511	0,94	0,3998	0,1594	0,0174	0,02292
0,4	0,2575	-0,5084	-0,1289	0,27007	0,96	0,3992			
0,5	0,2845	-0,5057	-0,1484	0,27649	0,97	0,3975	0,0945	0,0024	0,01319
0,6	0,3138	-0,4825	-0,1456	0,25399	0,98	0,3749	-0,0690	0,4196	0,01908
0,7	0,3444	-0,4345	-0,1324	0,20369	0,99	0,3480	-0,0430	0,4803	0,03437
0,8	0,3744	-0,3400	-0,0998	0,12923	1,00	0,2000	-0,0034	0,3846	0,14794
					1,00	0,0000	0,0000	0,4769	0,22746



Les valeurs de  $\frac{2v}{b}$  servent à tracer la courbe BAECDB'D'C'A' du contour et serviront aussi à calculer

le moment de torsion.

(Du n° 150).

Les valeurs de  $\left(\frac{2g}{\delta b}\right)^2 = \left(\frac{2g'}{\delta b}\right)^2 + \left(\frac{2g''}{\delta b}\right)^2$  montrent que le plus grand glissement se trouve entre les points  $x = 0,4\frac{b}{2}$  et  $x = 0,6\frac{b}{2}$ . Pour en avoir la grandeur faisons, dans la formule à intervalles égaux  $h = h_1$  du § précédent,  $\frac{2x}{b} = x$ ,  $\left(\frac{2g}{\delta b}\right)^2 = y$ , et

$$\begin{array}{lll} x_0 = 0,4 & y_0 = 0,27507 & d = 0,00122 \\ x_1 = 0,5 & h = 0,1 & y_1 = 0,27629 & d_1 = 0,02230; \\ x_2 = 0,6 & & y_2 = 0,25399 \end{array}$$

nous trouvons

$$x_m = x_1 + \frac{h}{2} \frac{d - d_1}{d + d_1} = 0,5 - 0,0448 = 0,4552,$$

qui, pris pour valeur de  $\frac{2x}{b}$ , donne

$$\frac{2x}{b} = 0,27204, \quad \frac{2g'}{\delta b} = -0,50801, \quad \frac{2g''}{\delta b} = -0,13827;$$

et par conséquent, en ajoutant les carrés,

$$y_m = \left(\frac{2g}{\delta b}\right)^2 = 0,27221.$$

On s'assure (si l'on a quelques doutes) que cette première approximation est très-suffisante en appliquant les formules du cas d'inégalité des intervalles  $h_1, h_2$  pour

$$\begin{array}{lll} x_0 = 0,4 & h = 0,0552 & y_0 = 0,27507 & d = 0,00314 \\ x_1 = x_m = 0,4552 & h_1 = 0,0448 & y_1 = y_m = 0,27821 & d = 0,00192. \\ x_2 = 0,6 & & y_2 = 0,27629 \end{array}$$

Si l'on calcule d'abord, comme nous l'avons dit, l'ordonnée maximum de la parabole passant par les trois points ainsi déterminés, on trouve

$$y_m + \frac{(h_1^2 d - h_2^2 d_1)^2}{4h_1 h_2 (h_1 + h_2) (h_1 d + h_2 d_1)} = 0,27821 + 0,000000955.$$

Elle diffère tellement peu de  $y_m$  qu'il est évidemment inutile de recourir à une deuxième approximation.

Seulement, si l'on désire avoir une valeur de l'abscisse du point

(Du n° 156).

de maximum plus approchée que  $x_m = 0,4552$ , la formule donne

$$x_m + \frac{1}{2} \frac{h^2 d - h^2 d_1}{h_1 d + h d_1} = 0,4552 + 0,000916 = 0,456116.$$

L'ordonnée correspondante est 0,27820 ne différant toujours pas sensiblement de la première approximation 0,27821.

Si l'on avait pris l'ordonnée maximum  $y_n = y_1 + \frac{1}{8} \frac{(d - d_1)^2}{d + d_1}$  de la première parabole, on aurait eu 0,27866. Bien que cette valeur ne diffère guère de 0,27821 et puisse être adoptée sans inconvénient au lieu de ce dernier nombre dans un calcul de résistance, la différence suffit pour justifier ce que nous avons dit au § précédent, qu'il convient en général de prendre, pour première approximation du maximum, non pas l'ordonnée  $y_n$  du sommet de la parabole, mais bien l'ordonnée  $y_m$  de la courbe  $y = fx$  répondant à l'abscisse de ce sommet.

On a donc pour le plus grand glissement sur la section, répondant à l'abscisse  $u = 0,456116 \frac{b}{2}$ :

$$g = 0,52750 \sqrt{0,27821} = 0,52750 \frac{b}{2}.$$

D'où  $T_c =$  ou  $> 0,52750 G \theta \frac{b}{2}$  pour l'équation de cohésion permanente.

Mais calculons l'aire  $\omega$ , le moment d'inertie  $J = \int (u^2 + v^2) d\omega$  et le moment de torsion (§ 30)

$$M_1 = G \theta \left[ \int (u^2 + v^2) d\omega - 1,4 \frac{0,96}{1,04} \int (u^2 - v^2) d\omega + \left(\frac{2}{b}\right)^2 \frac{0,80}{1,04} \int (u^4 - 6u^2 v^2 + v^4) d\omega \right].$$

Nous trouvons par la formule de Simpson (§ 3 de la note du n° 85) en faisant  $\frac{2u}{b} = x$ , appelant  $y$  la valeur correspondante de  $\frac{2v}{b}$  sur le contour, et partageant le quart de section OCAB, par des ordonnées  $v$ , en huit zones de  $0,1 \frac{b}{2}$ , deux de  $0,05 \frac{b}{2}$ , quatre de  $0,02 \frac{b}{2}$  et trois zones de  $0,01 \frac{b}{2}$  de largeur :

(Du n° 156).

$$\begin{aligned} \omega &= 4 \left(\frac{b}{2}\right)^3 \int_0^1 y dx = 1,16354 \left(\frac{b}{2}\right)^3 \\ I' &= \int u^2 d\omega = 4 \left(\frac{b}{2}\right)^4 \int_0^1 y x^2 dx = 0,46505 \left(\frac{b}{2}\right)^4 \\ I &= \int v^2 d\omega = 4 \left(\frac{b}{2}\right)^4 \int_0^1 \frac{y^3}{3} dx = 0,038398 \left(\frac{b}{2}\right)^4 \\ \int u^4 d\omega &= 4 \left(\frac{b}{2}\right)^6 \int_0^1 y x^4 dx = 0,28963 \left(\frac{b}{2}\right)^6 \\ \int u^2 v^2 d\omega &= 4 \left(\frac{b}{2}\right)^6 \int_0^1 \frac{y^3}{3} x^2 dx = 0,020034 \left(\frac{b}{2}\right)^6 \\ \int v^4 d\omega &= 4 \left(\frac{b}{2}\right)^6 \int_0^1 \frac{y^5}{5} dx = 0,002680 \left(\frac{b}{2}\right)^6 \end{aligned}$$

$$\text{D'où} \quad \omega = 1,16354 \left(\frac{b}{2}\right)^3, \quad J = 0,50345 \left(\frac{b}{2}\right)^4,$$

$$M_1 = G\theta(0,50345 - 0,41898) \left(\frac{b}{2}\right)^4 = 0,08447G\theta \left(\frac{b}{2}\right)^4 = 0,1678G\theta J = \frac{G\theta J}{5,96}.$$

En sorte que le moment de torsion est le 1/6 environ de ce qu'il serait si la section restait plane.

Éliminant  $G\theta$  avec l'équation de cohésion  $T_0 = 0,5275 G\theta \frac{b}{2}$ , on a

$$\text{Lim. } M_1 = \frac{0,084471}{0,5275} \left(\frac{b}{2}\right)^3 T_0 = 0,16013 \left(\frac{b}{2}\right)^3 T_0 = 0,3181 \frac{J}{\frac{1}{2}b} T_0 = \frac{0,33405JT_0}{1,0502 \frac{b}{2}},$$

expression dans laquelle le dénominateur  $1,0502 \frac{b}{2}$  représente le

plus grand rayon vecteur  $r$ , répondant à l'abscisse  $u = 0,9856 \frac{b}{2}$ , en sorte que la limite à imposer au moment des forces extérieures est le tiers seulement (0,33405) de ce qu'elle serait si la section restait plane lorsqu'on tord le prisme auquel elle appartient.

On a trouvé au § 22 (p. 281), pour une section elliptique, aussi 5 fois moins haute que large, des rapports 0,44792 et 0,3846 au lieu de 0,16778 et 0,33405, en faisant la même comparaison des résistances vraies aux résistances qu'on aurait si les sections restaient planes.

Et si nous assimilons, comme il a été dit au § 24, notre section

(Du n° 150).

du quatrième degré à cette section elliptique inscrite, quant au gauchissement de son plan, ou si nous supposons approximativement que le plan se change, par la torsion, dans la même surface paraboloidale  $z = -\theta \frac{b^2 - c^2}{b^2 + c^2} uv$ , où  $b = 5c$ , que celui de l'ellipse servant de base à un cylindre qui éprouverait la même torsion  $\theta$ , nous aurons

$$M_1 = 2G\theta \frac{b^2 I + c^2 I'}{b^2 + c^2} = 2G\theta \left(\frac{b}{2}\right)^4 \frac{0,03840 + (0,2)^2 0,46505}{1 + (0,2)^2} = 0,1096G\theta \left(\frac{b}{2}\right)^4;$$

expression qui excède de près de 1/3 la vraie valeur  $0,08447G\theta \left(\frac{b}{2}\right)^4$  trouvée pour  $M_1$  (1).

4° Soit, enfin, une autre section en forme de doubles patule, mais dans laquelle le rapport  $\frac{CC'}{BB'}$ , du plus petit au plus grand diamètre est 0,14 ou environ 1/7 au lieu de 0,2 = 1/5. Ce rapport 0,14 est celui de la plus petite épaisseur à la hauteur des rails des chemins de fer de l'ouest de la France; mais il faut observer qu'en faisant ainsi

$$\frac{c}{b} = 0,14, \quad \text{avec } n = 0,2$$

dans l'équation du quatrième degré  $c^2 u^2 + b^2 v^2 + \dots = \frac{n+1}{4} b^2 c^3$ , elle donne pour la plus grande épaisseur ou la double ordonnée maximum  $2v$ , les 0,377 seulement du grand diamètre  $2b$ , tandis qu'avec  $\frac{c}{b} = 0,20$ , elle donne les 0,40, ce qui est un peu moins éloigné des  $\frac{62}{130} = 0,477$ , rapport effectif de la plus grande épaisseur à la hauteur pour les mêmes rails de l'ouest.

Il en résulte

(1) On aurait un excédant encore plus fort en assimilant la section à l'ellipse ayant les mêmes moments d'inertie  $I, I'$ , ou en prenant (§ 24)  $M_1 = G\theta \frac{4I'}{1+I'}$ , car il en résulterait  $0,1448G\theta \left(\frac{b}{2}\right)^4$ . Cette ellipse aurait ses deux axes  $2b, 2c$  dans le rapport 5,48 : 4 au lieu de 5 : 4.

(Du n° 150).

$$\omega = 1,0224 \left(\frac{b}{2}\right)^3, \quad I' = \int u^2 d\omega = 0,42564 \left(\frac{b}{2}\right)^4, \quad I = \int v^2 d\omega = 0,02783 \left(\frac{b}{2}\right)^4,$$

$$\int (u^3 - 6u^2v^2 + v^3) d\omega = 0,178069 \left(\frac{b}{2}\right)^6;$$

$$J = 0,45347 \left(\frac{b}{2}\right)^4, \quad M_1 = 0,057645 G\theta \left(\frac{b}{2}\right)^4 = 0,12712 G\theta J = \frac{G\theta J}{7,6666}.$$

Et comme le plus grand glissement, répondant à environ  $u = 0,523 \frac{b}{2}$ , a pour valeur  $0,4693\theta \frac{b}{2}$ , on trouve

$$\text{Lim. } M_1 = \frac{0,957645}{0,4693} \left(\frac{b}{2}\right)^3 T_0 = 0,12283 \left(\frac{b}{2}\right)^3 T_0 = 0,52709 \frac{J}{\frac{1}{2}b} T_0 = \frac{0,2817}{1,040} \frac{J T_0}{\frac{b}{2}}.$$

le dénominateur  $1,040 \frac{b}{2}$  représentant à peu près le plus grand rayon vecteur. On aurait, pour une section elliptique des mêmes dimensions principales  $2c$  et  $2b$ , des rapports  $0,075415$  et  $0,27462$  au lieu de  $0,12712$  et  $0,2817$ , entre les valeurs véritables de  $M_1$  et  $\text{Lim. } M_1$  et celles qui résultent de la supposition que les sections restent planes.

Et la supposition que la section donnée se gauchit de même que cette ellipse, conduirait à  $M_1 = 0,07995 G\theta \left(\frac{b}{2}\right)^4$ , qui est de  $1/5$  à  $1/4$  en sus de la valeur véritable  $0,057645 G\theta \left(\frac{b}{2}\right)^4$  de ce moment.

Ces formules peuvent donner une idée de la résistance des fils à la torsion.

L'assimilation à l'ellipse (§ 24), quant au gauchissement des sections de forme analogue à celles dont nous venons de nous occuper, peut, comme on voit, apprendre quelque chose sur l'ordre de grandeur du moment de torsion des prismes auxquels elles servent de base, mais elle ne fournit pas une approximation généralement suffisante de leur valeur (1).

(1) Cette assimilation ne fournit pas non plus une valeur approchée du plus grand glissement, et par conséquent de la limite à imposer à  $M_1$ ; car il en résulte

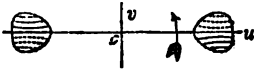
(Ou n° 156).

Il conviendra d'assimiler plutôt une section donnée à une courbe du quatrième degré (voy. § 37) quand on ne voudra pas se livrer au long calcul ordinairement nécessaire pour trouver, parmi les courbes de degré supérieur, celle qui se confond sensiblement avec son contour.

§ 36. *Observation relative aux sections séparées en deux orbes.*— Ces sections doubles, dont plusieurs se trouvent tracées dans la partie supérieure de la figure des §§ 30 et 33, s'obtiennent, avons-nous dit, en remplaçant, dans l'équation du quatrième degré avec  $n$  positif = ou  $< \frac{\sqrt{2-1}}{2}$ ,  $c^2$  par une quantité négative  $-c^2$ , telle qu'on ait (§ 38, p. 307)

$b > c_1 \sqrt{\frac{1+n}{n}}$  distance mutuelle des deux points, autres que ceux  $u = \pm \frac{b}{2}$ , où les orbes coupent l'axe des  $u$ .

En calculant le moment de torsion, autour de l'axe intermédiaire  $o$ , du prisme ou plutôt des deux prismes auxquels de pareils orbes servent de base, on doit, d'après ce qui a été démontré au § 15, obtenir justement la somme des moments qu'on aurait si chacun d'eux était tordu d'un pareil angle autour d'un axe intérieur passant, par exemple, au centre de gravité de sa section, ou bien au point, généralement peu différent, où le glissement est nul.



C'est ce que nous avons pu vérifier d'une manière très-rapprochée sur les orbes ovoïdes presque circulaires qui

$g'^2 + g''^2 = 4g^2 \frac{b^4 v^2 + c^4 u^2}{(b^2 + c^2)^2}$  dont le maximum, quand  $c^4$  est très-petit devant  $b^4$ , répond à peu près à la plus grande valeur de l'ordonnée  $v$ ; d'où, quand  $\frac{c}{b} = \frac{1}{5}$ ,  $\left(\frac{2g}{bb}\right)^2 = 0,596$  au lieu de 0,27824.

(Du n° 150).

s'obtiennent en faisant, dans l'équation générale des contours du § 30,

$$n = \frac{1}{6}, \quad c^2 = -c_1^2 = -\frac{b^2}{16},$$

d'où, pour l'équation qui les représente tous deux :

$$b^2(23u^2 - 113v^2) - 64(u^4 - 6u^2v^2 + v^4) = \frac{7}{4}b^4,$$

et, pour la distance entre leurs deux points les plus rapprochés :

$$c_1 \sqrt{\frac{1+n}{n}} = \frac{b\sqrt{7}}{4} = 0,66144b,$$

ou presque les *deux tiers* de la distance  $b$  entre leurs deux points les plus éloignés, en sorte que les deux orbes sont espacés d'environ quatre fois leur largeur ou diamètre principal  $0,33856 \frac{b}{2}$  qui diffère lui-même fort peu de leur hauteur <sup>(1)</sup>.

Nous avons trouvé, en effet, par la méthode de quadrature déjà employée au § précédent, pour le moment de la torsion simultanée des prismes ayant pour bases ces deux orbes

$$M_1 = 0,002\,473\,463 \left(\frac{b}{2}\right)^4 G\theta,$$

ce qui fait les 0,018573 ou le  $1/54$  environ du produit

$$G\theta J = 0,133179 \left(\frac{b}{2}\right)^4 G\theta$$

qu'on aurait pour  $M_1$ , conformément à l'ancienne théorie, si les sections, au lieu de s'incliner, restaient dans le même plan perpendiculaire à l'axe  $o$  autour duquel on les tord solidairement.

Or, si l'on remplace approximativement leurs bases par des cer-

(1) Les lignes peu courbes, tant pleines que ponctuées, qui sont tracées dans l'intérieur de ces orbes, sont les coupes topographiques, par des plans équidistants perpendiculaires à l'axe  $o$ , des surfaces presque planes, *mais inclinées*, dans lesquelles leurs plans primitivement normaux à l'axe se changent par la torsion.



(Du n° 156).

cles de même diamètre  $0,33856 \frac{b}{2}$  on aura, pour le moment de torsion de chacun (§ 18)

$$\frac{\pi}{2} \left( \frac{0,33856}{2} \right)^4 \left( \frac{b}{2} \right)^4 G\theta = 0,00128989 \left( \frac{b}{2} \right)^4 G\theta,$$

ce qui diffère assez peu de la moitié de ce que nous venons d'obtenir pour le moment de torsion  $M_1$  des deux prismes.

Le principe du § 15, consistant en ce que le moment de torsion d'un prisme est indépendant de la position de l'axe parallèle à ses arêtes autour duquel on le tord, se trouve donc ici confirmé par un moyen particulier (1).

Et, en invoquant ce principe du § 15, on peut déterminer le moment de torsion et la résistance à la rupture par torsion de prismes ayant des bases simples, qui ne sont fournies que doubles par l'équation du quatrième degré du § 30, ou par toute équation comprise dans la formule générale  $\frac{u^2+v^2}{2} + \dots = K$  du § 10, et capable de donner deux orbes ou deux autres figures égales ne se touchant pas ou n'ayant de commun qu'un seul point situé à l'origine des coordonnées.

Par exemple, pour *chacun* des orbes ovoïdes figurés d'autre part, si on l'appelle  $D$  leur diamètre, le moment de torsion sera

$$\frac{0,002473463}{2} \left( \frac{D}{0,33856} \right)^4 G\theta,$$

et le plus grand glissement, au point  $u = \frac{b}{2}$ ,  $v = 0$ , aura pour valeur

$$g = 0 \frac{b}{10} = 0 \frac{D}{5,33856};$$

résultats qui permettront de poser l'équation de résistance à la rupture par torsion du cylindre unique ayant cet orbe pour section.

On obtient, au reste, divers contours ovoïdes *simples* avec l'é-

(1) C'est même le résultat relatif aux deux orbes qui nous a fait soupçonner l'existence de ce principe, démontré d'une manière générale au § 15.

(Du n° 156).

quation du troisième degré  $\frac{u^2+v^2}{2} + C_1(u^2-v^2) + C_2(u^3-3uv^2) = K$  (1).

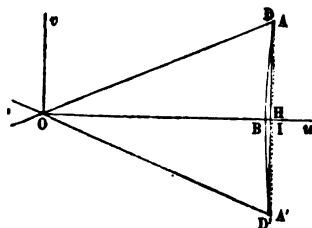
§ 37. *Torsion des pièces à côtes, ailes ou nervures.* — Ces pièces, désignées par les ingénieurs anglais sous le nom d'*axes emplumés* (*feathered axis*) ont été examinées au § 19 de la note du n° 120 sous le rapport de la flexion.

Ainsi que nous avons dit alors, elles ne sont nullement propres à résister à la torsion.

Il nous a fallu pour obtenir, de l'équation générale du § 10, un

(1) Voici encore un exemple de l'usage des contours doubles, qui est tout au moins curieux, surtout dans le rapprochement de son résultat avec un de ceux du § 23, p. 156.

Soit un triangle isocèle  $ODD'$  dont les côtés  $OD, OD'$  forment avec la médiane



ou hauteur  $OH = h$  des angles ayant pour tangente  $\sqrt{2}-1 = 0,4142$ . Assimilons-le approximativement, quant aux glissements déterminés par la torsion d'un prisme qui l'aurait pour section, au triangle légèrement curviligne  $AOA'B$  ayant pour base, avec les mêmes côtés, la portion d'hyperbole  $ABA'$  dont l'équation est (§ 33)  $u^2 = \frac{b^2}{4} + (\sqrt{2}-1)^2 v^2$  et par conséquent une hauteur ou médiane

$OB = \frac{b}{2}$  placée sur l'axe des  $u$  et supposée un peu moindre que  $h$ .

Nous aurons pour le moment de torsion du prisme autour de l'axe  $O$  perpendiculaire au plan du triangle, et par conséquent (§ 45) autour de tout axe parallèle,

l'expression de  $M_1$  du § 30 en faisant  $\pi = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$ ,  $c^2 = 0$ , ou

$$M_1 = G\theta \left[ \int d\omega (u^2 + v^2 - \sqrt{2}(u^2 - v^2)) + \frac{8(\sqrt{2}-1)}{h^2} \int d\omega (u^4 - 6u^2v^2 + v^4) \right].$$

En intégrant pour toute l'étendue de notre triangle rectiligne dont  $h$  est la hauteur  $OH$  et  $2h(\sqrt{2}-1)$  la base  $DD'$ , nous trouvons

$$M_1 = G\theta \left( -\frac{3-2\sqrt{2}}{3} + 16 \frac{5\sqrt{2}-7}{45} \cdot \frac{bh^2}{b^2} \right) h^4.$$

(Du n° 156).

contour en croix de Malte ou en étoile à quatre pointes, analogue aux sections de ces sortes de pièces, la porter au huitième degré, ou prendre

$$u^2 + v^2 + 2C_1(u^4 - 6u^2v^2 + v^4) + 2C_2(u^6 - 28u^4v^2 + 70u^2v^4 - 28u^2v^6 + v^6) = 2K.$$

Mais pour qu'elle donne des courbes fermées dont les plus grands et les plus petits diamètres soient très-inégaux, ses coefficients doivent remplir certaines conditions qui sont discutées à l'art. 96 de notre Mémoire sur la torsion déjà cité. Nous nous sommes arrêté à

Si nous prenons OH égal à l'abscisse OI des points A, A', ou

$$h = \frac{b}{2} \sqrt{\frac{4}{4 - (\sqrt{2}-1)^2}} = \frac{b}{2} \frac{\sqrt{2}+1}{4} \sqrt{2\sqrt{2}},$$

cette expression se réduirait à  $\frac{8\sqrt{2}-11}{15} G\theta h^4$ . Et comme, en calculant le moment d'inertie J du triangle autour de son centre de gravité, on trouve

$$J = \frac{8\sqrt{2}-11}{9} h^4,$$

il en résulterait  $\frac{M_1}{G\theta J} = \frac{3}{5} = 0,6$  comme pour le triangle équilatéral (§ 23).

Mais il convient, pour que l'assimilation soit plus approchée, de donner à OH une valeur moyenne entre OB et OI. En prenant, ce qui est plus simple et revient à peu près au même, pour le carré du rapport de h à  $\frac{b}{2}$ , la demi-somme de l'unité

et du carré  $\left(\frac{\sqrt{2}+1}{4}\right)^2 \cdot 2\sqrt{2}$  du rapport de OI à OB, ce qui fera  $\frac{h^2}{b^2} = \frac{12 + 3\sqrt{2}}{16}$ , nous trouverons

$$M_1 = \frac{49\sqrt{2}-69}{15} G\theta h^4 = 9,19764 G\theta h^4;$$

d'où

$$\frac{M_1}{G\theta J} = \frac{3}{5} \frac{49\sqrt{2}-69}{8\sqrt{2}-11} = 0,6 \cdot \frac{25-13\sqrt{2}}{7} = 0,56702;$$

résultat très en harmonie avec celui du § 23, car le prisme ayant pour base notre triangle isocèle, doit opposer un peu moins de résistance à la torsion que le prisme triangulaire équilatéral pour lequel nous avons trouvé 0,6.

L'accord de résultats ainsi obtenus par des procédés variés confirme les principes dont ils découlent.

(Du n° 156).

$$2C_4 = -\frac{48}{49} \cdot \frac{16}{17} \frac{1}{b^3} \quad 2C_3 = \frac{12}{49} \cdot \frac{16}{17} \frac{1}{b^3}, \quad 2K = b^2 + 2C_4 b^4 + 2C_3 b^3.$$

Les plus grands diamètres, dirigés suivant les axes des  $u$  et des  $v$ , sont  $2b$ ; et les plus petits, inclinés à 45 degrés, sont  $b$ , ou justement moitié moindres. Cette équation revient, en coordonnées polaires, à

$$\left(\frac{r}{b}\right)^2 - \frac{49}{48} \cdot \frac{17}{16} \left(\frac{r}{b}\right)^4 \cos 4\alpha + \frac{12}{49} \cdot \frac{16}{17} \left(\frac{r}{b}\right)^6 \cos 8\alpha = 1 - \frac{36}{49} \frac{16}{17}$$

qui donne bien  $r=b$  pour  $\alpha=0$  ou  $\frac{\pi}{2}$ , et  $r=\frac{b}{2}$  pour  $\alpha=\frac{\pi}{4}$  et  $3\frac{\pi}{4}$ .

En remplaçant  $\cos 8\alpha$  par  $2\cos^2 4\alpha - 1$  elle n'est que du second degré en  $r^4 \cos 4\alpha$ ; et comme on a  $2\cos^2 \alpha - 1 = \cos 2\alpha = \frac{1 + \cos 4\alpha}{2}$ ,  $r \cos \alpha = u$ ,  $v^2 = r^2 - u^2$ , l'on obtient

$$\text{et } \frac{u^2}{b^2} \left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right. = \frac{1}{2} \frac{r^2}{b^2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{r^4}{b^4}\right) - \frac{1}{2} \sqrt{2 \cdot \frac{49}{48} \cdot \frac{17}{16} \left(1 - \frac{r^2}{b^2}\right) - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{r^2}{b^2}\right)}},$$

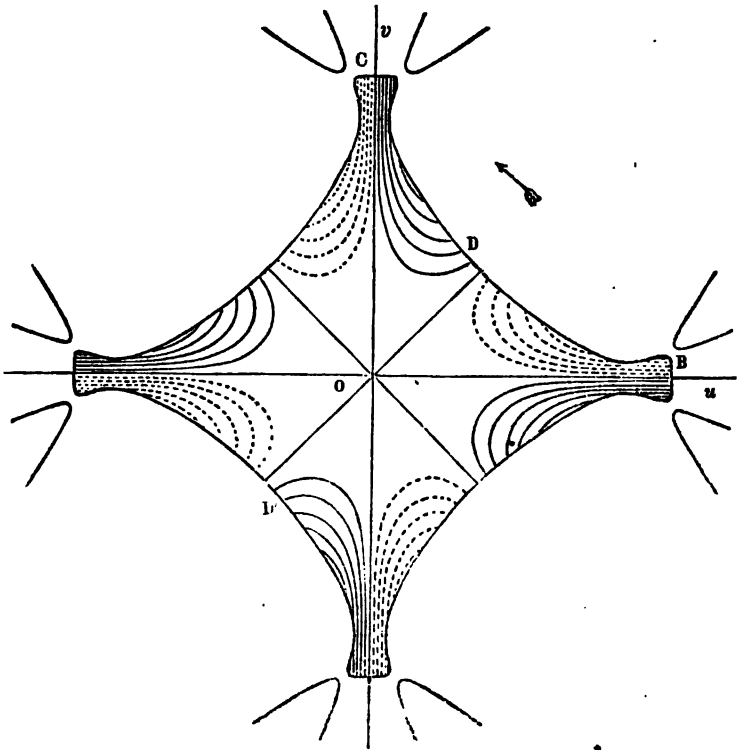
ce qui permet de calculer autant de systèmes qu'on veut des coordonnées  $u$ ,  $v$  de la courbe en se donnant une suite de valeurs arbitraires du rayon vecteur  $r$ .

Elle est représentée page suivante ainsi que les coupes *topographiques*, par des plans équidistants perpendiculaires à l'axe  $O$ , de la surface courbe dans laquelle se changent, par la torsion, les plans des sections auxquelles elle sert de contour (1).

(1) Mon ancien camarade M. Bardin, ancien chef des travaux graphiques à l'École polytechnique, a bien voulu joindre, à sa jolie collection de modèles en plâtre, des reliefs de cette surface courbe et de celles dans lesquelles se changent, de même, les plans des sections carrée (§ 27), rectangle (id.), elliptique (§ 24), triangulaire-équilatérale (§ 23) et en double spatule (§ 25, 3°, p. 326).

On les trouve, chez M. Dunod, éditeur, quai des Augustins, 49, ainsi que deux reliefs relatifs à la flexion, et à la forme courbe que prennent les sections des prismes fléchis par des forces ne faisant pas couples (fig. des p. 242, 414, 412), deux reliefs figuratifs du mouvement de la corde vibrante (Historique, p. ccxxvij), et un autre qui représente le mouvement très-complicqué d'une barre heurtée transversalement (id., p. ccxxxvij).

(Du n° 156).



Comme l'équation de cette surface, pour laquelle  $OB = DOD' = b$ , est (§ 11, p. 258).

$$z = \theta b^3 \left[ -\frac{1}{2} \cdot \frac{48}{49} \cdot \frac{16}{17} \left(\frac{r}{b}\right)^4 \sin 4\alpha + \frac{1}{2} \cdot \frac{12}{49} \cdot \frac{16}{17} \left(\frac{r}{b}\right)^8 \sin 8\alpha \right],$$

on a pu facilement, en la résolvant par rapport à  $\left(\frac{r}{b}\right)^4$ , construire autant de points qu'on a voulu de ses coupes par les plans

$$z = 0,01 \theta b^3, 0,02 \theta b^3 \dots \dots 0,05 \theta b^3.$$

On trouve pour l'aire  $\omega$  et pour le moment d'inertie polaire  $J$ , par la méthode de quadrature approchée

(Du n° 150).

$$\omega = 1,22020 b^3, \quad J = \int (u^2 + v^2) d\omega = 0,29742 b^4.$$

Et on obtient de même

$$\int (u^4 - 6u^2v^2 + v^4) d\omega = 0,09770 b^6$$

$$\int (u^6 - 28u^4v^2 + 70u^2v^4 - 28u^2v^6 + v^8) d\omega = 0,04606 b^{10};$$

d'où, pour le moment de torsion

$$M_1 = G\theta \left( 0,29742 - 4 \cdot \frac{24}{49} \cdot \frac{16}{17} \cdot 0,09770 + 8 \cdot \frac{6}{49} \cdot \frac{16}{17} \cdot 0,04606 \right) b^4 = 0,15983 G\theta b^4,$$

ou

$$M_1 = 0,53741 G\theta J.$$

La résistance élastique à la torsion n'est donc que les 0,537 de ce qu'on aurait si la section restait plane, ou de ce qu'offrirait une section circulaire ayant même moment d'inertie polaire.

Ainsi les quatre saillies de la section, qui formeraient les côtes ou nervures de la pièce, et qui ont une assez forte influence sur la grandeur du moment d'inertie, n'en ont qu'une très-faible sur la résistance à la torsion. On en voit la raison en jetant les yeux sur la figure, et, encore mieux, sur un relief, car, dans les parties saillantes, on aperçoit par les coupes que la surface de la section s'incline considérablement de manière à rester à peu près normale aux arêtes devenues des hélices. Les pièces à côtes doivent donc être exclues des parties des constructions où les efforts tendent à tordre, ou, du moins, il ne faut compter que sur une bien faible quote part des côtes ou nervures dans la résistance.

On tire la même conclusion lorsqu'on vient à considérer la rupture par torsion.

Pour trouver, à cet effet, d'abord le point dangereux et le plus grand glissement, remplaçons  $2C_1$  et  $2C_2$  par les lettres  $a$  et  $a'$ , et supposons, aussi pour simplifier,  $b = 1$ . L'équation du contour sera

$$r^2 - ar^2 \cos 4\alpha + a'r^2 \cos 8\alpha = 1 - a + a'.$$

Le glissement principal  $g$  sera donné (§ 11) par

$$\frac{g^2}{\theta^2} = r^2 + 4a^2r^4 + 16a'^2r^{14} - 4ar^2 \cos 4\alpha - 16aa'r^{10} \cos 4\alpha + 8a'r^8 \cos 8\alpha,$$

(Du n° 158).

$$\text{d'où } \frac{d}{d\alpha} \frac{G^2}{\theta^2} = 16r^4 (a + 4aa'r^2) \sin 4\alpha - 64a'r^2 \sin 8\alpha$$

$$\frac{d^2}{d\alpha^2} \frac{G^2}{\theta^2} = 64r^4 (a + 4aa'r^2) \cos 4\alpha - 512a'r^2 (2 \cos^2 4\alpha - 1).$$

L'équation de maximum ou de minimum relatif  $\frac{d}{d\alpha} \frac{G^2}{\theta^2} = 0$  est satisfait

1° Par  $r = 0$ , qui ne convient pas;

2° Par  $\sin 4\alpha = 0$ ,  $\cos 4\alpha = 1$ , ou  $\alpha = 0$  et  $= \frac{\pi}{2}$ ;

3° Par  $\sin 4\alpha = 0$ ,  $\cos 4\alpha = -1$ , ou  $\alpha = \frac{\pi}{4}$  et  $3\frac{\pi}{4}$ ;

4° Par  $\cos 4\alpha = \frac{a + 4aa'r^2}{8a'r^2}$ .

La 3° solution, qui donne les points des petits diamètres à 45 degrés sur les grands, ne fournit aucun maximum absolu, car  $\sin 4\alpha = 0$ ,  $\cos 4\alpha = -1$  rendent négatifs tous les termes de  $\frac{d^2}{d\alpha^2} \frac{G^2}{\theta^2}$ , mais positifs tous ceux de  $\frac{d^2}{dr^2} \frac{G^2}{\theta^2}$ .

La 4° solution, qui donne les points d'une courbe du sixième degré, réelle seulement pour des valeurs de  $r$  rendant  $a + 4aa'r^2$  moindre que  $8a'r^2$ , ne fournit pas non plus de maximum, car en mettant  $8a'r^2 \cos 4\alpha$  à la place de  $a + 4aa'r^2$  dans  $\frac{d^2}{d\alpha^2} \frac{G^2}{\theta^2}$ , il devient

$$512a'r^2 (1 - \cos^2 4\alpha)$$

quantité positive pour toutes les valeurs réelles de l'angle  $\alpha$ .

Quant à la 2° solution  $\alpha = 0$  ou  $\frac{\pi}{2}$ , qui donne les divers points des deux grands diamètres, il en résulte, vu que  $a' = \frac{1}{4} a$

$$\frac{d^2}{d\alpha^2} \frac{G^2}{\theta^2} = 512a'r^2 \left( \frac{a + 4aa'r^2}{8a'r^2} - 1 \right) = 128ar^2 \left( \frac{1 + ar^2}{2r^2} - 1 \right);$$

(Du n° 156).

et, vu la valeur  $\alpha = \frac{48}{49} \cdot \frac{16}{17} = 0,921969$ , cette dérivée du second ordre est négative ou positive selon que  $r^2$  est au-dessus ou au-dessous de

$$0,9388.$$

Mais  $\alpha = 0$  ou  $\frac{\pi}{2}$  donne

$$\frac{g^2}{\theta^2} = (r - 2ar^2 + 4a'r^3)^2$$

dont la dérivée par rapport à  $r$  s'anéantit : 1° pour  $r = 0$  qui ne convient pas; 2° pour  $1 - 2ar^2 + 4a'r^3 = 0$  qui annule  $g^2$  et doit par conséquent être rejeté aussi; 3° pour  $1 - 6ar^2 + 28a'r^3 = 0$ . Cette troisième solution, la seule qui soit à discuter, fournit

$$r^2 = 0,81700,$$

valeur inférieure à celle 0,9388 au-dessous de laquelle la dérivée du second ordre par rapport à  $\alpha$  est positive.

Il n'y a donc toujours pas, sur le plan de la figure, de point de maximum absolu du glissement  $g$ , et le point dangereux *doit être cherché sur le contour, comme dans tous les exemples que nous avons traités.*

Ce qu'il y a de plus simple pour cette dernière recherche, est d'opérer numériquement, ou de calculer  $g'$  et  $g''$  et par suite  $g'^2 + g''^2 = g^2$  à différents points de l'arc BD, qui est le demi-quart du contour de notre section. On trouve, ainsi, que la plus grande valeur de  $g^2$  est au point D, extrémité du petit diamètre DD'. Et comme nous avons vu (§ 17) que les extrémités des plus grands et des plus petits diamètres des sections symétriques sont nécessairement des points de maximum ou de minimum de  $g^2$ , nul doute que les extrémités des petits diamètres ne soient les points dangereux.

Or on a exactement, à ces points

$$\cos 4\alpha = -1, \quad \cos 8\alpha = 1, \quad r = \frac{b}{2},$$

d'où

$$g = \theta \left[ \frac{b}{2} + 2a \left( \frac{b}{2} \right)^2 + 4a' \left( \frac{b}{2} \right)^3 \right] = 1,47539 \cdot \theta \frac{b}{2}.$$



(Du n° 156).

En l'égalant à la limite (§ 17)  $\frac{T_2}{G}$  et éliminant  $G\theta$  au moyen de  $M_1 = 0,53741 G\theta J$  on obtient

$$\text{Limite de } M_1 = 0,7285 \frac{J}{b} T_2.$$

ou les 0,7285 seulement de ce qu'on aurait par l'ancienne théorie qui supposait que les sections restent planes.

Le plus petit glissement sur le contour a lieu pour  $r = 0,99 \frac{b}{2}$ , tout auprès des extrémités des quatre saillies, aux angles arrondis qu'elles forment à droite et à gauche. Sa grandeur est

$$\sqrt{0,000571} \cdot b\theta = 0,0239 b\theta = 0,0241(0,99 b\theta)$$

ou moins du 1/40 de ce qu'il serait si les sections restaient planes.

Pouvait-on arriver approximativement à la valeur du moment  $M_1$  et à celle du glissement  $g$  qui donne sa limite, pour une section d'une pareille forme, en l'assimilant, quant au gauchissement, à une section ayant un contour d'un degré moindre que le huitième?

L'assimilation à un contour du second degré ne pouvait pas même être tentée, car, pour les sections égales dans les deux sens, l'ellipse serait un cercle, en sorte que la section *serait supposée rester plane*.

Mais voyons ce qui résulterait de l'assimilation à une section du quatrième degré. Nous comparerons notre section du huitième degré à celle qui s'en rapproche le plus, et qui est la section carrée à angles aigus ADA'D' du § 32 (p. 310) ou du (1°) du § 35 (p. 323), mais tournée de 45 degrés en sorte que les axes des  $u$  et des  $v$  soient les diagonales, ce qui revient à prendre  $n$  négatif et  $-n =$  son maximum 1/2, d'où pour l'équation du contour, en appelant  $b'$  la demilongueur des diagonales ou l'abscisse  $u$  répondant à  $v = 0$ .

$$\frac{u^2 + v^2}{2} - \frac{1}{4b'^2} (u^4 - 6u^2v^2 + v^4) = \frac{b'^2}{4}$$

et par conséquent (§ 16)

(Du n° 156).

$$C_3 = 0, C_4 = -\frac{1}{4b^2}, M_1 = G\theta \left[ \int (u^2 + v^2) d\omega - \frac{1}{b^2} \int (u^4 - 6u^2v^2 + v^4) d\omega \right];$$

ou bien, en mettant pour  $\int d\omega (u^2 + v^2)$ ,  $\int (u^4 - 6u^2v^2 + v^4) d\omega$ , les valeurs calculées ci-dessus (p. 339) pour la section du huitième degré (Intégrales qui seraient également faciles à calculer pour une section non représentée par une équation)

$$M_1 = \left( 0,29742 - 0,09770 \frac{b^2}{b^2} \right) G\theta b^4.$$

Il faut supposer la diagonale  $2b'$  de la section du quatrième degré un peu moindre que la diagonale  $2b$  de la section du huitième degré pour que leurs deux contours se rapprochent autant que le permet leur différence de forme. Prenons  $\frac{b'}{b} = 0,85$ , nous aurons

$$M_1 = 0,16218 G\theta b^4,$$

ce qui s'éloigne peu de la valeur exacte  $0,15983 G\theta b^4$ .

Quant au plus grand glissement  $g$ , il sera donné par

$$\frac{g^2}{\theta^2} = [-v + 4C_4(3u^2v - v^3)]^2 + [u + 4C_4(u^3 - 3uv^2)]^2$$

pour  $u = v = \frac{b}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $C_4 = -\frac{1}{4b^2}$ , d'où

$$\left( \frac{g}{\theta b} \right)^2 = \frac{1}{4} \left( 1 + \frac{1}{4} \frac{b^2}{b^2} \right)^2; \quad g = \left( 1 + \frac{1}{4} \frac{b^2}{b^2} \right) \theta \frac{b}{2}.$$

ou, en faisant  $b' = 0,85b$ :

$$g = 1,3460 \theta \frac{b}{2}$$

Cette valeur du plus grand glissement ne diffère pas beaucoup de la valeur exacte  $g = 1,47539 \theta \frac{b}{2}$ .

On voit le parti qu'on pourrait tirer, pour la détermination simple et approximative des moments de torsion et des conditions de résistance à la rupture par torsion, de l'assimilation des sections des prismes aux courbes fermées du quatrième degré dont on a donné l'équation générale au § 30, en choisissant convenablement leurs dimensions  $b$ ,  $c$  et la valeur positive ou négative de la constante nu-

( Du n° 150 ).

mérique  $n$ . A plus forte raison approcherait-on des vraies valeurs pour certaines sections en croix en les assimilant à la courbe du huitième degré dont nous venons de nous occuper.

§ 38. *Torsion des prismes à base quelconque.* — Mais il faut dire que les résultats de ces assimilations d'un contour à un autre qui en diffère sensiblement sont toujours affectés de beaucoup d'incertitude (fin du § 35 ci-dessus).

Lorsqu'on voudra donc arriver à connaître les lois de la résistance à la torsion et à la rupture par torsion d'un prisme ou cylindre dont on se donne la base de forme quelconque, le plus sûr sera de mesurer les coordonnées soit ordinaires soit polaires d'un très-grand nombre de points de son contour, et de les substituer à  $u$ ,  $v$ , ou à  $r$ ,  $\alpha$  dans l'équation générale  $\frac{u^2+v^2}{2} + C_1u + \dots = K$  du § 10 ou  $\frac{r^2}{2} + C_1r \cos \alpha + \dots = K$

du § 11 prise avec un grand nombre de termes en effaçant ceux dont les coefficients  $C$  doivent être nuls d'après la forme particulière de ce contour et la position de l'axe de torsion (§§ 12 et 15), puis de résoudre toutes ces équations numériques du premier degré par rapport aux coefficients  $C$  restants et au second membre  $K$  aussi inconnu, afin de composer l'équation d'un contour dont il conviendra ensuite de vérifier le rapprochement de celui qui est donné en calculant ses ordonnées pour des points intermédiaires entre ceux qui sont communs à tous deux et qu'on a choisis sur celui-ci. Ce n'est que lorsque la presque coïncidence des deux contours aura été établie qu'on substituera les coefficients dans la formule générale du moment de torsion  $M_1$  du § 16, en calculant par quadrature numérique les intégrales  $\int(u^2+v^2)d\omega$ ,  $\int(u^2-3uv^2)d\omega$ , etc., pour la section  $\omega$  donnée et qu'on déterminera sur le contour (d'après ce qu'on a vu à tous les §§ précédents), par la méthode d'approximation du § 34,

les points dangereux qui donnent un maximum pour  $\frac{g^2}{\theta^2}$  (§ 11) ou

$$\left(\frac{g'}{\theta}\right)^2 + \left(\frac{g''}{\theta}\right)^2, \text{ afin d'en déduire la condition de cohésion (§ 17)}$$

$\left(\frac{T_0}{G}\right)^2 = \text{ou} > \text{maximum de } g^2, \text{ d'où la limite à imposer au moment } M \text{ des forces qui font tordre.}$

(Du n° 150).

On verra au § 40 une manière prompte d'obtenir  $M_1$  et  $\lim. M_1$  qui, faute de fournir une approximation certaine, peut donner tout au moins une idée de leur grandeur.

§ 39. *Cas où la matière du prisme tordu est d'inégale contexture dans les divers sens transversaux, bien qu'homogène ou d'égale nature aux divers points. Formules lorsque la contexture est supposée symétrique par rapport au plan de chaque section et à deux autres plans rectangulaires entre eux et à celui-ci.*—Nous avons supposé, depuis le § 3, que la contexture de la matière du prisme tordu est non-seulement homogène ou la même partout, mais, aussi, égale en tous sens autour de chaque point.

Les formules données conviennent encore si, seulement, *cette contexture est la même dans tous les sens transversaux*, tout en pouvant être très-différente dans le sens longitudinal comme il arrive dans les bois, les fers étirés et d'autres corps fibreux.

En effet, alors, les efforts transversaux sur les éléments  $d\omega$  d'une section auront toujours les mêmes directions que les glissements  $g$  (§ 5, note n° 152) et seront, pour l'unité superficielle, égaux à ces glissements multipliés par un coefficient  $G$  le même dans toutes ces directions. Les efforts longitudinaux sur les quatre faces latérales des éléments solides prismatiques à base carrée que nous avons considérées au § 6 seront aussi mesurées par le produit des glissements  $g'$  ou  $g''$  et d'un même coefficient, qu'il soit ou non égal à  $G$ . Et comme ces coefficients d'élasticité de glissement disparaissent des équations *indéfinie* et *définie* posées aux §§ 6 et 9 pour l'équilibre à tous les points de l'intérieur et aux points particuliers du contour des sections, on aura les mêmes formules que s'il y avait *isotropie* ou égale contexture dans toutes les directions en chaque point.

Il en est autrement si la contexture du corps homogène *n'est pas la même dans tous les sens transversaux*, circonstance que peuvent présenter les bois, les fers méplats, etc.

Mais au moyen de quelques modifications, les formules précédentes peuvent encore servir dans un cas très-étendu, et où nous nous placerons toujours, savoir *le cas où la contexture est partout symétrique par rapport à trois plans rectangulaires dont un est le plan de la*

(Du n° 153).

section et dont les deux autres ont la même direction en tous les points.

Alors, en effet, en prenant les coordonnées  $u$ ,  $v$  parallèles aux intersections des sections  $\omega$  avec ces deux autres plans principaux ou plans de symétrie, les efforts tangentiels sur les éléments  $d\omega$  auront encore la même direction que les glissements  $g$  lorsque ceux-ci seront parallèles soit aux  $u$  soit aux  $v$ , car (comme au § 5 de la note du n° 152, p. 193), il n'y aura aucune raison pour qu'ils s'en écartent à droite plutôt qu'à gauche. En sorte que si nous appelons  $G'$  et  $G''$  deux coefficients d'élasticité de glissement relatifs aux directions  $u$ ,  $v$ , nous aurons, sur l'élément  $d\omega$ ,  $G'g'd\omega$ ,  $G''g''d\omega$  pour les expressions d'un effort parallèle aux  $u$  et d'un effort parallèle aux  $v$ , provenant respectivement d'un glissement unique  $g'$  et d'un glissement unique  $g''$  ayant ces directions. Par conséquent, en vertu du principe (§ 2 note du n° 21) de composition correspondante des efforts et des petits déplacements, nous aurons aussi

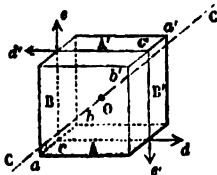
$$G'g'd\omega, \quad G''g''d\omega$$

pour les composantes, suivant les  $u$  et suivant les  $v$ , de la force tangentielle qui s'exerce dans une direction quelconque sur l'élément  $d\omega$ , en vertu du glissement  $g = \sqrt{g'^2 + g''^2}$  résultant de  $g'$  et  $g''$ . Cette force fera avec l'axe des  $u$  un angle dont la tangente est

$$\frac{G''g''}{G'g'}$$

et non  $\frac{g''}{g'}$ , comme pour le glissement  $g$  qui la développe.

Or remarquons que généralement, dans un solide en repos dont les molécules agissent les unes sur les autres à des distances insensibles, si l'on imagine deux très-petites faces A, B se coupant perpendiculairement et égales en superficie, l'action totale à travers A estimée ou décomposée perpendiculairement à B est toujours égale à l'action totale à travers B estimée perpendiculairement à A. Cela est, en effet, nécessaire pour l'équilibre de rotation, autour d'un axe  $COc$  parallèle à leur intersection commune  $acb$ , d'un petit cube so-



(Du n° 156).

lids dont A et B seraient deux des faces adjacentes, et par le centre duquel passe COG ; car si les actions dont nous parlons s'exerçant des molécules de l'extérieur à celles de l'intérieur de cet élément solide, avaient des composantes totales inégales dans les directions  $cd$ ,  $ce$  perpendiculaires à cette intersection, une inégalité de même ordre de grandeur existerait entre les composantes parallèles et contraires, suivant  $c'd'$ ,  $c'e'$ , des actions s'exerçant sur les faces opposées et très-voisines A', B' ; en sorte que le moment total ne serait pas nul, et ferait tourner l'élément autour de COG.

Cette égalité, découverte par M. Cauchy, se reconnaît encore en considérant séparément et successivement les actions moléculaires s'exerçant dans diverses directions ou parallèlement à diverses droites imaginées dans l'espace. Les sommes ou intensités totales de celles qui s'exercent ainsi à de petites distances à travers la face A et à travers la face B, parallèlement à l'une quelconque de ces droites, sont évidemment entre elles, vu l'homogénéité de la matière, comme les superficies des projections de A et de B sur un même plan perpendiculaire à la droite particulière que l'on considère, ou comme les cosinus des angles qu'elle fait avec les normales  $ce$ ,  $cd$  aux faces A, B. Pour *estimer* ces sommes d'actions, la première suivant  $cd$ , la seconde suivant  $ce$ , il faut les multiplier par les deux mêmes cosinus pris dans un ordre inverse, et cela donne des produits égaux. Donc, comme on peut dire la même chose pour les sommes d'actions dans toutes les autres directions imaginables, on a bien l'égalité de l'action totale sur A, estimée suivant  $cd$ , à l'action totale sur B, estimée suivant  $ce$ .

Il en résulte qu'on a respectivement  $G'g'$ ,  $G''g''$  pour les actions tangentielles *longitudinales* sur l'unité superficielle des faces latérales adjacentes  $mn$ ,  $mp$  du petit élément prismatique dont la base carrée est figurée au § 6 (page 248), comme pour les actions transversales sur cette base suivant ses côtés parallèles aux  $u$ , aux  $v$  ; en sorte que l'équilibre de translation longitudinale de cet élément solide, exprimé à ce § par  $\frac{dg'}{du} + \frac{dg''}{dv} = 0$ , l'est maintenant par

$$G' \frac{dg'}{du} + G'' \frac{dg''}{dv} = 0 ;$$

(Du n° 156).

ou bien, en mettant pour  $g'$ ,  $g''$  leurs valeurs qui sont toujours (§ 5)

$$g' = i - \theta v = \frac{dz}{du} - \theta v, \quad g'' = j + \theta u = \frac{dz}{dv} + \theta u,$$

que l'on a, en tous les points des sections du prisme à trois plans de symétrie de contexture

$$G' \frac{d^2z}{du^2} + G'' \frac{d^2z}{dv^2} = 0.$$

Il en résulte également, comme les éléments des faces latérales du prisme sont supposés n'éprouver (§§ 4, 8) aucune action longitudinalement ou dans la direction des arêtes, qui étaient primitivement perpendiculaires aux sections du prisme, que les éléments  $d\omega$  de ces sections, auprès du contour, ne supportent aucune action transversale dans un sens perpendiculaire aux intersections communes de ces deux sortes d'éléments superficiels, c'est-à-dire perpendiculaire aux éléments linéaires du contour. En sorte que l'action sur  $d\omega$ , dont les composantes sont  $G'g'd\omega$ ,  $G''g''d\omega$ , a la même direction que ces derniers éléments dont les projections sont  $du$ ,  $dv$  parallèlement aux  $u$ ,  $v$ ; ce qui s'exprime par  $\frac{G''g''}{G'g'} = \frac{dv}{du}$ , ou

$$G'' \left( \frac{dz}{dv} + \theta u \right) du - G' \left( \frac{dz}{du} - \theta v \right) dv = 0,$$

équation au contour qui remplace celle de la fin du § 8.

Ces deux équations montrent, avec l'expression du moment de torsion qui est maintenant

$$M_1 = \int_0^\omega (G''g''u - G'g'v) d\omega,$$

que toutes les valeurs :

- Du petit déplacement longitudinal  $z$  des points du prisme,
- Des glissements  $g'$ ,  $g''$ ,
- Du moment de torsion  $M_1$ ,

peuvent être déduites de celles qui ont été trouvées ci-dessus pour le cas d'égal contexture  $G' = G'' = G$

(Du n° 156).

en changeant

$$\left\{ \begin{array}{l} u \text{ en } u \sqrt{\frac{G}{G'}}, v \text{ en } v \sqrt{\frac{G}{G''}} \text{ (et faisant de même pour les valeurs} \\ \text{particulières de ces coordonnées),} \\ G \text{ en } \sqrt{G'G''}, \theta \text{ en } \theta \frac{\sqrt{G'G''}}{G}, \\ g' \text{ en } g' \sqrt{\frac{G'}{G}}, g'' \text{ en } g'' \sqrt{\frac{G''}{G}}, \\ M_1 \text{ en } M_1 \frac{G}{\sqrt{G'G''}} \text{ dans les égalités } M_1 = \dots \text{ si les intégrations sont} \\ \text{déjà effectuées dans le second membre, ou si seulement } d\omega \text{ y est} \\ \text{remplacé par } du dv; \\ \text{Mais en laissant } M_1 \text{ tel qu'il est dans le premier membre si les in-} \\ \text{tégrales du second sont encore sous la forme } \int u^m v^m d\omega. \end{array} \right.$$

En effet ces changements donnent bien les deux équations différentielles nouvelles et l'expression nouvelle du moment  $M_1$ , qu'on vient de poser, quand on les introduit dans les équations  $\frac{d^2z}{du^2} + \frac{d^2z}{dv^2} = 0$ ,  $\left(\frac{dz}{dv} + \theta u\right) du - \left(\frac{dz}{du} - \theta v\right) dv = 0$ ,  $M_1 = G \int (g''u - g'v) d\omega$  des §§ 6, 8 et 9. Ils donnent encore l'expression nouvelle de  $M_1$  lorsque,  $du dv$  étant mis pour  $d\omega$ , on y fait les changements relatifs à  $u$  et à  $v$  en ayant soin de remplacer alors le premier membre  $M_1$  par  $M_1 \frac{G}{\sqrt{G'G''}}$ . Enfin ces mêmes changements introduits dans les premiers comme dans les seconds membres de  $g' = \frac{dz}{du} - \theta v$ ,  $g'' = \frac{dz}{dv} + \theta u$  laissent ces égalités les mêmes.

On obtient ainsi, au lieu des formules générales entières du § 10,

$$z = \theta \sqrt{G'G''} \left\{ \begin{array}{l} \frac{C_1}{\sqrt{G}} \frac{v}{\sqrt{G''}} + C_2 \frac{2uv}{\sqrt{G'G''}} + C_3 \sqrt{G} \left( \frac{3u^2v}{\sqrt{G'^2G''}} - \frac{v^3}{\sqrt{G''^3}} \right) + C_4 G \left( \frac{4u^3v}{\sqrt{G'^3G''}} - \frac{4uv^3}{\sqrt{G'G''^3}} \right) + \dots \\ + \frac{C'_1}{\sqrt{G}} \frac{u}{\sqrt{G'}} + C'_2 \left( \frac{u^2}{G'} - \frac{v^2}{G''} \right) + C'_3 \sqrt{G} \left( \frac{u^3}{\sqrt{G'^3}} - \frac{3uv^2}{\sqrt{G'G''^2}} \right) + C'_4 G \left( \frac{u^4}{G'^2} - 6 \frac{u^2v^2}{G'G''} + \frac{v^4}{G''^2} \right) + \dots \end{array} \right\}$$

expression dans laquelle on pourrait effacer, ainsi que dans les suivantes, les facteurs ou diviseurs  $\sqrt{G}$  et  $G$ , et aussi le multiplicateur



(Du n° 150).

général  $\sqrt{G'G''}$ , en les regardant comme compris dans les coefficients  $C_1, C_2, \dots, C'_1$ , etc.

On trouve aussi pour les glissements

$$g' = \frac{\theta}{\sqrt{G'}} \sqrt{G'G''} \left\{ -\frac{v}{\sqrt{G''}} + 2C_2 \frac{v}{\sqrt{G''}} + 3C_3 \sqrt{G} \cdot \frac{2uv}{\sqrt{G'G''}} + 4C_4 G \left( \frac{3u^2v}{\sqrt{G'^2G''}} - \frac{v^3}{\sqrt{G''^3}} \right) + \dots \right. \\ \left. + \frac{C'_1}{\sqrt{G}} + 2C'_2 \frac{u}{\sqrt{G'}} + 3C'_3 \sqrt{G} \left( \frac{u^2}{G'} - \frac{v^2}{G''} \right) + 4C'_4 G \left( \frac{u^3}{\sqrt{G'^3}} - \frac{3uv^2}{\sqrt{G'G''^2}} \right) + \dots \right\},$$

$$g'' = \frac{\theta}{\sqrt{G''}} \sqrt{G'G''} \left\{ \frac{C_1}{\sqrt{G}} + 2C_2 \frac{u}{\sqrt{G'}} + 3C_3 \sqrt{G} \left( \frac{u^2}{G'} - \frac{v^2}{G''} \right) + 4C_4 G \left( \frac{u^3}{\sqrt{G'^3}} - \frac{3uv^2}{\sqrt{G'G''^2}} \right) + \dots \right. \\ \left. + \frac{u}{\sqrt{G'}} - 2C'_2 \frac{v}{\sqrt{G''}} - 3C'_3 \sqrt{G} \cdot \frac{2uv}{\sqrt{G'G''}} - 4C'_4 G \left( \frac{3u^2v}{\sqrt{G'^2G''}} - \frac{v^3}{\sqrt{G''^3}} \right) - \dots \right\};$$

et, pour l'équation des contours correspondants des sections

$$\frac{u^2}{2G'} + \frac{v^2}{2G''} + \frac{C_1}{\sqrt{G}} \frac{u}{\sqrt{G'}} + C_2 \left( \frac{u^2}{G'} - \frac{v^2}{G''} \right) + C_3 \sqrt{G} \left( \frac{u^3}{\sqrt{G'^3}} - \frac{3uv^2}{\sqrt{G'G''^2}} \right) + C_4 G \left( \frac{u^4}{G'^2} - \frac{6u^2v^2}{G'G''} + \frac{v^4}{G''^2} \right) + \dots \\ - \frac{C'_1}{\sqrt{G}} \frac{v}{\sqrt{G''}} - C'_2 \frac{2uv}{\sqrt{G'G''}} - C'_3 \sqrt{G} \left( \frac{3u^2v}{\sqrt{G'^2G''}} - \frac{v^3}{\sqrt{G''^3}} \right) - C'_4 G \left( \frac{4u^3v}{\sqrt{G'^3G''}} - \frac{4uv^3}{\sqrt{G'G''^3}} \right) + \dots = h.$$

Enfin on a pour le moment de torsion

$$M_1 = G'G'' \theta \int_0^{\omega} \left\{ \frac{u^2}{G'} + \frac{v^2}{G''} + \frac{C_1}{\sqrt{G}} \frac{u}{\sqrt{G'}} + 2C_2 \left( \frac{u^2}{G'} - \frac{v^2}{G''} \right) + 3C_3 \sqrt{G} \left( \frac{u^3}{\sqrt{G'^3}} - \frac{3uv^2}{\sqrt{G'G''^2}} \right) + 4C_4 G (\dots) + \dots \right. \\ \left. - \frac{C'_1}{\sqrt{G}} \frac{v}{\sqrt{G''}} - 2C'_2 \frac{2uv}{\sqrt{G'G''}} - 3C'_3 \sqrt{G} \left( \frac{3u^2v}{\sqrt{G'^2G''}} - \frac{v^3}{\sqrt{G''^3}} \right) - 4C'_4 G (\dots) - \dots \right\} d\omega$$

On obtiendra les mêmes expressions et équations en coordonnées pseudo-polaires

$\rho, \delta$

ayant, avec l'abscisse  $u$  et l'ordonnée  $v$  des points, les relations

$$\rho = \sqrt{\frac{Gu^2}{G'} + \frac{Gv^2}{G''}}, \quad u \sqrt{\frac{G}{G'}} = \rho \cos \delta, \quad v \sqrt{\frac{G}{G''}} = \rho \sin \delta, \quad \tan \delta = \frac{v}{u} \sqrt{\frac{G'}{G''}}$$

en changeant, dans les formules en coordonnées polaires des §§ précédents, du cas d'égal texture :

(Du n° 156).

$$\left\{ \begin{array}{l} r \text{ en } \rho, \quad \alpha \text{ en } \phi, \\ \text{et toujours } G \text{ en } \sqrt{G'G''}, \quad \theta \text{ en } \theta \sqrt{\frac{G'G''}{G}}, \quad g' \text{ en } g' \sqrt{\frac{G'}{G}}, \quad g'' \text{ en } g'' \sqrt{\frac{G''}{G}}; \\ \text{et } M_1 \text{ en } M_1 \frac{G}{\sqrt{G'G''}}, \text{ seulement si les intégrations sont effectuées ou si } d\omega \text{ est rem-} \\ \text{placé par } r dr d\alpha. \end{array} \right.$$

On voit ainsi que  $z = 0$  ou que les sections restent planes et normales à l'axe de torsion, *non plus lorsque le contour est circulaire* comme dans les cas d'égalé contexture, mais lorsqu'il est représenté par l'équation (résultant de la particularisation  $C_1=0, C'_1=0, C_2=0, C'_2=0, \dots$ ):

$$\frac{u^2}{G} + \frac{v^2}{G''} = \text{constante} \quad \text{ou} \quad \rho = \text{constante},$$

c'est-à-dire lorsque le contour est une ellipse dont les axes parallèles aux  $u$ , aux  $v$ , sont dans le rapport des racines carrées des coefficients d'élasticité de glissement de leurs directions respectives. Et le moment de torsion d'un cylindre à base d'ellipse ayant ces proportions se réduit à

$$M_1 = (G' \int v^2 d\omega + G'' \int u^2 d\omega) \theta = (G'I + G''I') \theta.$$

Lorsque la base elliptique a ses axes  $b, c$  dans un rapport quelconque, on obtient, en faisant dans les formules des §§ 21 et 22 les modifications qui viennent d'être indiquées, sans oublier de mettre aussi  $b \sqrt{\frac{G}{G'}}$  et  $c \sqrt{\frac{G}{G''}}$  pour  $b$  et  $c$ , puisque ce sont deux valeurs particulières des doubles coordonnées  $2u, 2v$ :

$$\text{Équation de la surface de la section inféchie } z = -\theta \frac{\frac{b^2}{G'} - \frac{c^2}{G''}}{\frac{b^2}{G'} + \frac{c^2}{G''}} uv,$$

$$\text{Glissements } g' = \frac{-2 \frac{b^2}{G'} \theta v}{\frac{b^2}{G'} + \frac{c^2}{G''}}, \quad g'' = \frac{2 \frac{c^2}{G''} \theta u}{\frac{b^2}{G'} + \frac{c^2}{G''}},$$

$$\text{Moment } M_1 = 2\theta \frac{b^2 \int v^2 d\omega + c^2 \int u^2 d\omega}{\frac{b^2}{G'} + \frac{c^2}{G''}} = \frac{\pi \theta}{16} \frac{b^2 c^3}{\frac{b^2}{G'} + \frac{c^2}{G''}} = \frac{4\theta}{\frac{1}{G'I} + \frac{1}{G''I'}}.$$

(Du n° 150).

Pour le prisme rectangle, on obtient encore les valeurs de  $z$ ,  $g'$  et  $g''$  du cas d'inégale texture en faisant dans les formules du § 25 les changements indiqués. Et on a les suivantes pour le moment de torsion en n'oubliant pas de mettre  $M_1 \frac{G}{\sqrt{G'G''}}$  au lieu de  $M_1$  dans le premier membre des formules de la fin de ce § :

$$\begin{aligned} M_1 &= G'0bc^3 \left[ \frac{1}{3} - \frac{1}{16} \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 \frac{c\sqrt{G'}}{b\sqrt{G''}} \sum \frac{\text{tah} \frac{2n-1}{2} \pi \frac{b\sqrt{G''}}{c\sqrt{G'}}}{(2n-1)^2} \right] = \\ &= G''0b^3c \left[ \frac{1}{3} - \frac{1}{16} \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 \frac{b\sqrt{G''}}{c\sqrt{G'}} \sum \frac{\text{tah} \frac{2n-1}{2} \pi \frac{c\sqrt{G'}}{b\sqrt{G''}}}{(2n-1)^2} \right], \end{aligned}$$

ou (§ 26, p. 296) l'expression

$$M_1 = G'0bc^3 \left[ \frac{1}{3} - 0,210083 \frac{c\sqrt{G'}}{b\sqrt{G''}} + 0,209137 \frac{c\sqrt{G'}}{b\sqrt{G''}} \sum \frac{1 - \text{tah} \frac{2n-1}{2} \pi \frac{b\sqrt{G''}}{c\sqrt{G'}}}{(2n-1)^2} \right]$$

qui se calcule facilement (Voir le tableau § suivant 40, p. 362).

Ce n'est plus pour le prisme à base carrée, mais pour le prisme dont la base a ses côtés dans le rapport  $\frac{b}{c} = \frac{\sqrt{G'}}{\sqrt{G''}}$ , d'où  $G'c^2 = G''b^2$ , que ces expressions se simplifient et prennent la forme

$$\begin{aligned} M_1 &= 0bc(G'c^2 \text{ ou } G''b^2) \left[ \frac{1}{3} - \frac{1}{16} \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 \sum \frac{\text{tah} \frac{2n-1}{2} \pi}{(2n-1)^2} \right] = \\ &= 0,843462 \frac{0(G'bc^3 \text{ ou } G''b^3c)}{6} = 0,843462 (G'I + G''I')0, \end{aligned}$$

ou que le moment de torsion est les 0,843462 de ce qu'il serait si les sections restaient planes.

La condition générale de non-rupture ou de cohésion permanente des solides de texture variable en divers sens n'est pas, comme

(Du n° 156).

pour ceux d'égale contexture, que la plus considérable des dilatations en divers sens et aux divers points n'excède pas une certaine grandeur, car, en un même point, la limite à imposer aux écartements moléculaires varie, ainsi que la contexture, avec la direction (§ 4 de la note du n° 3), en sorte que la dilatation la plus dangereuse n'est pas nécessairement la plus grande, mais celle dont le rapport à la limite relative à sa direction est le plus considérable.

Par suite, et comme les glissements ne sont dangereux qu'en raison des dilatations qu'ils produisent dans les divers sens obliques aux sections et même à leurs propres plans qui sont perpendiculaires à celles-ci, il n'y a pas lieu ici d'exprimer comme au § 17 que le maximum du glissement  $g = \sqrt{g'^2 + g''^2}$  sur les sections reste égal ou inférieur à une certaine grandeur-limite unique  $\frac{T_0}{G}$ .

Il faut, pour poser l'équation de cohésion permanente du cas d'inégale contexture, s'aider nécessairement d'une hypothèse; car on ne connaît pas la loi suivant laquelle la limite des dilatations non dangereuses varie en divers sens autour d'un point. Appelons donc, pour notre prisme dont la contexture est partout *symétrique* par rapport aux plans *bc* coupant à angle droit suivant des parallèles aux *u* et aux *v*, et qui est supposé tordu sans éprouver aucune dilatation ou contraction longitudinale ni transversale :

$\frac{T'}{G'}$  une limite, fournie directement ou indirectement par l'expérience, à imposer aux glissements  $g'$  parallèles aux *u* quand ils sont seuls,

$\frac{T''}{G''}$  une limite semblable pour les glissements  $g''$  parallèles aux *v*;

ou nommons

$T'$ ,  $T''$ . les plus grands efforts tangentiels que la matière puisse supporter par unité de section dans ces deux directions principales *u*, *v*, sans que les écartements moléculaires qui en résultent dans les sens obliques, compromettent la cohésion, quand ces efforts s'exercent seuls ou ne sont pas accompa-

(Du n° 156).

gnés d'efforts qui étendent ou contractent transversalement ni longitudinalement la matière du prisme ;

L'équation de cohésion permanente que nous voulons poser doit donner, comme cas particuliers :

$$1^{\circ} \quad 1 = \text{ou} > \frac{G'g'}{T'_{\omega}} \quad \text{quand } g'' = 0;$$

$$2^{\circ} \quad 1 = \text{ou} > \frac{G''g''}{T''_{\omega}} \quad \text{quand } g' = 0;$$

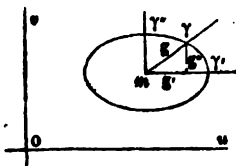
$$3^{\circ} \text{ Et (§ 17) } 1 = \text{ou} > \frac{G^2g'^2}{T'^2_{\omega}} + \frac{G^2g''^2}{T''^2_{\omega}} \quad \text{quand } G' = G'' = G, T'_{\omega} = T''_{\omega} = T_{\omega}$$

De plus, elle doit rester la même quand on change le signe de  $g'$  ou de  $g''$ , ou quand on passe d'une direction à une autre faisant le même angle, sur une section  $\omega$ , avec l'un des deux autres plans de symétrie de contexture.

Nous prendrons donc pour notre hypothèse sur la loi inconnue de la limite des dilatations qui proviennent, dans des sens quelconques, des deux glissements  $g'$  et  $g''$  à la fois, celle qui lie le plus simplement ces résultats extrêmes en assurant la continuité des résultats intermédiaires, c'est-à-dire que nous poserons en général, pour assurer la permanence de la cohésion :

$$1 = \text{ou} > \left( \frac{G'g'}{T'_{\omega}} \right)^2 + \left( \frac{G''g''}{T''_{\omega}} \right)^2.$$

Il résulte de la condition ainsi établie que le glissement résultant  $g$ , en un point quelconque  $m$  d'une



section, n'excédera jamais le rayon vecteur  $m\gamma$ , dans sa direction, d'une ellipse  $\gamma'\gamma''$  dont les demi-axes  $m\gamma'$ ,  $m\gamma''$  sont  $\frac{T'_{\omega}}{G'}$ ,  $\frac{T''_{\omega}}{G''}$ ; car si  $g$  atteint justement

la grandeur  $m\gamma$ , il y a, entre ses

projections  $g'$ ,  $g''$ , la relation  $1 = \left( \frac{G'g'}{T'_{\omega}} \right)^2 + \left( \frac{G''g''}{T''_{\omega}} \right)^2$  qui lie les coordonnées du point  $\gamma$  de cette ellipse. Cette loi simple est d'accord avec une hypothèse générale, aussi très-plausible, que nous ferons plus loin sur les limites des dilatations en divers sens.

(Du n° 156).

En particulierisant d'abord cette équation pour la section elliptique dont  $b, c$  sont les axes, ou en mettant à la place de  $g'$  et  $g''$ ,  $-2 \frac{b^2}{G'} \theta v$  et  $2 \frac{c^2}{G''} \theta u$  divisés par  $\frac{b^2}{G'} + \frac{c^2}{G''}$ , on obtient :

$$\left(\frac{b^2}{G'} + \frac{c^2}{G''}\right)^2 = \theta u > 4\theta^2 \left(\frac{b^4 v^2}{T_1'^2} + \frac{c^4 u^2}{T_1''^2}\right).$$

Le second membre est d'autant plus grand, pour des points situés sur une même droite passant par le centre ou ayant leurs coordonnées  $v, u$  dans un rapport constant, que  $v^2$  et  $u^2$  sont plus considérables. Les points les plus exposés sont donc sur le contour de la section. Et si l'on met pour  $v^2$  sa valeur en  $u^2$  tirée de l'équation  $\frac{4u^2}{b^2} + \frac{4v^2}{c^2} = 1$  du contour, on voit que ce second membre,

qui prend la forme  $\theta^2 c^2 \left[ \frac{b^4}{T_1'^2} - 4 \left( \frac{b^2}{T_1'^2} - \frac{c^2}{T_1''^2} \right) u^2 \right]$ , a sa plus grande valeur

$$\text{pour } u=0, v^2 = \frac{c^2}{4} \quad \text{si } \frac{b}{c} > \frac{T_1'}{T_1''};$$

$$\text{et pour } u^2 = \frac{b^2}{4}, v=0 \quad \text{si } \frac{b}{c} < \frac{T_1'}{T_1''}.$$

Les points dangereux sont donc aux extrémités du petit axe  $c$  de la base elliptique à moins que le rapport du grand au petit axe ne soit moindre que le rapport des efforts transversaux  $T_1', T_1''$ , susceptibles de désagréger la matière par glissement dans leurs sens respectifs quand ils agissent seuls ; car, dans ce dernier cas, les points dangereux seraient aux extrémités du grand axe.

Dans la première supposition  $\frac{b}{c} > \frac{T_1'}{T_1''}$ , la condition est

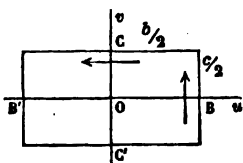
$$\frac{b^2}{G'} + \frac{c^2}{G''} = \theta u > \frac{0b^2c}{T_1'};$$

ou, éliminant  $\theta$  avec l'expression ci-dessus de  $M_1$  :

$$\text{Limite de } M_1 = \frac{\pi bc^2}{16} T_1' = \frac{4l}{c} T_1',$$

condition identique avec celle du § 22 relative au cas d'égalité con-texture, sauf  $T_1''$  au lieu de  $T_1$ .

(Du n° 156).



Quant au prisme à base rectangle, les points du contour pour lesquels le second membre  $\left(\frac{G'g'}{T'_{\circ}}\right)^2 + \left(\frac{G''g''}{T''_{\circ}}\right)^2$  de l'équation de cohésion est le plus considérable, et par conséquent, les points dangereux, se trouvent

$$\left. \begin{array}{l} \text{ou aux milieux C, C'} \\ \text{des côtés b, pour} \\ \text{lesquels } g''=0, \\ \text{ou aux milieux B, B'} \\ \text{des côtés c, pour} \\ \text{lesquels } g'=0, \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{selon} \\ \text{que} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \frac{G' \left( g' \text{ pour } u=0, v^2 = \frac{c^2}{4} \right)}{T'_{\circ}} > \\ \text{ou } < \frac{G'' \left( g'' \text{ pour } v=0, u^2 = \frac{b^2}{4} \right)}{T''_{\circ}}. \end{array} \right.$$

Et, selon les deux mêmes cas, l'équation de cohésion est

$$1 = \text{ou } > \frac{G' \left( g' \text{ pour } u=0, v^2 = \frac{c^2}{4} \right)}{T'_{\circ}}, \text{ ou } 1 = \text{ou } > \frac{G'' \left( g'' \text{ pour } v=0, u^2 = \frac{b^2}{4} \right)}{T''_{\circ}}$$

ce qui revient à

$$\text{Limite de } g' = \frac{T'_{\circ}}{G'}, \text{ ou Limite de } g'' = \frac{T''_{\circ}}{G''}.$$

Nous donnons, au § suivant, une table numérique des valeurs des glissements  $g', g''$  aux milieux des côtés, et des limites à imposer en conséquence au moment de torsion  $M$ , pour satisfaire à ces équations de stabilité de la cohésion.

§ 40. *Récapitulation des formules de torsion simple (ou non accompagnée de flexion, ni de dilatations ou contractions longitudinales ou transversales des prismes, ni de glissements étrangers comme ceux que produisent des forces transversales ne faisant pas couples).* — Soient, pour un prisme homogène, dont la contexture est égale dans les divers sens transversaux, mais peut être différente dans le sens longitudinal, et qui est simplement tordu, comme on vient de dire, autour d'un axe quelconque parallèle à ses arêtes, en sorte que ses sections transversales tournent les unes devant les autres proportionnellement à leurs distances en ne se déformant

(Du n° 156).

que par de petits mouvements *longitudinaux* de leurs points, et toutes de la même manière :

$\omega$  l'aire d'une de ces sections ;

$I$  et  $I'$  le plus petit et le plus grand moment d'inertie de  $\omega$  autour de droites tracées sur son plan par son centre de gravité, ou les moments autour de ses deux axes principaux ;

$u$  et  $v$  les coordonnées transversales du point milieu d'un élément  $d\omega$  quelconque de la section par rapport à ces deux mêmes axes d'inertie se croisant rectangulairement au centre de gravité (et non pas les coordonnées par rapport à des axes se coupant sur celui de torsion, qui peut être transporté où l'on veut dans le prisme ou hors du prisme, mais parallèlement aux arêtes, sans rien changer aux formules ci-après comme on a vu § 15) ;

$r$  le rayon vecteur du point dont les coordonnées sont  $u, v$  ;

En sorte que  $I = \int v^2 d\omega$ ,  $I' = \int u^2 d\omega$ ,  $r^2 = u^2 + v^2$ ,  $J = \int r^2 d\omega$ .

$M_1$  le moment de torsion, ou le moment, autour de l'axe de torsion, des forces extérieures faisant couple, qui agissent à chaque extrémité du prisme pour le tordre ; et aussi, par conséquent, le moment total des forces moléculaires qui réagissent à travers une section intermédiaire quelconque, et qui arrêtent la torsion ;

$g', g''$  les glissements qui ont lieu dans les directions  $u, v$  sur l'élément  $d\omega$  de la section, ou les diminutions très-petites (positives ou négatives), évaluées en arc d'un rayon = 1, des angles primitivement droits formés par une fibre ou petite ligne matérielle parallèle aux arêtes du prisme, et par de petites lignes matérielles parallèles aux  $u$  et aux  $v$  positifs, se croisant au point milieu de  $d\omega$  ;

$g = \sqrt{g'^2 + g''^2}$  le glissement principal ou résultant en cet endroit ou la petite inclinaison prise, par la fibre changée en hélice, sur l'élément  $d\omega$  de la section  $\omega$  dont le plan s'est changé en une surface légèrement courbe.

$g_m$  sa plus grande valeur, qui a lieu en un ou plusieurs points du contour de la section, appelés *points dangereux* ;

$G$  le coefficient d'élasticité de glissement, ou un nombre tel que  $Ggd\omega$  est l'effort à appliquer tangentiellement à un élément  $d\omega$



(Du n° 150).

de la section pour y produire un glissement  $g$  dans sa direction ;

T. un effort tel que  $\frac{T_0}{G}$  représente la limite à imposer au plus grand

glissement  $g_m$  pour que les écartements moléculaires qu'il produit dans des sens obliques ne mettent pas en péril, même à la longue, la cohésion de la matière particulière du prisme ;

la torsion par unité de longueur, supposée petite ; ou l'arc d'un rayon  $= a$  mesurant l'angle  $\tau$  dont une section a tourné devant l'autre, divisé par la distance  $a$  restée la même entre ces deux sections.

Et soient, pour le même prisme, si la contexture de la matière, bien qu'homogène ou la même en tous les points, est inégale dans les divers sens transversaux, mais symétrique, en chaque point, par rapport au plan de la section transversale et à deux plans qui lui sont perpendiculaires, menés parallèlement aux  $u$  et aux  $v$  par ce point :

$G'$ ,  $G''$  les coefficients d'élasticité dans les sens  $u$ ,  $v$ , ou des nombres tels que  $G'g'd\omega$ ,  $G''g''d\omega$  sont les efforts à exercer dans ces sens pour produire respectivement un glissement  $g'$  et un glissement  $g''$  ;

$T'_0$ ,  $T''_0$  des forces telles que  $\frac{T'_0}{G'}$ ,  $\frac{T''_0}{G''}$  représentent les limites à imposer au glissement  $g'$  quand il est seul, et au glissement  $g''$  quand il est seul.

On aura

$$\theta = \frac{\tau}{a} \frac{2\pi}{360} \text{ si l'angle } \tau \text{ de rotation est en degrés sexagésimaux,}$$

en sorte que  $\frac{2\pi}{\theta}$  est le pas des hélices dans lesquelles la torsion, uniforme d'un bout à l'autre, change les fibres et les arêtes du prisme ;

Limite de  $g_m = \frac{T_0}{G}$  pour le cas où la matière est d'égale contexture transversale ;

(en sorte que, dans les formules ci-après de ce cas,  $\lim. M_1$  résulte

(Du n° 156).

constamment de la substitution dans la première expression, de  $M_1$ , à la place de  $G\theta$ , de sa valeur tirée de  $Gg_m = T_0$ ;

$$\text{Limite de } \left(\frac{G'g'}{T'}\right)^2 + \left(\frac{G''g''}{T''}\right)^2 = 1 \text{ quand la contecture est inégale;}$$

Et les formules pratiques suivantes, où les diverses formes données aux expressions du moment de torsion  $M_1$  et de sa limite servent à en comparer les valeurs : 1° à égal moment d'inertie polaire  $J$ ; 2° à égale superficie  $\omega$  des sections, ou à égale quantité de matière de l'unité de longueur des divers prismes.

(Et où les expressions de  $g'$ ,  $g''$ ,  $g$  au contour sont destinées à servir ci-après pour les cas de flexion et torsion simultanées.)

N. B. La contecture transversale est supposée égale quand le contraire n'est pas exprimé.

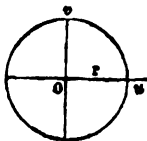
Section circulaire, de rayon  $r$ .

$$\omega = \pi r^2, \quad I = I' = \frac{\pi r^4}{4}, \quad J = \frac{\pi r^4}{2} = \frac{\omega^2}{2\pi} = 0,15915 \omega^2$$

$$M_1 = G \frac{\pi r^4}{2} \theta = G\theta J = \frac{G\omega^2 \theta}{2\pi} = 0,15915 G\omega^2 \theta$$

$$g = \theta r = \frac{M_1 r}{GJ}; \quad g \text{ (au contour)} = g_m = \theta r = \frac{M_1 r}{GJ} = \frac{2M_1}{G\pi r^3}$$

$$\text{lim. } M_1 = \frac{\pi r^3}{2} T_0 = \frac{J}{r} T_0 = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} T_0 \sqrt{\omega^3} = 0,2821 T_0 \sqrt{\omega^3}.$$

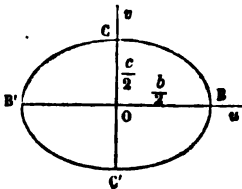


Même section quand la contecture est inégale.

$$M_1 = \frac{\pi r^4 \theta}{\frac{1}{G'} + \frac{1}{G''}} = \frac{2\theta J}{\frac{1}{G'} + \frac{1}{G''}} = 0,15915 \frac{2\omega^2 \theta}{\frac{1}{G'} + \frac{1}{G''}}$$

$$\text{lim. } M_1 = \text{la plus petite des deux quantités } \frac{\pi r^3}{2} T' = 0,2821 T' \sqrt{\omega^3}$$

$$\text{et } \frac{\pi r^3}{2} T'' = 0,2821 T'' \sqrt{\omega^3}.$$



Section elliptique,  $b$  et  $c$  le grand et le petit axe.

$$\omega = \frac{\pi bc}{4}, \quad I = \frac{\pi bc^3}{64} = \frac{\omega c^2}{16}, \quad I' = \frac{\pi b^3 c}{64} = \frac{\omega b^2}{16}$$

(Du n° 156).

$$M_1 = \frac{G\theta}{16} \frac{\pi b^3 c^3}{b^3 + c^3} = \frac{4G\theta}{\frac{1}{b} + \frac{1}{c}} = \frac{2}{1 + \frac{c^2}{b^2}} \cdot 0,15915 G \omega^2 \theta$$

$$g' = \frac{-2b^3\theta}{b^3 + c^3} v = -\frac{M_1 v}{2GI}, \quad g'' = \frac{2c^3\theta}{b^3 + c^3} u = \frac{M_1 u}{2GI'}$$

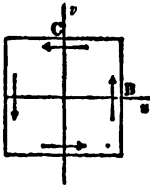
$$g_m (g \text{ pour } u = 0, v = \pm \frac{c}{2}) = \frac{b^3}{b^3 + c^3} c\theta = \frac{16M_1}{\pi G b c^3}$$

$$\lim. M_1 = \frac{\pi b c^3}{16} T_c = \frac{4I}{c} T_c = 0,2821 \sqrt{\frac{c}{b}} \cdot T_c \cdot \sqrt{\omega^3}$$

Même section elliptique quand la contecture est inégale.

$$M_1 = \frac{\theta}{16} \frac{\pi b^3 c^3}{\frac{b^2}{G'} + \frac{c^2}{G''}} = \frac{4\theta}{\frac{1}{G'} + \frac{1}{G''}}; \quad g' = \frac{-2 \frac{b^3}{G'} \theta v}{\frac{b^2}{G'} + \frac{c^2}{G''}} = -\frac{M_1 v}{2G'I}, \quad g'' = \frac{2 \frac{c^3}{G''} \theta u}{\frac{b^2}{G'} + \frac{c^2}{G''}} = \frac{M_1 u}{2G''I'}$$

lim.  $M_1 =$  la plus petite des deux quantités.  $\left\{ \begin{array}{l} \frac{\pi b c^3}{16} T'_c = \frac{4I}{c} T'_c = 0,2821 \sqrt{\frac{c}{b}} T'_c \cdot \sqrt{\omega^3} \text{ (points dangereux aux extrémités de } c) \\ \frac{\pi b^3 c}{16} T''_c = \frac{4I'}{b} T''_c = 0,2821 \sqrt{\frac{b}{c}} T''_c \cdot \sqrt{\omega^3} \text{ (points dangereux aux extrémités de } b) \end{array} \right.$



Section carrée; côté  $b$ .

$$\omega = b^3, \quad J = 2I = 2I' = \frac{b^4}{6} = \frac{\omega^2}{6} = 0,16667 \omega^2$$

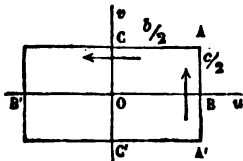
$$M_1 = 0,14058 G b^3 \theta = 0,84346 G \theta J = 0,14058 G \omega^2 \theta$$

$$g_m = g' \left( \text{pour } u = 0, v = \pm \frac{b}{2} \right) = 1,35063 \frac{b}{2} \theta = \frac{M_1}{0,20817 G b^3}$$

$$g \text{ (au contour)} = g' \left( \text{pour } v = \pm \frac{b}{2} \right) = g'' \left( \text{pour } u = \pm \frac{b}{2} \right) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Voir la 2}^\circ \text{ table} \\ \text{pour le rectangle} \end{array} \right.$$

$$= \text{(empiriquement et à peu près: } \left( 1 - \frac{4u^2}{b^2} \right)^{2/3} g_m \text{ ou } \left( 1 - \frac{4v^2}{b^2} \right)^{2/3} g_m;$$

$$\lim. M_1 = 0,20817 b^3 T_c = 0,6245 \frac{2J}{b} T_c = 0,20817 T_c \cdot \sqrt{\omega^3}$$



Section rectangle; côtés  $b, c$ ;  $b > c$

$$\omega = bc, \quad I = \frac{bc^3}{12} = \frac{\omega c^2}{12}, \quad I' = \frac{b^3 c}{12} = \frac{\omega b^2}{12},$$

$$J = 0,16667 \frac{b^3 + c^3}{2bc} \cdot \omega^2$$

(Du n° 156).

$$M_1 = \mu G_0 b c^3 = \mu' \frac{G_0}{3} \frac{b^3 c^3}{b^2 + c^2} = \mu' \frac{4G_0}{\frac{1}{I} + \frac{1}{I'}} = \mu \frac{c}{b} \cdot G \omega^2 \theta.$$

$$g_m = g'_m \text{ (plus gr. gliss. sur les côtés } b) = g'(p^r u = 0, v = \pm \frac{c}{2}) = \gamma \frac{c}{2} \theta = \frac{\gamma}{2\mu} \frac{M_1}{G b c^2},$$

$$g''_m \text{ (plus gr. gliss. sur les côtés } c) = g''(p^r v = 0, u = \pm \frac{b}{2}) = \gamma_1 \frac{b}{2} \theta = \frac{\gamma_1}{2\mu} \frac{b^3}{c^2} \cdot \frac{M_1}{G b^3 c};$$

$$(g''_m < g'_m).$$

$$g \text{ (au contour)} = g' \text{ (pour } v = \pm \frac{c}{2}) = \gamma \frac{c}{2} \theta = \gamma' \frac{c}{2} \theta = \frac{\gamma'}{\gamma} g'_m,$$

$$\text{ou } = g'' \text{ (pour } u = \pm \frac{b}{2}) = \gamma'' \frac{b}{2} \theta = \gamma'' \frac{b}{2} \theta = \frac{\gamma''}{\gamma_1} g''_m,$$

$$\text{limite } M_1 = \frac{2\mu}{\gamma} b c^2 T_0 = 3 \cdot \frac{2\mu}{\gamma} \frac{4I}{c} T_0 = \frac{2\mu}{\gamma} \sqrt{\frac{c}{b}} \cdot T_0 \cdot \sqrt{\omega^3}.$$

**Même section rectangle** si la contexture est inégale.

$$M_1 = \mu G' \theta b c^3 = \mu' \frac{\theta}{3} \frac{b^3 c^3}{\frac{b^2}{G'} + \frac{c^2}{G''}} = \mu' \frac{4\theta}{\frac{1}{G'I} + \frac{1}{G''I'}}.$$

$$g'_m = \gamma \cdot \frac{c}{2} \theta = \frac{\gamma}{2\mu} \cdot \frac{M_1}{G' b c^2}, \quad g''_m = \gamma_1 \cdot \frac{b}{2} \theta = \frac{\gamma_1}{2\mu} \frac{b^3 G''}{c^2 G'} \cdot \frac{M_1}{G'' b^3 c},$$

$$g' \text{ (pour } v = \pm \frac{c}{2}) = \gamma' \frac{c}{2} \theta = \frac{\gamma'}{\gamma} g'_m; \quad g'' \text{ (pour } u = \pm \frac{b}{2}) = \gamma'' \frac{b}{2} \theta = \frac{\gamma''}{\gamma_1} g''_m;$$

$$\text{lim. } M_1 = \text{la plus petite des deux quantités } \frac{2\mu}{\gamma} b c^2 T'_0 \text{ et } \frac{2\mu}{\gamma_1} \frac{c^2 G'}{b^2 G''} \cdot b^3 c T''_0.$$

Les coefficients numériques  $\mu, \mu', \gamma, \gamma_1, \frac{2\mu}{\gamma}, \frac{2\mu}{\gamma_1} \frac{c^2 G'}{b^2 G''}$  étant donnés

par la 1<sup>re</sup> des deux tables suivantes, et  $\frac{\gamma'}{\gamma}, \frac{\gamma''}{\gamma_1}$  par la 2<sup>ème</sup>.

(Du n° 156).

Pour $\frac{b}{c}$ ou $\frac{b}{c} \sqrt{\frac{G''}{G'}}$ =	Moment $M_1 = \mu G' b c^3 =$ $\left(\frac{4}{3} - \lambda \frac{c\sqrt{G'}}{b\sqrt{G''}}\right) G' b c^3$		Même moment $M_1 =$ $\mu' . 4b$ $\frac{4}{G't} + \frac{4}{G''t'}$	Plus grand glissement au milieu des côtés $b$ des côtés $c$		Limites à imposer à $M_1$ (prendre la plus petite des deux.)	
	Valeurs de $\mu$	Valeurs de $\lambda$ (moins variables).	Valeurs de $\mu'$	Valeurs de $\gamma$	Valeurs de $\gamma_1$	Valeurs	Valeurs de
						de $\frac{2\mu}{\gamma}$	$\frac{2\mu}{\gamma_1}$
1	0,14058	0,49276	0,84346	4,3506	4,3506	0,20817	0,20847
1,10	0,15398	0,49728	0,84373	4,4396		0,21393	
1,20	0,16612	0,20065	0,84443	4,5175		0,21920	
1,25	0,17473	0,20200	0,84492	4,5527	4,1378	0,22121	0,19319
1,30	0,17707	0,20315	0,84552	4,5854		0,22315	
1,40	0,18690	0,20500	0,84679	4,6443		0,22733	
1,50	0,19576	0,20636	0,84830	4,6954	0,9707	0,23097	0,17925
1,60	0,20374	0,20736	0,84996	4,7389	0,9449	0,23433	0,17398
1,75	0,21428	0,20838	0,85267	4,7932	0,8410	0,23896	0,16638
1,80	0,21743	0,20862	0,85362	4,8088		0,24042	
2	0,22868	0,20930	0,85756	4,8604		0,24588	
2,5	0,24936	0,20992	0,86779	4,9361	0,5935	0,25759	0,13446
3	0,26332	0,21005	0,87772	4,9709		0,26720	
3,5	0,27334	0,21008	0,88687	4,9867		0,27314	
4	0,28081	0,21008	0,89509	4,9940	0,3742	0,28166	0,0916
5	0,29435	0,21008	0,90902	4,9987	0,2970	0,29150	0,0773
10	0,31232	0,21008	0,94634	2,0000	0,1486	0,31232	
20	0,32283	0,21008	0,97091	2,0000	0,0734	0,32283	
$\infty$	0,33333	0,21008	1,00000	2,0000	0,0000	0,33333	0,0000

N. B. — On peut remplacer très-approximativement les colonnes des valeurs de  $\mu$ , de  $\frac{2\mu}{\gamma}$  et de  $\frac{2\mu}{\gamma_1} \frac{c^2 G'}{b^2 G''}$  par les formules empiriques :

$$\mu = \frac{4}{3} - 0,21008 \frac{c\sqrt{G'}}{b\sqrt{G''}} \left(1 - \frac{4}{12} \frac{c^2 G'^2}{b^2 G''^2}\right), \quad \frac{2\mu}{\gamma} = \frac{5}{3(5 + 3 \frac{c\sqrt{G'}}{b\sqrt{G''}})}, \quad \frac{2\mu}{\gamma_1} \frac{c^2 G'}{b^2 G''} = \frac{5}{3(5 + 3 \frac{b\sqrt{G''}}{c\sqrt{G'}})}$$

dont la deuxième donne, quand la contecture est égale, ou quand  $G' = G''$ ,  $T' = T''$ ,

$$\text{Lim. } M_1 = \frac{b^2 c^2 T_0}{3b + 4,8c} = \frac{\sqrt{\frac{b}{c}} \cdot T_0 \cdot \sqrt{\omega^2}}{3\left(\frac{b}{c} + 0,6\right)}$$

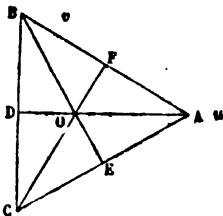
(Du n° 156).

Glissements aux divers points des contours autres que les milieux des côtés.  
(On en verra l'usage pour la torsion et la flexion simultanées).

Sur les côtés $b$ ; $g=g'=\gamma \frac{c}{2} \theta = \frac{\gamma'}{\gamma} g'_m$				Sur les côtés $c$ ; $g=g''=\frac{\gamma''}{\gamma_1} g''_m$							
Valeurs de $\frac{\gamma'}{\gamma} = \frac{g'}{g'_m}$				Valeurs de $\frac{\gamma''}{\gamma_1} = \frac{g''}{g''_m}$							
Pour $\frac{b}{c} \sqrt{\frac{G''}{G'}} =$				Pour $\frac{b}{c} \sqrt{\frac{G''}{G'}} =$							
= 1				= 2				= 4			
Pour $\frac{2m}{b} = 0$	$\frac{\gamma'}{\gamma} = 1,0000$	1,0000	1,0000	Pour $\frac{2m}{c} = 0$	$\frac{\gamma''}{\gamma_1} = 1,0000$	1,0000	1,0000				
0,1	0,9932	0,9962	0,9991	0,1	0,9932	0,9932	0,9933				
0,2	0,9750	0,9846	0,9973	0,2	0,9750	0,9729	0,9729				
0,3	0,9429	0,9639	0,9928	0,3	0,9429	0,9384	0,9383				
0,4	0,8963	0,9321	0,9842	0,4	0,8963	0,8887	0,8885				
0,5	0,8333	0,8857	0,9678	0,5	0,8333	0,8224	0,8220				
0,6	0,7510	0,8196	0,9374	0,6	0,7510	0,7369	0,7363				
0,7	0,6447	0,7260	0,8793	0,7	0,6447	0,6282	0,6278				
0,8	0,5063	0,5916	0,7695	0,8	0,5063	0,4899	0,4885				
0,9	0,3185	0,3896	0,5540	0,9	0,3185	0,3044	0,3040				
1,0	0,0000	0,0000	0,0000	1,0	0,0000	0,0000	0,0000				

N. B. — On peut représenter approximativement ces résultats par les formules empiriques

$$\frac{\gamma'}{\gamma} = \left[ 1 - \left( \frac{2m}{b} \right)^{1,8} + 0,2 \frac{b^2 G''}{c^2 G'} \right]^{1/3} \quad \text{et} \quad \frac{\gamma''}{\gamma_1} = \left[ 1 - \left( \frac{2m}{c} \right)^{2,2} \right]^{2/3}$$



Section triangulaire équilatérale;

côté  $k$ . (hauteur  $3b = \frac{1}{2} k\sqrt{3}$ ).

$$\omega = \frac{\sqrt{3}}{4} k^2 = 0,43301 k^2;$$

$$J = 2I = 2I' = \frac{k^4 \sqrt{3}}{48} = \frac{\omega \sqrt{3}}{9} = 0,19245 \omega^2,$$

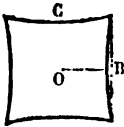
$$M_1 = \frac{\sqrt{3}}{80} Gk^4 \theta = 0,6 \cdot G \omega J = \frac{G \omega^2 \theta}{5\sqrt{3}} = 0,115470 G \omega^2 \theta,$$

(Du n° 156).

$$g_m = (g \text{ au milieu des côtés}) = 1,5 \frac{k\sqrt{3}}{6} \theta = 0,43301 k \theta = \frac{20M_1}{Gk^3},$$

$$g' = 0 \text{ et } g'' = g_m \left(1 - \frac{4r^2}{k^2}\right) = \frac{20M_1}{Gk^3} \left(1 - \frac{4r^2}{k^2}\right) \text{ sur le côté parallèle aux } \nu.$$

$$\text{lim. } M_1 = \frac{k^3}{20} T_0 = 0,8 \frac{J\sqrt{3}}{k} T_0 = \frac{2\sqrt{3}}{15} T_0 \sqrt{\omega^3} = 0,17548 T_0 \sqrt{\omega^3}.$$

**Section carrée curviligne à angles aigus et côtés**

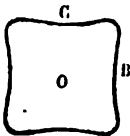
**concaves** à  $\frac{1}{22}$  de flèche, circonscrite à un carré de côté  $b$ , et formée des deux hyperboles  $v^2 - (\sqrt{2} - 1)u^2 = \frac{1}{6}b^2$ ,  $u^2 - (\sqrt{2} - 1)v^2 = \frac{1}{6}b^2$  (§§ 32 et 35).

$$\omega = 1,0639b^3, J = 2I = 2I' = 0,19158b^4 = 0,16925\omega^2$$

$$M_1 = 0,14892 Gb^4\theta = 0,7783 G\theta J = 0,13172 G\omega^2,$$

$$g_m = (g \text{ aux milieux B, C des côtés}) = \sqrt{2} \cdot \frac{b}{2} \theta = 0,7071 b \theta = 4,7482 \frac{M_1}{Gb^3},$$

$$\text{lim. } M_1 = 0,21062 b^3 T_0 = 0,19193 T_0 \sqrt{\omega^3}.$$



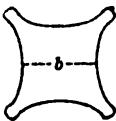
**Section carrée curviligne à angles arrondis**  $10b^2(u^2 + v^2) + 8(u^4 - 6u^2v^2 + v^4) = 3b^4$  (§§ 29, 32 et 35), circonscrite au carré rectiligne dont le côté est  $b$ .

$$\omega = 1,0318 b^3, J = 2I = 2I' = 0,17935b^4 = 0,16848\omega^2,$$

$$M_1 = 0,14683 Gb^4\theta = 0,8186 G\theta J = 0,13792 G\omega^2,$$

$$g_m = (g \text{ aux extrémités B, C des petits diamètres}) = 1,4 \frac{b}{2} \theta = 4,7676 \frac{M_1}{Gb^3},$$

$$\text{lim. } M_1 = 0,20976 b^3 T_0 = 0,20013 T_0 \sqrt{\omega^3}.$$



**Section en croix de Malte ou étoile à quatre pointes arrondies** du huitième degré (§ 37), circonscrite à un carré dont le côté  $b$  est moitié de ses deux grands diamètres

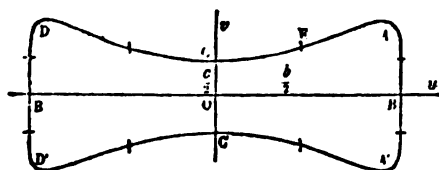
$$\omega = 1,2202 b^3, J = 2I = 2I' = 0,2974 b^4 = 0,19975 \omega^2,$$

$$M_1 = 0,15983 Gb^4\theta = 0,5374 G\theta J = 0,10735 G\omega^2,$$

$$g_m = (g \text{ aux extrémités des petits diamètres } b) = 1,4754 \frac{b}{2} \theta = 4,6155 \frac{M_1}{Gb^3},$$

$$\text{lim. } M_1 = 0,2167b^3 T_0 = 0,1607 T_0 \sqrt{\omega^3}.$$

(Du n° 156).



Section en double spatule analogue à celle d'un rail de chemin de fer; la plus petite largeur  $c$  étant le  $\frac{1}{5} = 0,20$  de la longueur  $b$  de cette section (§ 35, 3°).

$$\omega = 1,1635 \left(\frac{b}{2}\right)^2, I = 0,03840 \left(\frac{b}{2}\right)^4, I' = 0,46505 \left(\frac{b}{2}\right)^4, J = 0,37187\omega^2,$$

$$M_1 = 0,08447G \left(\frac{b}{2}\right)^2 \theta = 0,1678 G\theta J = 0,06240 G\omega^2\theta,$$

$$g_m = 0,52750 \frac{b}{2} \theta \text{ (répondant sur le contour, en E, à } u = 0,45812 \frac{b}{2}\text{)},$$

$$\text{lim. } M_1 = 0,16013 \left(\frac{b}{2}\right)^2 T_0 = 0,12759 T_0 \sqrt{\omega^3}.$$

Même section; mais la plus petite largeur  $c = 0,14b$ .

$$\omega = 1,0224 \left(\frac{b}{2}\right)^2, I = 0,02783 \left(\frac{b}{2}\right)^4, I' = 0,42564 \left(\frac{b}{2}\right)^4, J = 0,43382\omega^2,$$

$$M_1 = 0,057645 G \left(\frac{b}{2}\right)^2 \theta = 0,12712 G\theta J = 0,05515 G\omega^2\theta,$$

$$g_m = 0,4693 \frac{b}{2} \theta \text{ (répondant sur le contour à } u = 0,523 \frac{b}{2}\text{)},$$

$$\text{lim. } M_1 = 0,12283 \left(\frac{b}{2}\right)^2 T_0 = 0,1188 T_0 \sqrt{\omega^3}.$$

#### Sections d'une autre forme.

Si l'on n'a pas le loisir d'appliquer, pour calculer la torsion d'un prisme ayant une section autre que les précédentes, le procédé général du § 38 consistant à déterminer un nombre suffisant de coefficients  $C$  de l'équation générale

$$\frac{u^2 + v^2}{2} + C_1 u + C_2 ( ) + \dots - C'_1 v - \dots = K \text{ du § 10}$$

pour qu'elle en représente à très-peu près le contour, on se fera tout au moins une idée de l'ordre de grandeur du moment  $M_1$  et de la limite à lui imposer en calculant, pour la section donnée, le quotient  $\frac{J}{\omega^2}$  du moment d'inertie polaire  $J$  par le carré de l'aire, et en



(Du n° 156).

tirant  $\frac{M_1}{G\omega^2}$  et  $\frac{\text{lim. } M_1}{T_0\sqrt{\omega^3}}$  par analogie et intercalation proportionnelle, des tableaux récapitulatifs suivants, où les valeurs de ces deux derniers quotients sont mises en regard de celles du premier.

1° Sections égales dans les deux sens comme le carré, etc. ou ayant plus généralement, comme le triangle équilatéral, etc., leurs moments d'inertie tous égaux autour de droites tracées sur leur plan par le centre de gravité.			$\frac{J}{\omega^2}$	$\frac{M_1}{G\omega^2}$	$\frac{\text{Lim. } M_1}{T_0\sqrt{\omega^3}}$
Section circulaire. . . . .			0,1592	0,1592	0,2821
Section carrée rectiligne. . . . .			0,1667	0,1406	0,2082
Section carrée curviligne à angles arrondis. . . . .			0,1685	0,1379	0,2001
<i>id.</i> à angles aigus. . . . .			0,1692	0,1317	0,1919
Section triangulaire équilatérale. . . . .			0,1924	0,1155	0,1753
Section en étoile à 4 pointes, du 8° degré. . . . .			0,1998	0,1073	0,1607
2° Sections inégales dans les deux sens rectangulaires principaux.			$\frac{J}{\omega^2}$	$\frac{M_1}{G\omega^2}$	$\frac{\text{Lim. } M_1}{T_0\sqrt{\omega^3}}$
Rapport $\frac{b}{c}$ des deux dimensions ou diamètres principaux.	Rapport $\frac{I'}{I}$ des moments d'inertie principaux.				
Sections elliptiques.			Sections rectangles.		
1	1	0,1592	0,1592	0,2821	0,1667
1,2	1,44	0,1618	0,1566	0,2575	0,1694
1,4	1,96	0,1682	0,1506	0,2384	0,1762
1,6	2,56	0,1771	0,1431	0,2230	0,1854
1,8	3,24	0,1874	0,1351	0,2103	0,1963
2	4	0,1989	0,1273	0,1995	0,2083
2,5	6,25	0,2308	0,1098	0,1784	0,2417
3	9	0,2653	0,0955	0,1629	0,2778
3,5	12,25	0,3013	0,0841	0,1508	0,3155
4	16	0,3382	0,0749	0,1411	0,3542
5	25	0,4138	0,0612	0,1262	0,4333
6	36	0,4907	0,0516	0,1152	0,5139
7	49	0,5653	0,0436	0,1066	0,5952
8	64	0,6466	0,0392	0,0997	0,6771
Sections n double spatule du 4° degré (§ 35).			La section $d_0$ ce genre ré-		
1	1	0,1685	0,1379	0,2001	pondant à $\frac{b}{c} = 1$ est le
5	12,11	0,3790	0,0624	0,1276	carré à angles arrondis
$7,14 = \frac{1}{0,14}$	15,29	0,4338	0,0552	0,1188	ci-dessus.

De ces tableaux récapitulatifs des résultats obtenus, on peut déduire plusieurs conséquences remarquables.

(Du n° 156).

On voit d'abord qu'à égale superficie  $\omega$  des sections, ou à égale quantité de matière, la résistance élastique à la torsion, mesurée par le moment  $M_1$ , ou, spécifiquement, par le quotient  $\frac{M_1}{G\omega^2\theta}$ , est d'autant plus petit que le moment d'inertie polaire  $J$  ou le quotient  $\frac{J}{\omega^3}$  est plus grand.

Et il en est de même de la résistance à la rupture par torsion, mesurée par  $\lim. M_1$  ou plutôt par le quotient  $\frac{\lim. M_1}{T.\sqrt{\omega^3}}$  pour abstraire ce qui vient des grandeurs particulières de  $T$ , et  $\omega$ , de même que nous mesurons l'autre résistance par  $\frac{M_1}{G\omega^2\theta}$  pour abstraire ce qui vient des grandeurs de  $G$ , de  $\omega$  et de la torsion  $\theta$  et faire ressortir ce qui vient uniquement de la forme de la section.

C'est tout l'opposé de ce que donnait la théorie ancienne, où l'on supposait que les sections restent planes et normales à l'axe de torsion, et d'après laquelle, par conséquent,  $\frac{M_1}{G\theta}$  était constamment égal à  $J$ .

De là on peut déjà conclure que parmi les sections pleines, ou non évidées, c'est la section circulaire qui donne, à égal volume de matière, le plus de résistance; car c'est elle qui, pour même surface, a le plus petit moment d'inertie.

On voit aussi que les grandeurs des résistances spécifiques  $\frac{M_1}{G\omega^2\theta}$  et  $\frac{\lim. M_1}{T.\sqrt{\omega^3}}$  n'ont que peu ou point de rapport avec le quotient  $\frac{b}{c}$  des deux dimensions; car si, d'une part, on trouve qu'à partir de  $\frac{b}{c} = 2,5$ , avec les sections elliptiques et les sections rectangles, les résistances sont à peu près les mêmes pour mêmes grandeurs de  $\frac{b}{c}$ , on peut voir d'autre part que les résistances sont très-différentes avec diverses sections égales dans les deux sens ou pour lesquelles  $\frac{b}{c} = 1$  constamment.

Ces grandeurs des deux résistances spécifiques ont encore moins

( Du n° 156 ).

de rapport avec celles du quotient  $\frac{I'}{I}$  des moments d'inertie, comme on peut voir par la comparaison des sections elliptiques avec les sections en double spatule.

Mais on remarque que pour même grandeur de  $\frac{J}{\omega^3}$ , les valeurs soit de  $\frac{M_1}{G\omega^2\theta}$ , soit de  $\frac{\text{lim. } M_1}{T\sqrt{\omega^3}}$  ne diffèrent guère de plus de  $1/10$  à  $1/5$  avec les sections de diverses formes, égales ou inégales dans les deux sens; et une pareille approximation suffit souvent dans la pratique. C'est ce qui motive la règle que nous venons d'indiquer pour acquérir une idée du degré de résistance d'un prisme dont la section a une forme donnée quelconque, que l'on aura soin de comparer avec la forme la plus analogue mentionnée au tableau, susceptible d'acquérir de plus en plus d'utilité à mesure qu'on y ajoutera de nouveaux résultats de calculs exacts faits sur des sections d'autres formes.

§ 44. *Torsion des prismes creux. Courbes de glissement ou d'action transversale sur une section pleine ou évidée quelconque.* — Ce qui vient d'être donné n'est relatif, avons-nous dit, qu'aux prismes ou cylindres pleins.

En faisant usage de *prismes creux* ou de sections *évidées*, il est clair qu'on augmentera à la fois, pour même superficie, le *moment d'inertie* et le *moment de torsion*, ainsi que les deux espèces de résistance  $M_1$  et  $\text{lim. } M_1$ .

La torsion des prismes creux est facile à calculer si le contour de la section intérieure ou d'évidement a la même équation  $\frac{u^2 + v^2}{p} + C_1u + C_2(u^2 - v^2) + \dots + C'_1v + \dots = K$  du § 40 ou  $\frac{u^2}{2G'} + \frac{v^2}{2G''} + \dots = K'$  du § 39 que le contour de la section extérieure, à cela près de la grandeur du second membre  $K$  ou  $K'$ , ou si les coefficients  $C_1, C_2, \dots, C'_1, \dots$  du premier membre sont les mêmes; si, par exemple, les contours sont *deux cercles concentriques*, *deux sections elliptiques semblables*, etc.

En effet si, sur le plan de la section d'un prisme ou cylindre dont

( Du n° 156 ).

Le contour est représenté par l'une ou l'autre de ces équations relatives aux cas d'égalité et d'inégalité de texture, on trace les diverses courbes intérieures au contour qui ont la même équation à cela près de la valeur de  $K$  ou  $K'$ , on a ce qu'on peut appeler, sur la section, dans le cas d'égalité de texture, les *courbes de glissement*, et, dans le cas plus général, les *courbes d'action transversale*, auxquelles les directions des glissements  $g = \sqrt{g'^2 + g''^2}$  ou des actions

$\sqrt{(G'g')^2 + (G''g'')^2} \cdot d\omega$  sont partout tangentes; car, en ne parlant que du cas plus général qui comprend l'autre, comme les expressions de  $g'$ ,  $g''$  du § 39 en  $u, v$ , ne contiennent pas  $K'$ , elles sont les mêmes, pour un point  $(u, v)$  quelconque, que si la section avait pour contour celle de ces courbes qui passe par ce point; et comme  $K'$  disparaît quand on différencie l'équation  $\frac{u^2}{2G'} + \frac{v^2}{2G''} + \dots = K'$  de ces

courbes pour en tirer le rapport  $\frac{dv}{du}$ , la condition du même § 39  $G''g''du - G'g'dv = 0$  ou  $\frac{G''g''}{G'g'} = \frac{dv}{du}$  est satisfaite sur toutes ces

courbes comme sur celle qui sert de contour à la section, en sorte que l'action résultante de  $G'g'd\omega$ ,  $G''g''d\omega$  leur est tangente ou n'a aucune composante dans le sens de leurs trajectoires orthogonales.

Or il en résulte bien qu'en supposant le prisme ou cylindre creusé suivant une de ces diverses courbes, prise pour base du cylindre intérieur ou d'évidement, la condition d'une pression nulle ou normale comme celle de l'atmosphère sur sa surface latérale sera remplie du côté intérieur comme du côté extérieur si les plans des sections ont pris la forme courbe déterminée par la même équation (§ 10)  $z = 0 [C_1v + C_2 \cdot 2uv + \dots + C'_1u + C'_2(u^2 - v^2) + \dots]$ , ou (§ 39)  $z = 0 \sqrt{G'G''} [ \ ]$  que s'il s'agissait de la torsion de l'un ou de l'autre cylindre supposé plein.

D'où il suit qu'alors :

1° Le moment de torsion  $M_1$ , a simplement pour valeur la différence de celles qu'il aurait pour le cylindre extérieur et pour le cylindre intérieur supposés pleins, ou son expression est celle

$$M_1 = G\theta \int_0^\omega d\omega (u^2 + v^2 + \dots) \text{ du § 16 ou } M_1 = G'G''\theta \int_0^\omega d\omega \left( \frac{u^2}{G'} + \frac{v^2}{G''} + \dots \right)$$

( Du n° 156 ).

du § 39, en prenant les intégrales  $\int_{\omega}^{\omega} d\omega$  dans l'étendue  $\omega$  des sections, contenue entre les contours extérieur et intérieur.

2° Les points dangereux seront sur le contour de la section du cylindre extérieur précisément aux mêmes endroits que s'il avait été tordu plein, ce qui donne facilement le plus grand glissement principal  $g_m$  dont la limite est à égalité à  $\frac{T_0}{G}$  si la contexture est égale dans tous les sens transversaux; ou les glissements composants  $g', g''$  rendant un maximum le binôme  $\left(\frac{G'g'}{T_0}\right)^2 + \left(\frac{G''g''}{T_0}\right)^2$  dont la limite est à égalité à 1 (§ 39) si la contexture est inégale, mais symétrique par rapport aux plans rectangulaires principaux.

Exemples :

**Section circulaire évidée d'un tuyau ou cylindre creux.**

Rayons extérieur et intérieur  $r$  et  $r' = r - e$ .

$$\omega = \pi(r^2 - r'^2), J = \frac{\pi}{2}(r^4 - r'^4) = \omega \frac{r^2 + r'^2}{2} = \frac{1}{2\pi} \frac{r^2 + r'^2}{r^2 - r'^2} \omega^2 = 0,15915 \left( \frac{1}{\frac{e}{r} - \frac{e^2}{2r^2}} - 1 \right) \omega^2,$$

$$M_1 = G\pi \frac{r^4 - r'^4}{2} \theta = G\theta J = 0,15915 \left( \frac{1}{\frac{e}{r} - \frac{e^2}{2r^2}} - 1 \right) G\omega^2 \theta,$$

$$g \text{ (au contour extérieur)} = g_m = \theta r,$$

$$\lim. M_1 = \pi \frac{r^4 - r'^4}{2r^2} T_0 = \frac{J}{r} T_0 = 0,2821 \frac{2 - 2\frac{e}{r} + \frac{e^2}{r^2}}{\sqrt{2\frac{e}{r} - \frac{e^2}{r^2}}} T_0 \sqrt{\omega^3}.$$

N. B. On voit le grand avantage de l'évidement, si  $\frac{e}{r}$  est petit.

**Même section pour le cas d'inégale contexture** (formules se déduisant du cas de la section elliptique en faisant  $b = c = 2r$ ,  $b' = c' = 2r'$ )

$$M_1 = \frac{\pi(r^4 - r'^4)\theta}{\frac{1}{G'} + \frac{1}{G''}} = \frac{2J\theta}{\frac{1}{G'} + \frac{1}{G''}} = 0,15915 \left( \frac{1}{\frac{e}{r} - \frac{e^2}{2r^2}} - 1 \right) \frac{2\omega^2\theta}{\frac{1}{G'} + \frac{1}{G''}},$$

(Du n° 156).

lim.  $M_1$  = la plus petite des deux quantités  $\pi \frac{r^3 - r'^3}{2r} T'$ , et  $\pi \frac{r^3 - r'^3}{2r} T''$ .

**Section elliptique évidée. Cas d'inégale contexture.**

Axes, ou diamètres principaux extérieurs  $b, c$ ; intérieurs  $b', c'$ ;  $\frac{b'}{c'} = \frac{b}{c}$ .

$$\omega = \frac{\pi}{4}(bc - b'c') = \frac{\pi bc}{4} \left(1 - \frac{b'^2}{b^2}\right),$$

$$M_1 = \left( \frac{\pi b^3 c^3}{b^2 + c^2} - \frac{\pi b'^3 c'^3}{b'^2 + c'^2} \right) \frac{1}{16} = \frac{\pi \theta}{16} \frac{b^3 c^3}{\frac{b^2}{G'} + \frac{c^2}{G''}} \left(1 - \frac{b'^4}{b^4}\right),$$

lim.  $M_1$  = la plus petite des deux quantités  $\left(1 - \frac{b'^4}{b^4}\right) \frac{\pi b c^2}{16} T' = \left(1 + \frac{b'^2}{b^2}\right) \frac{\omega}{4} c T'$   
 et  $\left(1 - \frac{b'^4}{b^4}\right) \frac{\pi b^2 c}{16} T'' = \left(1 + \frac{b'^2}{b^2}\right) \frac{\omega}{4} b T''$ .

La figure des §§ 30 et 33, p. 306 et 313, donne deux exemples de séries de courbes dont chacune pourrait être prise pour contour extérieur de la base d'un cylindre creux en choisissant à volonté pour contour intérieur l'une de celles qu'elle enveloppe, sans cesser de satisfaire à la condition énoncée (p. 369) de simplicité des expressions du moment  $M_1$  et de sa limite.

Aucune courbe intérieure n'est géométriquement semblable à la courbe extérieure, excepté quand leur degré ne passe pas le second, c'est-à-dire quand ce sont des cercles ou des ellipses.

Si l'évidement n'a pas lieu suivant des courbes obtenues ainsi de l'équation § 10 ou § 39 en ne faisant varier que le second membre  $K$  ou  $K'$ , si, par exemple, le contour extérieur n'étant pas circulaire, l'épaisseur ou la distance des deux contours est constante, on n'a aucun moyen de calculer exactement la torsion.

Mais on peut la calculer approximativement lorsque cette épaisseur est peu considérable, en assimilant la surface  $z = [\dots]$  des §§ 10 et 39, et, par suite, les glissements  $g', g''$  et l'expression du moment  $M_1 = \int_0^\omega d\omega [\dots]$  des §§ 16 et 39, à ce qu'on aurait pour un prisme plein dont la section serait limitée par une courbe

(Du n° 156).

tracée à égale distance des deux contours donnés, et en ne calculant toujours les intégrales  $\int_0^\omega$  qu'entre ces contours.

Par exemple, pour un tuyau à section elliptique dont le grand et le petit axe sont  $b, c$  mesurés au milieu de son épaisseur  $e$  constante et supposée très-petite, on peut prendre, si la contexture transversale est égale en tous sens, les expressions (§ 22)

$$M_1 = 2G0 \frac{b^2 I + c^2 I'}{b^2 + c^2}, \quad g_m = \frac{b^2(c+e)}{b^2 + c^2} \theta, \quad \lim. M_1 = \frac{2(b^2 I + c^2 I')}{b^2(c+e)} T.,$$

$I$  et  $I'$  étant les moments d'inertie, autour des axes  $b, c$ , de la couronne comprise entre les contours extérieur et intérieur, en sorte que

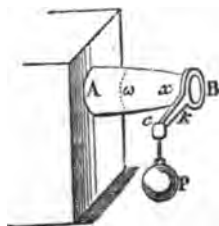
$$I = \pi e \frac{c^2(3b+c) + e^2(3c+b)}{32}, \quad I' = \pi e \frac{b^2(3c+b) + e^2(3b+c)}{32};$$

d'où, substituant et négligeant  $e^2$  devant  $\frac{4b^2c^2}{(b+c)^2}$ ,

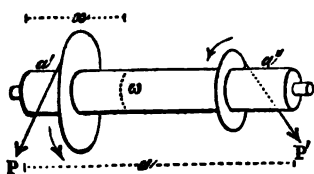
$$M_1 = \frac{G\pi e}{4} \frac{b^2c^2(b+c)}{b^2+c^2} \theta, \quad \lim. M_1 = \frac{\pi e}{4} \frac{c^2(b+c)}{c+e} T..$$

§ 42. *Torsion et flexion simultanées, avec ou sans une dilatation ou contraction longitudinale et un cisaillement transversal.* — Une pièce est *simplement tordue* lorsqu'elle n'est sollicitée que par des forces se réduisant, à chacune des extrémités, à un couple perpendiculaire à son axe supposé rectiligne.

Mais elle est *en même temps fléchie* lorsqu'il y a aussi un couple parallèle à l'axe de la pièce; ou bien si, comme la pièce AB encastree en A, elle est sollicitée à une extrémité B par une force transversale unique P agissant à une certaine distance Bc de son axe (voyez plus loin ce cas traité complètement); et, plus généralement, si les forces sollicitantes ont des résultantes transversales ou ne font pas couples, ce qui arrive pour tous les arbres tournants tels que  $a'a''$  transmettant le mouvement



(Du n° 156).



dans les machines, et qui sont sollicités par des forces  $P, P'$  agissant sur deux roues d'engrenage ou deux poulies de courroie, et, aussi, par les réactions de leurs coussinets d'appui.

Ces résultantes transversales produisent, en même temps, des *glissements latéraux* de sections l'une devant l'autre, comme ceux qui ont été considérés aux notes des n° 153, 154, et qui, variables d'un élément  $d\omega$  à l'autre, s'ajoutent aux glissements constituant la torsion. Nous dirons quelquefois que la pièce est *cisaillée* <sup>(1)</sup> par l'action de ces forces, bien que leurs effets de glissement n'aillent pas jusqu'à la séparation latérale des parties.

Enfin si, en outre, les forces extérieures ont des composantes totales dans le sens *longitudinal*, la pièce éprouve en même temps une extension ou contraction générale dans ce sens, accompagnée, comme nous savons, de contractions ou dilatations dans les sens transversaux (§ 6 note du n° 3, § 3 note du n° 21.)

L'effet total, *quant aux déplacements* des points, s'obtiendra sans difficulté au moyen du principe de composition du § 2 de la note du n° 21; car on n'aura qu'à regarder la pièce comme éprouvant à la fois la torsion, la flexion, l'extension, les glissements latéraux ou le *cisaillement*, dus à chaque couple et à chaque résultante partielle supposés agir isolément, et à composer ensemble, pour un point quelconque, les déplacements qui en proviennent, et qui doivent être petits pour que ce principe soit applicable.

C'est ce que nous avons déjà fait au § 4 de la note du n° 153, où nous avons déterminé la *flèche complète* due à la fois à une flexion et un glissement latéral.

§ 43. *Condition générale de cohésion permanente ou de résistance à la rupture éloignée, pour ces cas complexes.* — L'établissement de cette condition demande une attention plus particulière, mais

(<sup>1</sup>) Ce que Th. Young appelait *detruded*. (Voy. § 4, note n° 153, et sous-note du § 2 de la note du n° 156.)



(Du n° 150).

rentre dans l'emploi de formules comme celles qui ont été démontrées aux §§ 1 et 2 de la note du n° 154.

Ces formules, dressées pour la résistance aux effets composés d'un glissement latéral et d'une extension longitudinale accompagnée de contraction transversale, ont déjà reçu des applications aux §§ 4 à 9 de la note citée, pour des cas même où il y avait aussi une flexion, ce qui vient de ce que la flexion consiste dans des dilatations et contractions inégales des diverses fibres. Nous pouvons aussi les appliquer quand il y a simultanément une torsion, puisque la torsion consiste de même dans des glissements de diverses directions et grandeurs sur les éléments des sections.

Rappelons donc, en supposant en premier lieu, comme à la note citée du n° 154, que la matière est d'égale contexture en tous sens, et en nommant, comme au § 1 de cette note (p. 216), pour un point quelconque ou un élément  $d\omega$  d'une section  $\omega$  d'un prisme,

$g$  le glissement principal ou résultant ;

$i$  la dilatation longitudinale (positive ou négative) de la fibre dont la base est cet élément  $d\omega$  ;

$k = \eta i = \frac{1}{4} i$  les contractions transversales qui en sont une conséquence lorsque les faces latérales ne supportent aucune action normale, comme on le suppose ; contractions égales dans tous les sens transversaux quand la contexture est égale ;

$i_1$  la dilatation qui résulte, dans une direction oblique quelconque, de ces trois sortes de modifications ;

qu'on a, en ce même point ou pour ce même élément  $d\omega$  :

$$\text{Maximum de } i_1 = \frac{1-\eta}{2} i + \sqrt{\left(\frac{1+\eta}{2} i\right)^2 + \left(\frac{g}{2}\right)^2}, \quad (1)$$

(1) Depuis que ce qui précède est imprimé, M. le général Poncelet a bien voulu nous communiquer les feuilles inédites du Cours de Mécanique physique et industrielle professé par lui à la Faculté des sciences de Paris en 1839. En citant avec sa bienveillance accoutumée nos feuilles lithographiées de 1837-1838 où se trouve cette formule Maximum de  $i_1 = \dots$ , l'illustre académicien en a donné une démonstration purement géométrique et élégante qu'on nous saura gré de rapporter

(Du n° 156).

et par conséquent, vu que limite de  $i_1 = \frac{R_0}{E} = \frac{1}{2} \frac{T_0}{G}$  (même § 1 de la note n° 154, p. 217), on a, en multipliant par  $\frac{E}{R_0} = \frac{2G}{T_0}$ ,

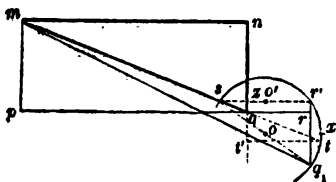
$$\text{Limite } \frac{1-\eta}{2} \frac{Ei}{R_0} + \sqrt{\left(\frac{1+\eta}{2} \frac{Ei}{R_0}\right)^2 + \left(\frac{Gg}{T_0}\right)^2} = 1.$$

C'est, en faisant  $\eta = \frac{1}{4}$ , ou  $\frac{1-\eta}{2} = \frac{3}{8}$ ,  $\frac{1+\eta}{2} = \frac{5}{8}$ , l'équation de cohésion permanente de la matière d'un prisme d'égale contexture à la fois tordu, fléchi, étendu ou comprimé, et *cisaillé* ou soumis à des efforts transversaux tendant à séparer ses parties par glissement des sections les unes devant les autres.

Il convient, avant nos nouvelles applications, d'étendre cette équation aux cas de contexture inégale.

Elle reste, d'abord, la même, avec un nombre  $\eta_1$  un peu différent

ici à peu de chose près, et qui pourrait être substituée à celle du § 1 de la note du n° 154.



Soit, comme à ce § (p. 216),  $mnpq$  la coupe, par le plan du glissement  $g$ , d'une portion de fibre avant les déplacements des points du solide; et soit, après,  $mq_1$  la situation et la grandeur prises par la diagonale  $mq$  en vertu :

1° De la dilatation longitudinale  $i$  qui, seule d'abord, aurait fait ob-

server  $q$  de  $qr = i \times mn$  dans un sens parallèle à  $mn$ ;

2° De la contraction transversale  $k$  qui aurait fait cheminer  $q$  et  $r$  de  $qz = kr' = k \times nq$  dans un sens parallèle à  $qn$ ;

3° Du glissement  $g$  qui, ensuite, aurait fait cheminer  $r'$  de  $r'q_1 = g \times mn$  dans un sens parallèle à  $nq$ .

L'allongement, supposé petit, éprouvé par la diagonale  $mq$ , est  $qt$ , si  $t$  est le pied de la perpendiculaire abaissée de  $q_1$  sur  $mq$  prolongé. Le rapport  $i_1$  de cette ligne  $qt$  à  $mq$  est la même chose que le rapport de  $tt'$  à  $mn$ ,  $tt'$  étant la perpendiculaire abaissée de  $t$  sur  $nq$  prolongé. Comme  $mn$  est supposé constant quelle que soit l'inclinaison de la diagonale  $mq$ , le problème de la direction à donner à cette diagonale pour que la proportion  $i_1 = \frac{tt'}{mn}$  de sa dilatation soit un maximum, est

de rendre la distance  $tt'$  la plus grande possible. Or, en prolongant  $r'z$  jusqu'en  $s$  à la rencontre de  $mq$  on a  $sr' = zr' + sz = (i+k)mn$  puisque  $sz$  est à  $qz = k \times nq$  comme  $mn$  est à  $nq$ . Et comme on a aussi  $r'q_1 = g \times mn$ , on voit que les lon-

( Du n° 156 ).

de  $\eta = 1/4$ , si la texture est égale dans les divers sens transversaux, et autres eulement dans le sens longitudinal, comme cela arrive dans les corps fibreux.

En effet, et sans chercher ici à construire une démonstration tout à fait élémentaire pour ce cas plus général que celui de la note du n° 154, prenons la valeur établie au § 1 de cette note ( p. 217 ),

$$i_1 = ix^2 + gxy - ky^2$$

de la dilatation  $i_1$  suivant une ligne oblique dont la direction quelconque est donnée par les projections  $x, y$ , d'une de ses portions = 1 sur la fibre et sur la section  $\omega$  ; en sorte que

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Et appelons

$i'_1$  la limite à imposer à cette dilatation  $i_1$ , limite qui varie avec sa direction, ou qui est fonction de  $x, y$  ;

$\frac{R_{of}}{E_t}$  ( comme au § 13 de la note du n° 113 ) la valeur particulière de

guez des côtés  $sr', r'q_1$  du triangle  $sr'q_1$  sont indépendants de la direction de  $mq$ . En décrivant une circonférence de cercle sur l'hypothénuse  $sq_1$  comme diamètre, le point  $i$ , comme le point  $r'$ , s'y trouve placé ; la plus grande valeur  $i'$  s'obtiendra donc en prenant la distance, à  $\eta q$  prolongé, du milieu  $x$  de l'arc  $r'iq_1$ , ce qui peut se faire en projetant le centre  $o$  du cercle en  $o'$  sur la corde  $sr'$  et ajoutant  $zo' = \frac{1}{2}sr' - sx$  au rayon  $ox = \frac{1}{2}sq_1$ . Le plus grand rapport de  $i'$  à  $mn$

est donc  $\frac{1}{2}(i+k) - k + \frac{1}{2}\sqrt{(i+k)^2 + g^2}$ , et on a, par conséquent

$$\text{Maximum de } i_1 = \frac{i-k}{2} + \sqrt{\left(\frac{i+k}{2}\right)^2 + \left(\frac{g}{2}\right)^2},$$

ou la formule à démontrer, en remplaçant  $k$  par  $\eta i$ .

On voit également que si on joint  $sx$ , l'angle  $xsr'$  donne la valeur de l'angle  $\alpha = qmn$  qui rend la dilatation de  $mq$  la plus grande possible. Cet angle  $xsr'$  est la moitié de l'angle  $q_1sr'$  dont la tangente est  $\frac{r'q_1}{sr'}$ . Donc on a, si l'on veut déterminer l'inclinaison de la ligne  $mq$  suivant laquelle la dilatation du solide est la plus grande :

$$\text{tang } 2\alpha = \frac{g}{i+k},$$

expression conforme à ce qu'on obtient par différentiation comme on a dit au haut de la page 218.

(Du n° 156).

cette limite  $i'_1$  pour le sens transversal ou pour  $x = 0, y = 1$ , de même que  $\frac{R_o}{E}$  est sa valeur pour le sens longitudinal des fibres ou pour  $y = 0, x = 1$ .

La condition de cohésion permanente sera que  $i_1$  ne surpasse  $i'_1$  dans aucune direction, ou que

$$\text{Maximum de } \frac{i_1}{i'_1} = \text{ ou } < 1.$$

Il faut faire (comme au § 39) une hypothèse sur la loi inconnue de variation de la limite  $i'_1$  entre ses valeurs extrêmes  $\frac{R_o}{E}$  pour  $y = 0$  et  $\frac{R_{ot}}{E_t}$  pour  $x = 0$ ; elle doit être telle que cette limite  $i'_1$  reste la même pour les diverses directions également obliques sur les fibres, ou pour des valeurs soit de  $x$  soit de  $y$  égales au signe près. Adop- tons en conséquence l'expression très-simple

$$i'_1 = \frac{R_o}{E} x^2 + \frac{R_{ot}}{E_t} y^2$$

qui donne pour la limite des dilatations une loi *elliptique* comme celle des dilatations elles-mêmes, ou comme celle des moments d'inertie d'une même figure plane autour de diverses droites qui y sont tracées. Nous aurons, en posant la condition de maximum du quotient  $\frac{i_1}{i'_1}$ :

$$d. \frac{i_1}{i'_1} = 0 \quad \text{ou} \quad i'_1 di_1 - i_1 di'_1 = 0;$$

et, substituant à  $i_1, i'_1$  leurs valeurs dans les différentielles  $di_1, di'_1$ , puis remplaçant  $dy$  par  $-\frac{xdx}{y}$  en vertu de  $x^2 + y^2 = 1$ :

$$i'_1 \left( 2ix + 2ky - g \frac{x^2}{y} + gy \right) dx - i_1 \left( 2 \frac{R_o}{E} x - 2 \frac{R_{ot}}{E_t} x \right) dx = 0,$$

équation qui, divisée par  $xdx$ , peut être écrite

$$\frac{i'_1(2ix^2 + gxy) - 2i_1 \frac{R_o}{E} x^2}{x^2} = \frac{i'_1(-2ky^2 + gxy) - 2i_1 \frac{R_{ot}}{E_t} y^2}{y^2}.$$

(Du n° 156).

Elle exprime l'égalité de deux fractions, qui seront aussi égales à une troisième fraction ayant pour numérateur la somme des numérateurs et pour dénominateur la somme des dénominateurs. Cette dernière somme est  $x^2 + y^2 = 1$ ; et la somme des numérateurs est nulle, car elle revient, d'après les valeurs de  $i_1$  et  $i'_1$  en  $x, y$ , à

$$i'_1 \cdot 2i_1 - 2i_1 \cdot i'_1 = 0.$$

Chacun des deux numérateurs est donc égal aussi à zéro, d'où les deux équations

$$\left(\frac{i_1}{i'_1} - \frac{Ei}{R_o}\right)x = \frac{Eg}{R_o} \frac{y}{2}, \quad \left(\frac{i_1}{i'_1} + \frac{E_t k}{R_{of}}\right)y = \frac{E_t}{R_{of}} \frac{g}{2} x.$$

En les multipliant l'une par l'autre,  $x$  et  $y$  s'éliminent et on obtient l'équation du second degré en  $\frac{i_1}{i'_1}$ :

$$\left(\frac{i_1}{i'_1} - \frac{Ei}{R_o}\right) \left(\frac{i_1}{i'_1} + \frac{E_t k}{R_{of}}\right) = \frac{E}{R_o} \frac{E_t}{R_{of}} \frac{g^2}{4}$$

qui donne, en la résolvant

$$\text{Valeur maximum de } \frac{i_1}{i'_1} = \frac{1}{2} \left( \frac{Ei}{R_o} - \frac{E_t k}{R_{of}} \right) + \sqrt{\frac{1}{4} \left( \frac{Ei}{R_o} + \frac{E_t k}{R_{of}} \right)^2 + \frac{E}{R_o} \frac{E_t}{R_{of}} \frac{g^2}{4}}.$$

Cette quantité ne doit pas excéder l'unité comme on vient de dire.

Or il en résulte, dans le cas particulier  $i = 0, k = 0$  où il n'y a ni dilatation longitudinale ni contraction transversale de la fibre,

$$1 = \text{ou} > \frac{g}{2} \sqrt{\frac{EE_t}{R_o R_{of}}}, \text{ d'où}$$

$$\text{Limite de } g = 2 \sqrt{\frac{R_o R_{of}}{E E_t}}.$$

Comme nous désignons déjà par  $\frac{T_o}{G}$  cette limite du glissement  $g$  quand il est seul, nous pouvons, sous le radical, remplacer le dernier terme par  $\left(\frac{GG}{T_o}\right)^2$ . Il en résultera, en faisant toujours  $k = \eta i$ , et posant

$$\eta \frac{E_t R_o}{R_{of} E} = \eta_1,$$

la condition de cohésion permanente

(Du n° 156).

$$\text{Limite } \frac{1-\eta_1}{2} \frac{Ei}{R_0} + \sqrt{\left(\frac{1+\eta_1}{2} \frac{Ei}{R_0}\right)^2 + \left(\frac{Gg}{T_0}\right)^2} = 1,$$

ne différant, comme on voit, de celle de la page 375 que par  $\eta_1$ , au lieu de  $\eta$ .

Remarquons bien que le 1<sup>er</sup> membre, ou le rapport  $\frac{i_1}{i_1'}$  qu'il s'agit de limiter et de rendre au plus = 1, est une quantité essentiellement positive. Or le radical, plus grand que  $\frac{1+\eta_1}{2} \frac{Ei}{R_0}$  numériquement ou abstraction faite du signe, excède numériquement à plus forte raison  $\frac{1-\eta_1}{2} \frac{Ei}{R_0}$  puisque  $\eta_1$  est supposé toujours positif. Il faut donc (comme on a dit déjà § 2 de la note n° 154) *prendre toujours positivement la quantité que le radical représente*; et, cela, quel que soit le signe de  $i$ , ou soit qu'il y ait longitudinalement dilatation proprement dite ou contraction; en sorte que quand  $g = 0$ , on doit mettre pour ce radical  $\frac{1+\eta_1}{2} \frac{Ei}{R_0}$  ou  $-\frac{1+\eta_1}{2} \frac{Ei}{R_0}$  selon que  $i$  est positif ou négatif.

Supposons enfin que la contecture soit inégale même dans les divers sens transversaux, mais, comme au § 39, symétrique en chaque point par rapport à trois plans rectangulaires dont l'un est celui de la section passant par ce point, etc. Nous poserons,

$g'$  et  $g''$  étant toujours les glissements suivant les deux autres plans de symétrie sur la section,

$\frac{T_0'}{G'}$ ,  $\frac{T_0''}{G''}$  étant comme au § 39 les limites respectives à imposer au glissement  $g'$  quand il est seul et au glissement  $g''$  quand il est seul,

l'équation générale de cohésion permanente

$$\text{Limite } \frac{1-\eta_1}{2} \frac{Ei}{R_0} + \sqrt{\left(\frac{1+\eta_1}{2} \frac{Ei}{R_0}\right)^2 + \left(\frac{G'g'}{T_0'}\right)^2 + \left(\frac{G''g''}{T_0''}\right)^2} = 1 \quad \begin{array}{l} \text{(radical tou-} \\ \text{jours positif)} \end{array}$$

ou, en chassant le radical

$$\text{Lim. } \left(\frac{G'g'}{T_0'}\right)^2 + \left(\frac{G''g''}{T_0''}\right)^2 = \left(1 - \frac{Ei}{R_0}\right) \left(1 + \eta_1 \frac{Ei}{R_0}\right);$$

(Du n° 150).

équation qui redonne et relie ensemble avec continuité toutes les équations de cohésion particulières ; car

1° Elle se confond avec celle du haut de la page précédente lorsque  $G' = G'' = G$ ,  $T_0' = T_0'' = T_0$  ;

2° Lorsque  $i = 0$ , elle rentre dans celle (§ 39) du cas où il n'y a que des glissements  $g'$ ,  $g''$  :

$$\text{Lim. } \left( \frac{G'g'}{T_0'} \right)^2 + \left( \frac{G''g''}{T_0''} \right)^2 = 1 ;$$

3° Lorsque ceux-ci au contraire sont nuls, elle donne, si  $i$  est positif ou représente une *dilatation proprement dite*

$$\text{Lim. } i = \frac{R_0}{E} ;$$

4° Lorsque,  $g'$  et  $g''$  étant encore nuls et la contexture transversale égale,  $i$  est négatif  $= -j$ , ou lorsqu'il n'y a qu'une contraction longitudinale  $j$  avec les dilatations latérales qui en sont la conséquence, cette équation devient, en rendant encore positif le terme provenant du radical :  $\text{Lim. } \frac{1 - \eta_1}{2} \cdot \frac{-Ej}{R_0} + \frac{1 + \eta_1}{2} \cdot \frac{Ej}{R_0} = 1$ , ou

$$\text{Lim. } j = \frac{1}{\eta_1} \frac{R_0}{E}.$$

Or, d'après la valeur de ce que nous venons de représenter par  $\eta_1$ , on a

$$\frac{1}{\eta_1} \frac{R_0}{E} = \frac{1}{\eta} \frac{R_{0f}}{E_f} \frac{R_0}{E} = \frac{1}{\eta} \frac{R_{0f}}{E_f},$$

ce qui est la même chose que

$$\frac{R'_0}{E}$$

si l'on appelle, comme aux notes des n° 3 (§ 9) et 113 (§§ 4, 6, 10, 13),  $R'_0$  la limite à imposer aux efforts longitudinaux de *compression* par unité de section  $\omega$  du prisme ; car, d'après le § 13 de cette dernière note (p. 109), on doit prendre, théoriquement

$$\text{Le rapport } \frac{R'_0}{R_0} = \frac{1}{\eta} \frac{R_{0f}}{E_f} \frac{E}{R_0}, \text{ d'où } \frac{1}{\eta} \frac{R_{0f}}{E_f} = \frac{R'_0}{E},$$

(Du n° 150).

et, par conséquent,  $\frac{1}{\eta_1} \frac{R_o}{E}$ , que la formule générale nouvelle vient de nous donner pour  $j$ , représente bien la limite  $\frac{R'_o}{E}$  à imposer aux contractions longitudinales  $j$  pour le cas d'égale contexture dans les sens transversaux <sup>(1)</sup>.

5° Enfin lorsque cette contraction longitudinale  $j$  a lieu pour un prisme de contexture transversale inégale mais symétrique, cas où il faut prendre

$$\left. \begin{array}{l} \text{Limite } \frac{R'}{E} \text{ des} \\ \text{contractions longitudinales} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{la plus petite des deux} \\ \text{quantités } \frac{1}{\eta_u} \frac{R_{ou}}{E_u} \text{ et } \frac{1}{\eta_v} \frac{R_{ov}}{E_v} \end{array} \right.$$

( $\eta_u$ ,  $R_{ou}$ ,  $\eta_v$ ,  $R_{ov}$ ,  $E_u$ ,  $E_v$ , étant les valeurs de  $\eta$ ,  $R_o$ ,  $E$  pour les sens  $u$ ,  $v$ ), rien n'empêche de faire, dans la formule précédente, le nombre  $\eta_1$  égal au rapport de  $\frac{R_o}{E}$  à cette limite  $\frac{R'_o}{E}$  quelle qu'elle soit, ou de faire généralement, pour tous les prismes :

<sup>(1)</sup> C'est entièrement à M. Poncelet qu'est due l'idée si simple et si naturelle d'expliquer la rupture par compression longitudinale au moyen des dilatations transversales que cette compression occasionne, et, par suite, de prendre théoriquement  $\frac{R'_o}{R_o} = \frac{1}{\eta} = \frac{1}{2}$  pour le rapport des limites des efforts de compression et d'extension auxquels on peut soumettre sans danger d'une manière permanente un prisme dont la matière est *isotrope* ou d'égale contexture en tous sens; sauf à modifier ce rapport (§§ 8 et 43 des notes des n° 3 et 443) en raison des circonstances dont la théorie ne tient pas compte, celle entre autres qui empêche la matière des prismes courts soumis à une compression de se dilater en toute liberté dans le sens latéral, ainsi que M. Poncelet l'a également observé.

On peut se rappeler que nous avons attribué à M. le capitaine du génie Michon (§§ 2 et 8 de la note du n° 3) cette théorie de l'écrasement, qui est bien plus conforme aux faits que celle de Coulomb, et qui rentre inévitablement dans la théorie générale, constamment appliquée et dérivant du principe généralement admis du § 4 de la même note du n° 3; en sorte que le rapport  $\frac{R'_o}{R_o} = \frac{1}{\eta} \frac{R_{oz}}{E_z R_o}$  donné au § 43 de la note du n° 443, où cette théorie est étendue aux prismes de contexture fibreuse, a dû se retrouver en particulier dans la formule générale donnée tout à l'heure, et susceptible ainsi d'embrasser tous les modes de sollicitation à la rupture.

La communication récente des feuilles manuscrites du cours de M. Poncelet en 1839 à la Faculté nous met à même de faire cette rectification. M. Michon avait reçu la même communication et reconnaissait y avoir puisé les bases de son cours, comme nous avons dit.



(Du n° 150).

$$\eta_1 = \frac{R_0}{R'_0};$$

et la formule donnera encore  $\lim. j = \frac{R'_0}{E}$  pour le cas extrême où il n'y a qu'une contraction longitudinale  $j = -i$ , avec les dilatations latérales inégales qui en résultent, et dont nous n'avons pas besoin de considérer les grandeurs  $\eta_{u,j}$ ,  $\eta_{v,j}$ .

Par cette substitution, à  $\eta_1$ , du rapport de  $R_0$  à  $R'_0$ , l'équation générale de cohésion, ou de résistance à la rupture éloignée sous les divers genres d'efforts agissant ensemble, devient

$$\text{Lim.} \left( \frac{1}{R_0} - \frac{1}{R'_0} \right) \frac{Ei}{2} + \sqrt{\left( \frac{1}{R_0} + \frac{1}{R'_0} \right)^2 \left( \frac{Ei}{2} \right)^2 + \left( \frac{G'g'}{T'_0} \right)^2 + \left( \frac{G''g''}{T''_0} \right)^2} = 1 \text{ (radical positif)}$$

revenant, en transposant et élevant au carré, à :

$$\left( \frac{G'g'}{T'_0} \right)^2 + \left( \frac{G''g''}{T''_0} \right)^2 = \text{ou} < \left( 1 - \frac{Ei}{R_0} \right) \left( 1 + \frac{Ei}{R'_0} \right).$$

Les nombres  $R_0$  et  $R'_0$  devront y être déterminés pour chaque matière comme on a dit aux notes du n° 24 (§ 12, p. 24 à 26) et du n° 3 (§ 9, p. 12, 13), mais surtout à la note du n° 113 (§§ 10 à 14, p. 103 à 115), où l'on a bien remarqué qu'il ne faut pas faire varier autant le rapport  $\frac{R_0}{R'_0} = \eta_1$  des résistances *permanentes* à l'extension

et à la compression longitudinale, que le rapport  $\frac{R}{R'}$  fourni par les expériences entre les résistances *instantanées* ou les charges capables de produire la rupture immédiate par traction et par écrasement. Il ne faudra généralement pas faire ce rapport  $\eta_1$  au-dessous de  $\frac{1}{2}$  ni au-dessus de  $\frac{1}{2}$ .

Or, on verra au § 45, par un tableau de résultats numériques plus nombreux que ceux qui ont été rapportés vers la fin du § 1 de la note du n° 154, que la formule donne pour des valeurs de  $\eta_1$  ou  $\frac{R_0}{R'_0}$  entre les limites  $\frac{1}{2}$  et  $\frac{1}{2}$ , à très-peu près la même chose qu'en adoptant généralement  $\frac{1}{2}$  comme quand la matière est isotrope. On peut donc, dans l'équation de cohésion,

(Du n° 150).

Au lieu de  $\frac{1}{2} \left( \frac{1}{R_0} - \frac{1}{R'_0} \right) = \frac{1 - \eta_1}{2R_0} = \frac{1 - \eta_1}{2\eta_1 R'_0}$  et de  $\frac{1}{2} \left( \frac{1}{R_0} + \frac{1}{R'_0} \right) = \frac{1 + \eta_1}{2R_0} = \frac{1 + \eta_1}{2\eta_1 R'_0}$   
 mettre  $\frac{3}{8} \frac{1}{R_0}$  et  $\frac{5}{8} \frac{1}{R_0}$  quand le danger vient plus des  
 extensions que des compressions longitudinales ;  
 et  $\frac{3}{2} \frac{1}{R'_0}$  et  $\frac{5}{2} \frac{1}{R'_0}$  quand le danger vient plus des  
 compressions que des extensions.

Au reste la formule de la page précédente se prête à toutes les suppositions sur  $R_0$  et  $R'_0$ .

§ 44. *Équation de cohésion ou formule générale de résistance permanente rendue plus immédiatement applicable en y introduisant les forces extérieures tendant à fléchir et à étendre ou comprimer la pièce, et en séparant les effets de celles qui tendent à la cisailier et à la tordre.* — Si l'on appelle

- $Q, P', P''$  les résultantes partielles ou sommes de composantes des forces extérieures dans le sens longitudinal et dans les sens transversaux des coordonnées  $u, v$  prises parallèles aux axes du plus petit et du plus grand moment d'inertie  $I = \int v^2 ds$ ,  $I' = \int u^2 d\omega$  de la section  $\omega$ , directions qui sont aussi supposées celles des lignes de rencontre du plan de la section avec les deux autres plans de symétrie de contexture du solide,  
 $M_1, M', M''$  les sommes de moments des forces extérieures autour de l'axe longitudinal passant par les centres de gravité des diverses sections, et autour des axes transversaux d'inertie  $u, v$  de la section particulière  $\omega$ ,  
 $g', g''$  les glissements dans les sens  $u, v$ , sur un élément  $d\omega$ , qui sont dus à la torsion seule, ou à l'action du moment  $M_1$ ,  
 $g'_1, g''_1$  les glissements dus, dans les deux mêmes sens, aux efforts de cisaillement ou aux actions simultanées des deux forces transversales  $P', P''$  (dont chacune peut produire des glissements dans les deux sens) ;

On aura (un peu plus généralement qu'au § 6 de la note du n° 154 (p. 226) où nous avons déjà considéré un cas complexe de cisaillement avec extension et flexion simultanées) l'expression suivante

(Du n° 156).

de la dilatation longitudinale de la fibre dont les coordonnées transversales sont  $u, v$  :

$$i = \pm \frac{Q}{E\omega} + \frac{M'}{EI} v + \frac{M''}{EI'} u;$$

car le *premier terme* représente bien ce qui vient de la seule force de traction ou de compression longitudinale  $Q$ ; et les deux autres peuvent être déduits de ce qui a été dit au § 2 de la note du n° 83 où  $M'$  et  $M''$  étaient désignés par  $M \cos \varphi, M \sin \varphi$ , et, les deux parties de la dilatation qu'ils produisent, par  $\frac{v \cos \psi}{\rho}, \frac{u \sin \psi}{\rho}$ . Mais, sans invoquer ce §, nous pouvons, directement, considérer que s'il n'y a qu'une flexion et si elle s'opère autour de l'axe d'inertie de  $\omega$  parallèle aux  $u, i$  désignant la dilatation de la fibre particulière qui en est la distance  $v, i \frac{v_1}{v}$  sera (note du n° 80) la dilatation d'une autre fibre quelconque dont appellerait  $v_1$  la distance au même axe, et  $Ei \frac{v_1}{v} d\omega$  sa résistance élastique; d'où, pour l'équilibre de rotation autour des deux axes principaux d'inertie,  $u_1$  étant la distance de la même fibre quelconque au deuxième, les deux équations  $M' = \int Ei \frac{v_1}{v} d\omega \cdot v_1 = \frac{Ei}{v} \int v_1^2 d\omega = EI \frac{i}{v}$ , et  $M'' = 0$  puisque  $\int u_1 v_1 d\omega = 0$ ; en sorte que lorsque le moment  $M'$  agit seul on a bien  $i = \frac{M'}{EI} v$  ou le *second terme*. De même quand  $M''$  agit seul on a  $i =$  le troisième terme, et la dilatation totale, en vertu du principe de composition (§ 2, note n° 24) a bien l'expression que nous venons d'écrire.

En la substituant à  $i$  dans la formule du § précédent et en y mettant  $g'_1 + g', g''_1 + g''$  au lieu de  $g', g''$  qui désignaient, à ce §, les glissements totaux, on a

$$\text{Lim.} \left( \frac{1}{2R_0} - \frac{1}{2R'_0} \right) \left( \pm \frac{Q}{\omega} + \frac{M'v}{I} + \frac{M''u}{I'} \right) + \sqrt{\left( \frac{1}{2R_0} + \frac{1}{2R'_0} \right)^2 \left( \pm \frac{Q}{\omega} + \frac{M'v}{I} + \frac{M''u}{I'} \right)^2 + \left( G \frac{g'_1 + g'}{I_0} \right)^2 + \left( G'' \frac{g''_1 + g''}{I''_0} \right)^2} = 1,$$

(Du n° 150).

ou

$$\left(G \frac{g'_1 + g''}{T'}\right)^2 + \left(G' \frac{g'_1 + g''}{T''}\right)^2 = \left[1 - \frac{1}{R_0} \left(\pm \frac{Q}{\omega} + \frac{M'v}{I} + \frac{M''u}{I'}\right)\right] \left[1 + \frac{1}{R_0} \left(\pm \frac{Q}{\omega} + \frac{M'v}{I} + \frac{M''u}{I'}\right)\right].$$

Nous ne pouvons pas mettre pour les glissements  $g'_1, g''_1, g', g''$ , comme nous avons fait pour les dilatations  $i$ , des expressions générales fonctions des forces extérieures et de  $u, v$ , et indépendantes de toute particularisation de la forme du contour des sections  $\omega$ ; si ce n'est toutefois pour quelques sections du prisme qui peuvent se trouver dans la situation exceptionnelle considérée au § 10 de la note n° 152 (p. 203), à la fin du § 4 de la note n° 153 et au § 6 de la note n° 154, c'est-à-dire pour celles qui sont astreintes à rester planes, comme les sections à *encastrement complet* de M. Vicat, scellées et soudées avec une matière plus rigide que celle du prisme, ou les sections qui se trouvent serrées et sollicitées latéralement *dans leur plan même* par des forces tendant à trancher, ainsi qu'il arrive aux rivets, ou aux bases des prismes tordus *de longueur nulle* (comme dit aussi M. Vicat); ou, enfin, les sections qui, d'après le mode de sollicitation symétrique des deux portions de prisme qu'elles séparent, n'ont aucune raison de s'infléchir plutôt d'un côté que de l'autre. On a, en effet, pour ce cas rare, ou pour les sections ainsi placées, quelle que soit la forme de leur contour:

$$g'_1 = \frac{P'}{G'\omega}, \quad g''_1 = \frac{P''}{G''\omega},$$

$$g' = -\theta v, \quad g'' = \theta u, \quad M_1 = \int d\omega (G''g''u - G'g'v) = \theta(G'I + G''I'),$$

en sorte qu'on peut éliminer les  $g$  comme les  $i$ ; et les deux derniers termes  $(G'—)^2 + (G''—)^2$  sous le radical sont pour ces sections particulières, lorsqu'il en existe:

$$\frac{1}{T'^2} \left(\frac{P'}{\omega} - G' \frac{M_1 v}{G'I + G''I'}\right)^2 + \frac{1}{T''^2} \left(\frac{P''}{\omega} + G'' \frac{M_1 u}{G'I + G''I'}\right)^2.$$

Pour toutes les autres sections des prismes, qui peuvent librement *se gauchir* et s'infléchir, les expressions des glissements composants  $g'_1, g''_1, g', g''$  en fonction de  $M_1$ , de  $P'$ , de  $P''$  et

(Du n° 150).

des coordonnées des points, *dépendent de la forme du contour.*

Celles de  $g'$ ,  $g''$  sont données à la récapitulation faite, § 40, des formules de torsion seule, et nous allons donner ou rappeler, aux §§ suivants 45 et 46, celles de  $g'_1$ ,  $g''_1$ , ou des glissements de cisaillement dont on s'est déjà occupé à la note du n° 153.

L'élimination de  $g'$ ,  $g''$  d'une manière générale se fait cependant encore lorsqu'on se contente d'une approximation telle que celle qui résulte de l'*assimilation* (§ 24) de sections données, inégales dans les deux sens, à des ellipses ayant mêmes moments d'inertie, quant au gauchissement que la torsion donne à leurs plans, supposés ainsi se changer en paraboloides hyperboliques dont l'équation est (§§ 24 et 39) :

$$z = -\theta \frac{\frac{I'}{G'} - \frac{I}{G''}}{\frac{I'}{G'} + \frac{I}{G''}} uv.$$

On a, en effet (§ 40, p. 360) pour les glissements qui en résultent

$$g' = -\frac{M_1 v}{2G'I}, \quad g'' = \frac{M_1 u}{2G''I'},$$

en sorte que si pour tenir compte, aussi par première approximation, de  $g'_1$ ,  $g''_1$ , ou des effets de cisaillement ordinairement négligés, on les suppose partout égaux à leurs valeurs moyennes  $\frac{P'}{G'\omega}$ ,  $\frac{P''}{G''\omega}$ , les deux derniers termes sous le radical prennent la forme

$$\frac{1}{I'^2} \left( \frac{P'}{\omega} - \frac{M_1 v}{2I} \right)^2 + \frac{1}{I''^2} \left( \frac{P''}{\omega} + \frac{M_1 u}{2I'} \right)^2,$$

plus simple que celle qu'on a posée au bas de la page précédente et qui est cependant bien moins approchée, quant à la torsion, que celle qu'on vient d'écrire, lorsqu'on l'applique à toutes les sections (et non pas seulement à des sections exceptionnelles) comme font les auteurs qui ne prennent pas en considération le changement des plans des sections en surfaces courbes<sup>(1)</sup>.

(1) C'est sur cette double première approximation, ou sur l'adoption des valeurs

(Du n° 156).

Mais l'assimilation à l'ellipse, quant à la torsion et aux glissements  $g'$ ,  $g''$  qui lui sont dus, ne donne pas ordinairement des résultats assez approchés.

Et les glissements de cisaillement  $g'_1$ ,  $g''_1$  dus aux forces transversales  $P'$ ,  $P''$  sont loin d'avoir des grandeurs constantes pour tous les points de chaque section, car ils s'annulent sur diverses parties du contour, et ils excèdent, par suite, vers le centre, leurs moyennes  $\frac{P'}{G'\omega}$ ,  $\frac{P''}{G''\omega}$ , comme on a vu aux §§ 1 et 2 de la note du n° 153 et comme on va le montrer avec plus de détail aux deux §§ suivants. La substitution des expressions exactes de ces divers glissements dans l'équation de cohésion rendrait généralement impossible la recherche analytique du maximum de la quantité qui en occupe le premier membre.

Heureusement qu'il n'est pas nécessaire d'exprimer analytiquement  $g'_1$ ,  $g''_1$ , ni même  $g'$ ,  $g''$  en fonction des coordonnées  $u$ ,  $v$

$\frac{4}{G'} \left( \frac{P'}{\omega} - \frac{M_1 v}{2I} \right)$ ,  $\frac{4}{G''} \left( \frac{P''}{\omega} + \frac{M_1 u}{2I'} \right)$  pour les glissements totaux estimés parallèlement aux axes principaux d'inertie des sections, qu'est fondée une partie de ce que nous avons donné à un Mémoire présenté à l'Académie et approuvé en 1843, les 30 octobre, 6 et 27 novembre : *Sur le Calcul de la résistance et de la flexion des pièces solides à simple et à double courbure en prenant simultanément en considération les divers efforts auxquels elles peuvent être soumises dans tous les sens*, et dont les extraits, réunis à diverses notes (Comptes rendus des séances, t. XVII, p. 942, 1020, 1180, 1234, et XIX, p. 40, 81), ont été publiés en 1844 sous le titre : *Mémoires sur la résistance des solides*.

On obtient, par cette supposition, une approximation nécessairement bien plus grande qu'en attribuant aux plans des sections une simple inclinaison sans gauchissement, ainsi que nous avions fait en 1837 dans un premier travail (Leçons lithographiées), et qu'il vient d'être fait dans un Cours imprimé en 1859, et dont l'auteur considère aussi (au moins sous le rapport de leur déformation ou des déplacements de leurs points), des pièces courbes sollicitées simultanément de diverses manières. Nos formules générales qui donnent les déplacements dus à cette action complexe (1843, Comptes rendus t. XVII, p. 1024, form. 48 et 20), et qui ont été vérifiées par divers géomètres de l'Allemagne ainsi que les considérations propres à déterminer les constantes (*id.*, p. 1027), sont d'ailleurs faciles à modifier dans le sens de nos nouvelles recherches, de manière à les débarrasser de la double hypothèse de l'incurvation paraboloidale et des glissements constants, comme on le verra aux notes de la section IV où nous nous occuperons de la flexion non plane, qui est toujours accompagnée de torsion,

(Du n° 156).

pour trouver le *point dangereux* où a lieu la plus grande valeur de cette quantité positive (p. 379 et 384),

$$\frac{1-\eta_1}{2} \frac{Ez}{R_0} + \sqrt{\quad} = \left( \frac{1}{2R_0} - \frac{1}{2R'_0} \right) \left( \pm \frac{Q}{\omega} + \frac{M'v}{I} + \frac{M''u}{I'} \right) + \sqrt{\quad}$$

qui donne déjà le maximum du rapport  $\frac{i_1}{v_1}$  (§ 43, p. 378) relatif aux diverses directions en chaque point, et dont il s'agit maintenant de trouver le maximum *maximorum* ou relatif aux divers points, afin d'exprimer son égalité à 1 au plus. La situation de ce point où a lieu le plus grand rapport  $\frac{i_1}{v_1}$  des écartements moléculaires à leurs limites, lorsque la recherche analytique ne peut en être entreprise, peut s'obtenir, comme on verra, par un tâtonnement numérique fondé sur le calcul des dilatations longitudinales  $i$  ou des valeurs de  $\pm \frac{Q}{\omega} + \frac{M'v}{I} + \frac{M''u}{I'}$ , et des glissements  $g'$ ,  $g'_1$ , etc., en un nombre suffisant de points des sections ou de leur contour, et sur leur substitution dans ce premier membre dont le maximum ne doit pas dépasser l'unité, ou, plus simplement, dans l'expression rationnelle

$$\left( G' \frac{g'_1 + g'}{T'} \right)^2 + \left( G'' \frac{g''_1 + g''}{T''} \right)^2 - \left[ 1 - \frac{1}{R_0} \left( \pm \frac{Q}{\omega} + \dots \right) \right] \left[ 1 + \frac{1}{R'_0} \left( \pm \frac{Q}{\omega} + \dots \right) \right]$$

dont le maximum est astreint à ne pas dépasser zéro.

Il est entendu que lorsqu'on pourra faire cette recherche analytiquement on ne se bornera pas à prendre ce qu'on obtient en égalant à zéro la différentielle de l'une des expressions dont on veut avoir le maximum. On examinera si les valeurs ainsi trouvées ne sont pas étrangères, comme répondant à des points hors des sections; et, en tous cas, on les comparera avec celles qui répondent aux *valeurs limites des coordonnées*  $u$ ,  $v$ , et qui donneront très-souvent le véritable maximum, comme on en a vu un exemple au § 32 pour un cas de torsion seule.

On est même dispensé de rechercher le point dangereux, et il s'indique de lui-même, dans des cas où les plus grands dangers de rupture par les seuls glissements  $g$ , et par les seules dilatations  $i$ , ont lieu au même endroit; car c'est là que se trouve évidemment le point

(Du n° 150).

dangereux si  $(1-\eta_1)i$  y est positif, puisque, alors,  $\frac{1-\eta_1}{2} \frac{Ei}{R_0} + \sqrt{\quad}$ , somme de deux quantités positives, augmente constamment, soit avec  $\frac{Ei}{R_0}$  ou  $-\eta_1 \frac{Ei}{R_0}$ , qui sont les valeurs qu'il prend lorsque les glissements s'évanouissent, soit avec  $\left(\frac{G'g'}{T'_0}\right)^2 + \left(\frac{G''g''}{T''_0}\right)^2$  qui est le carré de la valeur qu'il prend lorsque la dilatation  $i$  est nulle.

Et, si  $(1-\eta_1)i$  est négatif, soit qu'il y ait *contraction*, ou soit qu'on suppose  $R'$ , plus petit que  $R_0 = \eta_1 R'_0$ , on verra par les exemples ci-après du cylindre circulaire et même du cylindre elliptique ou du prisme rectangulaire sollicité à fléchir à *plat* et non de *champ* en même temps qu'à tordre et à se contracter, que la détermination du point dangereux se réduit ordinairement alors *au choix entre deux points seulement du contour*.

§ 45. *Valeurs approchées et quelquefois suffisantes des glissements de cisaillement  $g'_1, g''_1$ , dus aux forces transversales  $P', P''$ . Raisons de leur défaut d'exactitude. Égalité et simultanéité constante des glissements longitudinaux et des glissements transversaux.*—Nous allons compléter ici, ainsi qu'au § suivant, ce qui a été dit, à la note du n° 153, de ces sortes de glissements, sur lesquels l'attention des constructeurs commence à se porter d'une manière plus particulière, principalement depuis la publication d'un travail intéressant de M. Jouravski, ingénieur russe, sur les résistances que les matériaux doivent opposer à la rupture sous les efforts qui les produisent (1).

Dès 1837 (2), et ensuite à un mémoire d'octobre 1843 (3), nous avons défini les glissements et leur mesure, à peu près comme on a vu au § 3 de la note ci-dessus du n° 152 (4); et nous avons calculé,

(1) *Remarques sur la résistance d'un corps prismatique et d'une pièce composée, etc., à une force perpendiculaire à leur longueur*, par M. Jouravski, lieutenant-colonel du corps des ingénieurs des voies et communications de Russie. — *Annales des ponts et chaussées*, cahier de novembre et décembre 1856 (qui a paru dans le courant de 1857).

(2) *Leçons (lithographiées) de mécanique à l'École des ponts et ch.* (art. 6 et 7).

(3) *Comptes-rendus des séances de l'Académie*, 1843, t. XVII, p. 944.

(4) Nous n'avons pas fait mention, à cette note, du mémoire de M. Jouravski,



(Du n° 156).

en 1854 (1), par une analyse rigoureuse, la grandeur de ceux qui sont toujours développés dans la flexion des prismes par des forces transversales ne faisant pas couples. Mais il est bien évident, sans calcul, qu'un glissement dans l'intérieur d'un corps qui se déforme a toujours lieu à la fois et également sur deux droites matérielles perpendiculaires entre elles ; car ce qui le constitue c'est le changement de leur angle droit en un angle légèrement aigu, et ce qui le mesure c'est (même note) le petit rétrécissement de cet angle, ou la projection sur l'une quelconque des deux droites, de l'unité de longueur portée dans la direction de l'autre après ce changement. Toutes les fois donc qu'il y a glissement sur une section, parallèlement à une droite qui y est tracée, ou que deux sections glissent l'une relativement à l'autre suivant cette droite, il y a glissement égal sur des fibres qui leur sont perpendiculaires, ou glissement, l'une devant l'autre, de ces fibres comprises dans un plan parallèle à la même droite.

Nous avons observé aussi, il y a quelques années (2), que la rupture produite par un glissement dépassant une certaine grandeur s'opérait naturellement dans la direction où elle éprouve le plus de facilité à s'accomplir, en sorte que, dans les bois par exemple, au lieu d'une séparation transversale des tranches, il y a plus souvent *fente longitudinale* ou séparation des fibres.

C'est de celle-ci, ou de la *séparation des fibres par glissement les unes sur les autres*, que s'occupe M. Jouravski.

Il commence par cette remarque judicieuse : que si deux prismes rectangulaires égaux A et B, horizontaux et encastés du même côté O, sont simplement superposés, ils ne supporteront ensemble, à l'extrémité libre M, jusqu'à rupture ou danger de rupture, qu'un

---

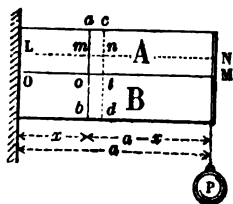
parce que nos quatorze premières feuilles (p. 4 à 224) étaient déjà imprimées et offertes à divers savants à l'époque où ce mémoire a été connu.

(1) *Mémoire sur la flexion des prismes et sur les glissements transversaux et longitudinaux qui l'accompagnent*, présenté le 20 novembre 1854 et lu avec un complément le 20 juillet 1855 (*Comptes rendus*, t. XXXIX p. 4027, et XL p. 443), et inséré au *Journal des mathématiques pures et appliquées* au commencement de 1856, t. 1<sup>er</sup> de la 2<sup>e</sup> série.

(2) *Mémoire sur la torsion des prismes*, etc., lu à l'Académie le 13 juin 1853 (*Savants étrangers*, t. XIV) art. 28 et 83.

(Du n° 156).

pois P moitié moindre que s'ils étaient empêchés de glisser l'un sur l'autre ou s'ils ne faisaient qu'un seul et même prisme ; car,  $a$  désignant leur longueur OM,  $b$  leur largeur commune,  $c$  leur hauteur  $ab$  ensemble,  $R$ , la plus petite des deux limites à imposer l'une aux tensions, l'autre aux pressions longitudinales des fibres par unité de section, on a (n° 145) :



$$\text{S'ils sont unis, } Pa = R. \frac{bc^2}{6}$$

ils sont séparés et sans adhésion sur leur face de contact OM,  $Pa = 2.R. \frac{b}{6} \left(\frac{c}{2}\right)^2 = R. \frac{bc^2}{12}$  ;

d'où l'on voit, dit-il très-bien, que l'adhésion latérale des fibres, ou leur résistance au glissement longitudinal, joue un rôle important dans la résistance des solides à la rupture par des efforts perpendiculaires à leur longueur<sup>(1)</sup>.

Il évalue l'effort qui tend à vaincre cette adhésion sur une longueur quelconque  $oM = a - x$  de la face de jonction  $OoM$  des deux moitiés supérieure et inférieure du prisme *unique* de hauteur  $c$ , en remarquant que cet effort doit être égal à la somme des tractions qu'exerce la partie de gauche  $Ooa$  sur la partie de droite  $aoM$  de la moitié supérieure du solide à travers la moitié  $oa$  de la section  $aob$  située à la distance  $Oo = x$  de l'encastrement ; car cette égalité est nécessaire à l'équilibre de translation horizontale de la partie  $aoM$ , de même que la nullité de la somme algébrique des tractions positives et négatives à travers toute la section  $aob$  est nécessaire à l'équilibre de toute la partie du prisme à sa droite. Or,  $v$  représentant toujours l'ordonnée d'un élément superficiel quelconque de la section  $aob$  par rapport à la médiane ou ligne des fibres invariables  $o$ , et  $R$  la tension par unité de section des fibres supérieures en  $a$ , qui répondent à  $v = \frac{c}{2}$ , la traction sur l'élément est  $R. \frac{v}{\frac{1}{2}c}$

(1) Cette observation avait déjà été faite en 1767 par Duhamel du Monceau (*Du transport et de la force des bois*, in-4°, p. 416-417).

(Du n° 156).

multiplié par sa surface, et la somme des tractions est ainsi

$$\int_0^{c/2} R \cdot \frac{2v}{c} \cdot b dv = R \frac{bc}{4}.$$

Mais comme on a pour le moment de flexion, autour de  $o$  :

$$P(a-x) = \int_{-c/2}^{c/2} R \cdot \frac{2v}{c} b dv \cdot v = R \cdot \frac{2I}{c} = R \frac{bc^3}{6},$$

on peut éliminer  $R$ , ce qui donne pour la même somme de tractions à travers  $oa$ , ou pour l'effort égal s'exerçant horizontalement sur la portion de face intérieure  $oM$  :

$$\frac{3}{2} \frac{P(a-x)}{c}.$$

Il est, comme l'on voit, proportionnel à la longueur  $a-x$  de cette portion de face. M. Jouravski, un peu plus loin, le regarde aussi comme proportionnel à la superficie ou le suppose également réparti sur la largeur de la pièce comme on voit qu'il l'est sur la longueur ; ce qui donne pour la mesure, par unité superficielle, de cet effort tendant à séparer par glissement longitudinal les deux moitiés A et B du prisme

$$\frac{3}{2} \frac{P}{bc}.$$

Et, sur une face longitudinale  $LmN$  située à la distance  $v$  de la ligne des fibres invariables, l'effort analogue doit être, pour une longueur  $mN = a-x$ , afin que  $amN$  soit en équilibre de translation horizontale, égal à la somme des tractions s'exerçant à travers la partie de section  $ma$ , d'une hauteur  $\frac{c}{2} - v$ , ou égal à :

$$\int_v^{c/2} R \frac{2v}{c} b dv = \frac{2bR}{c} \left( \frac{c^2}{8} - \frac{v^2}{2} \right),$$

ce qui donne, par unité superficielle, en éliminant encore  $R$  :

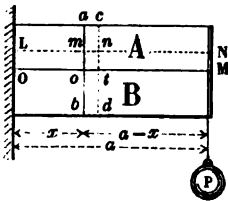
$$\frac{3}{2} \frac{P}{bc} \left[ 1 - \left( \frac{2v}{c} \right)^2 \right].$$

M. Brosse <sup>(1)</sup> a rendu ce raisonnement plus général ou applicable

(1) *Cours de Mécanique appliquée*, 1859, n° 88, p. 201-204.

(Du n° 153).

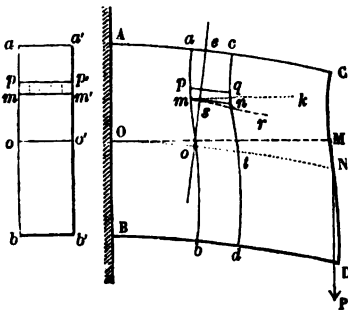
à d'autres cas, en considérant l'action longitudinale exercée seule-



ment sur une portion infiniment courte  $ot = dx$  de la face horizontale OM, et en l'égalant à la différence des tractions à travers les moitiés supérieures  $oa, tc$  des deux sections infiniment voisines  $aob, ctd$ ; tractions qui sont ici  $\frac{3}{2} \frac{P(a-x)}{c}$ ,

$\frac{3}{2} \frac{P(a-x-dx)}{c}$ ; ce qui donne toujours  $\frac{3}{2} \frac{P}{bc}$  par unité superficielle de la petite face  $b \cdot dx$  dans le cas particulier de M. Jouravski, où les sections sont égales d'un bout à l'autre, et où la flexion est déterminée par une force transversale P et non par un couple; car, dans ce dernier cas, on trouverait zéro, ou aucun effort pour faire glisser, comme nous l'avons fait remarquer ailleurs.

Or, ainsi modifié, on peut voir que ce raisonnement revient presque identiquement à ce que nous avons donné au § 2 de la note du n° 153 pour déterminer la loi de variation des glissements aux divers points des sections



$aob'o'a'$  (fig. ci-contre reproduite de la p. 208) d'un prisme rectangle mince fléchi de champ, et, par suite (§ 3) la forme en doucine affectée, après la flexion, par ces sections primitivement planes; forme que nous avons déjà déterminée de cette même manière élémentaire, mais

seulement approchée, à la fin du complément de juillet 1855 à notre mémoire sur la flexion et les glissements, d'abord exactement calculés dans le cours de ce même mémoire (1).

En effet,  $\frac{E}{\rho}$  (p. 209-213) est la même chose que ce que nous ap

(1) *Journal des mathématiques pures et appliquées*, t. 1<sup>re</sup>, 1856, p. 184-185.

(Du n° 156).

pelons ici  $\frac{2R}{c}$ ; et les efforts tangentiels  $Gg$ ,  $Gg$  sur l'unité des éléments superficiels de la section transversale  $amob$ , en  $o$  et en  $m$  ou aux distances zéro et  $v$  de la ligne  $oo'$  des fibres de longueur invariable, sont égaux aux efforts tangentiels sur l'unité des éléments adjacents des sections longitudinales  $ot$ ,  $mn$ ; égalité qui a lieu non-seulement lorsque la contexture du solide est la même dans les deux sens longitudinal et transversal, mais même *lorsqu'elle varie* d'un sens à l'autre d'une manière quelconque, d'après le théorème de réciprocité des composantes tangentielles d'actions sur deux faces perpendiculaires, dû à M. Cauchy et que nous avons démontré au § 39 (p. 346-347).

Le raisonnement de M. Jouravski, un peu plus élémentaire que celui de la note citée du n° 153, et suffisant dans le cas le plus ordinaire, donne comme l'on voit, non-seulement ce qu'il a cherché, c'est-à-dire les efforts tangentiels longitudinaux (et, par suite, les glissements relatifs des fibres), mais, aussi, les efforts tangentiels transversaux ou sur les sections et *la loi de variation des glissements qui s'y opèrent* (§ 2 de la même note); loi exprimée, d'après ce qu'on vient de voir, comme d'après le § cité, par

$$g = \frac{3}{2} \frac{P}{\omega} \left[ 1 - \left( \frac{2v}{c} \right)^2 \right] \quad (1)$$

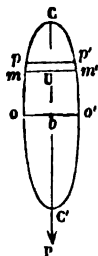
pour un rectangle dont la section  $b \times c = \omega$  est assez peu large pour que ces glissements ou ces efforts puissent être regardés comme égaux sur tous les éléments de chaque bande horizontale  $mm'p'p$  (2° fig., p. précéd.).

En sorte que, bien que s'appuyant sur la théorie ordinaire de la flexion qui part de la supposition que les sections restent planes et normales, ce raisonnement donne la preuve la plus élémentaire qu'elles *s'inclinent et s'infléchissent* doublement.

On peut l'appliquer, comme a fait M. Bresse, à des sections d'une autre forme que le rectangle, mais en ajoutant toujours la condition de petite largeur. Soient :

(1) Cette expression approchée se trouvait déjà à l'art. 44 de notre *Mémoire sur la torsion*.

( Du n° 156 ).



$U = mm'$  la largeur variable et supposée petite de la section  $oCo'C'$  d'un prisme ou cylindre, à la distance  $v$  de la ligne  $oo'$  des fibres invariables,  $v'$  la plus grande valeur de  $v$ , ou la hauteur, au-dessus de  $oo'$ , du point le plus élevé  $C$  de la section,  $I$  son moment d'inertie autour de  $oo'$ ,  $a - x$  le bras de levier, pour cette section, de la résultante ou somme de composantes des forces extérieures estimée dans une direction parallèle à  $v$ , résultante ou somme que nous avons appelée  $P''$  aux §§ ci-dessus de la présente note, où  $g''_1$ ,  $G''$  désignent le glissement et son coefficient d'élasticité dans la même direction.

On a comme on vient de voir (ou note du n° 80)

$$\frac{P'' (a - x)}{I} v$$

pour la traction exercée sur l'unité superficielle de section des fibres traversant la bande  $mm'p'p = Udv$ ; d'où  $\frac{P'' (a - x)}{I} \int_0^{v'} Uvdv$  pour la somme de ces tractions à travers la partie supérieure  $mCm'$ , qui doivent faire équilibre à l'effort tangentiel longitudinal s'exerçant en sens opposé sur la portion  $U(a - x)$  de la face formée par les fibres qui passent par  $mm'$ . D'où, pour l'effort sur l'unité de longueur de cette face

$$G''g''_1U = \frac{P''}{I} \int_0^{v'} Uvdv;$$

ce qui donne pour le glissement sur cette face et par conséquent aussi sur la section transversale à la hauteur  $v$ , l'expression générale approximative

$$g''_1 = \frac{P''}{G''IU} \int_0^{v'} Uvdv;$$

ou  $\frac{P''}{G''IU}$  multiplié par le moment statique de l'aire  $mCm'$  par rapport à la ligne  $oo'$  (\*).

(\*) La somme  $\int G''g''_1 d\omega = \int G''g''_1 Udv$ , étendue à toute la section, des efforts tangentiels sur ses éléments, dans le sens  $v$ , doit être égal à l'effort transversal ex-

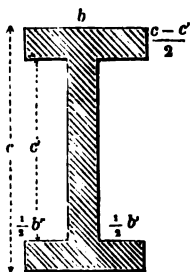
(Du n° 156).

Par exemple si la section est une ellipse dont les axes sont  $oo' = b$ ,  $CC' = c$ , on a

$$v' = \frac{c}{2}, U = b \sqrt{1 - \frac{4v'^2}{c^2}}, \int_{-v'}^{v'} U v' dv' = \frac{bc^2}{12} \left(1 - \frac{4v'^2}{c^2}\right)^{3/2}, I = \frac{\omega c^2}{16},$$

$$g''_1 = \frac{4}{3} \frac{P''}{G''\omega} \left[1 - \left(\frac{2v'}{c}\right)^2\right];$$

en sorte que le glissement central répondant à  $v = 0$  serait les  $4/3$  du glissement moyen  $\frac{P''}{G''\omega}$  tandis qu'il en serait les  $3/2$  pour le rectangle.



Si la section est le double T à semelles ou nervures égales considéré au § 13 de la note du n° 120 (p. 138) dont nous reproduisons ici la figure cotée, on a  $U = b - b'$  pour l'âme ou le rectangle même qui unit les semelles, et  $U = b$  pour celles-ci. D'où l'on tire facilement, vu que  $\omega = bc - b'c'$ ,  $I = \frac{bc^3 - b'c'^3}{12}$ , pour le glissement central que nous appellerons  $g''_0$  :

$$g''_0 = \frac{3}{2} \frac{P''}{G''\omega} \frac{bc - b'c'}{bc^3 - b'c'^3} \frac{bc^3 - b'c'^3}{b - b'};$$

térieur total  $P''$  dans ce même sens. Or l'expression qu'on vient de donner de  $g''_1$  satisfait à cette condition, car, en appelant  $v''$  la distance à  $oo'$  du point le plus bas  $C'$  de la section  $oCo'C'$ , l'égalité  $P'' = \frac{P''}{I} \int_{-v''}^{v''} dv' \int_b^{b'} Uv' dv'$  se vérifie si, en y remplaçant le moment d'inertie  $I$  par sa valeur générale, on l'écrit

$$\int_{-v''}^{v''} v' Uv' dv' = \int_{-v''}^{v''} dv' \int_b^{b'} Uv' dv'.$$

En effet, si l'on intègre par parties le premier membre, il se change en  $v' \int_{-v''}^{v''} Uv' dv' - \int_{-v''}^{v''} dv' \left( \int_{-v''}^{v''} Uv' dv' - \int_b^{b'} Uv' dv' \right)$ , qui n'est autre chose que le second membre, vu que l'intégrale  $\int_{-v''}^{v''} Uv' dv'$  est nulle en vertu de ce que  $oo'$  passe par le centre de gravité de la section.

(Du n° 156).

ou 1° Si  $\frac{b-b'}{b} = \frac{1}{4}$ ,  $\frac{c-c'}{c} = \frac{1}{4}$ ,  $\frac{b}{c} = \frac{1}{2}$ , comme à la figure :  
 $g''_0 = 2,22 \frac{P''}{G''\omega}$ , plus de deux fois le glissement moyen.

2° Si le rectangle qui unit les semelles est deux fois plus mince, ou si  $\frac{b-b'}{b} = \frac{1}{8}$ ,  $g''_0 = \frac{2145}{646} \frac{P''}{G''\omega} = 3,3204 \frac{P''}{G''\omega}$  ou de trois à quatre fois le glissement moyen.

3° Si les épaisseurs  $b'' = b - b'$ ,  $c'' = c - c'$  sont très-petites vis-à-vis de  $b$  et de  $c$ , la valeur suivante, qu'on obtient en effaçant d'abord  $bc - b'c' = \omega$  au numérateur et au dénominateur, puis substituant et négligeant les carrés de  $b''$ ,  $c''$  :

$$\text{Glissement central } g'' = \frac{P''}{G'' \cdot (b-b')c} \left( 1 + \frac{1}{6} \frac{b''}{c'' + \frac{1}{3}b''} \right),$$

ou  $g''_0 = \frac{P''}{G'' \cdot (b-b')c}$  si  $b''$  est sensiblement plus petit que  $c''$  en sorte qu'on puisse réduire la parenthèse à 1. L'effort central  $G''g''$  est alors le même que si les nervures n'existaient pas, et l'âme, ou la pièce verticale qui les lie, devrait être, comme dit bien M. Bresse, seule et abstraction faite des nervures, capable de supporter l'effort  $P''$  qui tend à opérer la séparation par glissement (1).

On voit que, pour les pièces étroites au milieu, telles que les rails de chemin de fer et les pièces à section en double T ou en

(1) On peut, même, appliquer ce mode d'évaluation des glissements à une section non symétrique par rapport à la ligne des fibres invariables. Si c'est, par exemple, un triangle isocèle dont  $c$  est la hauteur et  $b$  la base placée à une distance  $\frac{1}{3}c$  au-dessous de cette ligne, on a

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{bc}{2}, \quad I = \frac{bc^3}{36}, \quad U = \frac{2}{3}b - \frac{bv}{c}, \\ G''g''_1U &= \frac{P}{I} \int_v^{1/3c} Uvdv = \frac{P}{I} \frac{bc^3}{3} \left( \frac{4}{27} - \frac{v^3}{c^3} + \frac{v}{c^3} \right), \\ g''_1 &= \frac{4}{3} \frac{P''}{G''\omega} \left( 1 - \frac{3v}{2c} \right) \left( 1 + \frac{3v}{c} \right). \end{aligned}$$

Le glissement est nul sur la base comme au sommet; et on a le glissement central = les  $\frac{4}{3}$  du glissement moyen  $\frac{P''}{G''\omega}$ .



(Du n° 156).

tuyau carré, et, aussi, comme l'a fait M. Jouravski pour les pièces composées de plusieurs autres qui sont superposées et unies par des clefs (voyez sect. IV, ci-après), les glissements indépendants de ceux que la torsion produit peuvent avoir assez d'influence pour mériter d'être pris en considération dans l'évaluation de la résistance à la rupture, et aussi dans le calcul de la flèche de flexion, qui, pour être *complète*, doit (§ 4 de la note du n° 153) s'évaluer par l'expression

$$f = \frac{Pa^3}{3EI} + g_0 a,$$

c'est-à-dire par l'expression ordinaire augmentée du produit  $g_0 a$  de la longueur  $a$  de la pièce par le glissement central  $g_0$  ou l'inclinaison prise par la fibre moyenne sur le plan tangent à la section devenue courbe.

Mais les expressions obtenues par cette méthode pour les glissements et les efforts tangentiels ne sont pas exactes, et, quoique pouvant suffire dans un assez grand nombre de cas, elles diffèrent sensiblement de la réalité dans d'autres, principalement lorsque la section offre une certaine largeur perpendiculairement à la force  $P''$  qui la sollicite.

En effet, les seconds membres des équations ci-dessus,

$$G'' b g''_0 = \frac{P}{I} \int_0^{v'} U v dv, \quad G'' U g''_1 = \frac{P}{I} \int_0^{v'} U dx,$$

donnent bien dans tous les cas les efforts tangentiels *totaux* sur l'unité de longueur des faces horizontales intérieures qui passent, l'une par le centre de gravité, l'autre à une hauteur  $v$  au-dessus. Mais, vu l'inégalité possible des glissements, les efforts en question peuvent être très-inégalement répartis sur la largeur  $b$  ou  $U$  de ces faces, et il conviendrait d'en connaître au moins la plus grande valeur par unité superficielle de leurs éléments, afin de l'introduire dans l'équation qu'on pose pour assurer la stabilité de la cohésion. Ces efforts peuvent même être plus considérables sur certaines faces aussi longitudinales, mais obliques à  $u$  et à  $v$ , ou non perpendiculaires à la force sollicitante  $P''$ , car cette force, parallèle à  $v$ , peut très-bien développer et développer en effet sur la section  $\omega$ , comme

(Du n° 150).

on va voir, avec les glissements  $g''_1$  parallèles à cette coordonnée  $v$ , des glissements  $g'_1$  parallèles à l'autre coordonnée  $u$ ; et il en résulte, dans la direction de celle-ci, des efforts  $G'g'_1$  qui, bien qu'ayant une somme algébrique nulle, ont individuellement des grandeurs finies et se composent avec les  $G''g''_1$  pour produire des efforts résultants  $\sqrt{(G''g''_1)^2 + (G'g'_1)^2}$  plus grands que  $G''g''_1$ , aux divers points de la section transversale, et en même temps sur des sections longitudinales faisant avec les  $v$  des angles dont la tangente est  $\frac{G'g'_1}{G''g''_1}$ .

§ 46. *Valeurs exactes des mêmes glissements  $g'_1$ ,  $g''_1$  indépendants de la torsion. Identité des limites à imposer aux efforts tangentiels transversaux et aux efforts tangentiels longitudinaux permanents. Description exacte des formes courbes prises par les sections des prismes fléchis inégalement d'une extrémité à l'autre.* — Pour arriver à connaître ces divers efforts tangentiels ou ces divers glissements, il est nécessaire de poser l'équation d'équilibre de translation longitudinale, non plus d'une portion ou d'une tranche du solide répondant à une partie finie  $mCm'$  ou  $maa'n$  de la section, ni même d'une de ses zones infiniment peu hautes  $mm'p'p$  (2<sup>e</sup> figure p. 393, et figure p. 395), mais d'une seule fibre élémentaire, comme nous avons déjà dit qu'il fallait faire pour assurer l'équilibre de détail (§ 4 de la note du n° 80, p. 38), et comme nous avons fait au § 6 pour la torsion lorsqu'il a été question de déterminer les glissements et les gauchissement qu'elle engendre.

Soient  $u, v$  les coordonnées de cette fibre supposée prismatique rectangulaire ayant une largeur  $du$ , une hauteur  $dv$  et une longueur  $dx$ . Ses deux faces  $dudx$  de dessous et de dessus éprouveront des actions tangentielles longitudinales opposées

$$G''g''_1dudx, \quad - G''\left(g''_1 + \frac{dg''_1}{dv}dv\right)dudx,$$

et ses deux faces latérales  $dvdx$ , des actions

$$G'g'_1dvdx, \quad - G'\left(g'_1 + \frac{dg'_1}{du}du\right)dvdx.$$

(Du n° 150).

Si les deux bases  $dudv$  ne supportaient aucune traction ni pression dans le sens longitudinal, l'équilibre s'exprimerait en égalant à zéro la somme de ces quatre forces, ce qui reproduirait, en divisant par le volume  $dudvdx$ , l'équation  $G' \frac{dg'}{du} + G'' \frac{dg''}{dv} = 0$  obtenue dans le problème de la torsion (§ 39, p. 347). Mais, dans la flexion, les fibres éprouvent longitudinalement des dilatations et contractions variables, et nous avons démontré (note du n° 80, §§ 3 et 4) que si la variation est uniforme quand on chemine dans le sens d'une coordonnée transversale  $v$ , et si les faces latérales du prisme sont libres, les contractions ou dilatations transversales correspondantes se réglent de telle manière que les fibres n'exercent les unes sur les autres aucune action *normale*; en sorte que leurs tractions à travers les éléments d'une section  $\omega$  varient aussi linéairement avec  $v$  ou peuvent être exprimées par  $E(c + c'v).d\omega$  qu'on amène à la forme  $\frac{P''(a-x)}{I} v . d\omega$  en exprimant leur équilibre d'ensemble avec une force extérieure  $P''$  agissant parallèlement à  $v$  à une distance  $a-x$  (car il en résulte  $c = 0$ ,  $Ec'v^2d\omega = P''(a-x)$  si l'axe des  $u$  passe par le centre de gravité de  $\omega$  et est un de ses deux axes d'inertie).

Nous avons donc, sur les deux bases  $dudv$  de notre élément de fibre, et sans faire l'hypothèse fautive que les sections restent planes et que les fibres se comportent tout à fait comme isolées (mais en partant seulement de la supposition de cette variation uniforme des dilatations que la suite justifie), des actions :

$$-\frac{P''}{I} (a-x)v . dudv \quad \text{et} \quad \frac{P''}{I} (a-x-dx)v . dudu.$$

Faisant la somme de ces deux forces et des quatre précédentes, et égalant à zéro, on obtient, pour l'équilibre de l'élément  $dudvdx$  :

$$G' \frac{dg'_1}{du} + G'' \frac{dg''_1}{dv} = -\frac{P''}{I} v ;$$

équation indéfinie à satisfaire en tous les points d'une section transversale quelconque.

(Du n° 150).

Et, au contour de cette section, les glissements  $g'_1, g''_1$  doivent vérifier absolument la même condition *définie* que  $g', g''$  dans le cas de la torsion, c'est-à-dire (§ 39, p. 348) :

$$G''g'_1 du - G'g'_1 dv = 0;$$

car, écrite  $\frac{G''g'_1}{G'g'_1} = \frac{dv}{du}$ , elle exprime (§§ 8 et 39) que la surface latérale du prisme, soumise seulement à la pression de l'atmosphère qui agit normalement, ne supporte aucune action dans le sens des fibres ou arêtes, et que par conséquent la section  $\omega$  n'éprouve, aux points de son contour (voyez aussi p. 207), aucune action transversale normale à ce contour, dont l'élément a pour projections  $du, dv$  sur les axes coordonnés.

Mais, outre ces conditions statiques,  $g'_1$  et  $g''_1$  sont aussi astreints à satisfaire à une condition géométrique

$$\frac{dg''_1}{du} - \frac{dg'_1}{dv} = 2\gamma \frac{P'u}{EI},$$

analogue à  $\frac{dg''}{du} - \frac{dg'}{dv} = 2\theta$  qui résulte des expressions trouvées § 5,

$$g' = \frac{dz}{du} - \theta v, \quad g'' = \frac{dz}{dv} + \theta u \text{ pour les glissements dus à la torsion.}$$

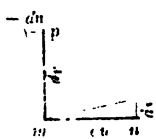
Elle exprime en effet que  $g'_1, g''_1$  (suivant la définition des glissements donnée aux §§ 3 et 4 de la note du n° 152) ne sont autre chose, en chaque point de  $\omega$ , que les projections d'un même très-petit angle sur les plans coordonnés des  $(x, u)$  et des  $(x, v)$ , savoir l'angle que fait la normale *actuelle* à l'élément  $d\omega$  avec la fibre modifiée qui y passe. Cette normale et cette fibre étaient primitivement coïncidentes et parallèles à la fibre moyenne dont la tangente, à son point de passage par la section, est prise ici pour axe des  $x$ ; elles se sont inclinées légèrement sur la direction de cet axe, et les glissements  $g'_1, g''_1$  se composent chacun (comme  $g', g''$  du § 5) de ce qui vient de l'inclinaison prise par la normale, et de ce qui vient de l'inclinaison prise par la fibre particulière sur cet axe ou cette fibre moyenne. Or, ainsi qu'à ce § 5, les quotes-parts de l'inclinaison de la normale sont  $\frac{dx}{du}$  pour  $g'_1, \frac{d}{dv}$

(Du n° 153).

pour  $g''_1$ , si  $x$  désigne (comme au § 3 de la note du n° 153) la petite ordonnée de la surface courbe affectée par la section ou la distance actuelle de son élément  $d\omega$  au plan des  $(u, v)$  normal à l'axe et mené par le point où il traverse  $\omega$ ; en sorte que ce qui vient de l'inclinaison prise par la normale sur l'axe donne  $\frac{dx}{dudv} - \frac{dx}{drdu}$  ou zéro dans la diffé-

rence  $\frac{dg''_1}{du} - \frac{dg'_1}{dv}$ . Les quotes-parts de l'inclinaison de la fibre sont,

en désignant par  $u, v$  les déplacements transversaux des points dans les sens  $u, v$ ,  $\frac{du}{dx}$  pour  $g'_1$ ,  $\frac{dv}{dx}$  pour  $g''_1$ , ce qui donne  $\frac{d}{dx} \frac{dv}{du} = \frac{d}{dx} \frac{du}{dv}$



pour  $\frac{dg''_1}{du}$ ,  $\frac{dg'_1}{dv}$ ; or ces deux quotes-parts sont

égales au signe près, car, d'après ce qu'on a vu aux §§ 3 et 4 de la note du n° 80 (p. 34-37),

les petites lignes telles que  $mn = du$ ,  $mp = dv$ ,

tracées primitivement à angle droit sur les sections d'un prisme fléchi dont les faces latérales sont libres, restent perpendiculaires les unes aux autres, et on voit par la figure que la conservation

de leur orthogonalité exige qu'on ait  $\frac{-du}{dv} = \frac{dv}{du}$ . On a donc

$\frac{dg''_1}{du} - \frac{dg'_1}{dv} = -2 \frac{d}{dx} \frac{du}{dv}$ . Or les déplacements dans le sens trans-

versal  $u$  sont dus aux contractions latérales  $\eta i = \eta \frac{P''(a-x)v}{EI}$  qui

accompagnent, comme nous savons, les dilatactions longitudinales

$i = \frac{P''(a-x)v}{EI}$ ; et leur grandeur, pour l'abscisse  $u$ , est ainsi

$$u = \int_0^u \eta i du = \eta \frac{P''(a-x)}{EI} uv. \text{ D'où } -2 \frac{d}{dx} \frac{du}{dv} = 2\eta \frac{P''u}{EI}.$$

Ces équations peuvent être changées, comme celles qui sont relatives à la torsion, et comme nous avons fait au *Mémoire sur la flexion* présenté le 20 novembre 1854, en équations aux différences partielles ayant pour inconnue le petit déplacement longitudinal  $x$  des points des sections transversales  $\omega$  qui s'inclinent et se courbent. Mais on peut, simplement, égalér  $g'_1$ ,  $g''_1$  à des expressions

(Du n° 150).

algébriques ou transcendantes affectées de coefficients indéterminés, par exemple, aux expressions entières en  $u, v$  :

$$g'_1 = g' + Au + A'v + Bu^2 + B'uv + B''v^2 + Cu^3 + \dots$$

$$g''_1 = g'' + A_1u + A'_1v + B_1u^2 + B'_1uv + B''_1v^2 + C_1u^3 + \dots$$

et astreindre, par substitution, les coefficients  $A, A', \dots, A_1, \dots$  à satisfaire à la première et à la troisième équations en  $g'_1, g''_1$ , ce qui en réduit le nombre. Substituant ensuite dans la deuxième  $G''g''_1 du - G'g'_1 dv = 0$ , on a, en  $u$  et  $v$ , l'équation différentielle générale du premier ordre des contours de sections de prismes dont la flexion donne lieu aux glissements  $g'_1, g''_1$  ainsi exprimés, et aussi aux dilatations variant uniformément ou linéairement comme on l'a supposé *a priori* (1).

L'intégration de cette équation en  $u$  et  $v$  des contours se fait sous forme finie quand on réduit les expressions entières de  $g'_1, g''_1$  aux termes du second degré (et il y en a forcément toujours de ce degré), auxquels on peut joindre un terme constant  $g''$  dans celle de  $g''_1$ ; car en faisant  $g'' + B''v^2 = B''_1v^2$  on rend homogène cette équation différentielle, et les variables se séparent par  $v = tu$ .

Il en résulte des sections en nombre infini, dont les contours, en appelant  $b$  leur plus grande largeur et  $c$  leur plus grande hauteur, sont représentés par l'équation

$$(1-K) \left(\frac{2u}{b}\right)^n + K \left(\frac{2u}{b}\right)^2 + \left(\frac{2v}{c}\right)^2 = 1,$$

où l'on a 
$$K = \frac{1 - 2(n+1) \frac{\eta G'}{E}}{n-2} \cdot \frac{b^2 G''}{c^2 G'}$$

et où  $n$  est un nombre positif qui doit être  $> \frac{1 - 2 \frac{\eta G'}{E}}{\frac{c^2 G''}{b^2 G'} + 2 \frac{\eta G'}{E}}$  pour

(1) Cette équation du premier ordre, toujours intégrale quand ce ne serait qu'en série, peut représenter toutes les courbes possibles, surtout si aux formes algébriques on joint les formes transcendentes de  $g'_1, g''_1$ . La supposition qu'il a fallu faire, ici comme au § 4 de la note du n° 80, sur le mode de variation des dilatations quand on passe d'une fibre à l'autre dans le sens transversal  $v$ , se trouve donc complètement justifiée; en sorte que notre théorie de la flexion et des glisse-

(Du n° 150).

que l'équation donne des courbes fermées<sup>(1)</sup>, mais, du reste, quelconque entier ou fractionnaire, pair ou impair (et pouvant, dans ce dernier cas, être traité comme pair en multipliant par 2 son numérateur et son dénominateur, de sorte que  $\left(\frac{2u}{b}\right)^n$  reste positif pour des valeurs négatives de  $u$ ).

Et l'on a, pour ces sections, des glissements dans les directions  $u, v$ , dont les valeurs, déterminées par une force transversale  $P''$  parallèle aux  $v$ , sont les suivantes :

$$g'_1 = \frac{-P''uv}{(n+1)G'I}, \quad g''_1 = \frac{P''c^2}{8(n+1)G''I} \left[ n \left( 1 - \frac{4v^2}{c^2} \right) - (n-2)K \cdot \frac{4u^2}{b^2} \right].$$

On peut facilement vérifier, par la différentiation, que ces expressions de  $g'_1, g''_1$ , satisfont, quelle que soit la quantité constante  $K$ , à  $G' \frac{dg'_1}{du} + G'' \frac{dg''_1}{dv} = -\frac{P''}{I} v$  pour toutes les valeurs de  $u, v$ , et à  $G''g''_1 - G'g'_1 \frac{dv}{du} = 0$  si  $\frac{dv}{du}$  est ce qu'on tire de l'équation  $(1-K) \left(\frac{2u}{b}\right)^n + \dots = 1$  des contours.

Et, au moyen de la valeur  $\frac{1}{n-2} \left[ 1 - 2(n+1) \frac{\eta G'}{E} \right] \frac{b^2 G''}{c^2 G'}$ , que

ments qui l'accompagnent n'a rien des procédés hybrides, *mi-analytiques et mi-empiriques, ne servant qu'à masquer les abords de la véritable science*, que signale M. Lamé (Leçons sur les coordonnées curvilignes, 1859, fin de la 49<sup>e</sup> leçon, p. 358); car elle démontre que pour toute espèce de section d'un prisme, on peut appliquer sur ses bases extrêmes des forces tant normales que tangentielles distribuées de telle manière que les dilatations et glissements suivent partout, et *rigoureusement*, la loi qu'expriment les formules. Le recours aux faits d'expériences se trouve ainsi réduit à leur demander *ultérieurement* les nombreuses preuves que le mode de distribution a peu d'influence et que les mêmes formules doivent ainsi s'observer *approximativement* lorsqu'on a, aux extrémités, des forces autrement distribuées, mais statiquement équivalentes (§ 6 de la même note du n° 80; voyez aussi l'Appendice ci-après).

(<sup>1</sup>) Cette limite inférieure que nous assignons à l'exposant  $n$  et qui varie, comme on voit, avec le rapport des dimensions  $b, c$  de la section, s'obtient en exprimant la condition que  $\frac{2v}{c}$  reste réel pour  $\frac{2u}{b} = 1 - \alpha$ ,  $\alpha$  étant une quantité infiniment petite; car, sans cela, le sommet  $v=0, u = \frac{b}{2}$  serait l'origine d'une branche indéfinie et non la limite d'une ligne fermée.

(Du n° 156).

nous assignons à cette quantité  $K$ , la troisième équation ou la condition purement géométrique se trouve aussi satisfaite.

On démontrerait facilement, en raisonnant comme à la sous-note du § 13, p. 262, que les équations  $G' \frac{dg'_1}{du} + G'' \frac{dg''_1}{dv} = -\frac{P''v}{I}$  partout, et  $G''g''_1 du - G'g'_1 dv = 0$  au contour, combinées avec  $\frac{dg'_1}{dx} = 0$ ,  $\frac{dg''_1}{dx} = 0$ , entraînent

$$\int G''g''_1 d\omega = P'', \quad \int G'g'_1 d\omega = 0,$$

égalités nécessaires d'ailleurs pour l'équilibre de translation, dans le sens  $v$  et dans le sens  $u$ , de la partie du prisme comprise entre la section  $\omega$  et l'extrémité où agit la force extérieure  $P''$ .

Le contour représenté par l'équation générale

$$(1-K) \left(\frac{2u}{b}\right)^n + K \left(\frac{2u}{b}\right)^2 + \left(\frac{2v}{c}\right)^2 = 1$$

est une ellipse  $\left(\frac{2u}{b}\right)^2 + \left(\frac{2v}{c}\right)^2 = 1$  lorsqu'on fait

$$K = 1; \quad \text{d'où} \quad n = \frac{2 \frac{c^2 G'}{b^2 G''} + 1 - 2 \frac{\eta G'}{E}}{\frac{c^2 G'}{b^2 G''} + 2 \frac{\eta G'}{E}};$$

et, en substituant et en faisant le moment d'inertie  $I = \frac{\omega c^2}{16}$ , on a :

$$g'_1 = -\frac{hb P''}{3c G'_\omega} \cdot \frac{1 + 2 \frac{\eta G'}{E} \cdot \frac{b^2 G''}{c^2 G'}}{1 + \frac{1}{3} \frac{b^2 G''}{c^2 G'}} \cdot \frac{huv}{bc},$$

$$g''_1 = \frac{h1''}{3G''_\omega} \left[ 1 - \frac{hv^2}{c^2} + \frac{1}{6} \frac{1 - 6 \frac{\eta G'}{E}}{c^2 G'} \cdot \frac{1}{\frac{b^2 G''}{c^2 G'} + \frac{1}{3}} \left( 1 - \frac{hv^2}{c^2} - 3 \frac{hu^2}{b^2} \right) \right]. \quad (1)$$

(1) *Mémoire sur la flexion*, art. 19. Pour déduire des formules de ce mémoire celles que nous donnons ici, il faut y remplacer :

$$\begin{array}{l} b, \quad c, \quad G, \quad G', \quad \eta \quad \eta', \quad y, \quad z, \quad p_{xy}, \quad p_{xz}, \quad -P, \quad \frac{m}{1-m}, \quad m, \quad u \\ \text{par} \quad \frac{1}{2}b, \quad \frac{1}{2}c, \quad G', \quad G'', \quad \frac{\eta G'}{E}, \quad \frac{\eta' G''}{E}, \quad u, \quad v, \quad G'g'_1, \quad G''g''_1, \quad P'', \quad n, \quad \frac{n}{n-1}, \quad x. \end{array}$$



(Du n° 156).

On voit bien, comme nous avons dit, que le glissement  $g'_1$  dans le sens de  $v$  dépend non-seulement de cette coordonnée, mais encore de  $u$ , ou qu'il varie, sur la section, pour les différents éléments de chaque petite zone  $mm'p'p$  (fig. p. 393 et 395) parallèle aux  $u$ . On voit aussi que la force  $P''$  parallèle aux  $v$  engendre, sur toutes les sections des prismes fléchis, excepté aux points  $u = 0$  ou  $v = 0$ , des glissements  $g'_1$  ou des efforts tangentiels  $G'g'_1$  parallèles aux  $u$ , et par conséquent perpendiculaires à cette force; en sorte qu'en tous les points qui ne sont pas sur les axes principaux de ces sections, l'effort tangentiel principal a une direction oblique.

Si la dimension  $c$  est très-grande par rapport à la dimension  $b$  de l'ellipse, ces deux expressions peuvent être réduites à celles-ci :

$$g'_1 = -\frac{hb}{3c} \frac{P''}{G'\omega} \frac{4uv}{bc}, \quad g''_1 = \frac{4}{3} \frac{P''}{G''\omega} \left(1 - \frac{4v^2}{c^2}\right),$$

dont la seconde nous a été fournie tout à l'heure par le calcul approximatif, qui ne révèle aucunement l'existence de la première.

Comme l'ellipse est une courbe identique dans les deux sens quant aux rapports mutuels des coordonnées de même direction pour les différents points, si une force  $P'$  agit parallèlement aux  $u$  en même temps que la force  $P''$  agit parallèlement aux  $v$ , on n'a, pour obtenir les glissements totaux  $g'_1, g''_1$ , dans chaque sens, qu'à ajouter, à l'expression exacte précédente de  $g'_1$ , une expression composée comme celle de  $g''_1$  avec  $P', G', c, b, \gamma, u, v$

au lieu de

$$P'', G'', b, c, \gamma, v, u,$$

en faisant, à l'expression du glissement  $g''_1$ , une addition réciproque.

Il en résultera dans le cas particulier  $b = c = 2r$  et en supposant une égale élasticité transversale :

Pour une section circulaire, de rayon  $r$ , et pour  $G' = G'' = G$ ,

$$g'_1 = \left(\frac{3}{2} - \frac{\gamma G}{E}\right) \frac{P'}{G\omega} \left(1 - \frac{u^2}{r^2}\right) - \left(\frac{1}{2} - 3 \frac{\gamma G}{E}\right) \frac{P'' v^2}{G\omega r^2} - \left(1 + 2 \frac{\gamma G}{E}\right) \frac{P'' uv}{G\omega r^2},$$

$$g''_1 = \left(\frac{3}{2} - \frac{\gamma G}{E}\right) \frac{P''}{G\omega} \left(1 - \frac{v^2}{r^2}\right) - \left(\frac{1}{2} - 3 \frac{\gamma G}{E}\right) \frac{P' u^2}{G\omega r^2} - \left(1 + 2 \frac{\gamma G}{E}\right) \frac{P' uv}{G\omega r^2};$$

(Du n° 153).

où l'on fera (§ 8 note n° 152)  $\eta \frac{G}{E} = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{10}$  si la matière a aussi la même élasticité dans le sens longitudinal.

D'où, pour les deux composantes  $g'$ ,  $g''$ , du glissement central appelé  $g$ , au § 2 de la note du n° 153, et qui répond à  $u = 0$ ,  $v = 0$ :

$$g' = \frac{7}{5} \frac{P'}{G\omega}, \quad g'' = \frac{7}{5} \frac{P''}{G\omega}, \quad \text{et } g = \frac{7}{5} \frac{\sqrt{P'^2 + P''^2}}{G\omega} = \frac{7}{5} \frac{P}{G\omega} = 1,4 \frac{P}{G\omega},$$

résultat qui a été cité par avance à ce §. Il diffère assez peu de  $g = \frac{4}{3} \frac{P}{G\omega} = 1,333 \frac{P}{G\omega}$  qui a été donné par les formules approximatives ci-dessus, et qui n'est exact que pour les ellipses hautes et étroites<sup>(1)</sup>.

Le seul contour pour lequel  $g''$ , ne dépende que de  $P''$  est la fausse ellipse qu'on obtient en faisant  $K = 0$  ou  $\eta = \frac{E}{2\gamma G'} - 1$ , et qui a ainsi pour équation

$$\left(\frac{2u}{b}\right)^{\frac{E}{2\gamma G'} - 1} + \left(\frac{2v}{c}\right)^2 = 1,$$

ou si  $\eta \frac{G'}{E} = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{10}$ :

$$\left(\frac{2u}{b}\right)^4 + \left(\frac{2v}{c}\right)^2 = 1.$$

C'est une courbe (2° épure de la sous-note ci-après) comprise entre l'ellipse ayant mêmes axes  $b$ ,  $c$  et le rectangle circonscrit.

On a, lorsque le contour est de cette forme, pour laquelle le

$$\text{moment d'inertie } I = \frac{1 - 2 \frac{\gamma G'}{E} \omega c^2}{3 - 2 \frac{\gamma G'}{E}}, \quad \text{ou } = \frac{\omega c^2}{14} \text{ si } \frac{\gamma G'}{E} = \frac{1}{10};$$

(1) On aurait, aussi pour  $u = 0$ ,  $g''_1 = \frac{3}{2} \frac{P''}{G''\omega} \left(1 - \frac{v^2}{r^2}\right)$  si  $\eta$  était nul, comme on a annoncé à la page 242 et dans sa sous-note. Mais on ne peut pas négliger ces coefficients  $\eta$  des contractions transversales qui influent sur les glissements par l'altération qu'ils produisent dans le parallélisme des fibres de tout prisme tordu autrement qu'en arc de cercle.

( Du n° 150 ).

$$g'_1 = -\frac{2\eta P'' uv}{G'' I} = -\frac{7 P'' uv}{5 G'' \omega c^2},$$

$$g''_1 = \frac{1-2\eta P'' c^2}{8 G'' I} \left(1 - \frac{4v^2}{c^2}\right) = \frac{7 P''}{5 G'' \omega} \left(1 - \frac{4r^2}{c^2}\right).$$

On a au centre et même sur tout le diamètre principal  $b$  :

$$v = 0, \quad g'_1 = 0, \quad g''_1 = g_0 = 1,4 \frac{P''}{G'' \omega},$$

comme quand la section est circulaire.

Mais la fausse ellipse n'offrant pas, comme l'ellipse, la même forme dans les deux sens, ces formules n'indiquent pas ce qu'il faudrait ajouter s'il y avait en même temps une force  $P'$  parallèle aux  $u$ .

Lorsque  $n = \frac{E}{\eta G'} - 1$ , ou  $n = 9$  si  $\eta = \frac{1}{4}$ ,  $G' = G'' = G$ ,  $\frac{G}{E} = \frac{2}{5}$ , on obtient, en traitant l'exposant  $n$  comme pair  $= \frac{18}{2}$ , des espèces de rectangles à angles arrondis et côtés concaves parallèlement à  $b$ , convexes parallèlement à  $c$  (3° épure ci-après). Et on a

$$g'_1 = -\eta \frac{P'' uv}{EI}, \quad g''_1 = \left(1 - \eta \frac{G'}{E}\right) \frac{P'' c^2}{8I} \left(1 - \frac{4v^2}{c^2}\right) + \frac{\eta P''}{8I} u^2.$$

Les glissements  $g'_1$  perpendiculaires à la force  $P''$  qui les engendrent ne sont nuls que lorsque l'exposant  $n$  est infini supposé pair. Alors on a  $K = -\frac{2\eta G' b^2 G''}{E c^2 G'}$ , et le contour se compose

de l'hyperbole  $-\frac{2\eta G' b^2 G''}{E c^2 G'} \left(\frac{2u}{b}\right)^2 + \left(\frac{2v}{c}\right)^2 = 1$ , ou  $-\left(\frac{2u}{c\sqrt{5}}\right)^2 + \left(\frac{2v}{c}\right)^2 = 1$  si  $\frac{\eta G'}{E} = \frac{1}{10}$

et les deux droites  $u = \pm \frac{b}{2}$  qui la coupent;

car l'équation des contours devient celle de l'hyperbole pour des valeurs  $\left(\frac{2u}{b}\right)^2 < 1$ , et celle des deux droites pour la valeur  $\left(\frac{2u}{b}\right)^2 = 1$ , qui rend  $v$  indéterminé. Ce contour mixtiligne dont deux côtés sont

(Du n° 150).

rectilignes et parallèles coïncide sensiblement avec la courbe continue qu'on obtient en faisant  $n = 100$  ou tout autre nombre pair très-grand. Or il se rapproche, aussi, beaucoup du rectangle  $b \times c$  dès que la largeur  $b$  descend à moitié de la hauteur  $c$  ou au-dessous. Aussi, la seconde des expressions des glissements relatives à cette section, qui sont

$$g'_1 = 0, \quad g''_1 = \frac{P'c^2}{8G''I} \left( 1 - \frac{4v^2}{c^2} + \frac{2\eta G'}{E} \frac{b^2 G''}{c^2 G'} \frac{hu^2}{b^2} \right)$$

où ce qui multiplie  $\frac{hu^2}{b^2}$  n'est que  $\frac{b^2}{5c^2} < \frac{1}{20}$  quand  $\frac{\eta G'}{E} = \frac{1}{10}$ ,  $\frac{b}{c} < \frac{1}{2}$ , donnent sensiblement, alors, la valeur  $\frac{P'c^2}{8I} \left( 1 - \frac{4v^2}{c^2} \right)$  que le calcul approximatif ci-dessus a fournie pour le rectangle.

Nous avons fait aussi le calcul exact des glissements  $g'_1, g''_1$ , pour une section rectangulaire  $b \times c$  avec un rapport quelconque de  $b$  à  $c$ . Leurs expressions sont en série transcendante, fournie par une intégration qui a un degré de complication de plus que celle qu'exige le calcul (§ 25) de  $g', g''$  provenant de la torsion. Aussi nous ne les rapporterons pas et nous nous bornerons à donner la valeur du glissement central qui est,  $\text{coth}$  désignant un cosinus hyperbolique  $\frac{e^+ + e^-}{2}$  et  $n$  un nombre entier :

$$g''_1 = \frac{3 P'}{2 G'' \omega} \left[ 1 - \frac{2 \eta G'}{3 E} \cdot \frac{b^2 G''}{c^2 G'} \left( 1 - \frac{12}{\pi^2} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2 \text{coth } n\pi \frac{c}{b} \sqrt{\frac{G'}{G''}}} \right) \right];$$

d'où, en supposant

$$= \frac{1}{\omega}, \quad \frac{G'}{E} = \frac{2}{3} :$$

si $\frac{c}{b} \sqrt{\frac{G'}{G''}} =$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$1$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$2$	$\frac{5}{3}$	$3$
$g''_1 = \frac{3 P'}{2 G'' \omega} \times$	0, 676	0, 849	0, 907	0, 940	0, 962	0, 971	0, 983	0, 989	0, 993

(Du n° 156).

en sorte que si  $G' = G''$ ,  $c > b$ , on peut prendre sensiblement

$$g = \frac{3}{2} \frac{P'}{G' \omega} \text{ trouvé ci-dessus (1).}$$

Déjà, à la note du n° 153, nous avons fait entrer les glissements étrangers à la torsion dans divers calculs de résistance permanente ou de stabilité de la cohésion sous l'action longtemps continuée des forces qui les engendrent, et en les envisageant comme des *glissements sur des sections*, ou des sections les unes devant les autres.

On demandera peut-être ce qu'il faudra faire en les considérant comme des glissements de fibres les unes sur les autres, et quels coefficients  $T''$ ,  $T'''$ , on adoptera alors, pour les bois par exemple, où la rupture par un glissement longitudinal s'opère sous des efforts

(1) Rien n'est plus propre à faire comprendre comment varient, sur les sections, les glissements qui accompagnent la flexion, qu'une représentation de la forme des surfaces légèrement courbes dans lesquelles ne changent ces sections transversales primitivement planes.

Vu la nouveauté de cette matière, et nonobstant la petitesse ordinaire de l'influence des quantités  $g''_1$ ,  $g''_2$ , nous croyons donc devoir mettre sous les yeux plusieurs épreuves de la topographie de ces surfaces, calculées exactement et décrites par courbes équidistantes et parallèles au plan normal à l'axe ou fibre moyenne des prismes fléchis.

Toutes celles qu'affectent les sections dont l'équation ci-dessus, de degré  $n$ , représente les contours, sont du troisième degré. Leur équation, en appelant  $x$  la distance, à ce plan normal, du point dont les coordonnées transversales sont  $u$  et  $v$ , est

$$x = \frac{P'c^3}{48G''I} \left[ \frac{n}{n+1} \frac{2v}{c} - \frac{1}{3} \left( \frac{n}{n+1} - \frac{\eta'G''}{E} \right) \left( \frac{2v}{c} \right)^3 - \left( \frac{1}{n+1} - \frac{\eta'G'}{E} \right) \frac{G''}{G'} \left( \frac{2u}{c} \right)^2 \frac{2v}{c} \right].$$

La valeur de l'ordonnée  $x$  pour  $u=0$ ,  $v=-\frac{c}{2}$ , que nous appellerons  $x_m$ , et qui est ordinairement la plus grande, est ainsi

$$x_m = \left( \frac{2n}{n+1} + \frac{\eta'G''}{E} \right) \frac{P'c^3}{48G''I}.$$

Les coupes ont été faites pour des valeurs  $x = 0, \pm 0,2x_m, \pm 0,4x_m, \pm 0,6x_m, \pm 0,8x_m$ , et  $x = \pm x_m$ .

La première épreuve ci-contre est relative à une section circulaire BC'B'C. On a prolongé beaucoup les onze coupes hors de son contour pour mieux faire comprendre la forme de cette surface qui, du reste, est la même lorsque ce contour est un des deux ovales concentriques au cercle auquel le plus petit est inscrit l'autre circonscrit, ou une autre quelconque des courbes que l'équation fournit pour une

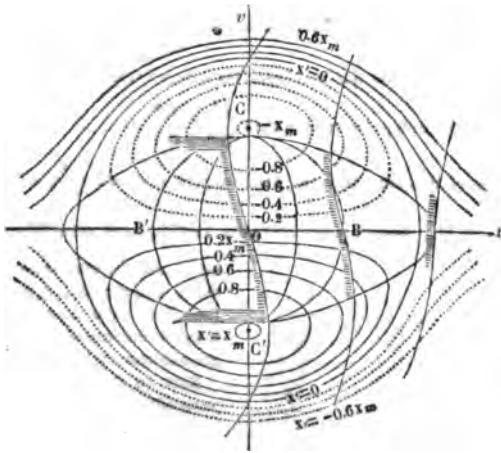
(Du n° 150).

bien moindres, pour même surface, que la rupture par un glissement transversal qui trancherait les fibres.

La réponse est facile.

Ces coefficients d'adhésion (ou de cohésion tangentielle) devront,

même valeur de la constante  $n$  ainsi que du diamètre  $c = CC'$  parallèle à  $v$ . Les trois

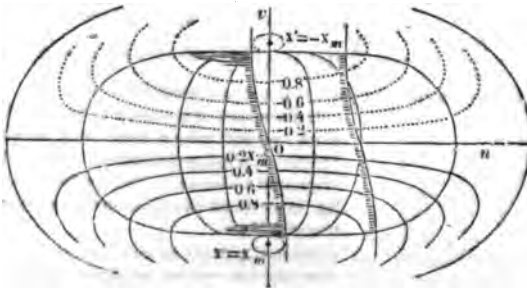


lignes hachées, en forme de doucne, sont des coupes par des plans parallèles à celui de flexion, rabattus sur le plan de la figure.

Cette première surface jouit de la propriété d'être coupée suivant des cercles par des plans peu obliques passant par la ligne  $BB'$  des fibres invariables. Le contour de la section reste donc plan et circulaire, bien que la surface que ce contour ren-

ferme soit creusée dans le demi-cercle supérieur  $BCB'$  et bombée dans le demi-cercle inférieur  $BCB'$ .

La deuxième épure est relative à tous les contours en fausse ellipse



$$\left(\frac{2n}{b}\right)^4 + \left(\frac{2v}{c}\right)^2 = 1, \text{ dont l'axe } c \text{ est le même, et dont trois ont été tracés, pour}$$

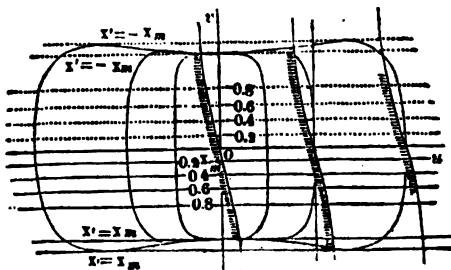
(Du n° 156).

quelle que soit l'inégalité de contecture, être absolument les mêmes soit qu'on envisage les glissements correspondants  $g'_1$ ,  $g''_1$ , comme ceux des fibres ou comme ceux des sections.

De quelque manière, en effet, que doive se déclarer la désagrégation quand elle aura lieu, il faut choisir les constantes des équations de cohésion de manière à en prévenir même les commencements et même le danger. Si les fibres d'une pièce en bois de sapin

lesquels  $b = \frac{4}{3}c$ ,  $c$  et  $2c$ . La courbe qui enveloppe les autres est une soupe de la même surface par le plan  $x = 0$ ; c'est une ellipse  $\frac{x^2}{2c^2} + \frac{7y^2}{6c^2} = 4$ .

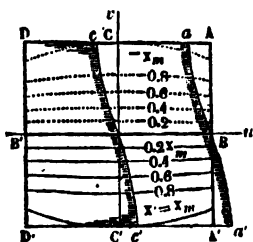
La troisième épure est relative aux contours pour lesquels on a  $\kappa = \frac{E}{\eta G'} - 4$ , c'est-à-dire  $\kappa = 9$  si  $\frac{\eta G'}{E} = \frac{1}{10}$ . Les coupes sont toutes rectilignes et parallèles,



et la surface est exactement cylindrique, ayant pour base la doucine ou parabole du troisième degré rabatus et hachée.

Mais vu l'altération du parallélisme des fibres, les glissements  $g'_1$  ne sont pas pour cela nuls, ni les glissements  $g''_1$  constants pour tous les éléments superficiels dont l'ordonnée  $v$  est la même; on le voit par les expres-

sions ci-dessus de  $g'_1$ ,  $g''_1$  relatives à ces contours, et qui ne se réduiraient à  $g'_1 = 0$ ,  $g''_1 = \frac{p'c^2}{8G''I} \left(1 - \frac{4v^2}{c^2}\right)$  que si  $\eta$  était = 0 ou s'il n'y avait pas de contractions latérales déterminées par les dilatations longitudinales.



Enfin la quatrième épure ci-contre est relative à une section carrée. Pour cette section, dont l'équation n'est pas comprise dans celles dont l'équation ci-dessus de degré  $\kappa$  donne le contour, les expressions des glissements sont en série transcendante.

On voit, par ces épreuves, que les coupes parallèles au plan qui est normal à la fibre centrale tournent vers l'axe des  $x$  tantôt leur concavité, tantôt leur convexité, et ne sont parallèles à cet axe que par exception.

(Du n° 156).

par exemple se séparent les unes des autres, elles cesseront de résister à la rupture sous les efforts de flexion ou autres auxquels elles étaient en même temps soumises, et en vue desquels les dimensions de la pièce avaient été calculées; en sorte que la fente longitudinale sera le commencement d'une rupture plus complète. La limite  $T''$ , des efforts transversaux parallèles à une coordonnée  $v$ , par unité superficielle des éléments des sections transversales, doit donc être prise la même que celle des efforts longitudinaux, toujours égaux et simultanés (§ 39, p. 346 et § 45), qui ont lieu sur des faces ou sections longitudinales perpendiculaires à  $v$ ; et si l'on adopte pour cette dernière limite le  $\frac{1}{3}$ , par exemple, de l'effort capable de faire séparer instantanément, par glissement longitudinal, les fibres de ces faces, soit 300 000<sup>t</sup> par mètre carré si cet effort est de 900 000, il faut adopter le même nombre  $T'' = 300\,000$  quand il s'agit de fixer la limite  $\frac{T''}{G''}$  des glissements envisagés comme étant

ceux des sections transversales; en supposant même que l'effort pour cisailier ou trancher immédiatement les fibres soit incomparablement plus grand, par mètre carré de section, que l'effort pour les séparer en les faisant glisser les unes sur les autres.

On peut, à ce sujet, se rappeler ce qui a été dit à plusieurs reprises (§§ 4 de la note du n° 3, 6 et 9 du n° 152, 2 de celle du n° 154, 43 de celle du n° 156), à savoir que les glissements, qui sont que des *changements des angles* de lignes matérielles du solide, ne compromettent la cohésion qu'en raison de ce qu'ils *changent les distances*, ou qu'ils produisent des écartements moléculaires dans des directions obliques aux faces ou aux lignes auxquelles ils sont relatifs. Ce sont ces écartements, en dernière analyse, que toutes les équations de cohésion données ci-dessus tiennent dans certaines limites, limites qui doivent bien être les mêmes, soit qu'on appelle glissement sur MA ou glissement sur MB la petite diminution éprouvée par l'angle droit AMB que ces deux droites ou ces deux faces faisaient entre elles. En sorte que tout ce que nous avons donné pour les glissements sur les sections transversales s'applique aux glissements sur les sections longitudinales ou sur les fibres, même quand on ne s'occupe que de la *rupture par torsion*,



(Du n° 156).

qui se manifeste, elle aussi, plus souvent par des disjonctions longitudinales de fibres que par des séparations transversales.

Nous ne ferons ainsi aucune distinction entre les *adhésions permanentes* <sup>(1)</sup> transversale et longitudinale, ou entre les limites des efforts tangentiels transversaux et les limites des efforts tangentiels longitudinaux, et nous leur assignerons les mêmes valeurs  $T$ , ou bien

$T'$ , sur une section transversale  $\omega$  dans le sens  $u$ , ainsi que sur une section longitudinale perpendiculaire aux  $u$  et dans le sens longitudinal ;

$T''$ , sur une section  $\omega$  dans le sens  $v$ , ainsi que sur une section longitudinale perpendiculaire aux  $v$ .

Seulement, quand il s'agira (§ 62 ci-après) de les déduire de l'expérience, en admettant, *à priori*, que ces limites sont une certaine fraction des efforts capables de produire immédiatement la rupture par glissement, on aura soin de prendre l'effort relatif à celui des deux sens rectangulaires où il est le moindre.

Les applications qui vont suivre de l'équation générale de cohésion du § 44 sont relatives à des cas où les glissements  $g'_1$ ,  $g''_1$ , seraient à peu près sans influence.

§ 47. *Applications diverses quand on peut négliger les glissements de cisaillement  $g'_1$ ,  $g''_1$ .* — *Cylindre à base circulaire fêché, tordu, et étendu ou comprimé.* — Supposons-en la matière d'égale contexture dans les divers sens *transversaux*; et appelons, comme au § 6 de la note du n° 154 (où, au lieu d'une torsion, nous avons un cisaillement),

$r$  le rayon inconnu de la section  $\omega$  de ce cylindre;

$r'$ ,  $r''$ ,  $r'''$  les valeurs qu'il faudrait donner à ce rayon si le cylindre

(1) On pourrait, comme M. Jouravski, et comme faisait déjà Young (Lecture XIII, vol. 1), appeler *adhésion* la résistance  $T$  à la rupture par glissement on réservant le nom de cohésion à la résistance  $R$  à la rupture par extension. On désigne déjà ainsi une force analogue dans la théorie du frottement ou la distinguant de celui-ci. Mais, en définitive, elle dérive de la cohésion qu'un corps offre dans les divers sens; nous l'appellerons donc souvent cohésion tangentielle.

(Du n° 156).

n'était sollicité respectivement qu'à la flexion par le moment  $M$  autour d'un diamètre de cette section, à la torsion par le moment  $M_1$ , autour de l'axe de figure, et à l'extension ou à la compression par la force longitudinale  $Q$ ;

Et toujours  $\eta_1 = \frac{R_0}{R'_0}$ .

Nous pouvons mettre de suite dans la formule ou équation de cohésion du § 44, à la place de  $g = \sqrt{g'^2 + g''^2}$ , sa valeur maximum (§ 40, p. 359)

$$g_m = \theta r = \frac{M_1 r}{2GI},$$

qui a lieu à tous les points de la circonférence. Et comme on néglige  $g'$ ,  $g''$ , et on a

$$\omega = \pi r^2, \quad i = \frac{\pi r^4}{4},$$

l'équation de cohésion peut s'écrire

$$\text{Lim. } \frac{1-\eta_1}{2R_0} \left( \frac{\pm Q}{\pi r^2} + \frac{4Mv}{\pi r^3} \right) + \sqrt{\left( \frac{1+\eta_1}{2R_0} \right)^2 \left( \frac{\pm Q}{\pi r^2} + \frac{4Mv}{\pi r^3} \right)^2 + \left( \frac{2M_1}{\pi r^3 T_0} \right)^2} = 1.$$

Si, successivement, l'on n'y conserve que l'une des trois données  $Q$ ,  $M$ ,  $M_1$ , en annulant les deux autres, et si l'on remarque que, lorsque  $Q = 0$ , il faut, pour avoir le maximum du premier membre, prendre

$$\left. \begin{array}{l} v = \text{sa plus grande valeur positive } r \\ v = \text{sa plus grande valeur négative } -r \end{array} \right\} \text{selon que } \begin{cases} \eta_1 < 1, R_0 < R'_0, \\ \eta_1 > 1, R_0 > R'_0, \end{cases}$$

cette équation donne comme cas particuliers

$$r''' = \frac{Q}{\pi R_0}, \quad r'''' = \eta_1 \frac{Q}{\pi R_0} = \frac{Q}{\pi R'_0} \text{ selon que } Q \text{ est une traction ou une pression;}$$

$$r'' = \frac{2M_1}{\pi T_0},$$

$$r^2 = \frac{4M}{\pi R_0}, \quad r^3 = \eta_1 \frac{4M}{\pi R_0} = \frac{4M}{\pi R'_0} \text{ selon que } \eta_1 < 1 \text{ ou } \eta_1 > 1;$$

ce qui sert à déterminer  $r'$ ,  $r''$ ,  $r'''$ , et, aussi, en tirant de ces éga-

(Du n° 150).

lités  $Q$ ,  $M_1$ ,  $M$  et substituant, à donner à l'équation une forme commode pour la discussion.

Mais considérons d'abord le cas où le cylindre n'est que fléchi et tordu, sauf à examiner ensuite ceux où, en même temps, son axe est étendu ou comprimé.

§ 48. *Même cylindre circulaire, seulement fléchi et tordu. Tableau des résultats pour diverses valeurs supposées au rapport  $\eta_1$  de  $R_0$  à  $R'_0$ .* — En faisant  $Q = 0$ , ou  $r'' = 0$ , l'équation devient, à la limite, ou pour la détermination des moindres valeurs qu'on puisse donner au rayon  $r$  de la pièce cylindrique

$$1 = \pm \frac{1 - \eta_1}{2R_0} \frac{4M}{\pi r^3} + \sqrt{\left(\frac{1 + \eta_1}{2R_0} \frac{4M}{\pi r^3}\right)^2 + \left(\frac{2M_1}{\pi r^3 T_0}\right)^2} \text{ selon que } \begin{matrix} \eta_1 < 1 \\ \eta_1 > 1 \end{matrix}$$

Si la matière est *isotrope* ou d'égale contexture en tous sens, ou si l'on a (§§ 8 et 9 de la note du n° 152)  $\eta_1 = 1/4$ ,  $T_0 = 4/5 R_0$ , on en tire l'expression très-simple

$$R_0 \frac{\pi r^3}{4} = \frac{3}{8} M + \frac{5}{8} \mathfrak{M} \text{ en faisant } \sqrt{M^2 + M_1^2} = \mathfrak{M}$$

ou en représentant par  $\mathfrak{M}$  le *moment résultant* de toutes les forces qui agissent à une extrémité du cylindre.

Mais quels que soient  $\eta_1$  et  $T_0$ , l'équation donne ces autres expressions simples en éliminant  $\frac{4M}{\pi R_0}$ ,  $\frac{2M_1}{\pi T_0}$ :

$$\text{si } \eta_1 < 1, r^3 = \frac{1 - \eta_1}{2} r'^3 + \sqrt{\left(\frac{1 + \eta_1}{2} r'^3\right)^2 + r''^6},$$

$$\text{si } \eta_1 > 1, r^3 = \frac{1 - \frac{1}{\eta_1}}{2} r'^3 + \sqrt{\left(\frac{1 + \frac{1}{\eta_1}}{2} r'^3\right)^2 + r''^6}.$$

Leur forme est semblable à celle des expressions du § 4 de la note du n° 154. Elles donnent en attribuant diverses valeurs à  $\eta_1$  ainsi qu'au rapport de  $r'$  à  $r''$  ou des rayons dus à la flexion seule et à la torsion seule, le tableau numérique qui suit :

(Du n° 156).

Si $\eta_1 =$	Pour $\frac{r'^3}{r^3} =$					et pour $\frac{r^3}{r'^3} =$							
	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{1}{1}$	0	
	ou a $\frac{r^3}{r'^3} =$					et $\frac{r^3}{r'^3} =$							
0 ou $\infty$	1	1,059	1,101	1,207	1,333	1,401	1,618	1,443	1,387	1,281	1,181	1,133	1
$\frac{1}{5}$ ou 5	1	1,050	1,086	1,181	1,294	1,360	1,566	1,397	1,344	1,244	1,153	1,111	1
$\frac{1}{4}$ ou 4	1	1,048	1,083	1,175	1,289	1,351	1,554	1,386	1,333	1,235	1,146	1,106	1
$\frac{1}{3}$ ou 3	1	1,045	1,079	1,167	1,276	1,337	1,535	1,368	1,317	1,221	1,136	1,097	1
$\frac{1}{2}$ ou 2	1	1,041	1,071	1,151	1,253	1,311	1,500	1,335	1,285	1,193	1,114	1,080	1
$\frac{2}{3}$ ou $\frac{3}{2}$	1	1,037	1,064	1,138	1,234	1,288	1,468	1,305	1,255	1,167	1,093	1,063	1
$\frac{3}{4}$ ou $\frac{4}{3}$	1	1,035	1,061	1,133	1,225	1,277	1,454	1,290	1,240	1,154	1,082	1,053	1
$\frac{1}{2}$ ou $\frac{2}{1}$	1	1,034	1,060	1,130	1,220	1,272	1,445	1,281	1,233	1,146	1,077	1,050	1
$\eta_1 = 1$	1	1,031	1,054	1,118	1,202	1,250	1,414	1,250	1,202	1,118	1,054	1,031	1

Ainsi que nous avons dit à la fin du § 43, il résulte de ce tableau que lorsqu'on regarde le rapport  $\eta_1$  des limites  $R_0, R'$  des tractions et pressions longitudinales permanentes non dangereuses comme n'allant pas au-delà de 1/2 ou 2/3, et, aussi, si l'on vient à le supposer > 1 et atteignant au moins 4/3, on obtient les résultats avec tout autant d'approximation qu'on peut désirer pour la pratique en faisant constamment

$$\eta_1 = 1/4$$

dans la formule de torsion et flexion simultanée, comme quand la contecture est la même en tous sens.

49. Suite. Même cylindre à base circulaire éprouvant, avec la flexion et la torsion, une extension longitudinale.

Supposons désormais  $\eta_1 < 1$  ou  $= 1$  au plus.

Rétablissons la force longitudinale Q, supposée d'abord agir pour étendre l'axe du cylindre.

Alors, comme elle entre avec le signe + dans la formule du § 44, le maximum a lieu pour  $\frac{v}{r} = + 1$ , et l'équation propre à fournir le rayon r, ou la plus petite valeur à lui donner pour assurer la stabilité de la cohésion, est

(Du n° 150).

$$\frac{1-\eta_1}{2R_c} \left( \frac{Q}{\pi r^2} + \frac{4M}{\pi r^3} \right) + \sqrt{\left( \frac{1+\eta_1}{2R_c} \right)^2 \left( \frac{Q}{\pi r^2} + \frac{4M}{\pi r^3} \right)^2 + \left( \frac{2M_1}{\pi r^2 T_c} \right)^2} = 1.$$

On l'en tirera par approximations successives après avoir mis pour  $Q$ ,  $M$ ,  $M_1$ ,  $\eta_1$  leurs valeurs numériques; et on le tirera plus simplement de la suivante, qui s'en déduit en transposant et élevant au carré pour chasser le radical, puis multipliant par  $(\pi r^2)^2$  :

$$\left( \pi r^2 - \frac{Q}{R_c} r - \frac{4M}{R_c} \right) \left( \pi r^2 + \eta_1 \frac{Q}{R_c} r + \eta_1 \frac{4M}{R_c} \right) = \left( \frac{2M_1}{T_c} \right)^2$$

et qui peut être écrite ainsi, en éliminant  $\frac{Q}{\pi R_c}$ ,  $\frac{4M}{\pi R_c}$ ,  $\frac{2M_1}{\pi T_c}$  comme on a dit au § précédent

$$(r^2 - r''^2 r - r^2) (r^2 + \eta_1 r''^2 r + \eta_1 r^2) = r''^2.$$

La résolution numérique de cette équation du 6<sup>e</sup> degré, par rapport à  $r$ , est facile et prompte, sans la développer, en se servant de la méthode de fausse position ou des différences proportionnelles, rappelée au commencement du § 34.

Et elle n'est que du second degré si c'est  $M$  ou  $M_1$  qu'on cherche, ou bien une force qui, multipliée par des bras de levier connus, produit ces deux moments, et dont il s'agit de limiter l'intensité de manière qu'elle ne mette pas en péril la cohésion d'une pièce donnée.

§ 50. *Suite. Même cylindre circulaire lorsque c'est une compression longitudinale qu'il éprouve en même temps que la torsion et la flexion.* — La force comprimante  $Q$  entre avec le signe — dans l'équation de cohésion du § 44 qui est, ainsi

$$\text{Max}^e \text{ de } \frac{1-\eta_1}{2R_c} \left( -\frac{Q}{\pi r^2} + \frac{4M v}{\pi r^3} \right) + \sqrt{\left( \frac{1+\eta_1}{2R_c} \right)^2 \left( -\frac{Q}{\pi r^2} + \frac{4M v}{\pi r^3} \right)^2 + \left( \frac{2M_1}{\pi r^2 T_c} \right)^2} = 1,$$

ou, en remplaçant  $\frac{Q}{\pi R_c}$  par sa valeur tirée alors (§ 47, p. 418) de

$$r''^2 = \eta_1 \frac{Q}{\pi R_c},$$

$$\text{Max. de } \frac{1-\eta_1}{2} \left( -\frac{r''^2}{\eta_1 r^2} + \frac{r^2 v}{r^3} \right) + \sqrt{\left( \frac{1+\eta_1}{2} \right)^2 \left( -\frac{r''^2}{\eta_1 r^2} + \frac{r^2 v}{r^3} \right)^2 + \frac{r''^2}{r^2}} = 1.$$

(Du n° 150).

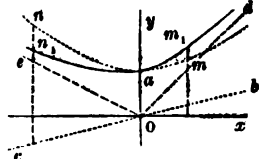
Le maximum doit être pris par rapport à la quantité variable  $\frac{v}{r}$  qui a pour limites  $+1$  et  $-1$ , ou, ce qui revient au même, par rapport à la parenthèse, qui a pour limites supérieure et inférieure

$$-\frac{r''/2}{\eta_1 r^3} + \frac{r''}{r^3} \text{ et } -\frac{r''/2}{\eta_1 r^3} - \frac{r''}{r^3}.$$

Or si l'on nomme  $x$  cette parenthèse  $-\frac{r''/2}{\eta_1 r^3} + \frac{r''}{r^3} \frac{v}{r}$ , et  $y$  la quantité dont on veut avoir le maximum, ou si l'on pose

$$y = \frac{1-\eta_1}{2} x + \sqrt{\left(\frac{1+\eta_1}{2}\right)^2 x^2 + \frac{r''/2}{r^3}},$$

le radical représente, en prenant  $x$  pour abscisse, l'ordonnée de la branche positive  $nam$  d'une hyperbole ayant pour axe imaginaire l'axe  $ox$  des  $x$ . En ajoutant, pour avoir  $y$ ,  $\frac{1-\eta_1}{2} x$  qui est l'ordonnée d'une droite  $cob$  passant par l'origine et ayant l'inclinaison  $\frac{1-\eta_1}{2}$  sur l'axe des  $x$ , la nouvelle branche de courbe obtenue  $n_1 am_1$  tourne nécessairement sa concavité du même côté que la première  $nam$  (1), ou *en haut*. La quantité  $y$  n'a donc pas de maximum absolu; ce qu'on pouvait voir aussi en la différentiant deux fois, car il en résulte



$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\left(\frac{1+\eta_1}{2}\right)^2 \frac{r''/2}{r^3}}{\left(\sqrt{\quad}\right)^3}$

(1) Cette deuxième courbe  $n_1 am_1$  est aussi une hyperbole qui a pour asymptotes les deux droites  $oa$ ,  $oc$ , dont les équations sont  $y = x$  et  $y = -\eta_1 x$ ; car  $\frac{dy}{dx}$  prend les valeurs  $1$  et  $-\eta_1$  quand on suppose  $x = \pm \infty$ . Son point le plus bas, répondant à  $\frac{dy}{dx} = 0$ , a lieu pour  $x = -\frac{1-\eta_1}{(1+\eta_1)} \frac{r''/2}{r^3}$  en sorte que le minimum de son ordonnée est  $y = \frac{2\sqrt{\eta_1}}{1+\eta_1}$ , ou  $y = 1/5$  quand  $\eta_1 = 1/4$ .

(Du n° 156).

quantité toujours positive puisque le radical de nos équations de cohésion doit toujours être pris positivement (§ 43, p. 379). La plus grande valeur cherchée de  $y$  répond donc nécessairement à l'une des deux limites de la variable, c'est-à-dire

$$\text{à } \frac{v}{r} = 1 \quad \text{ou à } \frac{v}{r} = -1.$$

Ce sera à la première limite,  $v = r$ , et le point dangereux sera du côté convexe ou des fibres dilatées par la flexion, si la force comprimante  $Q$  est faible, et ce sera à la deuxième,  $v = -r$ , ou ce point se trouvera du côté concave, si  $Q$  est très-considérable.

Pour savoir dans tous les cas laquelle des deux il faut prendre, on peut faire successivement  $\frac{v}{r} = +1$  et  $-1$  dans l'équation  $\frac{1-\eta_1}{2R_0} \left( \quad \right) + \sqrt{\quad} = 1$ ; et chercher par tâtonnement numérique les valeurs de  $r$  qui y satisfont en prenant la plus grande des deux; mais il est plus simple de faire cette recherche après avoir chassé le radical comme ci-dessus, ce qui donne

$$\begin{aligned} \text{pour } v = r & \left\{ \begin{array}{l} (R_0 \pi r^3 + Qr - 4M)(R_0 \pi r^3 - \eta_1 Qr + 4\eta_1 M) = \left( R_0 \frac{2M_1}{T_0} \right)^2 \\ \text{ou } \left( r^3 + \frac{4}{\eta_1} r''^2 r - r^3 \right) (r^3 - r''^2 r + \eta_1 r^3) = r''^6; \end{array} \right. \\ \text{pour } v = -r & \left\{ \begin{array}{l} (R_0 \pi r^3 + Qr + 4M)(R_0 \pi r^3 - \eta_1 Qr - 4\eta_1 M) = \left( R_0 \frac{2M_1}{T_0} \right)^2 \\ \text{ou } \left( r^3 + \frac{4}{\eta_1} r''^2 r + r^3 \right) (r^3 - r''^2 r - \eta_1 r^3) = r''^6. \end{array} \right. \end{aligned}$$

On adoptera la plus grande des deux valeurs du rayon cherché  $r$  qui satisferont l'une à la première, l'autre à la seconde de ces équations (que nous avons écrites chacune sous deux formes); et le point dangereux répondra ainsi à  $v = r$  ou à  $v = -r$  selon qu'elle aura été fournie par la première ou par la seconde.

Mais on peut déterminer *a priori* laquelle des deux fournira la plus grande valeur de  $r$ . D'abord, pour que les deux donnent la même valeur, il faut que l'équation  $1 = \frac{1-\eta_1}{2} x + \sqrt{\left(\frac{1+\eta_1}{2} x\right)^2 + \left(\frac{r''}{r}\right)^6}$ , ou que la suivante qu'on en déduit en chassant le radical,

(Du n° 136).

$$x^2 + \frac{1-\eta_1}{\eta_1} x + \frac{1}{\eta_1} \left(\frac{r''}{r}\right)^2 - \frac{1}{\eta_1} = 0,$$

soit également satisfaite par les deux valeurs limites  $x = -\frac{r''^2}{\eta_1 r^2} + \frac{r^2}{r^2}$  et  $x = -\frac{r''^2}{\eta_1 r^2} - \frac{r^2}{r^2}$ . Leur somme doit pour cela être égale au signe près au coefficient de  $x$  dans le second terme, et le produit des deux mêmes racines doit être égal au dernier terme, en sorte que

$$-2 \frac{r''^2}{\eta_1 r^2} = -\frac{1-\eta_1}{\eta_1}, \text{ et } \frac{r''^4}{\eta_1^2 r^4} - \left(\frac{r'}{r}\right)^2 = \frac{1}{\eta_1} \left(\frac{r''}{r}\right)^2 - \frac{1}{\eta_1}.$$

Éliminant l'inconnue  $r^2$  entre ces deux relations (dont la première aurait pu être aussi obtenue en égalant les premiers membres des deux équations  $(r^2 + \dots)(r^2 - \dots) = r''^2$  et réduisant), on obtient

$$2(1+\eta_1)^2 r''^2 = (1-\eta_1)^2 (\eta_1^2 r'^2 + \eta_1 r''^2).$$

Si  $r''$ , qui vient de la force de compression  $Q$ , devient plus grand que ce que donne cette expression, la contraction domine, et, s'il est plus faible, c'est la dilatation. Ainsi le point dangereux répond

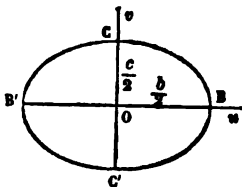
$$\left. \begin{array}{l} \text{à } v = +r \\ \text{ou à } v = -r \end{array} \right\} \text{selon que } r''^2 < \frac{(1-\eta_1)^2}{2(1+\eta_1)^2} (\eta_1^2 r'^2 + \eta_1 r''^2)$$

ou selon qu'on a (en remettant pour  $r'$ ,  $r''$ ,  $r'''$  leurs valeurs)

$$\left. \begin{array}{l} Q^2 < \\ \text{ou } > \end{array} \right\} 2\pi R_0 \frac{(1-\eta_1)^2}{\eta_1(1+\eta_1)^2} \left(4M^2 + \frac{1}{\eta_1} \frac{R_0^2}{T_0^2} M_1^2\right), \text{ ou } 2\pi \frac{(R'_0 - R_0)^2}{(R'_0 + R_0)^2} \left(4M^2 + \frac{R_0 R'_0}{T_0^2} M_1^2\right).$$

Il suffira de résoudre la première équation  $(R_0 \pi r^2 + Qr - 4M)$  ( ) = ... si l'on a  $r''^2$  ou  $Q^2 < \dots$ , et la seconde  $(R_0 \pi r^2 + Qr + 4M)$  ( ) = ... si l'on a  $r''^2$  ou  $Q^2 > \dots$  que les quantités qu'on vient d'écrire.

§ 51. Application au cylindre à base d'ellipse sollicité à plat. —



Nous dirons, pour abrégé, qu'un cylindre elliptique à la fois fléchi et tordu est sollicité à fléchir à plat ou de champ, selon que le plan du moment  $M$  qui fait fléchir est parallèle ou perpendiculaire au diamètre principal  $COC'$  aux extrémités duquel se



(Du n° 136).

trouvent les deux points dangereux par torsion seule. En sorte qu'en appelant les deux axes ou diamètres principaux de la base elliptique

$$b \text{ et } c \text{ si } \begin{cases} b > c & \text{quand la texture transversale est égale,} \\ \frac{b}{T'} > \frac{c}{T''} & \text{quand elle est inégale mais symétrique,} \end{cases}$$

la sollicitation à plat est parallèle à  $c$ , et la sollicitation de champ est parallèle à  $b$ .

Dans le premier cas, celui de la sollicitation à plat (et en supposant toujours négligeables  $g'_1$ ,  $g''_1$  ou les effets de cisaillement), il est facile de prouver que le point dangereux par torsion et flexion avec ou sans dilatation ou contraction longitudinale de l'axe du prisme, se confondra nécessairement avec l'un ou l'autre des deux points dangereux par torsion seule  $C$ ,  $C'$ , ou se trouvera à l'une ou à l'autre des deux extrémités  $v = \frac{c}{2}$ ,  $v = -\frac{c}{2}$  de l'axe  $c$  d'une section.

En effet on a, pour le mode de sollicitation supposé,  $M'' = 0$ , et l'équation de cohésion (§ 44) est, à la limite

$$\text{Max} = \frac{1-\eta_1}{2R_0} \left( \pm \frac{Q}{\omega} + \frac{M'v}{I} \right) + \sqrt{\left( \frac{1+\eta_1}{2R_0} \right)^2 \left( \pm \frac{Q}{\omega} + \frac{M'v}{I} \right)^2 + \frac{M^2_1}{4} \left( \frac{v^2}{T'^2_0 I^2} + \frac{u^2}{T''^2_0 I^2} \right)} = 1.$$

Si le second terme sous le radical était constant comme au § précédent, le premier membre  $\frac{1-\eta_1}{2R_0} \left( \pm \frac{Q}{\omega} + \frac{M'v}{I} \right) + \sqrt{\quad}$ , représentant, comme nous avons vu, l'ordonnée d'une courbe qui tourne sa concavité du côté supérieur ou positif, ne pourrait avoir sa plus grande valeur que pour l'une ou l'autre des deux valeurs extrêmes de l'abscisse  $\pm \frac{Q}{\omega} + \frac{M'v}{I}$ , c'est-à-dire pour  $v = +\frac{c}{2}$  ou  $-\frac{c}{2}$ . A plus forte raison cela aura lieu lorsque ce terme variable  $\frac{M^2_1}{4} \left( \frac{v^2}{T'^2_0 I^2} + \frac{u^2}{T''^2_0 I^2} \right)$ , qui mesure le danger de rupture par torsion seule, prendra partout ailleurs des valeurs inférieures aux deux valeurs égales qu'il a aux deux points  $v = \frac{c}{2}$ ,  $v = -\frac{c}{2}$ . C'est donc, pour le cylindre elliptique sollicité à plat, avec l'un ou l'autre de ces deux points que se confond le

Du n° 150.

point dangereux par flexion et torsion, ou le point de maximum de la quantité  $\frac{1-\eta_1}{2R_0} \left( \pm \frac{Q}{\omega} + \right) + \sqrt{\quad}$  du premier membre de l'équation destinée à nous faire connaître les plus petites dimensions transversales à attribuer au cylindre elliptique pour résister à des forces données.

C'est évidemment pour  $v = +\frac{c}{2}$  si  $Q$  agit par traction, ou est affecté du signe +. Et l'équation de cohésion, vu que

$$\omega = \frac{\pi bc}{4}, \quad I = \frac{\pi bc^3}{64},$$

est alors

$$R_0 \pi bc^3 = \frac{1-\eta_1}{2} (4Qc + 32M') + \sqrt{\left(\frac{1+\eta_1}{2}\right)^2 (4Qc + 32M')^2 + \left(R_0 \frac{16M_1}{T'_0}\right)^2}$$

ou

$$\left(\frac{R_0 \pi}{4} bc^2 - Qc - 8M'\right) \left(\frac{R_0 \pi}{4} bc^2 + \eta_1 Qc + 8\eta_1 M'\right) = \left(R_0 \frac{4M_1}{T'_0}\right)^2.$$

En accentuant comme aux deux §§ précédents les dimensions qu'on donnerait à la section du cylindre s'il était seulement ou étendu, ou fléchi, ou tordu, c'est-à-dire en faisant

$$b''c'' = \frac{4Q}{\pi R_0}, \quad b'c'^2 = \frac{32M'}{\pi R_0}, \quad b''c''^2 = \frac{16M_1}{T'_0},$$

on pourra encore écrire cette équation

$$(bc^2 - b''c''c - b'c'^2) (bc^2 + \eta_1 b''c''c + \eta_1 b'c'^2) = (b''c''^2)^2.$$

On en tirera l'une des deux dimensions  $b, c$  si l'on se donne l'autre, ou toutes deux si l'on se donne une relation entre elles, par exemple la grandeur de leur rapport  $\frac{b}{c}$  <sup>(1)</sup>.

(1) Si l'on s'imposait la condition que la superficie  $\omega$  de la section, ou le produit  $bc$ , fût un minimum, il faudrait prendre  $c$  le plus grand possible, ou  $c = b \frac{T'_0}{T''_0}$ , c'est-à-dire faire la section circulaire quand la contexture transversale est égale. Mais nous supposons ici qu'il y a d'autres raisons de la faire elliptique que l'inégalité de  $T'_0$  et  $T''_0$ .

(Du n° 150).

Mais si la force longitudinale  $Q$  agit par compression ou est affectée du signe  $-$ , il faut, comme au § précédent, choisir la plus grande des solutions fournies par deux équations, qui seront :

$$\text{si } v = +\frac{c}{2}, \left(\frac{R_0\pi}{4}bc^2 + Qc - 8M'\right) \left(\frac{R_0\pi}{4}bc^2 - \eta_1 Qc + 8\eta_1 M'\right) = \left(R_0 \frac{4M_1}{T^2}\right)^2,$$

$$\text{si } v = -\frac{c}{2}, \left(\frac{R_0\pi}{4}bc^2 + Qc + 8M'\right) \left(\frac{R_0\pi}{4}bc^2 - \eta_1 Qc - 8\eta_1 M'\right) = \left(R_0 \frac{4M_1}{T^2}\right)^2,$$

et qui, vu qu'alors

$$b''c'' = \eta_1 \frac{4Q}{\pi R_0} = \frac{4Q}{\pi R_0'} \left(\text{au lieu de } \frac{4Q}{\pi R_0}\right),$$

peuvent s'écrire

$$\left(bc^2 + \frac{4}{\eta_1} b''c''c - b'c'^2\right) (bc^2 - b''c''c + \eta_1 b'c'^2) = (b''c''^2)^2$$

$$\left(bc^2 + \frac{4}{\eta_1} b''c''c + b'c'^2\right) (bc^2 - b''c''c - \eta_1 b'c'^2) = (b''c''^2)^2.$$

On trouverait, comme pour les équations analogues du § précédent, qu'il faudra prendre la première ou la seconde, ou placer le point dangereux du côté convexe ou du côté concave de la pièce fléchie selon qu'on aura

$$\frac{c}{b} (b''c''^2) \underset{\text{ou}}{>} \frac{(1-\eta_1)^2}{2(1+\eta_1)^2} (\eta_1^2 b'^2 c'^4 + \eta_1 b''^2 c''^4),$$

ou, ce qui est la même chose,

$$\frac{c}{b} Q^2 \underset{\text{ou}}{>} 2\pi R_0 \frac{(1-\eta_1)^2}{\eta_1(1+\eta_1)^2} \left(4M^2 + \frac{4}{\eta_1} \frac{R_0^2}{T^2} M^2\right).$$

§ 52. *Même cylindre elliptique sollicité de champ.* — Pour ce mode de sollicitation à fléchir (§ précédent) le point dangereux, unique ou double, peut être en de tout autres endroits du contour elliptique que les extrémités  $C, C'$  de l'axe  $c$  où il serait s'il n'y avait que torsion, et l'extrémité  $B$  ou  $B'$  de l'axe  $b$  où il serait s'il n'y avait que flexion.

On peut toujours trouver ce point par tâtonnement numérique, comme nous avons dit § 44; mais, dans le cas simple qui nous occupe, on peut aussi l'obtenir analytiquement.

(Du n° 136).

En effet, alors, vu que  $M'$ , ou le moment de flexion parallèle aux  $v$ , est nul, et que

$$\omega = \frac{\pi bc}{4}, \quad I = \frac{\pi bc^3}{64}, \quad I' = \frac{\pi b^3 c}{64},$$

l'équation est

$$1 = \text{maximum de } \frac{1-\eta_1}{2R_0} \left( \pm \frac{4Q}{\pi bc} + \frac{32M''}{\pi b^3 c} \frac{2u}{b} \right) + \\ + \sqrt{\left( \frac{1+\eta_1}{2R_0} \right)^2 \left( \pm \frac{4Q}{\pi bc} + \frac{32M''}{\pi b^3 c} \frac{2u}{b} \right)^2 + \left( \frac{16M_1}{\pi bc^3} \right)^2 \left( \frac{4v^2}{c^4 T''^2} + \frac{4u^2}{b^4 T''^2} \right)}.$$

Comme c'est sur le contour elliptique que  $v^2$  est le plus grand possible pour chaque valeur de  $u$ , on peut remplacer  $\frac{4v^2}{c^4}$  par  $1 - \frac{4u^2}{b^4}$  qui est sa valeur tirée de l'équation de ce contour, ce qui donne, en multipliant les deux membres par  $R_0 \frac{\pi b^3 c}{4}$ ,

$$R_0 \frac{\pi b^3 c}{4} = \text{max. } \frac{1-\eta_1}{2} \left( \pm Qb + 8M'' \frac{2u}{b} \right) + \\ + \sqrt{\left( \frac{1+\eta_1}{2} \right)^2 \left( \pm Qb + 8M'' \frac{2u}{b} \right)^2 + \left( R_0 \frac{4M_1}{T''} \right)^2 \left[ \frac{b^2}{c^2} - \left( \frac{2u}{b} \right)^2 \left( \frac{b^2}{c^2} - \frac{T''^2}{T''^2} \right) \right]}.$$

La quantité du second membre, dont on veut avoir le maximum, croîtra indéfiniment avec  $u$  lorsque,  $Q$  étant ou nul ou affecté de signe +, le coefficient de  $\left( \frac{2u}{b} \right)^2$  sous le radical sera positif, ou lorsqu'on aura

$$\left( \frac{R_0 M_1}{2T'' M''} \right)^2 \left( \frac{b^2}{c^2} - \frac{T''^2}{T''^2} \right) < \left( \frac{1+\eta_1}{2} \right)^2;$$

alors le maximum aura lieu pour  $u = \frac{b}{2}$  qui est sa valeur limite; le point dangereux sera à l'extrémité B de l'axe ou diamètre principal  $b$ , comme s'il n'y avait que flexion, et l'équation pour déterminer les dimensions  $b, c$  se réduira à

$$R_0 \frac{\pi b^3 c}{4} = \frac{1-\eta_1}{2} (Qb + 8M'') + \sqrt{\left( \frac{1+\eta_1}{2} \right)^2 (Qb + 8M'')^2 + \left( R_0 \frac{4M_1}{T''} \right)^2},$$

$$\text{ou } \left( R_0 \frac{\pi b^3 c}{4} - Qb - 8M'' \right) \left( R_0 \frac{\pi b^3 c}{4} + \eta_1 Qb + 8\eta_1 M'' \right) = \left( R_0 \frac{4M_1}{T''} \right)^2.$$

( Du n° 150 ).

Quand ces conditions, 1°  $Q = 0$  ou affecté du signe +, 2°  $\left(\frac{R_0 M_1}{2T' M''}\right)^2 \left(\frac{b^2}{c^2} - \frac{T'^2}{T''^2}\right) < \left(\frac{1+\eta_1}{2}\right)^2$  ne sont pas remplies toutes deux, la solution peut répondre encore à  $\frac{2u}{b} = 1$ , mais aussi à  $\frac{2u}{b} = -1$ , et aussi à un maximum *absolu* qui existerait entre ces deux limites. Il convient de chercher d'abord ce maximum. On l'obtient en égalant la quantité du second membre à une indéterminée  $y$ , ce qui donne

$$\left(y \mp Qb - 8M'' \frac{2u}{b}\right) \left(y \pm \eta_1 Qb + 8\eta_1 M'' \frac{2u}{b}\right) = \left(R_0 \frac{4M_1}{T'}\right)^2 \left[ \frac{b^2}{c^2} - \left(\frac{2u}{b}\right)^2 \left(\frac{b^2}{c^2} - \frac{T'^2}{T''^2}\right) \right],$$

et en différentiant par rapport à la variable  $\frac{2u}{b}$ , puis faisant  $dy = 0$ ,  $y = R_0 \frac{\pi b^2 c}{4}$ . L'équation qui en provient donne

$$\frac{2u}{b} = \frac{1}{8M''} \frac{\frac{1-\eta_1}{2} R_0 \frac{\pi b^2 c}{4} \pm \eta_1 Qb}{\left(\frac{R_0 M_1}{2T' M''}\right)^2 \left(\frac{b^2}{c^2} - \frac{T'^2}{T''^2}\right) - 1};$$

et, en retranchant cette même équation de celle dont elle provient, après l'avoir multipliée par  $\frac{u}{b}$ , le carré de cette inconnue disparaît, et il reste

$$\left(R_0 \frac{\pi b^2 c}{4} \mp Qb\right) \left(R_0 \frac{\pi b^2 c}{4} \pm \eta_1 Qb\right) - \left(\frac{1-\eta_1}{2} R_0 \frac{\pi b^2 c}{4} \pm \eta_1 Qb\right) \cdot 8M'' \frac{2u}{b} = \left(R_0 \frac{4M_1 b}{T' c}\right)^2.$$

d'où il est facile d'éliminer  $\frac{2u}{b}$ , ce qui donne, en multipliant ensuite par  $\left(\frac{4}{\pi R_0} \frac{c}{b}\right)^2$

$$\begin{aligned} \left(bc \mp \frac{4Qc}{\pi R_0}\right) \left(bc \pm \eta_1 \frac{4Qc}{\pi R_0}\right) \left(\frac{R_0 M'}{2T' M''}\right)^2 \left(\frac{b^2}{c^2} - \frac{T'^2}{T''^2}\right) - \left(\frac{1+\eta_1}{2} bc\right)^2 = \\ = \left(\frac{16M_1}{\pi T'}\right)^2 \left[ \left(\frac{R_0 M_1}{2T' M''}\right)^2 \left(\frac{b^2}{c^2} - \frac{T'^2}{T''^2}\right) - \eta_1 \right]. \end{aligned}$$

On résoudra cette équation pour en tirer une des dimensions cherchées  $b$ ,  $c$  si l'on se donne l'autre; ou, si c'est  $\frac{b}{c}$  qu'on se donne, on tirera  $bc^2$  qui n'y est engagé qu'au second degré. Mais il peut

(Du n° 150).

arriver : 1° qu'elle ne fournisse que des valeurs imaginaires; c'est qu'il n'y aura alors ni maximum ni minimum absolu de  $y$ ; 2° qu'elle donne des valeurs réelles mais qui substituées dans l'expression ci-dessus de  $\frac{2u}{b}$  le rendent  $> 1$  ou  $< -1$ ; cela indiquera que le maximum ou le minimum absolu sort des limites de la section; 3° que ces mêmes valeurs réelles trouvées soient plus petites que celles qui seraient fournies par l'équation non différenciée  $R_0 \frac{\pi b^2 c}{4} = \frac{1-\eta_1}{2} (\dots) + \sqrt{\dots}$  en y faisant  $\frac{2u}{b} = +1$  ou  $\frac{2u}{b} = -1$ ; cela prouvera qu'elles ne répondent qu'à un minimum de la quantité dont on veut avoir le maximum. Dans ces trois cas, ce sera à l'une ou à l'autre des deux limites de  $\frac{2u}{b}$  que se trouvera le point dangereux, et l'on prendra pour  $b$  ou  $c$ , ou pour  $b^2 c$  ou  $bc^2$ , la plus forte des deux valeurs obtenues en faisant successivement  $\frac{2u}{b} = +1$  et  $\frac{2u}{b} = -1$ , c'est-à-dire en résolvant les deux équations

$$R_0 \frac{\pi b^2 c}{4} = \frac{1-\eta_1}{2} (\pm Qb \pm 8M'') + \sqrt{\left(\frac{1+\eta_1}{2}\right)^2 (\pm Qb \pm 8M'')^2 + \left(R_0 \frac{4M_1}{T''}\right)^2},$$

ou, ce qui revient au même, les deux équations plus simples

$$\left(R_0 \frac{\pi b^2 c}{4} \mp Qb \mp 8M''\right) \left(R_0 \frac{\pi b^2 c}{4} \pm \eta_1 Qb \pm 8\eta_1 M''\right) = \left(R_0 \frac{4M_1}{T''}\right)^2,$$

les termes en  $M''$  étant successivement pris avec leurs signes supérieurs et leurs signes inférieurs, qui sont indépendants des signes des termes en  $Q$ .

Ainsi, lorsque  $Q = 0$ , l'équation précédente de maximum ou minimum absolu, si l'on fait comme au § précédent

$$\frac{32M''}{\pi R_0} = b^2 c', \quad \frac{16M_1}{\pi T''} = b' c'^2, \quad \text{d'où} \quad \frac{R_0 M_1}{2T'' M''} = \frac{b' c'^2}{b^2 c'},$$

donne

(Du n° 156).

$$\frac{bc^3}{b''c''^3} = \sqrt{\frac{\left(\frac{b''c''^3}{b^3c^3}\right)^2 \left(\frac{b^3 - T'^2}{c^3 - T''^2}\right) - \eta_1}{\left(\frac{b''c''^3}{b^3c^3}\right)^2 \left(\frac{b^3 - T'^2}{c^3 - T''^2}\right) - \left(\frac{1+\eta_1}{2}\right)^2}}, \text{ et } \frac{2u}{b} = \frac{\frac{1-\eta_1}{2} \frac{b^3c}{b^3c'}}{\left(\frac{b''c''^3}{b^3c^3}\right)^2 \left(\frac{b^3 - T'^2}{c^3 - T''^2}\right) - \eta_1}$$

Quand le dénominateur sous le radical est négatif, il ny a pas de maximum absolu, d'après la condition .....  $< \left(\frac{1+\eta_1}{2}\right)^2$  posée tout à l'heure (p. 425, 426). Et si le numérateur est négatif en même temps, la valeur de  $bc^3$ , qui est réelle, répond à un minimum.

Solent, par exemple

$$\frac{b}{c} = \frac{b'}{c'} = \frac{b''}{c''} = 2, \eta_1 = 1/4, T' = T'' = T., \text{ et toujours } Q = 0;$$

ces deux formules deviennent

$$\left(\frac{c}{c''}\right)^3 = \sqrt{\frac{\left(\frac{c''}{c'}\right)^6 - \frac{1}{8}}{\left(\frac{c''}{c'}\right)^6 - \frac{25}{48}}}; \quad \frac{2u}{b} = \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{c}{c''}\right)^3 \left(\frac{c''}{c'}\right)^2}{\left(\frac{c''}{c'}\right)^6 - \frac{1}{8}};$$

en sorte que :

Pour $\left(\frac{c''}{c'}\right)^3 =$	0	$\frac{1}{0,25}$	0,436	$\frac{1}{0,500}$	$\sqrt{\frac{1}{3}} = 0,577$	$\sqrt{\frac{1}{2}} = 0,707$	$\sqrt{\frac{2}{3}} = 0,816$	$\sqrt{\frac{3}{4}} = 0,866$	0,956	1	$\sqrt{2} = 1,414$	2	4	$\infty$
ou pour $\left(\frac{c'}{c''}\right)^3 =$	$\infty$	4	2,295	2	1,732	1,414	1,386	1,155	1,046	1	0,707	0,500	0,250	0

On a, pour le maximum ou le minimum absolu :

$\left(\frac{c}{c''}\right)^3 =$	0,80	0,768	0,658	0,535	0	$2\sqrt{-2}$	$\infty$	2,345	1,215	1,179	1,061	1,027	1,006	1
d'où $\left(\frac{c'}{c''}\right)^3 =$	0	0,192	0,287	0,277	0	$2\sqrt{-1}$	$\infty$	2,031	1,162	1,179	1,501	2,053	4,024	$\infty$
répondant à $\frac{2u}{b} =$	0	-0,354	-1	-1,664	$\infty$	$6\sqrt{-1}$	$\infty$	2,437	1	0,882	0,450	0,280	0,128	0.

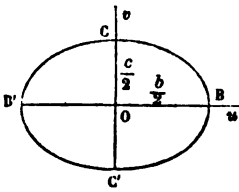
Mais, à la limite  $\frac{2u}{b} = 1$  et pour les mêmes valeurs de  $\left(\frac{c''}{c'}\right)^3$ , on a :

$\left(\frac{c''}{c'}\right)^3 =$	$\infty$	4,049	2,379	2,096	1,842	1,546	1,320	1,311	1,215	1,175	0,932	0,777	0,618	0,5
et $\left(\frac{c'}{c''}\right)^3 =$	1	1,012	1,037	1,048	1,063	1,093	1,097	1,135	1,162	1,175	1,319	1,554	2,470	$\infty$

(Du n° 156).

Jusqu'à  $\left(\frac{c''}{c'}\right)^3 = \sqrt{\frac{1}{3}} = 0,5773$ , les deux termes de la fraction sous le radical de l'expression de  $\left(\frac{c}{c''}\right)^3$  sont négatifs; il en résulte des valeurs réelles de  $\left(\frac{c}{c''}\right)^3$ , mais qui donnent pour  $y$  un *minimum* et non un *maximum*, comme on voit par l'avant-dernière ligne, montrant que les valeurs de  $\left(\frac{c}{c''}\right)^3$  qui répondent à la limite  $\frac{2u}{b} = 1$  sont bien plus grandes. Ensuite, jusqu'à  $\left(\frac{c''}{c'}\right)^3 = \sqrt{\frac{25}{48}} = 0,7217$ , les valeurs de  $\left(\frac{c}{c''}\right)^3$  sont imaginaires et il n'y a ni *maximum* ni *minimum* absolu. Elles sont et restent ensuite réelles, et on a un *maximum* absolu; mais, jusqu'à  $\left(\frac{c''}{c'}\right)^3 = 0,956$ , il répond à des valeurs de  $\frac{2u}{b}$  supérieures à 1, ou à des points *hors de la section*.

Il en résulte que jusqu'à la valeur 0,9562 de la quantité donnée



$\left(\frac{c''}{c'}\right)^3$ , le point dangereux répond à

$\frac{2u}{b} = 1$  ou à l'extrémité B du grand

axe d'une section, comme quand il n'y a que flexion; et les vraies solutions, ou les valeurs à adopter pour  $c^2$ , sont

fournies par les deux dernières lignes du tableau.

Ensuite, comme on le voit par les valeurs décroissantes de  $\frac{2u}{b}$  répondant au *maximum* absolu, le point dangereux parcourt successivement toute l'étendue du contour des quarts d'ellipse BC, BC' de part et d'autre de cette extrémité B de l'axe  $b$ , et il n'arrive aux extrémités C, C' de l'axe  $c$  que pour  $\left(\frac{c''}{c'}\right)^3 = \infty$ , c'est-à-dire pour  $c' = 0$  ou lorsqu'il y a torsion sans flexion. C'est ce qu'on voit encore par les deux dernières lignes, qui donnent, depuis  $\left(\frac{c''}{c'}\right)^3 = 0,956$  (et même déjà depuis  $\left(\frac{c''}{c'}\right)^3 = 0,722$  pour des points



(Du n° 150).

hors de la section), des nombres inférieurs à ceux des 3<sup>e</sup> et 4<sup>e</sup> lignes de chiffres; en sorte que c'est bien, depuis 0,956, le maximum absolu qu'il faut prendre, et non pas ce qui a lieu à la limite positive  $u = \frac{b}{2}$  des abscisses.

Nous n'avons pas calculé les valeurs de  $\left(\frac{c}{c''}\right)^3$  répondant à la limite négative  $\frac{2u}{b} = -1$  ou à l'extrémité B', parce que, lorsque la force longitudinale Q est ou réelle ou affectée du signe +, elles sont toujours moindres que celles qui répondent à  $\frac{2u}{b} = +1$ .

Nous ne considérerons pas ici le cas plus compliqué du cylindre elliptique sollicité à la flexion *obliquement* aux axes de la base, ou ni à plat ni de champ. Comme, dans ce cas général de flexion et torsion, la parenthèse du terme hors du radical et du premier terme sous le radical contient trois termes et par conséquent les deux coordonnées  $u, v$ , le point de maximum absolu ne peut s'obtenir analytiquement qu'en éliminant ces deux inconnues entre deux équations du second degré, et il vaut mieux recourir à un tâtonnement numérique en calculant, pour un assez grand nombre de points d'un quart de contour elliptique (ou d'un demi-contour si Q est considérable et entre avec le signe —), du membre  $\frac{1-\eta_1}{2}(\dots) + \sqrt{\dots}$  de l'équation de cohésion, et prenant la plus grande des valeurs de la dimension  $b$  ou  $c$  qu'on en tire.

§ 53. *Prisme rectangulaire à la fois fléchi et tordu. Flexions à plat et de champ.* — Soient  $b, c$  ses deux côtés, et appelons constamment  $b$  le plus grand quand la contexture transversale est égale, et, lorsqu'elle est inégale, celui des deux au milieu duquel se trouve le point dangereux par torsion seule, en sorte qu'on a avec les notations des §§ 39 et 40

$$\frac{G'}{T'} g'_m > \frac{G''}{T''} g''_m, \text{ ou } \frac{b}{T'} > \left(\frac{\gamma_1}{\gamma} \frac{b^2 G''}{c^2 G'}\right) \frac{c}{T''};$$

condition qui serait toujours satisfaite pour  $\frac{b\sqrt{G''}}{c\sqrt{G'}} > 1$ , d'après la

(Du n° 156).

table de la p. 362, si l'on avait  $\frac{T'_0}{T''_0} = \text{ou} < \frac{\sqrt{G'}}{\sqrt{G''}}$ .

1° Quand le plan de sollicitation à fléchir est parallèle à la médiane  $c$  aux extrémités de laquelle sont les points dangereux par torsion seule, le prisme se trouve dans le cas du cylindre elliptique sollicité à plat (§ 51); le point dangereux par flexion et torsion avec ou sans extension ou compression longitudinale par une force  $Q$  se confond avec l'un ou l'autre de ceux-ci, dont les coordonnées sont  $u = 0$ ,  $v = \pm \frac{c}{2}$ , savoir avec le point pour lequel  $v = \frac{c}{2}$  ou situé du côté des fibres que la flexion dilate, si la force longitudinale  $Q$  augmente cette dilatation ou la diminue peu, et avec le point  $v = -\frac{c}{2}$  ou situé du côté des fibres comprimées si la force  $Q$ , supposée comprimante, augmente *considérablement* cette compression longitudinale des fibres qui engendre, comme nous savons, les écartements moléculaires transversaux dangereux.

L'équation de cohésion, ou l'équation propre à fournir les plus petites valeurs à donner à  $b$  et  $c$  est, vu que  $\omega = bc$ ,  $I = \frac{bc^3}{12}$ , et que  $G'g'_m = \frac{\gamma}{2\mu} \frac{M_1}{bc^2}$  (§§ 39 et 40, p. 361), et en multipliant par  $R_0 bc^2$

$$R_0 bc^2 = \text{Max.} \frac{1-\eta_1}{2} \left( \pm Qc + 6M' \frac{2v}{c} \right) + \sqrt{\left( \frac{1+\eta_1}{2} \right)^2 \left( \pm Qc + 6M' \frac{2v}{c} \right)^2 + \left( \frac{\gamma}{2\mu} \frac{R_0 M_1}{T'_0} \right)^2}$$

où l'on peut, comme nous avons vu § 40, p. 362, faire empiriquement et approximativement

$$\frac{\gamma}{2\mu} = \frac{3}{5} \left( 5 + 3 \frac{c\sqrt{G'}}{b\sqrt{G''}} \right).$$

Lorsque la force  $Q$  est nulle ou agit par extension, il faut, disons-nous, faire, pour avoir le maximum à égaler à  $R_0 bc^2$  :

$$\frac{2v}{c} = 1.$$

Mais lorsqu'elle agit par compression, il faut faire successive-

(Du n° 156).

ment  $\frac{2v}{c} = 1$  et  $\frac{2v}{c} = -1$ , ou résoudre par rapport à  $b$ ,  $c$  ou  $bc^2$ , les deux équations suivantes :

$$(R_0 bc^2 + Qc - 6M')(R_0 bc^2 - \eta Qc + 6\eta M') = \left( \frac{\gamma}{2\mu} \frac{R_0}{T_0} M_1 \right)^2,$$

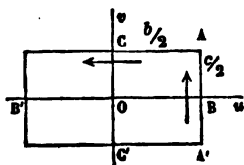
$$(R_0 bc^2 + Qc + 6M')(R_0 bc^2 - \eta Qc - 6\eta M') = \left( \frac{\gamma}{2\mu} \frac{R_0}{T_0} M_1 \right)^2,$$

en adoptant la plus forte des deux solutions.

Il est facile de voir, comme précédemment (fin des §§ 50 et 51), qu'on pourra se contenter de résoudre la première ou la seconde, ou qu'il faudra prendre

$$\text{ou } \left. \begin{array}{l} \frac{2v}{c} = 1 \\ \frac{2v}{c} = -1 \end{array} \right\} \text{selon que } \frac{c}{b} Q^3 \text{ ou } > R_0 \frac{(1-\eta_1)^2}{\eta_1(1+\eta_1)^2} \left[ 18M'^2 + \frac{1}{2\eta_1} \left( \frac{\gamma}{2\mu} \frac{R_0}{T_0} M_1 \right)^2 \right].$$

2° Quand le plan de sollicitation à fléchir est dirigé suivant



BB' ou parallèle aux côtés  $b$ , et par conséquent perpendiculaire à la ligne CC' des points dangereux par torsion seule, le prisme est dans le cas du cylindre elliptique fléchi de *champ*, et le point dangereux par flexion et torsion, etc., peut

occuper diverses positions sur la section  $\omega$ . Alors, vu qu'on a

$$M' = 0, \quad I' = \frac{b^3 c}{12},$$

l'équation propre à fournir les dimensions  $b$ ,  $c$ , est

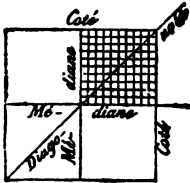
$$1 = \max^m \cdot \frac{1-\eta_1}{2R_0} \left( \pm \frac{Q}{bc} + \frac{6M''}{b^3 c} \cdot \frac{2u}{b} \right) + \sqrt{\left( \frac{1+\eta_1}{2R_0} \right)^2 \left( \pm \frac{Q}{bc} + \frac{6M''}{b^3 c} \cdot \frac{2u}{b} \right)^2 + \left( \frac{G'g'}{T_0} \right)^2 + \left( \frac{G''g''}{T_0} \right)^2}.$$

Il faut trouver, sur la section, ce point, pour lequel on a le maximum du second membre.

Il sera nécessairement au nombre des points qui, pour chaque valeur de  $u$ , donnent la plus grande valeur à l'ensemble

(Du n° 150).

$\left(\frac{G'g'}{T'c}\right)^2 + \left(\frac{G''g''}{T''c}\right)^2$  des deux termes contenant les glissements; car



ils sont positifs, comme le radical et comme le second membre entier (§ 43).

Or le calcul fait avec les formules en série transcendante (§ 25) du cas d'égale contecture transversale où ces deux termes se réduisent ensemble à  $\frac{G^2}{T^2} (g^2 + g'^2)$ , nous a donné, pour

121 points d'un *quart de section* (1) comme celui qui est quadrillé à la figure ci-contre :

Valeurs de  $\frac{2g}{\delta b} = \frac{2}{\delta b} \sqrt{g'^2 + g''^2}$  pour  $b = c$  (prisme à base carrée).

Pour	$\frac{2u}{b} = 0$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	= 1,0
	Demi-côté $b$ .										
	Angle.										
$\frac{2v}{c} = 1$	1,351	1,342	1,317	1,273	1,211	1,125	1,014	0,871	0,684	0,430	0
= 0,9	1,159	1,151	1,123	1,081	1,021	0,939	0,834	0,702	0,546	0,389	0,430
= 0,8	0,984	0,977	0,952	0,914	0,862	0,795	0,713	0,625	0,552	0,548	0,684
= 0,7	0,840	0,818	0,798	0,770	0,732	0,688	0,644	0,615	0,625	0,702	0,871
= 0,6	0,678	0,677	0,662	0,647	0,630	0,616	0,617	0,644	0,713	0,834	1,014
= 0,5	0,546	0,545	0,542	0,544	0,552	0,574	0,616	0,688	0,795	0,939	1,123
= 0,4	0,423	0,427	0,438	0,460	0,497	0,552	0,630	0,732	0,862	1,021	1,211
= 0,3	0,310	0,319	0,347	0,395	0,460	0,544	0,647	0,770	0,914	1,081	1,273
= 0,2	0,203	0,222	0,273	0,347	0,438	0,542	0,662	0,798	0,952	1,123	1,317
= 0,1	0,100	0,140	0,222	0,319	0,427	0,545	0,677	0,818	0,977	1,151	1,342
= 0	0	0,100	0,203	0,310	0,423	0,546	0,678	0,840	0,984	1,159	1,351
	Centre.										
	Demi-médiane $g'' = 0, g = g'$ .										

Les valeurs de  $\frac{2g}{\delta b}$  sont les mêmes dans les trois autres quarts de section pour les mêmes valeurs de  $\frac{2u}{b}, \frac{2v}{c}$  au signe près.

Or ce tableau montre que, pour chaque valeur de  $\frac{2u}{b}$ , la plus grande valeur de  $\sqrt{g'^2 + g''^2}$ , et par conséquent de l'ensemble

(1) Voy. De la torsion des prismes, 1855, art. 84.

(Du n° 156).

$\frac{G^2}{T^2} (g^2 + g'^2)$  des deux derniers termes sous le radical, se trouve d'abord sur le côté  $b$  (jusqu'à  $\frac{2u}{b} = 0,7$  inclusivement), et ensuite sur la médiane parallèle à  $b$ , où  $\sqrt{g^2 + g'^2}$ , réduit à  $g'$ , croît jusqu'au point d'intersection de cette médiane avec le côté  $c$ .

Un calcul du même genre, que nous avons fait pour un prisme rectangle, aussi d'égal contour, où l'on avait  $b = 2c$ , nous a donné la même loi, et l'analyse la démontre facilement pour un prisme dont la base a un de ses côtés très-grand par rapport à l'autre. Elle peut être étendue aux prismes rectangulaires d'inégale contour ou pour lesquels on n'a pas  $G' = G''$ ,  $T' = T''$ , car les rapports mutuels des petits déplacements longitudinaux, et par conséquent des glissements, y sont les mêmes (§ 39) que dans un rectangle d'égal contour où le rapport des dimensions serait un peu différent.

Nous pouvons donc regarder, dans tout prisme rectangle, les points de maximum de  $\left(\frac{G'g'}{T'}\right)^2 + \left(\frac{G''g''}{T''}\right)^2$ , pour chaque valeur d'une des deux coordonnées  $u$ ,  $v$ , comme appartenant ou aux côtés ou à la médiane parallèles à cette coordonnée.

Or, sur chaque médiane, les formules générales (§ 25 ou § 39) montrent que ce binôme se réduit à l'un des deux termes, et que la plus grande valeur de ce terme répond aux intersections avec les deux autres côtés, c'est-à-dire à  $\frac{2u}{b} = \pm 1$  ou  $\frac{2v}{c} = \pm 1$ , précisément là où la flexion produit les effets les plus grands selon qu'elle est parallèle aux côtés  $b$  ou aux côtés  $c$ .

Donc, dans la question qui nous occupe, où la flexion est supposée parallèle aux côtés  $b$ , c'est, ou sur ces deux côtés, ou au milieu  $B$  du côté  $c$ , pour lequel  $\frac{2u}{b} = +1$ , qu'on doit chercher le point dangereux si la force  $Q$  produit l'extension ou donne un terme positif comme tous les autres termes de l'équation.

Un raisonnement comme ceux des §§ 50 et 51 prouverait que si cette force  $Q$  est comprimante ou affectée du signe  $-$ , il y a lieu de le

(Du n° 156).

chercher concurremment au milieu B' de l'autre côté  $c$ , pour lequel  $\frac{2u}{b} = -1$ .

Si ce point inconnu se trouve ainsi en B ou B', l'équation propre à donner les dimensions est, vu qu'alors  $v = 0$ ,  $u = \pm \frac{b}{2}$ ,  $g' = 0$ , et en ayant égard à la valeur  $g''_m$  du maximum de  $g''$  donnée § 40 p. 361 :

$$1 = \frac{1-\eta_1}{2R_0} \left( \pm \frac{Q}{bc} \pm \frac{6M''}{b^2c} \right) + \sqrt{\left( \frac{1+\eta_1}{2R_0} \right)^2 \left( \pm \frac{Q}{bc} \pm \frac{6M''}{b^2c} \right)^2 + \left( \frac{\gamma_1 b^2 G''}{2\mu c^2 G'} \cdot \frac{M_1}{b^2 c T''_0} \right)^2},$$

où le double signe du terme en  $M''$  n'est pas toujours corrélatif à celui de  $Q$ , car il tient à l'ignorance où l'on est provisoirement de la situation en B ou B' du point dangereux par torsion, flexion et compression simultanée quand la force  $Q$  est comprimante.

Si ce point, non encore connu, doit se trouver sur les côtés  $b$ , l'équation, vu qu'on a alors

$$g'' = 0, \text{ et (p. 361, 363) } g' = \frac{\gamma'}{\gamma} g'_m = \frac{\gamma'}{\gamma} \cdot \frac{\gamma}{2\mu} \frac{M_1}{G' b c^2},$$

est

$$1 = \max. \frac{1-\eta_1}{2R_0} \left( \pm \frac{Q}{bc} + \frac{6M''}{b^2c} \frac{2u}{b} \right)^2 + \sqrt{\left( \frac{1+\eta_1}{2R_0} \right)^2 \left( \pm \frac{Q}{bc} + \frac{6M''}{b^2c} \frac{2u}{b} \right)^2 + \left( \frac{\gamma'}{\gamma} \cdot \frac{\gamma}{2\mu} \frac{M_1}{bc^2 T''_0} \right)^2}.$$

La première de ces deux équations  $1 = \dots$  fournit immédiatement la valeur de  $b^2c$  si  $Q = 0$  et si l'on se donne le rapport  $\frac{b}{c}$ .

La seconde ne le donnera qu'en essayant diverses valeurs de l'abscisse  $u$  ou de son rapport  $\frac{2u}{b}$  à  $CA = \frac{b}{2}$ , puis en mettant les valeurs correspondantes de  $\frac{\gamma'}{\gamma}$  d'après la petite table de la page 365 ou la formule empirique

$$\frac{\gamma'}{\gamma} = \left[ 1 - \left( \frac{2u}{b} \right)^{1.8+0.3 \frac{b^2 G''}{c^2 G'}} \right]^{2/3},$$

(Du n° 156).

et en s'arrêtant à la valeur de  $\frac{2u}{b}$  qui donnera pour  $b^2c$  le nombre le plus grand. Et, lorsque  $Q$  n'est pas nul, toutes deux, ou les autres équations plus simples qu'on obtient en faisant disparaître le radical, fourniront  $b^2c$  par tâtonnement numérique, si l'on se donne ou  $b$  ou  $c$ , ou leur rapport  $\frac{b}{c}$ , ou une autre relation entre ces deux dimensions que  $\frac{b}{c} = \text{constante}$ .

Selon que  $b^2c$ , tiré de la première équation, aura une valeur plus grande ou plus petite que  $b^2c$  tiré de la seconde, le point dangereux sera unique et placé en B ou B' au milieu d'un côté  $c$ , ou double et placé symétriquement sur les deux côtés  $b$ , où il peut se trouver partout excepté aux angles, à moins que la torsion ne soit nulle.

Nous avons fait ce calcul pour quelques cas (voy. §§ suivants), et nous avons reconnu que lorsque

$G' = G''$ ,  $T' = T''$ ,  $Q = 0$ ,  $\frac{b}{c} = \text{de } 1 \text{ à } 2$ ,  $\frac{b''c''^2}{b'^2c'}$  n'excédant pas 2 ( $l''$ ,  $c''$ ,  $b'$ ,  $c'$  étant comme ci-dessus les dimensions qu'on donnerait s'il n'y avait que torsion ou que flexion), le point dangereux du prisme rectangle ainsi sollicité à fléchir de *champ* en même temps qu'à tordre, reste au milieu B d'un des petits côtés. C'est pour des rapports  $\frac{b}{c}$  et  $\frac{b''c''^2}{b'^2c'}$  excédant 2 qu'il passe sur les grands côtés entre A et C, A' et C', où il peut occuper toutes les positions, mais sans atteindre jamais C, C', à moins que le prisme ne se réduise à une lame infiniment mince, ou bien que  $b''c''^2$  ne soit infini devant  $b'^2c'$ , c'est-à-dire qu'il n'y ait que torsion sans flexion.

§ 54. *Même prisme rectangle à la fois fléchi et tordu quand le plan de sollicitation à fléchir est oblique par rapport aux côtés de la base.* — Soit, comme aux notes des n° 83, 117, 120 :

$\varphi$  l'angle aigu que le plan du moment ou du couple M sollicitant à fléchir fait avec les côtés  $c$  du rectangle ;

ou soient  $M' = M \cos \varphi$ ,  $M'' = M \sin \varphi$ .

L'équation propre à donner les dimensions  $b, c$  est

(Du n<sup>o</sup> 153).

$$1 = \max. \text{ de } \frac{1-\eta_1}{2R^2} \left( \pm \frac{Q}{bc} + 6M \frac{\cos \varphi}{bc^2} \frac{2v}{c} + 6M \frac{\sin \varphi}{b^2c} \frac{2u}{b} \right) + \\ + \sqrt{\left( \frac{1+\eta_1}{2R_0} \right)^2 (\text{même trinôme})^2 + \left( \frac{G'g'}{T_0} \right)^2 + \left( \frac{G''g''}{T_0} \right)^2},$$

le maximum étant pris par rapport aux deux variables  $\frac{2u}{b}$ ,  $\frac{2v}{c}$ .

Si Q est affecté du signe +, le trinôme entre parenthèses est le plus grand pour chaque valeur d'une de ces deux variables lorsque l'autre a sa plus grande valeur = 1, c'est-à-dire aux points d'un des côtés du contour rectangulaire. L'ensemble des autres, c'est-à-dire  $\left( \frac{G'g'}{T_0} \right)^2 + \left( \frac{G''g''}{T_0} \right)^2$ , est aussi, comme on a vu § précédent, le plus grand possible pour chaque valeur d'une de ces mêmes variables  $\frac{2u}{b}$ ,  $\frac{2v}{c}$ , aux points des côtés ou de la médiane parallèle à sa direction; et, sur cette médiane, les deux points où il a sa plus grande valeur sont les intersections avec les deux autres côtés. Et comme cette valeur de  $\left( \frac{G'g'}{T_0} \right)^2 + \left( \frac{G''g''}{T_0} \right)^2$  est la même à toutes deux, on doit prendre celle des intersections pour laquelle la variable est + 1 et non - 1, vu qu'elle est celle pour laquelle les trinômes entre parenthèses sont aussi les plus grands.

C'est donc sur deux côtés du contour du rectangle, savoir celui pour lequel  $\frac{2u}{b} = + 1$ , et celui pour lequel  $\frac{2v}{c} = + 1$ , qu'il faut chercher le point dangereux ou de maximum du second membre de l'équation quand la force Q est affectée du signe +.

Donc, en étendant la conclusion comme au § précédent, au moyen d'une discussion analogue à celle des §§ 50 et 51, au cas où Q est affecté du signe —, moyennant qu'on cherche aussi le point dangereux sur les deux autres côtés du contour, l'équation propre à donner les dimensions b, c, est, suivant la situation encore inconnue de ce point :

Sur les côtés b, pour lesquels  $\frac{2v}{c} = \pm 1$ ,

ou sur les côtés c, pour lesquels  $\frac{2u}{b} = \pm 1$ , respectivement :



(Du n° 156).

$$= \max. \frac{1-\eta_1}{2R_0} \left( \pm \frac{Q}{bc} \pm \frac{6M \cos \varphi}{bc^2} + \frac{6M \sin \varphi}{b^2c} \frac{2u}{b} \right) + \\ + \sqrt{\left( \frac{1+\eta_1}{2R_0} \right)^2 (\text{même trinôme})^2 + \left( \frac{\gamma'}{\gamma} \frac{\gamma}{2\mu} \frac{M_1}{bc^2 T''_0} \right)}$$

$$\text{ou } 1 = \max. \frac{1-\eta_1}{2R_0} \left( \pm \frac{Q}{bc} + \frac{6M \cos \varphi}{bc^2} \frac{2v}{c} \pm \frac{6M \sin \varphi}{b^2c} \right) + \\ + \sqrt{\left( \frac{1+\eta_1}{2R_0} \right)^2 (\text{même trinôme})^2 + \left( \frac{\gamma''}{\gamma_1} \frac{\gamma_1}{2\mu} \frac{b^2 G''}{c^2 G'} \frac{M_1}{b^2 c^2 T''_0} \right)^2}$$

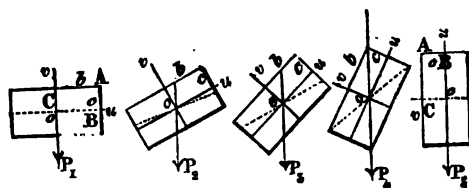
Si l'on se donne le rapport  $\frac{b}{c}$ , d'où les rapports  $\frac{\gamma}{2\mu}$  et  $\frac{\gamma_1}{2\mu} \frac{b^2 G''}{c^2 G'}$  (p. 362), et si l'on essaye successivement les valeurs

$$0, \pm 0,1, \pm 0,2, \dots \pm 0,9, \pm 1 \text{ pour } \begin{cases} \frac{2u}{b} \text{ dans la 1}^{\text{e}} \text{ équation,} \\ \frac{2v}{c} \text{ dans la 2}^{\text{e}} \text{ équation,} \end{cases}$$

(en effaçant *max.*), avec les valeurs correspondantes de  $\frac{\gamma'}{\gamma}$  et de  $\frac{\gamma''}{\gamma_1}$  (p. 363), chacune de ces deux équations, ou bien chacune de celles d'une forme plus simple qu'on aura en chassant le radical comme aux §§ précédents, donnera un maximum pour  $bc^2$ . On prendra le plus grand des deux pour solution de la question.

Nous avons fait ce calcul dans le cas

$$\frac{b}{c} = 2, Q = 0, \eta_1 = 1/4, G' = G'', T'_0 = T''_0,$$



pour les cinq directions  $oP_1, oP_2, oP_3, oP_4, oP_5$  du plan du moment  $M$  sollicitant à fléchir, et ré pondant à

$$\text{tang } \varphi = 0, \quad \frac{1}{2}, \quad 1, \quad 2, \quad \infty,$$

dont la première donne la sollicitation à plat, et la cinquième la sollicitation de champ.

(Du n° 156).

Sur chaque figure partielle ci-contre, la ligne droite ponctuée, passant par le centre du rectangle, est la ligne des fibres de longueur invariable, qui est oblique au plan de sollicitation excepté pour les deux situations extrêmes, en sorte que le plan de flexion effective, perpendiculaire à cette ligne, fait avec le plan de sollicitation un angle  $\psi$  déterminé (§ 2 de la note du n° 83, p. 54) par

$$\operatorname{tang} \psi = \frac{1}{l'} \operatorname{tang} \varphi = \frac{c^2}{b^2} \operatorname{tang} \varphi = \frac{1}{4} \operatorname{tang} \varphi.$$

Le minimum de  $bc^2$  a été déterminé, pour les quatre premières situations, par la première des deux équations ci-dessus, en donnant successivement à  $\frac{2u}{b}$ , comme nous venons de dire, les valeurs

$$0, 0,1, 0,2 \dots, 0,9 \text{ et } 1,$$

et en faisant usage ensuite de la méthode d'approximation ou d'interpolation parabolique du § 34. Pour ces quatre situations  $oP_1$ ,  $oP_2$ ,  $oP_3$ ,  $oP_4$ , on peut se dispenser de calculer comparativement  $bc^2$  par la deuxième équation; car les lignes ponctuées montrent que les dilatations longitudinales des fibres, dues à la flexion, sont plus fortes ou où moins aussi fortes aux divers points du demi-côté

$CA = \frac{b}{2}$  qu'aux points situés de la même manière sur le demi-côté

$BA = \frac{c}{2}$ , en sorte que comme les glissements sont plus considérables sur celui-là, le point dangereux doit s'y trouver et non sur celui-ci.

Il en est autrement pour la cinquième figure, où le prisme est sollicité de *champ*. Le calcul par la deuxième équation donne des valeurs de  $bc^2$  supérieures à celles que donne le calcul par la première, en sorte que le point dangereux est (§ précédent) au milieu B du petit côté  $c$  du haut de la figure.

En conséquence, et en appelant, comme aux §§ précédents,

$$b', c', \text{ et } b'', c'',$$

les dimensions que l'on donnerait respectivement si le prisme n'était que fléchi, et s'il n'était que tordu, ou en faisant



(Du n° 150).

La moitié de gauche de ce tableau est relative aux cas où la flexion domine, et la moitié de droite, aux cas où c'est la torsion; et tout ce dont les diverses valeurs de  $\frac{bc^2}{b'c'^2}$  et  $\frac{bc^2}{b''c''^2}$  excèdent l'unité représente l'influence de la simultanéité de la flexion et de la torsion, ou la proportion dont  $bc^2$  doit excéder la plus grande des deux valeurs qu'on lui donnerait si le prisme était seulement fléchi ou seulement tordu.

§ 55. *Cas particulier du prisme à base carrée fléchi et tordu. Quelle est la situation du plan de flexion qui exige le plus fort équarrissage?* — Le cas du prisme à base carrée a une importance particulière, parce que les arbres des machines (§ 42) ont souvent cette forme lorsqu'on les fait en bois. Comme le plan de flexion (qui, pour une pareille base, coïncide toujours avec le plan de sollicitation à fléchir) occupe successivement toutes les positions pendant que ces arbres tournent, il convient de connaître la position pour laquelle il y a le plus de danger de rupture, afin de calculer pour cette position-là l'équarrissage à leur donner.

On a pour ce cas

$$b = c, \gamma_1 = \gamma, \gamma'' = \gamma', \frac{2\mu}{\gamma} = 0,20847;$$

et nous supposons  $G' = G'', T' = T'' = T$ .

On peut en conséquence se contenter de la première des deux équations du § précédent, en convenant de prendre l'axe des  $v$  parallèle à celui des deux côtés de la base qui fait le plus petit angle avec le plan de sollicitation ou de flexion, en sorte que  $\varphi$  ne dépasse pas 45 degrés ou que  $\text{tang } \varphi$  ne varie que de 0 à 1. On a ainsi, en supposant en outre  $Q = 0$  ou en négligeant ses effets comme ceux de cisaillement, ce qui permet de se borner au signe supérieur de  $\frac{6M \cos \varphi}{bc^2}$  ou à la considération du côté pour lequel  $v = + \frac{c}{2}$  :

(Du n° 156).

$$b^3 = \text{Max}^n \frac{1-\eta_1}{2} \cdot \frac{6M}{R_o} \left( \cos\varphi + \frac{2u}{b} \sin\varphi \right) + \sqrt{\left( \frac{1+\eta_1}{2} \frac{6M}{R_o} \right)^2 \left( \cos\varphi + \frac{2u}{b} \sin\varphi \right)^2 + \left( \frac{\gamma}{2\mu} \frac{\gamma' M_1}{T_o} \right)^2}$$

On pourrait en faisant, conformément à l'expression empirique du § 40 (p. 360 et 363),  $\frac{\gamma'}{\gamma} = \left(1 - \frac{4u^2}{b^2}\right)^{3/2}$ , chercher analytiquement le maximum de  $b^3$  par rapport à la variable  $\frac{2u}{b}$ . Mais il nous a paru plus simple d'opérer *numériquement*. Nous avons donc fait successivement

$$\frac{2u}{b} = 0, 0,1, 0,2, 0,3, 0,4, 0,5, 0,6, 0,7, 0,8, 0,9, 1$$

dans cette équation qui, avec

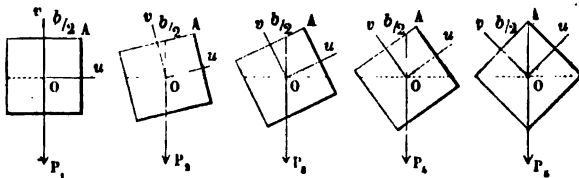
$$\eta_1 = 1/4, \quad \frac{2\mu}{\gamma} = 0,20817 \quad (\text{valeur pour } b=c, G'=G''),$$

peut être écrite

$$\frac{R_o b^3}{M} = \text{max.} \frac{9}{4} \cos\varphi \left( 1 + \frac{2u}{b} \tan\varphi \right) + \sqrt{\frac{225}{16} \cos^2\varphi \left( 1 + \frac{2u}{b} \tan\varphi \right)^2 + 23,0773 \left( \frac{\gamma'}{\gamma} \frac{M_1 R_o}{T_o M} \right)^2}$$

et où nous avons donné au rapport  $\frac{M_1 R_o}{T_o M}$  une suite de valeurs croissantes de 0 à 4, en considérant l'une après l'autre cinq positions  $OP_1, OP_2, OP_3, OP_4, OP_5$  du plan de flexion, ou cinq valeurs de son inclinaison  $\tan\varphi$  sur la médiane parallèle à  $v$ , savoir :

$$\tan\varphi = 0 \quad \tan\varphi = \frac{1}{4} \quad \tan\varphi = \frac{1}{2} \quad \tan\varphi = \frac{3}{4} \quad \tan\varphi = 1.$$



( Du n° 156 ).

Ensuite, pour chaque valeur de  $\text{tang } \varphi$  et de  $\frac{M_1 R_0}{T_0 M}$ , nous avons interpolé paraboliquement entre les trois plus grandes des valeurs de  $\frac{R_0 b^3}{M}$  répondant aux onze valeurs 0, 0,1, 0,2, ..... 1 de  $\frac{2u}{b}$  afin d'obtenir, par les formules du § 34 (1), le maximum de  $\frac{R_0 b^3}{M}$  et la valeur intermédiaire de  $\frac{2u}{b}$  donnant la situation du point du demi-côté  $\frac{b}{2}$  où ce maximum a lieu, lorsque le calcul ne montre pas évidemment que ce point répond à  $\frac{2u}{b} = 1$ , ou qu'il se trouve à l'angle A (cas où le maximum absolu tomberait hors de la section). Nous avons eu ainsi la table suivante :

(1) On n'a pas besoin de faire observer que ces formules (p. 320),  $x_m - x_1 = \frac{h}{2} \frac{y_2 - y_0}{2y_1 - y_0 - y_2}$ ,  $y_n - y_1 = \frac{x_m - x_1}{h} (y_2 - y_0)$  où l'on a  $h=0,1$  et où les  $x, y$  sont ici les valeurs de  $\frac{2u}{b}$ ,  $\frac{R_0 b^3}{M}$ , s'appliquent très-bien lors même que l'ordonnée intermédiaire  $y_1$  n'est pas la plus grande des trois, ce qui arrive souvent quand  $x$  est la valeur zéro de  $\frac{2u}{b}$ .

( Du n° 156 ).

PRISME A BASE CARRÉE. Table de  $\frac{R_0 b^3}{M}$  ou des nombres par lesquels il faut multiplier le rapport  $\frac{M}{R_0}$  du moment de flexion  $M$  au coefficient de cohésion permanente d'extension  $R_0$  pour avoir le cube  $b^3$  du côté à donner au prisme en même temps soumis à un moment de torsion  $M_1$  et dont la matière a une cohésion de glissement  $T_0$ ; pour cinq positions du plan de flexion. Et valeurs de  $\frac{2x}{b}$  donnant les situations correspondantes du point dangereux sur un demi-côté  $b/2$ .  
*N.B.* On a supposé  $\eta_1 = 1/4$  ou la résistance permanente des fibres 4 fois plus grande à la rupture par compression qu'à la rupture par extension.

		Pour $\frac{M_1 R_0}{T_0 M} =$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4
tang $\varphi = 0$ (flexion médiane)	On a $\frac{R_0}{M} b^3 =$		6,000	6,121	6,464	6,980	7,620	8,344	9,127	9,954
	et $\frac{2x}{b} =$		∞	0	0	0	0	0	0	0
tang $\varphi = 1/4$	$\frac{R_0}{M} b^3 =$		7,276	7,276	7,276	7,276	7,684	8,338	9,088	9,895
	$\frac{2x}{b} =$		1	1	1	1	0,360	0,241	0,173	0,134
tang $\varphi = 1/2$	$\frac{R_0}{M} b^3 =$		8,050	8,050	8,050	8,050	8,050	8,316	8,981	9,746
	$\frac{2x}{b} =$		1	1	1	1	1	0,459	0,385	0,250
tang $\varphi = 3/4$	$\frac{R_0}{M} b^3 =$		8,400	8,400	8,400	8,400	8,400	8,400	8,817	9,538
	$\frac{2x}{b} =$		1	1	1	1	1	1	0,438	0,329
tang $\varphi = 1$ (flex. diagonale)	$\frac{R_0}{M} b^3 =$		8,453	8,453	8,453	8,453	8,453	8,453	8,623	9,308
	$\frac{2x}{b} =$		1	1	1	1	1	1	0,518	0,380
SUITE.		Pour $\frac{M_1 R_0}{T_0 M} =$	1,6	1,8	2,0	2,5	3	3,5	4	Infini, (ou $M = 0$ )
tang $\varphi = 0$	On a $\frac{R_0}{M} b^3 =$		10,196	11,675	12,564	14,832	17,141	19,477	21,828	$\frac{b^3 T_0}{M_1} = 4,804$
	et $\frac{2x}{b} =$		0	0	0	0	0	0	0	0
tang $\varphi = 1/4$	$\frac{R_0}{M} b^3 =$		10,737	11,645	12,489	14,755	17,065	19,400	21,751	4,804
	$\frac{2x}{b} =$		0,108	0,095	0,080	0,056	0,044	0,036	0,031	0
tang $\varphi = 1/2$	$\frac{R_0}{M} b^3 =$		10,565	11,414	12,302	14,557	16,865	19,200	21,555	1,804
	$\frac{2x}{b} =$		0,195	0,186	0,144	0,102	0,081	0,064	0,055	0
tang $\varphi = 3/4$	$\frac{R_0}{M} b^3 =$		10,336	11,219	12,051	14,306	16,616	18,954	21,311	4,804
	$\frac{2x}{b} =$		0,265	0,263	0,185	0,131	0,104	0,085	0,072	0
tang $\varphi = 1$	$\frac{R_0}{M} b^3 =$		10,094	10,982	11,801	14,056	16,359	18,712	21,072	$\frac{b^3 T_0}{M_1} = 4,804$
	$\frac{2x}{b} =$		0,303	0,277	0,213	0,152	0,169	0,098	0,083	0

(Du n° 156).

Au moyen de cette table, en interpolant au besoin entre les chiffres d'une même ligne ou d'une même colonne, on pourra résoudre tous les problèmes de flexion et torsion d'un prisme carré placé d'une manière fixe et sollicité à fléchir sous une inclinaison quelconque.

Mais, en outre, on en tire une conséquence importante relative aux cas bien plus fréquents où le prisme est une pièce tournante sollicitée successivement sous toutes les inclinaisons.

Elle montre, en effet, 1° que pour les petites valeurs de  $\frac{M_1 R_0}{T_0 M}$  ou lorsque la torsion est faible relativement à la flexion, c'est la cinquième position,  $\tan \varphi = 1$ , ou la *position diagonale* du plan de flexion qui exige les plus grandes valeurs de  $b^3$  ou les plus forts équarrissages. Alors on a simplement

$$\frac{R_0}{M} b^3 = 8,485282 = 6\sqrt{2}$$

comme si la torsion n'existait pas; ce qui vient de ce que le point dangereux répond à  $\frac{2u}{b} = 1$  ou est à un angle du carré, et qu'aux angles des sections les glissements sont nuls (§§ 4, 14, 23).

2° Que c'est au contraire la première position ou la *position médiane*  $\tan \varphi = 0$  qui exige les plus forts équarrissages lorsque  $\frac{M_1 R_0}{T_0 M}$  est grand ou que la torsion domine; et, alors, comme le point dangereux est au milieu d'un des côtés, ce qui donne  $\frac{2u}{b} = 0$ ,  $\frac{\gamma'}{\gamma} = 1$ , on a simplement

$$\frac{R_0}{M} b^3 = 6 \frac{1 - \eta_1}{2} + \sqrt{\left(6 \frac{1 + \eta_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma}{2\mu} \frac{M_1 R_0}{T_0 M}\right)^2}$$

3° Que le passage de l'une de ces positions à l'autre a lieu pour  $\frac{M_1 R_0}{T_0 M}$  entre 1 et 1,2, ou, exactement, égal à ce qu'on tire de ces expressions de  $\frac{R_0}{M} b^3$  égalées ensemble, c'est-à-dire pour

$$\frac{M_1 R_0}{T_0 M} = 6 \frac{2\mu}{\gamma} \sqrt{2 - \eta_1 - (1 - \eta_1)\sqrt{2}}, \text{ ou } = 1,03702 \text{ si } \eta_1 = 1/4.$$



(Du n° 156).

D'où il résulte que pour calculer l'équarrissage  $b$  des arbres carrés tournants, selon qu'on aura

$$\frac{M_1}{T_0} < \text{ou} > 1,03702 \frac{M}{R_0},$$

ou selon que le quotient du moment des forces qui font tordre par le coefficient de cohésion tangentielle permanente sera plus petit ou plus grand que  $1^{018},03702 = \frac{28}{27}$  le quotient du moment des forces fléchissantes par le coefficient de cohésion normale longitudinale, il faudra prendre

$$b^3 = \frac{6M}{R_0} \sqrt{2} \text{ ou } b^3 = 6 \frac{1 - \eta_1 M}{2 R_0} + \sqrt{\left(6 \frac{1 + \eta_1 M}{2 R_0}\right)^2 + 23,0773 \left(\frac{M_1}{T_0}\right)^2}.$$

§ 56. *Pièces d'égale résistance.* — Le moment de torsion est le même d'un bout à l'autre d'une pièce ou portion de pièce droite qui n'est sollicitée qu'à ses extrémités, mais le moment de flexion varie. C'est pour la section transversale où il est le plus grand, et qui est une des deux sections extrêmes, qu'il faut calculer les dimensions de la pièce, si elle doit être prismatique ou cylindrique.

Mais si, pour épargner la matière, on fait varier les dimensions des sections, de manière qu'il n'y ait pas plus de danger de rupture à l'une qu'à l'autre, on a une *pièce d'égale résistance*, comme on a déjà dit au § 6 de la note du n° 143.

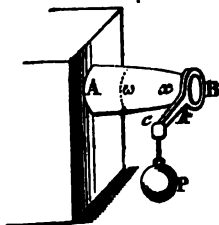
Bien que les formules données, soit pour la flexion, soit pour la torsion, ne soient exactes que pour les prismes ou cylindres, on peut en étendre approximativement l'usage aux pièces dont la section varie peu rapidement; l'erreur qui en résulte est du même ordre de grandeur que celle que l'on commet toutes les fois qu'on employe ces mêmes formules pour d'autres modes d'application et de distribution des forces, vers les extrémités, que ceux qui ont été indiqués ci-dessus (§§ 6 des notes des n° 21 et 80, et 9 de celle du n° 156), comme condition de leur parfaite rigueur, et qui ne se réalise jamais, ce qui n'empêche pas l'expérience de donner des résultats extrêmement approchés de ce que les formules indiquent.

Les équations de cohésion des §§ précédents, de la forme

( Du n° 156 ).

$f = \max. \frac{1-\eta_1}{2R_0} ( ) + \sqrt{\left(\frac{1+\eta_1}{2R_0}\right)^2 ( )^2 + ( )^2}$ , en y mettant pour le moment de flexion  $M$  ou pour ses composants  $M'$ ,  $M''$  leurs expressions générales et variables applicables à toutes les sections, et non pas leurs valeurs relatives à celle pour laquelle ils sont les plus grands, et en effaçant par conséquent le mot *maximum* en tant qu'il s'appliquerait aux sections diverses, fournira les dimensions variables à leur donner.

Par exemple, si l'on veut déterminer les rayons à attribuer aux diverses sections supposées circulaires de la pièce horizontale dont il a été question au § 42, et qui, encastree à une extrémité A, est sollicitée, à l'autre, par un poids P agissant au bout d'un levier horizontal et perpendiculaire BC, on aura, en appelant :



$x$  le bras de levier longitudinal ou la distance  $\omega B$  entre l'extrémité B et une section quelconque  $\omega$  ;  
 $k$  le bras de levier transversal Bc ;

on aura, dis-je,  $M = Px$ ,  $M_1 = Pk$ , qui, substitués dans l'équation de cohésion du § 44 où nous ferons  $Q = 0$  et par conséquent  $v = r$ , donne

$$R_0 \frac{\pi r^3}{P} = \frac{1-\eta_1}{2} \cdot 4x + \sqrt{\left(\frac{1+\eta_1}{2} 4x\right)^2 + \left(\frac{R_0}{T_0} \cdot 2k\right)^2},$$

ou, si l'on fait  $\eta_1 = \frac{1}{4}$ ,  $\frac{R_0}{T_0} = \frac{5}{4}$  :

$$\frac{2\pi R}{5P} \cdot r^3 = \frac{3}{5} x + \sqrt{x^2 + k^2};$$

ce qui permettrait d'obtenir, par une construction facile, la suite des grandeurs du rayon  $r$ .

§ 57. *Arbre de transmission de mouvement de rotation, sollicité à fléchir et à tordre par deux engrenages ou deux courroies. Arbre rond. Arbre carré.* — Pour appliquer à la recherche des dimensions

(Du n° 156).

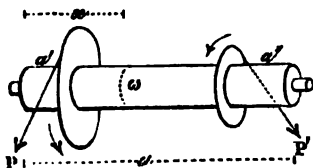
transversales de cet arbre (§ 42) les formules précédentes, il faut d'abord exprimer ses moments de flexion et de torsion  $M$  et  $M_1$ .

Soient pour cela :

$a$  sa longueur entre ses tourillons, c'est-à-dire entre les centres de contact avec les coussinets qui les portent ;

$P$  une force qui agit à la circonférence d'une poulie montée sur cet arbre et dans un plan perpendiculaire pour le faire tourner ;

$P'$  une résistance appliquée de même à une seconde roue (et dont l'intensité se déduira de  $P$ , ou réciproquement, par le rapport de leurs rayons et par le calcul connu des frottements) ;



$\alpha, \alpha'$  les angles que font, en sens contraire, avec la verticale les directions de ces deux forces :

$\Pi$  le poids de l'arbre ;  $\omega$  et  $\omega'$  ceux de la première et de la seconde roue ;

$a'$  la distance du premier tourillon à la roue où agit  $P$  ;

$a''$  celle de la roue où agit  $P'$  au deuxième tourillon ;

$x$  la distance du premier tourillon à une section quelconque  $\omega$  de la partie  $a - a' - a''$  de l'arbre comprise entre les deux roues (la seule partie qui soit tordue d'une manière notable, car celles qui sont entre chaque roue et l'extrémité la plus proche ne le sont qu'en vertu du frottement des tourillons).

Les forces qui tendent à faire fléchir l'arbre à l'endroit où se trouve  $\omega$  sont celles qui agissent d'un même côté par rapport à cette section, c'est-à-dire

1° La force  $P'$  ;

2° Le poids  $\omega'$  de sa roue ;

3° Le poids de la partie de l'arbre entre  $\omega$  et le deuxième tourillon ; comme sa longueur est  $a - x$ , son poids est  $\Pi \frac{a-x}{a}$ , puisque  $\Pi$  est le poids de l'arbre de longueur  $a$ .

Enfin, la réaction du coussinet où ce tourillon s'appuie ; et cette réaction s'obtient d'une manière simple en décomposant  $P, P', \omega,$

(Du n° 153).

$\varpi'$ ,  $\Pi$  en deux autres qui leur soient parallèles et qui passent par les deux coussinets.

Ce qui donne sur le second coussinet, dont nous nous occupons :

4° Une force parallèle et opposée à P, et dont l'intensité est  $P \frac{a}{a'}$  puisque les composantes de P sont en raison inverse de ses distances aux deux coussinets, distances dont a est la somme ;

5° Une force parallèle et opposée à P', et dont l'intensité est, de même,  $P \frac{a-a''}{a}$  ;

6° Une force verticale de bas en haut, somme des composantes des poids  $\varpi$ ,  $\varpi'$  et  $\Pi$ , et dont l'intensité est en conséquence  $\varpi \frac{a'}{a} + \varpi' \frac{a-a''}{a} + \frac{\Pi}{2}$ .

Ces diverses forces produisent, autour de droites perpendiculaires à leurs directions et à l'axe de l'arbre, menées par le centre de la section  $\omega$ , des moments dont les bras de levier sont  $a-x$  pour les réactions (4°, 5°, 6°) ;  $a-a''-x$  pour les forces (1°, 2°) P',  $\varpi'$  ; enfin  $\frac{a-x}{2}$  pour le poids (3°)  $\Pi \frac{a-x}{a}$  de la partie de l'arbre au delà de  $\omega$ , et que l'on peut regarder comme concentrée en son centre de gravité ou à son milieu.

En appelant donc

$m$ ,  $m'$ ,  $m''$  les moments des forces parallèles respectivement à P, à P' et à la verticale,

on aura

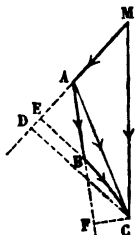
$$m = P \frac{a'}{a} (a-x),$$

$$m' = -P'(a-a''-x) + P' \frac{a-a''}{a} (a-x) = P' \frac{a''}{a} x,$$

$$\begin{aligned} m'' &= -\Pi \frac{a-x}{a} \frac{a-x}{2} - \varpi'(a-a''-x) + \left( \varpi \frac{a'}{a} + \varpi' \frac{a-a''}{a} + \frac{\Pi}{2} \right) (a-x) = \\ &= \varpi a' \frac{a-x}{a} + \varpi' a'' \frac{x}{a} - \frac{\Pi x}{2} \frac{a-x}{a}. \end{aligned}$$

( Du n° 158 ).

Pour réduire en un seul ces trois moments tendant à la flexion, rappelons-nous le théorème de géométrie élémentaire relatif au carré du côté MC opposé à l'angle obtus A d'un triangle obliquangle MAC; ou bien remarquons, simplement, que si son côté AC se projette en AD sur le prolongement du troisième côté MA, on obtient



$$\overline{MC}^2 = (\overline{MA} + \overline{AD})^2 + \overline{CD}^2 = \overline{MA}^2 + 2\overline{MA} \times \overline{AD} + \overline{AC}^2;$$

égalité qui, appliquée à un deuxième triangle ABC, dont AC serait à son tour le grand côté, les deux autres pouvant être situés dans un plan quelconque, donne de même, BF étant la projection du côté BC sur le prolongement de l'autre AB :

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + 2\overline{AB} \times \overline{BP}.$$

Substituant et remarquant, 1° que AD, projection de AC, est égal à la somme AE + ED des projections de AB, BC sur le prolongement de MA; 2° que chacune des projections BF, AE, ED est égale au côté projeté multiplié par le cosinus de son angle avec le côté dans la direction duquel la projection se fait; 3° que MC représente en grandeur et en direction la résultante de trois forces représentées par MA, AB, BC, les sens d'action étant ceux qu'indiquent les flèches, on a ce théorème, d'ailleurs connu :

*Que la résultante de trois forces est égale à la racine carrée de la somme de leurs trois carrés et des trois doubles produits de ces mêmes forces par les cosinus des angles qu'elles font respectivement entre elles.*

Ce théorème sur les forces aura également lieu pour nos trois moments  $m, m', m''$ , car on peut les réduire, sans en changer la valeur ni l'effet, à avoir le même bras de levier égal à 1 par exemple, comme s'ils étaient dus à trois forces appliquées sur l'axe à l'unité de distance de  $\omega$ ; ces forces, toutes perpendiculaires à l'arbre, auraient une résultante dont l'intensité, mesurant celle du moment résultant, serait donnée par ce même théorème. On a donc, comme  $\alpha$  et  $\alpha'$  sont les angles que font respectivement, avec les compo-

(Du n° 150).

santes des poids  $\Pi$ ,  $\sigma$ ,  $\sigma'$ , les composantes des forces P et celles des forces P', l'expression suivante du moment de flexion :

$$M = \sqrt{m^2 + m'^2 + m''^2 + 2m'm''\cos\alpha' + 2m''m\cos\alpha + 2mm'\cos(\alpha + \alpha')}.$$

Quant au moment des forces qui tendent à tordre, autour de l'axe de l'arbre, il n'est autre chose que celui de la *résistance* P', plus celui du frottement du deuxième tourillon.

En appelant donc

$r'$  le rayon de la deuxième roue;

$r''$  celui du tourillon de droite ou du côté de cette roue;

$R$  la réaction de son coussinet;

$f$  le coefficient du frottement ou le rapport de la composante tangentielle à la composante normale de cette réaction; en sorte que, N étant cette deuxième composante, on a

$$R = \sqrt{N^2 + f^2 N^2}, \quad N = \frac{R}{\sqrt{1 + f^2}}, \quad \text{d'où } \frac{fR}{\sqrt{1 + f^2}} \text{ pour la première ou le frottement,}$$

on aura

$$M_1 = P'r' + \frac{fR}{\sqrt{1 + f^2}} r'';$$

expression dans laquelle il faudra mettre, pour  $R$ , la résultante des trois forces (4°, 5°, 6°)  $P \frac{a'}{a}$ ,  $P' \frac{a - a''}{a}$ ,  $\sigma \frac{a'}{a} + \sigma' \frac{a - a''}{a} + \frac{\Pi}{2}$  agissant sur le coussinet, c'est-à-dire d'après le théorème rappelé

$$R = \sqrt{\left(P \frac{a'}{a}\right)^2 + \left(P' \frac{a - a''}{a}\right)^2 + \left(\sigma \frac{a'}{a} + \sigma' \frac{a - a''}{a} + \frac{\Pi}{2}\right)^2 + 2P \frac{a'}{a} P' \frac{a - a''}{a} \cos(\alpha + \alpha') + 2\left(\sigma \frac{a'}{a} + \sigma' \frac{a - a''}{a} + \frac{\Pi}{2}\right) \left(P \frac{a'}{a} \cos\alpha + P' \frac{a - a''}{a} \cos\alpha'\right)}.$$

Les deux moments de flexion et de torsion M et  $M_1$ , dans le calcul desquels on peut, pour première approximation, négliger ou fixer arbitrairement le poids encore inconnu  $\Pi$  de l'arbre, étant une fois obtenus par ces expressions, l'équation générale de cohésion du § 44 avec  $Q = 0$ , et où l'on pourra ordinairement négliger  $g'_1$ ,

(Du n° 156).

$g''_1$ , qui viennent du cisaillement, fournira les dimensions transversales à donner à l'arbre.

Si, par exemple, la forme des sections doit être circulaire, et si  $\eta_1 = 1/4$ , l'équation, pour déterminer leur rayon  $r$ , sera (§ 48)

$$\left\{ \begin{array}{l} r^3 = \frac{3}{8} r'^3 + \sqrt{\left(\frac{5}{8} r'^3\right)^2 + (r''^3)^2} \\ \text{où l'on a } r'^3 = \frac{4M}{\pi R_0}, \quad r''^3 = \frac{2M_1}{\pi T_0}; \end{array} \right.$$

en sorte que comme le moment de flexion  $M$ , fonction des moments  $m, m', m''$ , est variable avec  $x$ , ou avec la situation de la section  $\omega$ , on pourra faire varier aussi le rayon  $r$  et donner à l'arbre, s'il est en métal, la forme d'égale résistance (§ précédent). L'économie de matière sera surtout notable si l'angle  $\alpha + \alpha'$  est de deux angles droits ou si les forces  $P, P'$  sont parallèles et opposées; car il y aura même un endroit où l'arbre n'éprouvera de flexion qu'en vertu de son poids et de celui des deux roues.

Si l'on veut que l'arbre soit cylindrique ou que  $r$  soit constant, il faudra, pour  $M$ , prendre la plus grande valeur du moment de flexion. Son expression n'a, entre les deux roues, qu'un minimum, et sa plus grande valeur a lieu *contre l'une ou l'autre de ces roues*. On le calculera donc pour  $x = \alpha'$  et pour  $x = a - \alpha'$ , et l'on mettra à la place de  $M$  le plus fort des deux résultats.

Si l'arbre tournant doit être en bois, il conviendra le plus souvent de le faire carré, sauf un abatage de ses angles en chanfrein, assez léger pour ne pas diminuer la résistance (§ 8 de la note du n° 113).

Alors les forces, en même temps qu'elles le tordent, tendent à fléchir son axe tantôt dans un plan passant par une médiane, tantôt dans un plan passant par une diagonale des sections, tantôt dans un plan intermédiaire. On a vu à la fin du § 55 que les plans intermédiaires n'étaient pas à considérer, et qu'il fallait calculer l'équarrissage.

$$\text{Pour la flexion diagonale si } \frac{M_1}{T_0} < \frac{28}{27} \frac{M}{R_0},$$

$$\text{Pour la flexion médiane si } \frac{M_1}{T_0} > \frac{28}{27} \frac{M}{R_0}.$$

( Du n° 156 ).

la fraction  $\frac{28}{27} = 1,0370\bar{2}$  devant être remplacée par

$$6.0,20817\sqrt{2-\eta_1-(1-\eta_1)\sqrt{2}},$$

si l'on attribue une autre valeur que  $1/4$  au rapport  $\eta_1$  des limites  $R_0, R'_0$  des tractions et des pressions longitudinales permanentes non dangereuses (Voy. des Applications numériques au § 65).

§ 58. *Récapitulation des formules propres à faire connaître les dimensions transversales à donner à une pièce droite soumise à une torsion et à une flexion simultanée, avec ou sans extension ou compression longitudinale de l'axe.*

N. B. Ces formules étant déduites comme cas particuliers de l'équation générale de cohésion permanente ou de stabilité de la contexture du § 44 (p. 384), on y recourra dans les autres cas, notamment lorsque les effets de *cisaillement* ou les glissements  $g'_1, g''_1$  étrangers à la torsion ne seront pas négligeables comme nous le supposons ici (Voy. aussi §§ 45, 46 et note du n° 454, et aussi lorsqu'on aura  $R_0 > R'_0$ , donnant  $\eta_1 > 1$ ; et encore lorsqu'une section dont on veut avoir les dimensions sera dans une des situations exceptionnelles qui l'empêchent de s'infléchir (p. 385).

Soient

$r$  le rayon de la section si elle est circulaire,  $b$  et  $c$  ses dimensions transversales principales si elle est elliptique ou rectangulaire;

$M$  le moment qui fléchit la pièce et qui est décomposable en  $M'$  et  $M''$  parallèles à  $c$  et à  $b$  respectivement;

$M_1$  le moment qui la tord;

$Q$  la force longitudinale qui étend ou comprime l'axe;

$r', b', c'; r'', b'', c''$  les valeurs à attribuer à  $r, b, c$  si la pièce était seulement fléchie par  $M$ , seulement tordue par  $M_1$ , seulement étendue ou comprimée par  $Q$  longitudinalement;

$R_0, R'_0 = \eta_1 R_0$  les limites à imposer aux tractions et aux pressions longitudinales par unité de section;

$T_0, T''_0$  les limites à imposer de même aux actions tangentielles transversales sur les sections parallèlement à  $b, c$ , et aussi (§ 46) aux actions tangentielles longitudinales sur des plans perpendiculaires à  $b, c$ ;



(Du n° 150).

Il faut prendre les valeurs de  $r$ ,  $b$ ,  $c$  données par les formules suivantes où  $\eta_1$  est supposé  $< 1$  et peut-être pris ordinairement  $= 1/4$  sans qu'il en résulte d'erreur bien sensible si la valeur réelle de  $\eta_1 = \frac{R_0}{R'}$  est différente.

Pièce à section circulaire fléchie et tordue.

(On suppose  $T_0 = T'' = T_0$ ).

$$R_0 \pi r^3 = \frac{1 - \eta_1}{2} \cdot 4M + \sqrt{\left(\frac{1 - \eta_1}{2} \cdot 4M\right)^2 + \left(R_0 \cdot \frac{2M_1}{T_0}\right)^2}$$

ou bien 
$$r^3 = \frac{1 - \eta_1}{2} r'^3 + \sqrt{\left(\frac{1 + \eta_1}{2} r'^3\right)^2 + (r''^3)^2}$$

(où  $r'^3 = \frac{4M}{\pi R_0}$ ,  $r''^3 = \frac{2M}{\pi T_0}$ ),

ou encore 
$$\begin{cases} R_0 \pi r^3 - 4M)(R_0 \pi r^3 + 4\eta_1 M) = \left(R_0 \cdot \frac{2M_1}{T_0}\right)^2, \\ \text{ou } (r^3 - r'^3)(r^3 + \eta_1 r'^3) = r''^6. \end{cases}$$

Même pièce, en même temps étendue.

$$(R_0 \pi r^3 - Qr - 4M)(R_0 \pi r^3 + \eta_1 Qr + 4\eta_1 M) = \left(R_0 \cdot \frac{2M_1}{T_0}\right)^2$$

ou  $(r^3 - r''^2 r - r'^3)(r^3 + \eta_1 r''^2 r + \eta_1 r'^3) = r''^6$ , où  $r''^2 = \frac{Q}{\pi R_0}$ .

Même pièce, comprimée en même temps que tordue et fléchie.

$$\begin{cases} (R_0 \pi r^3 + Qr - 4M)(R_0 \pi r^3 - \eta_1 Qr + 4\eta_1 M) = \left(R_0 \cdot \frac{2M_1}{T_0}\right)^2 \\ \text{et } (R_0 \pi r^3 + Qr + 4M)(R_0 \pi r^3 - \eta_1 Qr - 4\eta_1 M) = \left(R_0 \cdot \frac{2M_1}{T_0}\right)^2, \end{cases}$$

ou, ce qui revient au même :

$$\left\{ \begin{array}{l} (r^3 + r''^2 r - r'^3)(r^3 - \eta_1 r''^2 r + \eta_1 r'^3) = r''^6 \\ \text{et } (r^3 + r''^2 r + r'^3)(r^3 - \eta_1 r''^2 r - \eta_1 r'^3) = r''^6 \end{array} \right\} \text{ où } r''^2 = \eta_1 \frac{Q}{\pi R_0} = \frac{Q}{\pi R'}$$

On prendra la plus grande des deux valeurs de  $r$  fournies, l'une

(Du n° 156).

par la première, l'autre par la seconde des deux équations de l'un ou de l'autre groupe.

On peut se borner à résoudre la première ou la seconde, selon qu'on a

$$r''^6 < \frac{(1 - \eta_1)^3}{2(1 + \eta_1)^2} (\eta_1^3 r'^6 + \eta_1 r'^{18}),$$

$$\text{revenant à } Q^3 < 2\pi R_0 \frac{(1 - \eta_1)^3}{\eta_1(1 + \eta_1)^2} \left[ 4M^2 + \frac{1}{\eta_1} \left( R_0 \frac{M_1}{T_0} \right)^2 \right].$$

**Pièce à section elliptique fléchie à plat**

(ou parallèlement au diamètre  $c$  tel que  $\frac{b}{c} > \frac{T'_0}{T''_0}$ ) et en même temps tordue.

$$R_0 \frac{\pi bc^3}{4} = \frac{1 - \eta_1}{2} \cdot 8M' + \sqrt{\left( \frac{1 + \eta_1}{2} \cdot 8M' \right)^2 + \left( R_0 \frac{4M_1}{T'_0} \right)^2}$$

$$\text{ou } bc^3 = \frac{1 - \eta_1}{2} b'c'^3 + \sqrt{\left( \frac{1 + \eta_1}{2} b'c'^3 \right)^2 + (b''c''^3)^2},$$

$$\left( \text{où l'on a } b'c'^3 = \frac{32M'}{\pi R_0}, b''c''^3 = \frac{16M_1}{\pi T'_0} \right).$$

**Même pièce elliptique, en même temps étendue.**

$$\left( R_0 \frac{\pi bc^3}{4} - Qc - 8M' \right) \left( R_0 \frac{\pi bc^3}{4} + \eta_1 Qc + 8\eta_1 M' \right) = \left( R_0 \frac{4M_1}{T'_0} \right)^2,$$

équatio. à résoudre numériquement en se donnant ou  $b$ , ou  $c$ , ou  $\frac{b}{c}$  ou une autre fonction de ces deux dimensions inconnues, pour faire cesser l'indétermination.

**Même pièce comprimée en même temps que fléchie à plat et tordue.**

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( R_0 \frac{\pi bc^3}{4} + Qc - 8M' \right) \left( R_0 \frac{\pi bc^3}{4} - \eta_1 Qc + 8\eta_1 M' \right) = \left( R_0 \frac{4M_1}{T'_0} \right)^2 \\ \text{et } \left( R_0 \frac{\pi bc^3}{4} + Qc + 8M' \right) \left( R_0 \frac{\pi bc^3}{4} - \eta_1 Qc - 8\eta_1 M' \right) = \left( R_0 \frac{4M_1}{T'_0} \right)^2, \end{array} \right.$$

en prenant les plus fortes des valeurs de  $b$ ,  $c$  fournies, les unes par la première, les autres par la seconde de ces deux équations. On

( Du n° 150 ).

peut se borner à résoudre la première ou la seconde, selon que

$$\frac{c}{b} Q^3 < \text{ou} > 2\pi R_0 \frac{(1-\eta_1)^3}{\eta_1(1+\eta_1)^3} \left[ 4M^2 + \frac{1}{\eta_1} \left( R_0 \frac{M_1}{T_0} \right)^2 \right].$$

Même pièce elliptique fléchie de champ (§ 52) ou parallèlement au diamètre  $b$ , en même temps que tordue.

Si l'on a  $\left( \frac{M_1 R_0}{2T_0 M''} \right)^2 \left( \frac{b^2}{c^2} - \frac{T_0'^2}{T_0''^2} \right) < \left( \frac{1+\eta_1}{2} \right)^2$  [condition qui se réduit à  $\frac{M''}{M_1} > \sqrt{\frac{b^2}{c^2} - 1}$  s'il y a isotropie ou  $T_0' = T_0''$ ,  $R_0 = T_0(1+\eta_1)$ ], le point dangereux est à une extrémité du diamètre principal  $b$ , et il faut prendre

$$R_0 \frac{\pi b^2 c}{4} = \frac{1-\eta_1}{2} \cdot 8M'' + \sqrt{\left( \frac{1+\eta_1}{2} \cdot 8M'' \right)^2 + \left( R_0 \frac{4M_1}{T_0''} \right)^2},$$

$$\text{ou bien } b^2 c = \frac{1-\eta_1}{2} b'^2 c' + \sqrt{\left( \frac{1+\eta_1}{2} b'^2 c' \right)^2 + \left( b'' c'' \frac{T_0'}{T_0''} \right)^2}$$

( où  $b'^2 c' = \frac{32M''}{\pi R_0}$ ,  $b'' c'' = \frac{16M_1}{\pi T_0'} \cdot \pi T_0''$  ).

Même pièce étendue en même temps que fléchie de champ et tordue.

On a [ sous la même condition ( )  $< \left( \frac{1+\eta_1}{2} \right)^2$  ], l'équation suivante pour déterminer  $b$ ,  $c$ ,

$$\left( R_0 \frac{\pi b^2 c}{4} - Qb - 8M'' \right) \left( R_0 \frac{\pi b^2 c}{4} + \eta_1 Qb + 8\eta_1 M'' \right) = \left( R_0 \frac{4M_1}{T_0''} \right)^2.$$

Même pièce elliptique.  $\left\{ \begin{array}{l} 1^\circ \text{ fléchie et tordue, avec ou sans extension, quand} \\ \text{on n'a pas } \left( \frac{M_1 R_0}{2T_0 M''} \right)^2 \left( \frac{b^2}{c^2} - \frac{T_0'^2}{T_0''^2} \right) < \left( \frac{1+\eta_1}{2} \right)^2, \\ 2^\circ \text{ fléchie, tordue et comprimée.} \end{array} \right.$

Alors il faut (§ 52) résoudre concurremment les trois équations suivantes en  $b$ ,  $c$ , dont les deux premières sont relatives aux limites  $u = \frac{b}{2}$  et  $-\frac{b}{2}$  des valeurs de  $u$ , et, la troisième, à un maximum absolu, s'il y en a une entre ces limites :

(Du n° 156).

$$\begin{aligned} \left( R_0 \frac{\pi b^2 c}{4} \mp Qb - 8M'' \right) \left( R_0 \frac{\pi b^2 c}{4} \pm \eta_1 Qb + 8\eta_1 M'' \right) &= \left( R_0 \frac{4M_1}{T''_0} \right)^2, \\ \left( R_0 \frac{\pi b^2 c}{4} \mp Qb + 8M'' \right) \left( R_0 \frac{\pi b^2 c}{4} \pm \eta_1 Qb - 8\eta_1 M'' \right) &= \left( R_0 \frac{4M_1}{T''_0} \right)^2, \\ \left( bc^2 \mp \frac{4Qc}{\pi R_0} \right) \left( bc^2 \pm \eta_1 \frac{4Qc}{\pi R_0} \right) \left( \frac{R_0 M_1}{2T''_0 M''} \right)^2 \left( \frac{b^2}{c^2} - \frac{T''_0{}^2}{T''_0{}^2} \right) - \left( \frac{1 + \eta_1}{2} bc^2 \right)^2 &= \\ = \left( \frac{16M_1}{\pi T''_0} \right)^2 \left[ \left( \frac{R_0 M_1}{2T''_0 M''} \right)^2 \left( \frac{b^2}{c^2} - \frac{T''_0{}^2}{T''_0{}^2} \right) - \eta_1 \right], \end{aligned}$$

et adopter la plus forte de ces trois solutions, mais en excluant celle qui est fournie par la troisième équation, si, en substituant dans

$$\frac{2u}{b} = \frac{1}{8M''} \frac{\frac{1 - \eta_1}{2} R_0 \frac{\pi b^2 c}{4} \pm \eta_1 Qb}{\left( \frac{R_0 M_1}{2T''_0 M''} \right)^2 \left( \frac{b^2}{c^2} - \frac{T''_0{}^2}{T''_0{}^2} \right) - \eta_1},$$

il en résulte  $\frac{2u}{b} > 1$  ou  $< -1$ , car ce sera une preuve que le maximum absolu répond hors de la section, et il faudra prendre alors la plus forte des deux autres solutions.

**Même pièce elliptique fléchie obliquement.**

Particulariser alors l'équation générale (§ 44) et trouver par tâtonnement les solutions donnant le maximum voulu.

**Pièce rectangulaire tordue et en même temps fléchie à plat**

(c'est-à-dire perpendiculairement à celui des deux côtés qui, si on l'appelle  $b$ , et l'autre  $c$ , remplit la condition  $\frac{b}{T''_0} > \left( \frac{\gamma_1}{\gamma} \frac{b^2 G''}{c^2 G'} \right) \frac{c}{T''_0}$ ,  $\gamma_1$  et  $\gamma$  étant tirés de la table de la page 362).

$$R_0 bc^2 = \frac{1 - \eta_1}{2} \cdot 6M' + \sqrt{\left( \frac{1 + \eta_1}{2} \cdot 6M' \right)^2 + \left( \frac{\gamma}{2\mu} R_0 \frac{M_1}{T''_0} \right)^2}$$

**Même pièce rectangulaire, en même temps étendue ou comprimée par une force longitudinale Q.**

Résoudre la première des deux équations suivantes en  $b$  ou  $c$ , si

(Du n° 156).

la force  $Q$  agit pour étendre (et elle a alors les signes supérieurs) ; et les résoudre toutes deux si elle agit pour comprimer (et alors elle a les signes inférieurs) en adoptant la plus forte des deux solutions ,

$$(R_0 bc^2 \mp Qc - 6M')(R_0 b^2 c \pm \eta_1 Qc + 6\eta_1 M') = \left( \frac{\gamma}{2\mu} R_0 \frac{M_1}{T'} \right)^2,$$

$$(R_0 bc^2 \mp Qc + 6M')(R_0 b^2 c \pm \eta_1 Qc - 6\eta_1 M') = \left( \frac{\gamma}{2\mu} R_0 \frac{M_1}{T'} \right)^2.$$

On peut se contenter de résoudre la première ou la seconde

$$\text{selon que } \frac{c}{b} Q^3 \begin{cases} < \\ \text{ou} > \end{cases} R_0 \frac{(1-\eta_1)^2}{\eta_1(1+\eta_1)^2} \left[ 48M'^2 + \frac{1}{2\eta_1} \left( \frac{\gamma}{2\mu} R_0 \frac{M_1}{T'} \right)^2 \right].$$

**Même pièce rectangulaire fléchie de champ** ou parallèlement au côté  $b$ , et en même temps tordue , etc.

Prendre (voyez § 53) pour les dimensions  $b$ ,  $c$ , les plus fortes de celles qu'on obtient en plaçant les points dangereux successivement aux milieux des côtés  $c$  et en divers endroits des côtés  $b$ , déterminés par  $\frac{2u}{b} = 0, 0,1, 0,2, \dots, 0,9, 1$ , et interpolant paraboliquement par la méthode du § 34 pour déterminer l'emplacement et la grandeur du maximum.

**Même pièce rectangulaire fléchie obliquement**, ou par un couple dont le plan fait un angle quelconque  $\varphi$  avec les côtés  $c$ .

Chercher de la même manière (voyez § 53) le point dangereux sur les quatre côtés du contour d'une section.

**Pièce à section carrée**, dont la matière est supposée d'égale contexture dans les divers sens transversaux, et qui, en même temps qu'elle est tordue, est sollicitée à fléchir dans un plan faisant un angle constant  $\varphi$  avec un des côtés.

Chercher dans la table du § 55, p. 444, en interpolant au besoin par différences proportionnelles, le nombre par lequel il faut multiplier  $\frac{M}{R_0}$  pour avoir le cube  $b^3$  du côté à donner à la section (cette table suppose  $\eta_1 = 1/4$ ).

(Du n° 156).

Même pièce carrée si elle est tourmente, ou si elle doit, comme un arbre de machine, être sollicitée successivement dans toutes les inclinaisons ou pour toutes les valeurs de l'angle  $\varphi$ .

Calculer son côté  $b$  par la première ou la seconde des deux formules :

$$1^{\circ} \quad b^3 = \frac{6M}{R_0} \sqrt{2} = 8,485282 \frac{M}{R_0};$$

$$2^{\circ} \quad b^3 = 6 \frac{1-\eta_1}{2} \frac{M}{R_0} + \sqrt{\left(6 \frac{1+\eta_1}{2} \frac{M}{R_0}\right)^2 + 23,0773 \left(\frac{M_1}{T_0}\right)^2};$$

c'est-à-dire placer le point dangereux ou à un angle (où l'effet de la torsion est nul), ou au milieu d'un des côtés, selon qu'on aura

$$\frac{M_1}{T_0} < \text{ou} > 1,24902 \sqrt{2 - \eta_1 - (1 - \eta_1)\sqrt{2}} \cdot \frac{M}{R_0},$$

$$\text{qui est} \quad = 1,03702 \frac{M}{R_0} = \frac{28}{27} \frac{M}{R_0} \text{ si } \eta_1 = 1/4.$$

#### Pièces d'égale résistance, et pièces prismatiques.

Les dimensions des diverses sections des pièces d'égale résistance seront fournies par toutes ces formules en donnant, au moment de flexion, les valeurs qui conviennent à *chaque section* (§ 56).

Si l'on veut faire les pièces prismatiques ou cylindriques, on attribuera au moment de flexion  $M$  ou  $M'$  ou  $M''$  sa plus grande valeur, qui est relative à la section pour laquelle son bras de levier est le plus long.

#### Arbres de transmission de mouvement de rotation dans les machines.

Voir au § 57 le calcul des moments  $M$  et  $M_1$  qui le fléchissent et qui le tordent, afin de les substituer dans les formules.

§ 59. *Pièces encastées aux deux bouts. Valeur à donner au moment de torsion de chaque partie.* — Lorsqu'une pièce est encastée ou serrée à ses deux extrémités, de manière à ne pouvoir tourner autour de son axe qu'à des points intermédiaires, les moments de torsion de ses deux parties à droite et à gauche du point où elle est sollicitée à tordre, dépendent des réactions inconnues des parois des encastements.

(Du n° 156).

Pour en obtenir la grandeur, appelons :

$M_1$  le moment du couple qui est supposé solliciter la pièce dans un plan perpendiculaire à son axe ;

$a'$ ,  $a''$  les distances de ce plan à la première et à la deuxième extrémité ;

$m'$ ,  $m''$  les moments des réactions qui s'y exercent ;

$\theta'$ ,  $\theta''$ , les torsions respectives de l'unité de longueur de la partie  $a'$  et de la partie  $a''$  de la pièce.

Comme l'angle de torsion doit être le même au point de jonction de ces deux parties, on aura

$$\theta'a' = \theta''a''.$$

On aura aussi, pour l'équilibre de rotation,

$$M_1 = m' + m''.$$

Enfin, comme le moment des forces qui agissent sur la pièce à droite d'une section quelconque est  $m''$  pour la partie  $a''$ , et  $M - m' = m''$  pour la partie  $a'$ , et comme les torsions de l'unité de longueur de ces parties sont proportionnelles à ces moments, on a  $\frac{\theta'}{\theta''} = \frac{m'}{m''}$ , ou  $\frac{m'}{m''} = \frac{a''}{a'}$  ; d'où, avec  $M_1 = m' + m''$  :

$$m' = M_1 \frac{a''}{a' + a''}, \quad m'' = M_1 \frac{a'}{a' + a''}.$$

Ce sont ces valeurs des moments de torsion des deux parties  $a'$ ,  $a''$  de la pièce que l'on substituera dans les formules du § 40 pour avoir leurs torsions  $\theta'$ ,  $\theta''$ .

Et les dimensions transversales à donner à la pièce supposée prismatique ou cylindrique seront calculées pour la partie la plus courte, parce que ce sera, d'après  $\theta'a' = \theta''a''$ , celle qui éprouvera la torsion la plus grande.

Une pièce à la fois fléchie et tordue peut être encastree aux deux bouts quant à la torsion et non quant à la flexion, ou réciproquement.

On en verra un cas aux applications numériques, § 66. Les autres cas ne pourront être traités qu'à la section IV, article 1, n° 371 à 374, où l'on s'occupera des pièces doublement encastrees quant à la flexion ou dont l'axe a ses deux tangentes extrêmes dans une direction déterminée.

( Du n° 156 ).

§ 60. *Rupture immédiate par torsion. Proportionnalité des résistances à cette rupture aux cubes des dimensions homologues des sections semblables.* — Toutes les équations de cohésion ci-dessus, dressées pour prévenir toute rupture même éloignée, sont essentiellement fondées sur ce que les dilatations et glissements, au-dessous des limites adoptées  $\frac{R_0}{E}$ ,  $\frac{T_0}{G}$ , restent assez petits pour ne pas cesser d'être sensiblement proportionnels aux efforts qui les produisent.

On ne peut aller au delà, et en s'aidant d'hypothèses plausibles sur la relation inconnue entre les efforts et les effets quand ceux-ci ne sont plus très-petits, dresser aussi quelques formules propres à prévenir la rupture *immédiate* ou *prochaine* par torsion, formules utiles pour les constructions légères, temporaires et continuellement surveillées, telles que les échafaudages, etc.

Mais démontrons auparavant deux théorèmes de proportionnalité relatifs aux sections *semblables*.

Coulomb fait le raisonnement suivant (1) sur la grandeur relative du moment de la *réaction de torsion* de divers fils métalliques cylindriques, ou de leur résistance élastique à une torsion d'un angle donné, grandeur qui est désignée ci-dessus par

$$\frac{M_1}{G\theta}.$$

« Ce *momentum* », dit-il, « doit augmenter avec la grosseur des fils de plusieurs manières..... Dans un diamètre double, il y a quatre fois plus de parties tendues par la torsion....., et l'extension moyenne de toutes ces parties est proportionnelle au diamètre du fil, de même que le bras moyen de levier de leur résistance. Ainsi, nous sommes portés à croire, d'après la théorie, que la force de torsion de deux fils de métal de la même nature et de la même longueur... est proportionnelle à la quatrième puissance de leur diamètre. »

Et les expériences de Coulomb confirment sa prévision.

(1) Recherches théoriques et expérimentales sur la force de torsion et sur l'élasticité des fils de métal ( *Mémoires de l'Acad. des sciences*, volume de 1784, publié en 1787; § XIII ).



(Du n° 156).

Cette proportionnalité de  $\frac{M_1}{G\theta}$  à la quatrième puissance des dimensions transversales homologues aura lieu également pour deux prismes à sections quelconques, mais *semblables*, à la condition que les glissements sur les sections du prisme restent assez petits pour que les résistances ou réactions tangentielles ne cessent pas de leur être proportionnelles. En effet, les plans de ces sections de deux prismes semblables se courberont de la même manière par la torsion, en sorte que les glissements sur l'une et sur l'autre auront entre eux, à leurs points homologues, le même rapport qui sera, pour même angle de torsion, celui des arcs, c'est-à-dire celui des dimensions linéaires homologues de ces deux sections. Les réactions élastiques provenant de ces glissements suivent le même rapport par hypothèse. Il en est de même des bras de levier de leurs moments; et les superficies  $d\omega$  des éléments où elles s'exercent sont évidemment comme les carrés de ces dimensions. Les moments totaux sont donc comme leurs quatrièmes puissances, ou comme les carrés  $\omega^2$  des aires, ainsi que l'ont donné, au reste, toutes les formules ci-dessus et aussi toutes les expériences.

Il en sera autrement si les glissements, sans même cesser d'être *petits* ou d'avoir leurs carrés négligeables devant l'unité, arrivent néanmoins à des valeurs telles que la loi ordinaire de l'élasticité ne s'observe plus ou que leurs actions tangentielles correspondantes ne leur soient plus sensiblement proportionnelles, ce qui, généralement, arrive bien avant l'énervation de la matière (\*). En effet, ces réactions, dont le moment total est  $M_1$ , ne suivront plus, comme les glissements, la proportion des dimensions linéaires des sections, et  $\frac{M_1}{\theta}$  ne sera plus en raison des quatrièmes puissances de ces dimensions.

Mais si alors, au lieu de la même torsion  $\theta$  dans les deux prismes semblables et inégaux, on a le même plus grand glissement sur chaque section, et, par conséquent, le même plus grand effort

\* Nous avons dit (§ 6 de la note du n° 152) que la résistance élastique aux

(Du n° 156).

*transversal* qui en dépend, et qui pourra même être l'effort T au delà duquel la rupture se déclare immédiatement, *les moments de torsion*  $M_1$  de ces deux prismes seront entre eux comme les cubes des dimensions transversales homologues.

En effet, il résulte de la similitude que les glissements se distribueront de la même manière sur les deux sections, l'une plus grande, l'autre plus petite; que, par conséquent, les efforts tangentiels, égaux en deux points homologues par hypothèse, seront aussi égaux chacun à chacun en tous les points homologues de l'une et de l'autre section. Les moments partiels seront ainsi en raison composée des bras de levier et des superficies des éléments, et, comme on peut supposer ceux-ci en même nombre dans l'une et dans l'autre, les moments totaux seront comme les produits des superficies des sections par leurs dimensions homologues.

Quelle que soit donc la loi inconnue, suivant laquelle les réactions transversales dépendent des glissements qui dépassent une certaine grandeur, on peut regarder les moments capables de produire la prompte rupture, et qu'on pourrait appeler *limite instantanée* de  $M_1$ , comme proportionnels, pour les sections semblables, aux cubes de leurs dimensions homologues, ou aux racines carrées  $\sqrt{\omega^3}$  des cubes des superficies  $\omega$  (1).

glissements dérive de la résistance aux dilatactions qu'ils produisent dans des sens obliques. Un glissement de grandeur quelconque  $g$  déplacera relativement, dans son sens, d'une quantité  $ag$  les points correspondants de deux éléments linéaires parallèles à une distance  $a$  l'un de l'autre, ce qui dilatera une droite comprise entre eux et faisant avec leur normale commune un angle dont la tangente est  $x$ , dans

la proportion  $\frac{\sqrt{a^2 + (ax + ag)^2} - \sqrt{a^2 + a^2x^2}}{\sqrt{a^2 + a^2x^2}}$ . Le maximum de cette dilatation

proportionnelle a lieu pour l'inclinaison  $x = \sqrt{4 + \frac{g^2}{4}} - \frac{g}{2}$  et a pour grandeur

$\frac{g}{2} + \sqrt{4 + \frac{g^2}{4}} - 4$ . Tant que  $g$  n'excède pas  $4/5$ , cette dilatation maximum

peut être prise  $= \frac{g}{2}$  comme quand le glissement est extrêmement petit. Mais une

dilatation de  $1/10$  et même  $1/100$  excède tout à fait celles qui laissent subsister la loi de proportionnalité, et même la cohésion pour la plupart des matières.

(1) Des expériences de M. Vicat (*Ann. des ponts et ch.*, 1833, 2<sup>e</sup> sem., p. 228)

(Du n° 150).

C'est de même que, pour la flexion, nous avons prouvé (§ 1 de la note du n° 151) que les moments  $M$  des résistances à la rupture immédiate sont proportionnels aux produits  $bc^2$  des largeurs par les carrés des hauteurs quand les sections sont ou semblables ou même simplement susceptibles de le devenir par la réduction de toutes les ordonnées de l'une des deux dans un même rapport, bien que ces moments  $M$  pour même flexion  $\frac{1}{\rho}$  ou même rayon de courbure  $\rho$  de l'axe ne soient comme  $bc^2$  qu'autant que les dilatations des fibres restent dans les limites où les tractions correspondantes leur sont proportionnelles.

§ 61. *Calcul approximatif des résistances à la rupture immédiate ou prochaine par torsion, quand les sections sont, 1° circulaires, 2° rectanglées larges et minces.* — Ce calcul sera analogue à celui que nous avons donné au § 2 de la note du n° 151 pour la rupture immédiate par flexion; mais nous ne pourrons, pour la torsion, l'appliquer qu'à deux formes de section.

Soit d'abord un cylindre dont les sections sont circulaires. Elles seront encore planes après la torsion, car elles n'ont aucune raison de se courber plutôt du côté de l'une que du côté de l'autre des deux extrémités du cylindre qui reçoivent l'action de couples égaux et opposés.

Soient

$r$  le rayon du cylindre;

$r$  le rayon vecteur d'un élément  $d\omega$  de sa section quelconque  $\omega$ ;

$p$  la résistance tangentielle sur l'unité superficielle de cet élément;

$T$  la valeur de  $p$  au contour des sections, ou pour  $r = r$ .

$P, V$  deux constantes, et  $m$  un exposant plus grand que 1.

---

semblent contraires à cette conclusion. Mais, faites avec des prismes de plâtre ou de *brique crue*, très-courts, qui étaient plus ou moins fléchis en même temps que tordus, elles ne pouvaient réaliser cette similitude de distribution des efforts intérieurs sur laquelle notre raisonnement se fonde, et elles ne paraissent pas propres à justifier la loi des cubes des dimensions, qui a été presque constamment manifestée par les expériences d'autres auteurs sur des barres métalliques; loi que M. Vicat lui-même adopte finalement (*id.*, p. 235) pour les prismes d'une certaine longueur.

(Du n° 156).

Les glissements, qui ont pour mesure les projections, sur la section, de l'unité de longueur portée sur les tangentes aux fibres devenues des hélices toutes de même pas  $\frac{2\pi}{\theta}$ , sont représentés par  $\frac{2\pi r}{\theta} = \theta r$  lorsque  $\theta$  est grand comme lorsqu'il est petit, et sont ainsi

proportionnels aux distances  $r$  de ces fibres à l'axe. Nous pouvons donc prendre, par analogie avec ce que nous avons fait p. 176, l'expression suivante de la résistance au glissement à la distance  $r$  :

$$p = P \left[ 1 - \left( 1 - \frac{r}{V} \right)^m \right]$$

qui satisfait à la double condition, indiquée par l'expérience :

1° De croître proportionnellement aux très-petits glissements répondant à d'assez petites valeurs de  $r$  pour qu'on puisse ne conserver que la première puissance de  $\frac{r}{V}$  dans le développement de

$\left( 1 - \frac{r}{V} \right)^m$ , ce qui donne  $p = m \frac{P}{V} r$ .

2° De croître moins que  $r$  ou que le glissement quand il devient plus considérable.

On aura, au reste, la constante,

$$P = \frac{T}{1 - \left( 1 - \frac{r}{V} \right)^m},$$

vu que pour  $r = r$ , on a  $p = T$  par hypothèse.

En faisant  $d\omega = 2\pi r dr$ , qui est l'aire d'une couronne de rayon  $r$  et d'épaisseur  $dr$ , on trouve, pour le moment de torsion,

$$\begin{aligned} M &= \int_0^{\omega} p d\omega \cdot r = 2\pi P \int_0^r \left[ 1 - \left( 1 - \frac{r}{V} \right)^m \right] r^2 dr = \\ &= 2\pi P V^3 \left[ \frac{1}{3} \left( \frac{r}{V} \right)^3 + \frac{1}{m+1} \left( 1 - \frac{r}{V} \right)^{m+1} - \frac{2}{m+2} \left( 1 - \frac{r}{V} \right)^{m+2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{m+3} \left( 1 - \frac{r}{V} \right)^{m+3} - \frac{2}{(m+1)(m+2)(m+3)} \right]. \end{aligned}$$

Si nous faisons la remarque, analogue à celle des pages 180-181.

( Du n° 156 .

que  $T$  est la plus grande valeur que la réaction  $p$  puisse atteindre, puisque, pour un glissement plus fort que celui qui y répond, il y a rupture, ou très-rapide diminution de la force, nous imposerons la condition

$$\frac{dp}{dr} = 0 \text{ pour } r = r; \text{ ce qui donne } V = r, P = T,$$

et ce qui réduit l'expression précédente du moment à

$$M_1 = \frac{\pi r^3 T}{2} \left( \frac{1}{3} - \frac{2}{(m+1)(m+2)(m+3)} \right),$$

d'où successivement :

Pour  $m = 1, 2, 3, 4, \dots, \infty$

$$M_1 = \frac{1}{2} \pi r^3 T, \frac{3}{5} \pi r^3 T, \frac{19}{30} \pi r^3 T, \frac{68}{105} \pi r^3 T, \dots, \frac{2}{3} \pi r^3 T.$$

Le moment qui produit la rupture immédiate par torsion varie ainsi entre la moitié et les deux tiers du produit de  $\pi r^3$  par la cohésion tangentielle instantanée  $T$ .

Pour arriver de même à une expression de la résistance à la rupture immédiate par torsion d'une lame rectangulaire mince, ou d'un prisme rectangle à base  $b \times c$  dont le côté  $b$  est beaucoup plus grand que  $c$ , nous rappellerons que nous avons trouvé, pour ces sortes de prismes (§ 24, p. 289, § 26, p. 296), les mêmes résultats que par les formules transcendantes et rigoureuses, en assimilant simplement leur section à l'ellipse inscrite quant' aux glissements qui y ont lieu, en sorte qu'on a pour ces glissements, en embrassant de suite le cas d'inégale texture, et en négligeant, aux dénominateurs,  $\frac{c^2}{G''}$  devant  $\frac{b^2}{G'}$  :

$$g' = -2\theta v, \quad g'' = 2 \frac{c^2 G'}{b^2 G''} \theta u.$$

Admettons que nous avons encore ces expressions des glissements lorsqu'ils deviennent, comme nous supposons ici, assez grands pour que les résistances tangentielles qu'ils provoquent dans

(Du n° 156).

les sens  $u, v$  cessent de leur être proportionnelles ; et, en appelant

$p', p''$  ces résistances ou tensions par unité superficielle des éléments  $d\omega$  où elles s'exercent ;

$T'$  la limite de  $p'$  ou la plus grande tension tangentielle que la matière puisse supporter dans le sens  $u$  sans rompre immédiatement ;

$P', P'', V, U$  des constantes ;

$m, n$  des exposants  $> 1$  ;

posons les expressions

$$p' = -P' \left[ 1 - \left( 1 - \frac{v}{V} \right)^m \right], \quad p'' = P'' \left[ 1 - \left( 1 - \frac{u}{U} \right)^n \right]$$

Elles donneront, comme elles le doivent,  $p' = G'g'$  et  $p'' = G''g''$  pour les petits glissements ou pour les valeurs de  $v, u$  dont la petitesse permettra de ne conserver que deux termes des développements des parenthèses, si les constantes satisfont aux équations

$$-G' \cdot 2\theta v = -P'm \frac{v}{V}, \quad G'' \cdot 2 \frac{c^2 G'}{b^2 G''} \theta u = P''n \frac{u}{U},$$

qui, divisées l'une par l'autre, pour éliminer  $\theta$ , donnent la relation

$$P'' = P' \frac{m c^2 U}{n b^2 V}.$$

De plus, comme les points dangereux sont aux extrémités de la petite médiane  $c$  quelle que soit l'inégalité de contexture quand cette médiane est incomparablement moindre que l'autre, il faudra qu'à l'instant de la rupture,

pour  $v = \frac{c}{2}$ , on ait  $p' = T$ , et  $\frac{dp'}{d} = 0$  ;

ce qui donne  $V = \frac{c}{2}, P' = T$ .

Enfin, comme les glissements  $g''$  sont toujours beaucoup plus petits que les glissements  $g'$ , nous pouvons admettre que  $p''$  reste à très-peu près proportionnel à  $g''$ , et par conséquent à  $u$ , ce qui exige que la constante  $U$  soit assez grande pour qu'on puisse ne

(Du n° 156).

conserver que deux termes du développement de  $\left(1 - \frac{u}{U}\right)^n$ ; d'où

$$p'' = P''n \frac{u}{U}.$$

Mettant pour  $P''$  sa valeur ci-dessus, les indéterminées  $n$  et  $U$  disparaissent, en sorte que nous avons pour représenter, d'une manière probablement très-approchée, les deux composantes de la tension ou résistance tangentielle dans les sens  $u, v$ :

$$p' = -T' \left[ 1 - \left(1 - \frac{2v}{c}\right)^m \right], \quad p'' = T'm \frac{c}{b} \cdot \frac{2u}{b}.$$

D'où, pour le moment de torsion  $M_1 = \int_{-1/2b}^{1/2b} du \int_{-1/2c}^{1/2c} dv (p''u - p'v)$ :

$$M_1 = bc^2 T' \left( \frac{m}{6} + \frac{2^{m-1} m}{(m+1)(m+2)} \right).$$

Cette expression donne successivement pour les hypothèses :

$$\begin{aligned} m &= 1, & 2, & 3, & 4, & \text{etc.} \\ M_1 &= \frac{1}{3} bc^2 T', & \frac{2}{3} bc^2 T', & \frac{11}{10} bc^2 T', & \frac{26}{15} bc^2 T', & \text{etc.} \end{aligned}$$

On aurait des expressions intermédiaires pour les valeurs fractionnaires qu'on peut attribuer à  $m$ .

Le moment de résistance à la rupture immédiate des lames ou prismes minces est, comme le moment de résistance à la rupture éloignée, proportionnel à la largeur  $b$  et au carré de l'épaisseur  $c$ ; et le coefficient numérique dont il faut affecter leur produit par la cohésion tangentielle instantanée  $T'$  croît beaucoup avec l'exposant  $m$  mesurant en quelque sorte l'excès de rapidité de la croissance de la tension  $p'$  sur celle du glissement correspondant  $g'$ .

Si l'on tire la cohésion tangentielle  $T'$  de ces équations, on a, pour même moment  $M_1$  capable de la vaincre, une quantité d'autant moindre que cet exposant  $m$  est plus grand, ou que le glissement croît plus avec l'effort.

Ces résultats relatifs à la rupture par torsion, soit des cylindres, soit des lames, expliquent comment les coefficients de cohésion tangentielle  $T, T'$  qu'on obtient en appliquant les formules ordi-

(Du n° 156).

naïres  $M_1 = \frac{\pi r^3 T}{2}$ ,  $M_1 = \frac{bc^3 T'}{8}$  à des expériences de rupture immédiate par torsion, peuvent être trouvés plus grands que lorsqu'on les détermine par des expériences de cisaillement, de même que les cohésions normales R déterminées par la formule ordinaire de rupture par flexion  $M = \frac{RI}{v'}$  sont plus fortes que celles qui résultent d'expériences de traction (§ 3 de la note du n° 151).

Comparées à des résultats d'expériences, ces formules donneraient des notions sur la relation qui lie les tensions aux glissements d'une certaine grandeur, et on en tirerait diverses conséquences pratiques.

§ 62. *Détermination, pour les diverses matières, des coefficients numériques G, T., G', G'', T., T'', T.* — Le coefficient d'élasticité de glissement G, si la matière est isotrope ou si sa contexture est la même en tous sens, est fourni par la relation que nous lui avons trouvée avec le coefficient d'élasticité d'extension E, au § 2 de la note du n° 152 (1), savoir  $G = 2/5 E$ .

Mais ordinairement, et même dans les prismes de matière fondue et non fibreuse, la contexture n'est pas la même dans le sens longitudinal que dans les sens transversaux. Alors si elle est égale dans ceux-ci, on n'a toujours qu'un seul coefficient G à déterminer, mais il ne peut être déduit que d'expériences où le glissement entre en jeu. Les expériences sur le *glissement sans torsion* qui a été considéré aux notes des numéros 152, 153, 154, ainsi qu'aux §§ 45 et 46 ci-dessus, ne sont guère possibles, car elles porteraient sur des quantités trop peu perceptibles, et d'ailleurs toujours mêlées à ce qui vient de la flexion. Mais les *expériences de torsion* des cylindres à base circulaire ou des prismes dont les sections sont comprises aux formules récapitulées au § 40 feront connaître facilement les va-

(1) A l'appendice, après le n° 468, nous donnerons une autre démonstration plus simple de cette relation ainsi que du rapport 4 : 4 entre les contractions transversales et les dilatations longitudinales, et nous nous proposons aussi d'y établir d'une manière simple les formules générales de la théorie de l'élasticité des solides.



(Du n° 150).

leurs de  $G$  en mesurant l'angle  $\tau$  de la torsion produite par le moment  $M_1$  des forces appliquées à un prisme ou cylindre de longueur  $a$  et substituant, dans les formules, la torsion  $\theta = \frac{\tau}{a} \frac{2\pi}{360}$  due à ce moment par unité de longueur.

Si, dans ces expériences, il y a en même temps une petite flexion, ce n'est pas une raison de rien changer aux conclusions qu'on en tire; car l'équation des moments autour de l'axe de la pièce est indépendante de l'équation des moments autour de droites transversales, suivant le principe de simultanéité du § 2 de la note du n° 21.

On a trouvé souvent, avec des métaux,  $G$  à peu près égal à  $1/3 E$ , ce qui s'écarte peu de  $2/5 E$ , qu'on aurait sans doute obtenu s'il y avait eu parfaite isotropie.

Les deux coefficients  $G'$ ,  $G''$  du cas d'inégale élasticité transversale ne pourraient être déterminés de cette manière, ou en appliquant à un résultat d'expérience de torsion l'une des formules du § 40 relatives à ce cas général, qu'autant qu'on connaîtrait d'avance le rapport  $\frac{G'}{G''}$ .

Si l'on ne peut pas parvenir à se faire une idée de ce rapport par des expériences directes et suffisamment délicates de glissements sans torsion en défalquant, des *flèches complètes* (§ 4 de la note du n° 153, p. 214, et § 45 ci-dessus), ce qui vient des seules flexions, on soumettra successivement à la torsion deux prismes *plats*, ou à section rectangulaire étroite et large, taillés dans les deux sens principaux d'élasticité ou de symétrie de contextura. Soit  $b$  le grand côté des sections,  $c$  l'autre supposé très-petit; en prenant successivement  $b$  parallèle et perpendiculaire au sens de  $G'$  et appelant  $M_1$ ,  $M'_1$  les moments des forces produisant la torsion, on aura à peu près (§ 40, p. 362) :

$$M_1 = \left( \frac{1}{3} - 0, 21 \frac{c}{b} \sqrt{\frac{G'}{G''}} \right) 0bc^3 G', \quad M'_1 = \left( \frac{1}{3} - 0, 21 \frac{c}{b} \sqrt{\frac{G''}{G'}} \right) 0bc^3 G''$$

équations dont la première divisée par la seconde en donnera une

(Du n° 150).

autre, du quatrième degré en  $\sqrt{\frac{G'}{G''}}$ , d'où l'on tirera le rapport cherché  $\frac{G'}{G''}$ .

Les sens principaux d'élasticité ou de symétrie seront ordinairement indiqués par ceux des couches dans les bois, et par ceux de forgeage, laminage, etc., dans les métaux. Mais on pourra, dans tous les cas, prendre pour tels ceux qui donnent le plus grand ou le plus petit rapport de  $G'$  à  $G''$ , ou de  $M_1$  à  $M'_1$ , et les trouver ainsi par plusieurs essais.

Le coefficient de cohésion tangentielle permanente  $T_0$ , dont le quotient par celui d'élasticité  $G$  donne la limite des glissements non dangereux dans un prisme d'égale contexture transversale, aurait pour valeur, si la matière était *isotrope* ou constituée de même longitudinalement :

$$T_0 = 2G \frac{R_0}{E} = \frac{4}{5} R_0,$$

égalité qui exprime (§ 9 de la note du n° 152) que la proportion  $\frac{1}{2} \frac{T_0}{G}$  du plus grand écartement moléculaire oblique provenant du glissement  $\frac{T_0}{G}$  soit égale à la dilatation  $\frac{R_0}{E}$  due à la limite  $R_0$  des tractions longitudinales.

Si la contexture est différente, dans le sens longitudinal, de ce qu'elle est dans les sens transversaux, et si l'on a déterminé, pour ceux-ci, les valeurs de l'élasticité et de la cohésion d'extension, ou de ce que nous avons appelé  $E_t$  et  $R_{0t}$  (§ 13 de la note du n° 113 et § 43 ci-dessus de la présente note), on pourra prendre, d'après ce que nous avons trouvé (à ce dernier §, p. 378) pour la limite de  $g = \frac{T_0}{G}$ , la valeur suivante, plus générale que  $T_0 = 2G \frac{R_0}{E}$ , et qui a été la conséquence d'une hypothèse naturelle et plausible sur la loi inconnue des limites des dilatations dans les divers sens

$$T_0 = 2G \sqrt{\frac{R_0 R_{0t}}{E E_t}};$$

(Du n° 156).

ce qui exprime simplement que la limite à imposer à un glissement est deux fois la moyenne proportionnelle des limites des dilata-tions dans les deux sens rectangulaires où il a lieu.

Mais il vaudra généralement mieux, surtout si l'on considère l'in-certitude sur la valeur de la cohésion normale  $R_0$ , déterminer direc-tement la cohésion tangentielle  $T_0$  par différents moyens comme nous avons dit qu'on faisait pour celle-ci (§ 12 de la note du n° 21 et §§ 10 à 14 de celle du n° 113).

Le meilleur serait sans doute de chercher, par des expériences longtemps prolongées dans diverses circonstances d'équilibre et de mouvement, sous quel effort de torsion la matière, après avoir éprouvé de petites déformations permanentes, cesse de s'*écrouir* et commence à s'*énervier*, c'est-à-dire à subir des déformations nou-velles sous des efforts moindres que ceux qui en ont déjà produit; puis, de déduire  $T_0$  en se tenant prudemment en deçà de ce point, afin de laisser une large part aux circonstances accidentelles et im-prévues (§ 12 de la note du n° 21).

Vu la difficulté de pareilles observations et faute de pouvoir, ainsi, arriver à une connaissance sûre de la meilleure des valeurs à attri-buer à  $T_0$  pour satisfaire à l'économie comme à la solidité, on se bornera souvent à une imitation raisonnée de constructions exis-tantes et éprouvées comme possédant au moins cette dernière qua-lité. C'est ainsi que, pour le diamètre  $d$  des arbres cylindriques en fonte, on prend, d'après l'usage des usines d'artillerie (1),

$d^3 = \frac{M_1}{262000}$ , expression qui, comparée à la formule ci-dessus (§ 40,

p. 359),  $\text{lim. } M_1 = \frac{\pi r^3}{2} T_0 = \frac{3,1416 d^3}{16} T_0$ , donne pour cette matière :

$$T_0 = 1334000.$$

On se servira aussi, au moins pour des comparaisons de diverses

---

(1) *Leçons sur la résistance des matériaux* de M. le général Morin, membre de l'Institut, 2<sup>e</sup> édition, n° 388, p. 462 où  $PR$ ,  $r'$ ,  $\frac{a}{l}$ ,  $\frac{r'a}{L}$ ,  $G \frac{r'a}{L}$  désignent respecti-vement ce que nous appelons  $M_1$ ,  $r$ ,  $\delta$ ,  $r_m$  et  $T_0$ .

(Du n° 156).

qualités ou variétés d'une même matière, d'expériences de rupture *immédiate*, soit par cisaillement, soit par torsion, comme nous avons dit qu'on faisait pour la flexion et pour l'extension simple (notes des n° 113 et 21), en prenant pour  $T_0$  le  $1/4$  ou  $1/5$  ou  $1/6$ , etc., de ce que donneront pour  $T$  les formules ci-dessus de *rupture éloignée*, appliquées à ces expériences, si, pour une qualité ou variété, cette proportion  $1/4$  ou etc., a été reconnue convenable. Ce ne sera pas faire la supposition fautive que la loi d'élasticité ou de proportionalité, sur laquelle les formules en question sont basées, se conserve jusqu'à l'instant des ruptures opérées; ce sera supposer simplement (note du n° 113, § 12) que la valeur-limite à adopter, soit pour l'effort transversal, soit pour le moment de torsion auquel on peut soumettre un solide pendant un temps indéfini, n'est que le  $1/4$ , etc., de celui qui fait rompre au bout de peu d'instant, en sorte que  $T_0$  sera bien ce que donnera la formule vraie, pourvu qu'on y mette pour  $P'$  ou  $M_1$  cette fraction de l'effort ou du moment qui agissait quand la rupture a été produite. Cette supposition est tout aussi plausible avec le cisaillement ou la torsion qu'avec l'extension ou la flexion.

La torsion offre même, à cet égard, des circonstances plus simples que la flexion; car comme, dans celle-ci, le danger de rupture peut se trouver, pour certaines matières ou pour certaines formes de sections, du côté des fibres comprimées, il y a deux coefficients  $R_0$  et  $R'_0$  à déterminer (§ 13 note n° 113), tandis qu'il n'y en a qu'un pour la torsion, au moins quand la matière est d'égale contexture transversale.

Si c'est d'expériences de rupture par glissement sans torsion qu'on veut se servir, on pourra, pour les métaux, opérer comme MM. Gouin et compagnie (§ 9 de la note du n° 152) (\*), qui ont cisailé des tringles de fer en en séparant transversalement des

---

(\*) La manière dont ces expérimentateurs ont opéré, et qui consiste à introduire une tringle ronde de fer dans les trois trous circulaires correspondants d'une pièce plate en acier trempé et d'une pièce en fourchette, de même matière, comprenant l'autre entre ses deux branches, puis à tirer ces deux pièces en sens contraire, nous paraît bien préférable à la méthode de M. Vicat, qui refoulait, et détachait au moyen d'un piston, un petit cylindre compris entre deux trous ronds et égaux percés suivant le même axe dans une plaque épaisse de la matière dont il voulait mesurer la force transverse (*Ann. des ponts et ch.* 1833, 2<sup>e</sup> semestre,

(Du n° 156).

tranches ou rondelles par des efforts agissant dans le plan même de séparation. Mais il faudra, d'après ce que nous avons dit à la fin du § 45, si le métal est fibreux ou bien s'il s'agit de mesurer la grandeur de  $T$ , pour des bois, tâcher de répéter l'épreuve sur de petits prismes qui soient extraits du solide dans un sens perpendiculaire aux fibres, afin d'évaluer comparativement la résistance à leur séparation par glissement les unes sur les autres, et d'adopter pour  $T$ , la fraction  $1/4$  ou  $1/5$ , etc., de celle des deux résistances qu'on trouvera la moindre.

On pourra aussi, pour les bois, faire des expériences sur des prismes très-courts appuyés aux extrémités et sollicités transversalement au milieu par une force  $2P$  donnant des réactions  $P$  pour chaque appui, et qu'on augmentera successivement jusqu'à ce qu'il y ait fente ou séparation des fibres par glissement longitudinal, et, en adoptant pour  $P'$  le  $1/4$



ou  $1/5$ , etc., de  $P$ , prendre  $T = \frac{3P'}{2\omega}$  multiplié par l'un des coefficients de réduction 0,849, 0,940, 0,940, etc., trouvés au § 45 comme devant affecter  $\frac{3P'}{2\omega}$  pour donner le glissement maximum  $g''$ , selon qu'on a  $\frac{1}{2}$  ou 1 ou  $\frac{3}{2}$ , etc., pour le rapport  $\frac{c}{b}$  des deux côtés de la section rectangle de base  $b \times c = \omega$ .

Mais ce sera surtout à des expériences de rupture par torsion qu'on appliquera cette méthode. Il faudra, sans attendre la séparation transversale, n'augmenter successivement les forces que jusqu'à l'instant où il se déclarera des fentes longitudinales, et substituer alors dans les formules du § 40, à la place de  $\text{lim. } M_1$ , la fraction convenue  $1/4$  ou  $1/5$ , etc., de leur moment.

p. 255) ; car les diverses normales à la surface de séparation, qui est, dans ce cas, la surface latérale du petit cylindre, sont convergentes et non parallèles comme les fibres des triangles de la première méthode, et elles doivent opposer une bien plus grande résistance à l'action qui les incline sur cette surface avant de les en séparer. L'illustre ingénieur reconnaît lui-même que la pulvérescence qui s'étend à une certaine profondeur atteste combien a dû être violent le mode de désorganisation de la matière, en sorte que la mesure qu'on en conclut pour cette force *transverse* ou cohésion tangentielle  $T$  doit excéder beaucoup sa grandeur réelle.

(Du n° 156).

Si, dans les expériences de rupture par torsion, il y a eu en même temps flexion, cette circonstance ne devra pas être négligée dans la détermination de  $T_0$ , qui doit alors être déduit des formules de torsion et flexion simultanées (voy. § 65).

Enfin, de même qu'on adopte quelquefois (§ 14 de la note du n° 113), pour le coefficient  $R_0$  des formules d'extension ou de flexion, des valeurs qui donnent la même grandeur à la dilatation limite  $\frac{R_0}{E}$  pour diverses matières, ce qui est simplement supposer  $R_0$  proportionnel à  $E$ , on prend quelquefois pour  $T_0$ , qui entre dans les formules de torsion, des valeurs donnant le même glissement-limite  $\frac{T_0}{G} = g_m$  pour diverses matières, ce qui est simplement rendre le coefficient de cohésion permanente tangentielle  $T_0$  proportionnel au coefficient d'élasticité de glissement  $G$ . Ainsi, comme  $G$  pour le fer est triple du même coefficient pour la fonte, plusieurs constructeurs, en adoptant (comme on a dit)  $T_0 = 1\ 334\ 000^k$  par mètre carré de section pour la fonte, prennent, pour le fer,

$$T_0 = 3 \times 1\ 334\ 000 = 4\ 002\ 000^k;$$

ce qui donne, pour l'une comme pour l'autre matière :

$$g_m = \frac{T_0}{G} = 0,000\ 667.$$

Cette parité, pour le fer forgé et pour le fer fondu, de la limite la plus convenable à imposer au glissement, n'a rien d'improbable. Mais si l'on adopte la même limite pour les bois, en prenant par exemple  $T_0 = 26680$  pour le chêne parce que son coefficient d'élasticité  $G$  est le 1/5 de celui de la fonte, ce ne peut être qu'à cause de la privation où l'on est jusqu'ici de documents expérimentaux sur la résistance à la rupture par torsion de matières autres que la fonte.

Lorsque la contexture n'est pas la même dans les divers sens transversaux, le rapport des coefficients de cohésion tangentielle  $T'_0$ ,  $T''_0$  peut s'obtenir au moyen d'expériences comparatives de cisaillement ou de fente, faites comme ci-dessus, en dirigeant successivement l'effort transversal dans deux sens rectangulaires présumés être les sens *principaux* ou de symétrie de contexture ; sens

(Du n° 153).

que l'on peut même déterminer expérimentalement par la condition qu'ils donnent, l'un la plus grande, l'autre la plus petite cohésion tangentielle.

Mais des expériences de rupture, par torsion, de lames rectangulaires taillées dans deux sens, peuvent également, et d'une manière probablement plus facile, servir à déterminer approximativement le rapport de  $T_0$  à  $T'$ , car les formules p. 361, 362, montrent que lorsque le côté  $b$  de la section rectangle est beaucoup plus grand que le côté  $c$ , on a sensiblement, à la limite,  $\frac{2\mu}{\gamma} = 1/3$  ou  $M_1 = \frac{1}{3} bc^2 T'_0$ ,  $T'_0$  étant la cohésion permanente dans le sens  $b$ , en sorte qu'on aurait une autre limite  $M'_1 = \frac{1}{3} bc^2 T''_0$  si le grand côté était taillé dans le sens où s'exerce  $T''_0$ , d'où

$$\frac{M_1}{M'_1} = \frac{T'_0}{T''_0},$$

ce qui donnera expérimentalement  $\frac{T'_0}{T''_0}$  si l'on regarde les limites  $M_1$ ,  $M'_1$  à imposer aux moments de torsion des deux lames comme proportionnelles aux valeurs que prennent ces moments lorsqu'ils produisent immédiatement la rupture par torsion.

Au reste, d'après l'usage auquel une pièce doit être affectée, on peut être dans le cas d'imposer une limite à la torsion *elle-même*, ou au rapport de l'arc de torsion à la longueur de la pièce tordue; de même que, pour les pièces fléchies posées sur deux appuis, M. Tredgold (§ 17 de la note du n° 113 ci-dessus) propose, par une première table d'équarrissage, de limiter à  $1/480$  le rapport de leur flèche à leur portée. La formule pratique, destinée à remplir une condition de ce genre, est facile à dresser et se tire simplement des formules d'élasticité (§ 40), où n'entre que le coefficient  $G$  dont la détermination n'offre guère d'incertitude. Mais il faut remarquer que ces sortes de conditions ne dispensent pas de remplir celles de *cohésion*, exprimées par nos formules  $M$  ou  $M_1 =$  ou  $<$  une expression affectée de  $R$ , ou  $T$ , ou, ce qui revient au même, *limite* de  $M$  ou de  $M_1 =$  cette expression; en sorte qu'on n'adoptera les valeurs

( Du n° 150 ).

fournies pour les dimensions transversales par l'équation d'élasticité posée en attribuant une certaine grandeur limite à la flèche de courbure ou à l'angle de torsion que lorsque ces dimensions seront plus fortes que celles qui sont fournies par l'équation de cohésion, qui limite, comme nous savons, les dilatations  $i$  ou les glissements  $g$ . Cette observation s'applique à toutes les formules pratiques autres que celles qu'on tire de l'équation de cohésion, par exemple, à l'ancienne règle des charpentiers, qui fixait un rapport entre l'épaisseur et la portée des pièces fléchies afin de limiter leur flèche (1).

Nous n'avons pas besoin d'ajouter que les expériences de rupture immédiate ou prochaine dont nous venons de parler servent aussi à déterminer les valeurs à attribuer au coefficient  $T$  ou  $T'$  de cohésion tangentielle instantanée et à l'exposant  $m$  dans les formules du § précédent, que nous avons tâché de dresser pour prévenir ce genre de rupture dans les constructions très-légères, telles que les constructions temporaires et bien surveillées. Le coefficient et l'exposant ne pourront être fournis à la fois par des expériences de rupture par torsion de cylindres circulaires, mais on arrivera à les connaître en en faisant aussi sur des lames minces de même nature; ou bien en déterminant séparément les coefficients  $T$  par des expériences de cisaillement transversal ou fente longitudinale.

§ 63. *Torsion de cylindres dont la matière n'est pas de même nature dans l'étendue des sections.* — On peut, alors, en opérant comme nous avons fait pour l'extension au § 7 de la note du n° 21, et pour la flexion aux §§ 7 de la note du n° 80, et 15 de celle du n° 113, obtenir une expression du moment de torsion du cylindre si les sections  $\omega$  sont circulaires et si les éléments d'une même nature sont supposés  $y$  former des couronnes concentriques.

En effet; en appelant :

$G$  un coefficient d'élasticité tangentielle relatif à la couronne dont le rayon est  $r$ , et qui varie avec ce rayon :

$r$  le rayon du contour ;

comme les sections n'ont toujours aucune raison de se courber

(1) *Leçons sur la résistance des matériaux* de M. Morin, 2<sup>e</sup> éd., 1857, n° 236, p. 235.

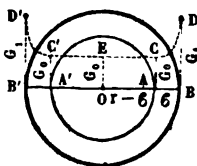


(Du n° 156).

(§ précédent), le glissement  $g$  à la distance  $r$  est  $=\theta r$  comme dans le cas de l'homogénéité, et nous avons

$$M_1 = \int_0^{\omega} Gg \cdot r d\omega = \theta \int Gr^2 d\omega = 2\pi\theta \int_0^r Gr^2 dr.$$

Faute de connaître la loi de variation de  $G$  avec  $r$ , supposons-le constant dans une certaine étendue circulaire de rayon  $OA$  à partir du centre  $O$ , et variant ensuite paraboliquement jusqu'au contour, ou de  $A$  en  $B$ , en sorte qu'en appelant



$\delta$  la portion  $AB$  du rayon  $r$  où  $G$  est variable,

$G_0, G_1$  les valeurs de  $G$  au milieu et au contour,

$z = r - (r - \delta)$  la distance, à  $A$ , du point de  $AB$  dont la distance au centre est  $r$ ;

$n$  un exposant  $> 1$ ;

on ait

$$G = G_0 \text{ de } r = 0 \text{ à } r = r - \delta,$$

$$G = G_0 + (G_1 - G_0) \left(\frac{z}{\delta}\right)^n \text{ de } r = r - \delta \text{ à } r = r, \text{ ou de } z = 0 \text{ à } z = \delta;$$

ou qu'en prenant  $r$  pour abscisses comptées sur un diamètre  $B'A'OAB$  à partir de  $O$ , le coefficient d'élasticité  $G$  soit représenté par l'ordonnée d'une ligne  $D'C'ECD$ , composée d'une droite  $EC$  parallèle à  $B'B$  à la distance  $G_0$ , et de deux paraboles  $D'C, CD$  du degré  $n$  qu'il faut supposer  $> 1$  pour qu'il y ait raccordement en  $C'$  et  $C$ .

Le moment de torsion sera

$$\begin{aligned} M_1 &= 2\pi\theta G_0 \int_0^r r^2 dr + 2\pi\theta \frac{G_1 - G_0}{\delta^n} \int_0^\delta (r - \delta + z)^2 z^n dz = \\ &= G_0\theta \frac{\pi r^4}{4} + 2\pi(G_1 - G_0)\theta \left( \frac{(r - \delta)^3 \delta^6}{n + 1} + 3 \frac{(r - \delta)^2 \delta^5}{n + 2} + 3 \frac{(r - \delta) \delta^4}{n + 3} + \frac{\delta^4}{n + 4} \right). \end{aligned}$$

Si l'on suppose  $\delta = r$  ou les paraboles commençant au centre, cette expression se réduit, vu que  $\frac{\pi r^4}{2}$  est le moment d'inertie polaire que nous avons toujours appelé  $J$ , à

( Du n° 156 ).

$$M_1 = \frac{nG_0 + 4G_1}{n+4} J\theta.$$

Elle peut convenir aux cylindres de bois dont l'axe est à peu près celui de l'arbre dont on les a extraits. Mais, appliquée aux pièces de métal, elle aurait l'inconvénient (signalé déjà au § 7 de la note du n° 80 pour une supposition analogue relative aux pièces fléchies) de donner constamment le produit de  $J\theta$  par une même moyenne entre le plus petit et le plus grand coefficient  $G$  quel que soit le diamètre du cylindre tordu; tandis que, d'après l'expérience, c'est plutôt l'épaisseur  $\delta$  de la conche où la rigidité d'une barre forgée ou fondue se trouve plus grande qu'au centre qui est indépendante de ce diamètre.

Si l'on suppose cette épaisseur petite, en sorte que le carré et les puissances supérieures de  $\delta$  puissent être négligées, l'expression générale se réduit à

$$M_1 = \theta (G_0 J + \gamma j) \text{ en faisant } j = 2\pi r^3, \quad \gamma = \frac{G - G_0}{n+1} \delta,$$

ou à une partie proportionnelle au moment d'inertie  $J$  de la section, plus une partie proportionnelle au moment d'inertie  $j$  de son périmètre.

Si nous l'écrivons

$$M_1 = \frac{G\theta r}{Gr} (G_0 J + \gamma j),$$

et si  $T$  est la limite des tensions tangentielles que peut supporter sans danger, par unité superficielle, la matière *telle qu'elle est à la distance  $r$  du centre*, limite qui varie avec  $r$ , nous aurons pour l'équation de cohésion

$$\text{Lim. } M_1 = \text{Minimum de } \frac{T}{Gr} (G_0 J + \gamma j),$$

ce minimum étant pris par rapport à la variable  $r$  dont  $T$  et  $G$  sont fonctions continues ou discontinues.

Si, par exemple, on sait que le maximum  $\frac{T}{Gr}$  répond à la plus grande valeur de  $r$  ou au contour comme quand la matière est homogène, et si  $T_1$  représente la valeur de  $T$  pour  $r=r$  comme  $G_1$ , celle de  $G$ , on a

$$\text{Lim. } M_1 = \frac{G_1 T_1}{G_1} \frac{J}{r} + \frac{\gamma T_1 j}{G_1 r},$$

(Du n° 156).

ou,  $T$  et  $t$  désignant deux constantes dépendant comme  $G$ , et  $\gamma$  de la nature de la matière et de son mode de forgeage ou de fusion :

$$\text{Lim. } M_1 = T \frac{J}{r} + t \frac{j}{r} = \frac{\pi r^3}{2} T + 2\pi r^3 \cdot t.$$

On aura pour le moment des forces capables de produire la rupture immédiate des cylindres dont la contexture ne varie sensiblement qu'en approchant de la surface, une expression semblable, sauf les valeurs des constantes, d'après les deux §§ précédents, où l'on a vu que ce moment est proportionnel au cube  $r^3$  du rayon quand la matière est homogène.

Ces constantes  $T$ ,  $t$  ou  $\frac{\pi}{2} T$ ,  $2\pi t$  pourront se déterminer, comme on a dit au § 15 de la note du n° 113, en faisant des expériences de rupture immédiate de cylindres de divers rayons, et en se servant des méthodes graphiques ou numériques connues pour corriger les écarts proportionnels qui sont ceux de

$$\frac{2M_1}{\pi r^3} = T + t \cdot \frac{h}{r},$$

ou en remplaçant le mieux possible par une ligne droite la suite des points ayant les  $\frac{h}{r}$  pour abscisses et les  $\frac{2M_1}{\pi r^3}$  pour ordonnées.

Une fois les constantes trouvées, la formule donnera le moment pour d'autres rayons que ceux des pièces de même nature mises en expérience.

§ 64. Exemples d'application numérique (\*). — Torsion seule d'abord.

PREMIER EXEMPLE. Cylindre à base circulaire. — Une pièce ronde de fer forgé doit être sollicitée à la torsion par des forces faisant couples, dont le moment total, autour de l'axe, équivaut à celui

(\*) Dans toutes ces applications nous supposons négligeables les glissements de cisaillement ou qui ne sont pas dus à la torsion. Nous en avons tenu compte (approximativement) aux §§ 5 et 9 de la note du n° 454, en appliquant une équation de cohésion qui est un cas particulier de celle du § 43.

Le recueil des résultats d'expériences, ou le Complément des art. I à VI, où nous avons déjà renvoyé plusieurs fois, paraîtra ultérieurement.

(Du n° 156).

d'un poids de 400 kilogrammes agissant avec un bras de levier de 1<sup>m</sup>,25.

On demande :

- 1° Le diamètre à donner à cette pièce ;
- 2° L'angle de torsion pour une longueur de 5 mètres.

*Solution.* Les formules de cohésion et d'élasticité, § 40, p. 359, sont  $\text{Lim. } M_1 = \frac{\pi r^3}{2} T$ . et  $M_1 = G \frac{\pi r^4}{2} \theta$ . On prend pour le fer forgé :

$$G = 6\,000\,000\,000^k,$$

ce qui est à peu près le plus petit des résultats des expériences de Duleau ; et nous avons dit au § 62 que, d'après quelques usages relatifs plutôt aux pièces de fonte qu'aux pièces de fer, on a pris jusqu'ici 0,000 667 pour limite des glissements ou inclinaisons des fibres sur les sections, c'est-à-dire pour valeur de  $\theta r = g_m = \frac{T}{G}$ , ce qui donne  $T = 4\,002\,000^k$  aussi par mètre carré.

En admettant ces nombres, comme on a  $M_1 = 400^k \times 1^m,25 = 500^k \times m$ , la première formule donne, en mettant  $M_1$  pour  $\text{lim. } M_1$ , afin de ne donner à l'arbre que la grosseur nécessaire pour résister d'une manière permanente :

$$r^3 = \frac{500^k}{1,5708 \cdot 4\,002\,000}; \text{ d'où le diamètre } 2r = 0^m,0860.$$

Quant à l'angle de torsion, la deuxième formule donne

$$\theta = \frac{M_1}{\frac{\pi}{2} Gr^4} = 0,01551,$$

d'où, si  $\tau$  est le nombre de degrés sexagésimaux de l'angle pour une longueur  $a = 5$  mètres,

$$\tau = \theta a \cdot \frac{360}{2\pi} = \frac{5 \times 0,01551 \times 180}{3,1416} = 4^{\text{degrés}},44.$$

**DEUXIÈME EXEMPLE.** *Même pièce de 5 mètres, supposée encastrée aux deux extrémités.* — On demande le diamètre et la torsion, le couple dont le moment  $M_1 = 500^k \times m$  étant supposé la solliciter à 3 mètres de la première extrémité.

(Du n° 156).

*Solution.* D'après ce qu'on a vu à la fin du § 59, on a respectivement pour les moments de torsion de la première partie, de 3 mètres de longueur, et de la seconde, de 2 mètres ;

$$m' = \frac{2}{5} \cdot 500k \times m = 200k \times m, \quad m'' = \frac{3}{5} 500 = 300k \times m.$$

Le plus fort des deux est le second  $m''$ . On a ainsi pour déterminer le diamètre  $2r$  :

$$m'' = \frac{\pi r^3}{2} T., \quad r^3 = \frac{300}{1,5708.4002000}; \quad \text{d'où } 2r = 0^m,0725.$$

Quant à l'angle  $\tau$  de torsion, l'équation

$$\frac{m'}{\theta'} = \frac{m''}{\theta''} = G \frac{\pi r^4}{2}$$

donne, vu que  $m'a' = m''a'' = 600k \times m$ ,

$$\frac{1}{\theta'a'} = \frac{1}{\theta''a''} = \frac{G}{600} \frac{\pi r^4}{2} = 1\,000\,000.1,5708 \left( \frac{0,0725}{2} \right)^4.$$

Or  $\theta'a' = \theta''a'' = \tau \cdot \frac{2\pi}{360}$ . Donc

$$\tau = 2^{\text{degrés}},107.$$

**TROISIÈME EXEMPLE.** *Cylindre à base elliptique, d'égale contenance transversale.* — Un cylindre en fonte de 5 mètres de longueur, ayant pour base une ellipse de 20 sur 10 centimètres, est encastré à une extrémité et sollicité à l'autre par deux forces égales faisant couple et agissant au bout de bras de levier de 1 mètre. On demande, 1° jusqu'à quelle grandeur on peut porter ces forces sans que la cohésion risque de s'altérer sous leur action prolongée; 2° quel sera l'angle de torsion ou de la rotation d'une extrémité devant l'autre. On demande aussi à connaître 3° l'amplitude du *gauchissement* de ses sections droites primitivement planes, ou la différence de niveau qu'il y aura (si l'axe est vertical) entre le point le plus haut et le point le plus bas de la surface courbe dans laquelle la torsion du cylindre aura changé le plan de chacune d'elles.

Prenons  $G = 2\,000\,000\,000$ ,  $T. = 1\,334\,000$  (§ 62).

(Du n° 156).

On a  $b = 0^m,20$ ,  $c = 0^m,10$ ;

d'où (form. p. 360),

$$\text{Lim. } M_1 = \frac{\pi b c^3}{16} T = \frac{3,1416 \cdot 0,2(0,1)^3}{16} 1\,334\,000 = 523^k \times mc',86.$$

On peut donc appliquer une force de  $361^k,93$  au bout de chaque bras de levier de 1 mètre.

Cette force serait double si l'on adoptait pour  $T$ . un nombre deux fois plus grand, et qui ne serait pourtant que le huitième de l'effort produisant rupture immédiate (1).

La torsion  $\theta$  qu'elles détermineront, d'après la formule

$$M_1 = \frac{G\theta}{16} \frac{\pi b^3 c^3}{b^2 + c^2}, \text{ d'où } G\theta = 16 \frac{(0,2)^3 + (0,1)^3}{3,1416(0,2)^3(0,1)^3} 523,86 = 16\,675\,000,$$

sera  $\theta = 0,008337$ .

Et l'angle de torsion, sur 5 mètres de longueur, déterminé par

$$\theta = \frac{\tau}{5} \frac{2\pi}{360}, \text{ sera}$$

$$\tau = 2^{\text{degrés}},39.$$

Le plus grand glissement, qui a lieu aux extrémités du petit axe  $c$ , a pour valeur (§ 40 p. 360).

$$g_m = \frac{b^2}{b^2 + c^2} c\theta = \frac{0,04}{0,04 + 0,01} \cdot 0,1 \cdot 0 = 0,000\,669,$$

c'est-à-dire, comme cela devait être, la limite adoptée.

Quant à la connaissance purement curieuse du gauchissement, sa formule n'est pas à la récapitulation du § 40. Mais on trouve au § 21, p. 275, pour l'ordonnée longitudinale de la surface courbe des sections, ou pour la distance d'un de leurs points, dont les coordonnées transversales sont  $u$ ,  $v$ , à leur plan primitif, qui est perpendiculaire à l'axe du cylindre et qui passe par le centre

$$z = -\theta \frac{b^2 - c^2}{b^2 + c^2} uv,$$

(1) Leçons de M. Morin, 2<sup>e</sup> édit., 1857, n° 394, p. 460.

(Du n° 156).

expression dont la plus grande valeur, pour chaque rayon vecteur déterminé par  $\frac{v}{u} = \text{constante}$ , est évidemment sur le contour elliptique, en sorte que le maximum numérique de  $z$  répond aux valeurs de  $u$  rendant nulle la différentielle de  $wv = u \cdot \frac{c}{2} \sqrt{1 - \frac{4u^2}{b^2}}$ , c'est-à-dire aux points

$$u = \pm \frac{b}{2} \sqrt{\frac{1}{2}}, \quad v = \pm \frac{c}{2} \sqrt{1 - \frac{4u^2}{b^2}} = \pm \frac{c}{2} \sqrt{\frac{1}{2}},$$

c'est-à-dire aux quatre intersections du contour elliptique avec les diagonales du rectangle circonscrit. Et la valeur  $z_m$  de  $z$  correspondante est

$$z_m = \pm \theta \frac{bc}{8} \frac{b^2 - c^2}{b^2 + c^2}.$$

Le double de  $z_m$  donne le *gauchissement* qu'on cherche. Sa grandeur est donc ;

$$0,008337 \cdot \frac{0,2 \cdot 0,1}{4} \cdot \frac{(0,2)^2 - (0,1)^2}{(0,2)^2 + (0,1)^2} = 0^{\text{m}^{\text{m}}}, 000\,025\,04.$$

Cette différence de niveau d'un *quarantième de millimètre* entre le point le plus haut et le point le plus bas de chaque section primitivement plane et horizontale, est imperceptible. Elle influe pourtant d'une manière considérable sur la torsion  $\theta$  qui, si la section restait plane, serait déterminée, pour même moment  $M_1 = 523,86$ , par l'équation  $523,86 = G\theta(I + I') = G\theta \frac{\pi bc}{64} (b^2 + c^2)$ , qui donnerait  $\theta = 0,005336$  au lieu de  $0,008337$ , ou un angle de torsion de  $1^{\text{d}^{\text{e}}}$ ,  $528$  seulement au lieu de  $2^{\text{d}^{\text{e}}}$ ,  $39$ .

QUATRIÈME EXEMPLE. *Pièce rectangulaire en bois, d'inégale con-texture dans les sens transversaux.* — Soit une pièce en bois, d'un équarrissage de  $0^{\text{m}}, 24$  sur  $0^{\text{m}}, 16$  et d'une longueur de 9 mètres.

On demande, 1° quelles forces faisant couple, et agissant au moyen de deux bras de levier de 1 mètre à une de ses extrémités, la feront tourner de 2 degrés devant l'autre qui est encastree. 2° Quelle est la limite à imposer aux forces la sollicitant ainsi à la torsion.

(Du n° 156).

*Solution.* En faisant  $a = 9$ ,  $b = 0,24$ ,  $c = 0,16$ , l'angle  $\tau = 2$ , le calcul serait facile par les formules (p. 358,361)

$$0 = \frac{\tau}{a} \frac{2\pi}{360}, M_1 = \theta \cdot \mu G b c^3 = \theta \cdot \mu' \frac{G}{3} \frac{b^3 c^3}{b^3 + c^3}, \text{ et Lim. } M_1 = \frac{2\mu}{\gamma} b c^3 T.$$

en prenant le coefficient  $\mu = 0,49576$  (table, p. 362) ou en se servant du coefficient moins variable  $\mu' = 0,84830$ ; puis faisant  $\frac{2\mu}{\gamma} = 0,23097$ ; et en adoptant, par exemple :

$$G = 450\,000\,000, \quad T = 300\,000,$$

ce qui donnerait  $\theta = 0,0038785$ ,  $M_1 = 336^k \times m$ ,  $\text{Lim } M_1 = 425^k \times m,7$ .

Mais ces formules exigent que la contecture du bois soit la même dans tous les sens perpendiculaires aux fibres.

Or je suppose qu'on ait reconnu les résistances spécifiques plus fortes dans le sens de la plus petite dimension, et que la comparaison de diverses expériences (§ 62) faites avec des bois de même provenance pris dans la même situation par rapport à l'axe des arbres dont on les extrait, porte à adopter, au lieu des valeurs de  $G$  et de  $T$ , ci-dessus :

$$G' = 400\,000\,000, \quad T' = 250\,000 \quad (\text{dans le sens de } b);$$

$$G'' = 500\,000\,000, \quad T'' = 350\,000 \quad (\text{dans le sens de } c).$$

On se servira, toujours avec  $\theta = 0,0038785$ , des formules (p. 361) :

$$M_1 = \mu G' \theta b c^3 = \mu' \frac{\theta}{3} \frac{b^3 c^3}{\frac{G'}{G'} + \frac{G''}{G''}}.$$

$$\text{Lim. } M_1 = \text{la plus petite des 2 quantités } \frac{2\mu}{\gamma} b c^3 T' \text{ et } \frac{2\mu}{\gamma_1} \frac{c^3 G'}{b^3 G''} \cdot b^3 c T''.$$

$$\text{Comme on a } \frac{b}{c} \sqrt{\frac{G''}{G'}} = \frac{0,24}{0,16} \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{3}{4} \sqrt{5} = 1,67705,$$

La table p. 362 fournit par intercalation entre les lignes 1,60 et 1,75

$$\mu = 0,20915, \quad \mu' = 0,85135, \quad \frac{2\mu}{\gamma} = 0,23671, \quad \frac{2\mu}{\gamma_1} \frac{c^3 G'}{b^3 G''} = 0,17788.$$

On a donc d'abord, pour le moment capable de produire la rotation de deux degrés,

$$M_1 = 0,20915 \cdot 400\,000\,000 (0,24)(0,16)^3 = 82244 \theta = 319^k \times m^e.$$



(Du n° 156).

Si l'on n'avait pas sous la main la table des valeurs du coefficient  $\mu$  ni celles du nombre  $\lambda$  qui sert à le calculer par l'expression  $\mu = \frac{1}{3} - \lambda \frac{c}{b} \sqrt{\frac{G'}{G''}}$ , mais si l'on se souvenait que le nombre moins variable  $\mu'$  est d'environ 0,85, on prendrait

$$M_1 = 0,85 \cdot \frac{0}{3} \cdot \frac{(0,24)^3 (0,16)^3}{\frac{(0,24)^3}{400} + \frac{(0,16)^3}{500}} \cdot 1\,000\,000 = 82190 \theta,$$

ce qui ne diffère pas sensiblement de la valeur précédente.

On aurait pu encore se servir, pour obtenir le coefficient  $\mu$  de la première expression  $\mu G' b c^3 \theta$ , de la formule empirique

$$\mu = \frac{1}{3} - 0,21008 \frac{c \sqrt{G'}}{b \sqrt{G''}} \cdot \left( 1 - \frac{1}{12} \frac{c^2 G'^2}{b^2 G''^2} \right),$$

qui, pour  $\frac{c \sqrt{G'}}{b \sqrt{G''}} = \frac{4}{3 \sqrt{5}} = 0,59628$  donne  $\mu = 0,20938$ , ou sensiblement la même chose que l'intercalation linéaire entre les deux lignes 1,60 et 1,75 de la table.

On a, enfin, pour la limite à imposer au moment des forces à appliquer à ce prisme d'égale texture

$$\text{Lim. } M_1 = \text{la plus petite} \begin{cases} 0,23671 \cdot 0,24(0,16)^2 \cdot 250\,000 = 363^{\text{t}} \times \text{m}, 6 \\ \text{des deux quantités} \quad \text{et } 0,17788(0,24)^2 \cdot 0,16 \cdot 350\,000 = 573^{\text{t}} \times \text{m}, 8. \end{cases}$$

On prendra par conséquent Limite de  $M_1 = 363^{\text{t}} \times \text{m}, 6$ . Les points dangereux sont aux milieux des grands côtés, ainsi qu'il était facile de le prévoir. Mais ils auraient été transportés aux milieux des petits côtés s'ils eussent moins différé des grands, et si  $T''$  eût été moindre que  $T'$ .

CINQUIÈME EXEMPLE. On demande de calculer la torsion d'une pièce prismatique en fonte ayant pour base un carré évidé par quatre quarts de cercle dont les centres sont à ses angles.

Ce calcul ne pourrait se faire avec une grande approximation qu'en cherchant par tâtonnement, comme il est dit au § 38, une courbe du douzième ou plutôt du seizième degré, etc., dont l'équation en  $u, v$  soit comprise dans la forme générale du § 10, et dont le contour se rapproche beaucoup de celui de la section proposée.

(Du n° 156).

On étudie cette longue recherche en calculant simplement, comme on a dit au § 40, p. 365-366, l'aire  $\omega$  et le moment d'inertie polaire  $J$  de la section, et en arbitrant, par comparaison aux chiffres de la petite table p. 366, quels sont les coefficients par lesquels il faut multiplier  $G\omega^{3/2}$  pour avoir  $M_1$ , et  $T\sqrt{\omega^3}$  pour avoir  $\text{Lim. } M_1$ .

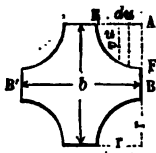
Je suppose donc qu'on adopte cette manière, bien qu'un peu conjecturale, d'arriver à la solution de la question posée.

Solent  $b$  le côté du carré circonscrit à la section donnée, et  $r$  le rayon des quatre quarts de cercle retranchés; on trouvera

$$\omega = b^2 - \pi r^2, \quad J = \frac{b^4}{6} - \frac{\pi b^2 r^2}{2} + \frac{8br^3}{3} - \frac{\pi r^4}{2} \quad (1).$$

Par exemple si  $r = \frac{3}{8}b$ , ou si les bouts rectilignes du croisillon sont du quart de sa largeur médiane  $b$ , l'on aura

(1) En effet, le moment d'inertie du quart de cercle EAF autour de son rayon EA est (n° 84)  $\frac{1}{4} \frac{\pi r^4}{4}$ . Son moment statique par rapport au même



rayon est (fig. ci-contre)  $\int_0^r v du \frac{v}{2} = \int_0^r du \cdot \frac{1^2 - u^2}{2} = \frac{r^3}{3}$ ; ce

qui donne, en divisant par l'aire  $\frac{1}{4} \pi r^2$ ,  $\frac{4r}{3\pi}$  pour la distance

de son centre de gravité à ce rayon EA. Par conséquent, d'après le théorème connu (§ 4 note n° 84) qui déduit un moment d'inertie d'une aire autour d'une droite du moment d'inertie autour d'une parallèle tirée du centre de gravité, ou réciproquement, on aura pour le moment d'inertie du même quart de cercle EAF d'abord par rapport à une parallèle à EA passant par son centre de gravité,

$$\frac{1}{4} \frac{\pi r^4}{4} - \frac{\pi r^2}{4} \left( \frac{4r}{3\pi} \right)^2,$$

puis, par rapport à une médiane BB' de la section, cette même quantité augmentée de  $\frac{1}{4} \frac{\pi r^2}{4} \left( \frac{b}{2} - \frac{4r}{3\pi} \right)^2$ , ce qui fait, en réduisant :

$$\frac{\pi b^2 r^2}{16} - \frac{br^3}{3} + \frac{\pi r^4}{16}.$$

En quadruplant, on a ce qu'il faut retrancher du moment d'inertie  $\frac{b^4}{12}$  du carré circonscrit pour avoir celui de la section autour d'une de ses médianes; et, en doublant le reste, on a bien la valeur que nous avons posée pour le moment polaire  $J$ .

(Du n° 156).

$$J = b^4 \left[ \frac{1}{6} + \frac{9}{64} - \pi \left( \frac{9}{128} + \frac{81}{8192} \right) \right] = \frac{226,65}{4096} b^4; \quad \omega = b^2 \left( 1 - \frac{9\pi}{64} \right) = \frac{35,7257}{64} b^2;$$

$$\text{d'où} \quad \frac{J}{\omega^3} = \frac{228,654}{(35,7257)^3} = 0,1776.$$

Ce rapport 0,1776 tombe, dans la partie supérieure de la table p. 366, relative aux sections ayant leurs moments d'inertie égaux autour des diverses droites tirées de leur centre de gravité, entre 0,1692 et 0,1924 qui sont relatifs au carré à angles aigus et au triangle équilatéral. En intercalant par parties proportionnelles entre les valeurs de  $\frac{M_1}{G\omega^3\theta}$  et  $\frac{\text{lim. } M_1}{T_0\sqrt{\omega^3}}$  relatives aux mêmes sections, on prendrait, pour celle qui nous occupe,

$$M_1 = 0,1258 G\omega^3\theta, \quad \text{Lim. } M_1 = 0,1859 T_0\sqrt{\omega^3}.$$

Mais, pour éviter les risques résultant de ce que ce mode d'évaluation a d'incertain, il sera prudent de prendre seulement

$$M_1 = 0,11 G\omega^3\theta; \quad \text{Lim. } M_1 = 0,16 T_0\sqrt{\omega^3}.$$

Supposons, par exemple, que la pièce soit en fonte et ait  $0^m,10 = b$  de largeur et d'épaisseur, on aura  $\omega = 0,5582 b^2 = 0,005582$ ,  $\omega^3 = 0,000 031 160$ ,  $\sqrt{\omega^3} = 0,000 4174$ . D'où, si l'on fait  $T_0 = 1 334 000$ ,

$$\text{Limite } M_1 = 89^m \times 0,03.$$

En attribuant au moment cette valeur, et à  $G$  la valeur 2 000 000 000, on trouvera  $\theta = \frac{M_1}{0,11 G\omega^3} = \frac{89,03}{6855,2} = 0,0130$ . D'où, si la longueur  $a = 5$  mètres,

$$\text{L'angle de torsion } \tau = \frac{360}{2\pi} a\theta = 57,296 a\theta = 3^s,72.$$

Si cette pièce était ronde, on aurait  $\sqrt{\omega^3} = \frac{\text{lim. } M_1}{0,28207 T_0}$  au lieu de  $\frac{\text{lim. } M_1}{0,18 T_0}$ . Il faudrait y employer moins de matière dans la propor-

$$\text{tion } \sqrt[3]{\left( \frac{0,18}{0,28207} \right)^2} = 0,741 \text{ à } 1.$$

Aussi, l'on suppose que la pièce, objet du calcul qu'on vient de faire, avait été coulée pour une autre destination; ou bien qu'il ne

(Du n° 156).

s'agit ici que des parties qui joignent deux pièces tournantes, au moyen d'un manchon à trèfle.

On pourrait appliquer le même procédé, en se servant du bas de la même table de la p. 366, pour déterminer approximativement la résistance à la torsion d'un rail de chemin de fer.

§ 65. *Suite des applications numériques. Flexion et torsion simultanées.*

SIXIÈME EXEMPLE. On demande de déterminer la valeur à donner au coefficient T, d'après une expérience de rupture d'une pièce de fonte par torsion et flexion, en supposant qu'il faille limiter les charges permanentes au cinquième de celles qui font rompre immédiatement.

Soit, comme dans les expériences faites à Mulhouse (1), un cylindre horizontal en fonte de 1<sup>m</sup>,50 de longueur et 0<sup>m</sup>,10 de diamètre, encastré à une extrémité et appuyé sur un palier proche de l'autre, où il est sollicité par un levier perpendiculaire et horizontal de 2 mètres de longueur, au bout duquel est suspendu un plateau portant un poids P; le poids du levier et du plateau faisant ensemble 240 kilogrammes, dont le centre de gravité est à 0<sup>m</sup>,80 de l'axe du cylindre.

Le moment de ces poids autour du même axe, et tendant à tordre, sera  $2P + 192^k$ .

Mais ils tendront, en outre, à fléchir avec un bras de levier égal à la distance, au palier, du point où le levier de 2 mètres est implanté dans la tête carrée ajoutée au cylindre. Supposons cette distance de 0<sup>m</sup>,25. Ce deuxième moment, qui fait fléchir, sera  $0,25(P + 240)$ .

En mettant pour P le poids qui a fait rompre et qui était moyennement de  $2000^k$ , et en réduisant les deux moments au 1/5, il faut prendre, r étant le rayon du cylindre,

$$M_1 = \frac{4192}{5} = 838^k \times r, \quad M = \frac{0,25 \cdot 2240}{5} = 112^k \times r; \quad \text{et } r = 0,05.$$

La formule pour déterminer T, sera (équation du § 47, en faisant  $Q = 0$ ,  $v = r$ , ou bien, 1<sup>re</sup> des équations récapitulées au § 58) :

(1) M. Morin, *Leçons sur la résistance des matériaux*, 2<sup>e</sup> édit., n° 385, p. 458-459.

(Du n° 156).

$$\pi r^3 = \frac{1-\gamma_1}{2} \cdot \frac{4M}{R_0} + \sqrt{\left(\frac{1+\gamma_1}{2} \cdot \frac{4M}{R_0}\right)^2 + \left(\frac{2M_1}{T_0}\right)^2}$$

où

$$\left(\pi r^3 - \frac{4M}{R_0}\right) \left(\pi r^3 + \gamma_1 \frac{4M}{R_0}\right) = \left(\frac{2M_1}{T_0}\right)^2,$$

d'où

$$T_0 = \frac{R_0 \cdot 2M_1}{\sqrt{(R_0 \pi r^3 - 4M)(R_0 \pi r^3 + 4\gamma_1 M)}}$$

Il faut y mettre pour  $R_0$  la plus grande tension des fibres d'une pièce de fonte fléchie par une charge cinq fois moindre que celle qui fait rompre par flexion seule. Or on trouve moyennement, en appliquant les formules de flexion jusqu'à cette charge,  $R = 30\ 000\ 000$ . Faisons donc dans notre formule

$$R_0 = 6\ 000\ 000.$$

Et faisons-y aussi  $\gamma_1 = 1/4$  sans nous inquiéter beaucoup de sa vraie valeur dont la différence avec  $1/4$  sera fort peu influente; on aura

$$T_0 = \frac{6\ 000\ 000 \cdot 1676,8}{\sqrt{(2356 - 448)(2356 + 112)}} = 6\ 000\ 000 \cdot 0,7727 = 4\ 636\ 200.$$

On aurait pu, si l'on regarde la torsion comme plus dangereuse que la flexion pour même proportion entre l'effort supporté et l'effort qui romprait, réduire plus le moment de torsion que le moment de flexion; prendre par exemple pour  $M_1$  le  $1/6$  et pour  $M$  le  $1/4$  des moments qui agissaient réellement pour tordre et pour fléchir à l'instant où la rupture s'est opérée. On aurait eu ainsi

$$M_1 = \frac{4192}{6} = 699, \quad M = \frac{560}{4} = 140,$$

et  $R_0 = \frac{1}{4} 30\ 000\ 000 = 7\ 500\ 000$ , valeur souvent adoptée pour la fonte. Il en serait résulté

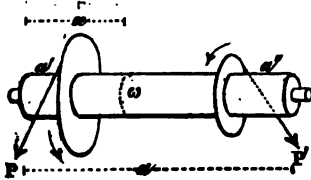
$$T_0 = \frac{7\ 500\ 000 \cdot 1398}{\sqrt{(2945 - 560)(2945 + 140)}} = 7\ 500\ 000 \cdot 0,5154 = 385\ 000.$$

Mais on ne voit pas de raison pour faire entre la flexion et la torsion une pareille différence quant au danger d'altération de la contexture.

(Du n° 150).

Si l'on n'avait pas tenu compte de la flexion on aurait eu  $T_1 = 4\,270\,000$  quand on réduit  $M_1$  au  $1/4$ , et  $T_1 = 3\,560\,000$  quand on réduit  $M_1$  au  $1/6$ .

SEPTIÈME EXEMPLE. *Arbre de transmission de mouvement, rond et en fonte.* — Soit l'arbre tournant horizontal  $a''$  considéré déjà au



§ 57, et supposé d'abord en fonte, à section circulaire, de 5 mètres de longueur, sur lequel doivent être montées, à 1 mètre de distance de chaque extrémité, deux roues d'engrenage ou deux poulies de courroie pesant  $200^k$  et

$100^k$ ; la seconde d'un diamètre de 1 mètre sur laquelle s'exerce tangentiellement une résistance de  $2000^{kl}$ ; et la première, d'un diamètre plus grand, en sorte que la puissance qui y est appliquée, aussi tangentiellement, n'est, y compris ce qui est nécessaire pour vaincre les frottements, que  $1100^k$ ; ces deux forces agissant dans des directions qui font, de part et d'autre du plan vertical passant par l'axe, des angles de  $45$  degrés.

On demande le diamètre constant ou variable à donner à l'arbre pour résister aux efforts combinés de flexion et de torsion auxquels il est soumis.

*Solution.* Il faut faire dans les formules du § 57 :

$$P=1100, P'=2000, a=200, a'=100, a=5, a'=a''=1, r'=0,50;$$

$$\cos \alpha = \cos \alpha' = \frac{1}{2} \sqrt{2}, \quad \cos(\alpha + \alpha') = 0.$$

Soient le rayon du deuxième tourillon  $r'' = 0^m,05$ ,

le coefficient de son frottement  $f = 0^m,10$ .

Pour la fonte, prenons  $R_1 = 7\,500\,000$  et  $T_1 = 2\,000\,000$ , quoique ce dernier nombre paraisse relativement faible.

Et attribuons provisoirement à l'arbre dont la grosseur est encore inconnue un poids  $\Pi = 500$  kil.

On aura pour la résultante  $R$  (§ 57) des forces pressant le deuxième tourillon, dont nous avons donné l'expression,

(Du n° 156).

$$R^2 = (220)^2 + (1600)^2 + (370)^2 + 2 \cdot (370)(220 + 1600) \frac{\sqrt{2}}{2} = 3560733,$$

ou  $R = 1887$  kil. Et le moment de torsion sera

$$M_1 = P'r' + \frac{fR''}{\sqrt{1+f^2}} R = 1000 + 0,005 R = 1009 \text{ k} \times \text{m}.$$

Si l'arbre doit être cylindrique, il faut adopter pour le moment de flexion  $M$  la plus grande des valeurs que prend l'expression  $M = \sqrt{m^2 + m'^2 + \dots}$  que nous en avons données au § 57 en faisant successivement  $x = a' = 1$  et  $x = a - a'' = 4$  dans les expressions des moments composants  $m, m', m''$  qui y entrent. Comme ces deux valeurs sont  $\sqrt{898\ 596}$  et  $\sqrt{2408\ 895}$ , il faut prendre la seconde. Donc

$$M = 1552 \text{ k} \times \text{m}.$$

On aurait en conséquence pour le rayon de l'arbre :

1° S'il n'était soumis qu'à la flexion

$$r^3 = \frac{4M}{\pi R_s} = 0,000\ 263\ 48 \text{ (d'où } r' = 0^{\text{m}},064);$$

2° S'il n'était soumis qu'à la torsion

$$r'^3 = \frac{2M_1}{\pi T_s} = 0,000\ 32\ 022 \text{ (d'où } r'' = 0,068).$$

Donc, cube du rayon à lui donner

$$r^3 = \frac{3}{8} r'^3 + \sqrt{\left(\frac{5}{8} r'^3\right)^2 + (r''^3)^2} = 0,000\ 4597:$$

d'où

$$r = 0^{\text{m}},07713. \text{ Diamètre } 0^{\text{m}},1543.$$

Le poids de l'arbre d'un pareil rayon sera 729 kilogrammes. La substitution de ce nombre à 500 qu'on a pris provisoirement n'aura pas assez d'influence pour obliger à recommencer le calcul.

Si, pour économiser la matière, on veut rendre l'arbre d'égale résistance en faisant varier son rayon  $r$ , on aura,  $x$  étant la distance, au premier tourillon, de chaque section transversale de la partie comprise entre les deux roues :

(Du n° 156).

$$\pi r^3 = \frac{3}{8} \frac{4M}{7\,500\,000} + \sqrt{\left(\frac{5}{8} \frac{4M}{7\,500\,000}\right)^2 + \left(\frac{2 \times 1009}{2\,000\,000}\right)^2}$$

ou  $1\,000\,000 \pi r^3 = \frac{M}{5} + \sqrt{\frac{M^2}{9} + 1\,018\,081}$ ,

M représentant (en faisant toujours  $\Pi = 500$ , vu le moindre volume de l'arbre non cylindrique) la quantité variable

$$M = \sqrt{1\,561\,127 - 961\,110x + 310\,351x^2 - 14\,272x^3 + 2500x^4}.$$

dont les valeurs pour  $x =$       1            2            3            4  
sont                                    947,94    908,92    1134,95    1552,06  
qui donnent  $1\,000\,000 \pi r^3 =$  1246,96    1235,29    1304,59    1444,31  
d'où                                     $r =$  0<sup>m</sup>,0735    0,0733    0,0476    0,0772

On aurait eu des rayons plus différents entre eux si, dans les suppositions sur les valeurs relatives de  $R_0$  et  $T_0$ , on avait mieux suivi la proportion qu'indiquent les expériences de rupture immédiate (§ précédent); ou si, conformément à la théorie et en supposant la matière d'égale contexture en tous sens, on avait pris pour  $T_0$  les  $4/5$  de  $R_0$ . En effet, soit

$$R_0 = 5\,000\,000, \quad T_0 = 4\,000\,000;$$

on aurait eu

$$1\,000\,000 \pi r^3 = \frac{3M}{10} + \sqrt{\frac{M^2}{4} + 254\,520},$$

ce qui, toujours la même expression de  $M$  en  $x$ , aurait donné :

pour  $x =$       1            2            3            4  
 $1\,000\,000 \pi r^3 =$     976,66    951,71    1099,80    1391,22  
d'où                     $r =$  0<sup>m</sup>,0677    0,0672    0,0705    0,0762.

**HUITIÈME EXEMPLE.** *Même arbre tournant; mais carré et en bois.*  
— Supposons les mêmes données qu'à l'exemple précédent, mais les forces toutes verticales. On aura

$P = 1100$ ,  $P' = 2000$ ,  $\sigma = 200$ ,  $\sigma' = 100$ ,  $a = 5$ ,  $a' = a'' = 1$ ,  
 $r' = 0,50$ ,  $r'' = 0,05$ ,  $\cos \alpha = \cos \alpha' = \cos(\alpha + \alpha') = 1$ ,  $f = 0,1$ .

Les forces se composent par simple addition et il en est de même des moments. Donc



(Du n° 156).

$$R = P \frac{a'}{a} + P' \frac{a-a''}{a} + \sigma \frac{a'}{a} + \sigma' \frac{a-a''}{a} + \frac{\Pi}{2} = 220 + 1600 + 40 + 80 + 250 = 2190^k,$$

$$M_1 = 200 \times 0,50 + 0,005 \times 2190 = 1014^k \times m;$$

$M = m + m' + m''$  dont les deux valeurs pour  $x = a' = 1$  et  $x = a - a'' = 4$  sont, en faisant provisoirement le poids de l'arbre  $\Pi = 400^k$ ,

$$1100 \cdot \frac{1 \cdot 4}{5} + 2000 \frac{1 \cdot 1}{5} + 200 \frac{1 \cdot 4}{5} + 100 \frac{1 \cdot 1}{5} - 200 \frac{1 \cdot 4}{5} = 1300$$

$$1100 \cdot \frac{1 \cdot 1}{5} + 2000 \frac{1 \cdot 4}{5} + 200 \frac{1 \cdot 1}{5} + 100 \frac{1 \cdot 4}{5} - 200 \frac{4 \cdot 1}{5} = 1780.$$

Donc il faut prendre  $M = 1780^k \times m$ .

On prend ordinairement (1), pour le bois de sapin :

Cohés<sup>o</sup> long<sup>o</sup> permanente  $R_0 = 600\,000$ ; Adhés<sup>o</sup> ou cohés. transv.  $T_0 = \text{env}^o 300\,000$ .

Avec ces valeurs de  $R_0$  et  $T_0$  on a

$$\frac{M_1}{T_0} > 1,037 \frac{M}{R_0};$$

d'où il suit, d'après ce qu'on a démontré au § 55 et redit aux §§ 57, 58, qu'il faut calculer l'équarrissage pour la position où l'arbre est sollicité à fléchir parallèlement à deux côtés des sections, ce qui met le point dangereux au milieu d'un autre côté. Il en résulte

$$\text{Si l'on fait } \begin{cases} b'^3 = 6 \frac{M}{R_0} = 0,01780 & (b' = 0,2611, \text{ flexion seule}), \\ b''^3 = \frac{M_1}{0,20817 T_0} = 4,8039 \frac{M_1}{T_0} = 0,01619 & (b'' = 0,2530, \text{ torsion seule}), \end{cases}$$

qu'on a pour déterminer le côté  $b$  du prisme fléchi et tordu

$$b^3 = \frac{3}{8} b'^3 + \sqrt{\left(\frac{5}{8} b'^3\right)^2 + (b''^3)^2} = 0,026318,$$

d'où

$$b = 0,2975.$$

(1) M. Morin, n° 234, p. 322, et n° 368, p. 464.

(Du n° 156).

Mais, avant d'adopter cette valeur pour le côté  $b$ , il est bon de considérer que la pièce, tordue toujours dans le même sens, est fléchie successivement dans différents sens à chaque tour qu'elle fait sur son axe, et que cela peut être une cause de prompt diminution de sa résistance à la flexion. Or je suppose que par ce motif on réduise  $R_0$  aux cinq sixièmes de sa valeur ci-dessus, ou qu'on prenne

$$R_0 = 500\,000, \quad T_0 = 300\,000;$$

on aura alors  $\frac{M_1}{T_0} < 1,037 \frac{M}{R_0}$ , et il faudra calculer l'équarrissage pour la position où l'arbre est sollicité à fléchir dans le plan des diagonales des sections, et où par conséquent le point dangereux est à un angle comme s'il n'y avait pas de torsion; c'est-à-dire prendre

$$b^3 = b'^3 = 6\sqrt{2} \cdot \frac{M}{R_0} = 8,4853 \frac{1780}{500\,000} = 0,30277,$$

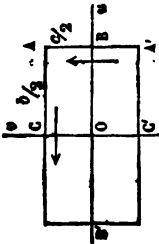
d'où

$$b = 0^m,3116.$$

On voit, au reste, qu'il est à propos, pour obtenir la résistance convenable, de conserver son équarrissage à une pièce tordue et fléchie, en abattant seulement les arêtes vives dans les limites des tronçatures (§ 8 note n° 113) qui augmentent  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  ou la résistance théorique à la flexion, et sans aller jusqu'à changer le carré en un cercle ou un octogone régulier. On aurait évidemment plus de force si l'arbre dont on tire la pièce n'était pas équarri (note du n° 118, p. 126).

§ 66. Suite des applications numériques. Flexion et torsion avec extension ou compression longitudinale.

NEUVIÈME EXEMPLE. Une pièce en chêne horizontale et rectangulaire ayant une portée  $a = 8^m$ , une hauteur  $b = 0^m,30$  et une largeur  $c = 0^m,25$  sert de tirant à une ferme de charpente et éprouve une tension longitudinale de 12 000°. On veut suspendre un poids à son milieu, mais à une distance horizontale  $k = 2^m,40$  de son axe. On demande la limite à imposer à ce poids  $P$ .



( Du n° 156 ).

*Solution.* On suppose qu'aux deux bouts la pièce horizontale est encastree quant à la torsion mais non quant à la flexion, c'est-à-dire qu'elle ne peut pas tourner sur son axe, mais que la tangente à cet axe peut s'incliner librement comme si la pièce n'était que posée sur ses deux appuis. Le moment de torsion  $m' = m''$  (§ 59) de chaque moitié n'est que le 1/2 du moment du poids P autour de l'axe. Le moment de flexion à droite et à gauche du milieu n'est que celui d'une des réactions verticales  $\frac{P}{2}$  des appuis, agissant avec un bras de levier  $\frac{a}{2}$ , car nous supposons d'abord que la traction horizontale Q agit dans l'axe de la pièce, et nous négligeons le moment qu'elle donnera avec un bras de levier égal à la petite flèche que prendra cet axe.

En sorte que

$$M'' = \frac{Pa}{4}, \quad M_1 = \frac{Pk}{2}.$$

Vu la faible proportion de la différence (1/6) entre les côtés  $b$  et  $c$ , le point dangereux de cette pièce qui se trouve sollicitée de champ ou parallèlement aux plus grands côtés  $b$ , est au milieu B d'un petit côté  $c$ , et il n'y a lieu de considérer ici que la première des deux équations qui sont à poser toutes deux lorsque ce point peut se trouver aussi quelque part sur les grands côtés  $b$  entre le milieu et un angle. On a donc, à la limite, l'équation suivante (revenant à la première  $1 = \frac{1 - \eta_1}{2R_0} ( ) + \sqrt{\quad}$  du (2°) du § 53, p. 435, avec les signes supérieurs de Q et de  $M''$ ):

$$\left(1 - \frac{Q}{R_0 b c} - \frac{6M''}{R_0 b^2 c}\right) \left(1 + \eta_1 \frac{Q}{R_0 b c} + \eta_1 \frac{6M''}{R_0 b^2 c}\right) = \left(\frac{\gamma_1}{2\mu} \frac{b^2 G''}{c^2 G'} \cdot \frac{M_1}{b^2 T''}\right)^2,$$

ou

$$(R_0 b^2 c - Qb - 1,5Pa)(R_0 b^2 c + \eta_1 Qb + 1,5\eta_1 Pa) = \left(\frac{\gamma_1}{2\mu} \frac{b^2 G''}{c^2 G'} \cdot \frac{R_0 Pk}{T''} \cdot \frac{1}{2}\right)^2$$

ou

$$\left[\left(\frac{\gamma_1}{2\mu} \frac{b^2 G''}{c^2 G'} \cdot \frac{R_0 k}{T''} \cdot \frac{1}{2}\right)^2 + \eta_1 (1,5a)^2\right] P^2 + [1,5a(1 - \eta_1)R_0 b^2 c + 2 \cdot 1,5\eta_1 Qab] P = \\ = (R_0 b^2 c - Qb)(R_0 b^2 c + \eta_1 Qb),$$

(Du n° 156). •

qui devient, en faisant  $\eta_1 = \frac{1}{4}, \frac{\gamma_1}{2\mu} \frac{b^2 G''}{c^2 G'} = \frac{1}{0,196}$  (p. 362),  $k=2,4$ ,  $a=8$ ,  $b=0,3$ ,  $c=0,25$ ,  $Q=12\ 000$ , enfin,  $R_0=600\ 000$ ,  $T''_0=400\ 000$  :

$$120,34 P^2 + 143100 P = 9900 \times 14400, \text{ d'où } P = 646^2.$$

Si nous supposons, en second lieu, que la traction longitudinale  $Q$  agit, par des embrevements d'arbalétriers, à une distance de l'axe de la pièce égale aux  $5/6$  de la demi-épaisseur  $\frac{b}{2} = 0,15$  en y comprenant approximativement la flèche que cet axe prend au milieu, comme son moment tendra à faire tourner la demi-pièce en sens contraire du poids  $P$ , le moment total de flexion sera

$$M'' =, \text{ ou } \frac{Pa}{4} - \frac{5}{6} Q \frac{b}{2}, \text{ ou } \frac{5}{6} Q \frac{b}{2} - \frac{Pa}{4}$$

selon que le moment de  $P$  l'emportera sur celui de  $Q$  ou réciproquement, car le moment de flexion  $M''$  doit toujours entrer positivement dans les formules.

Comme on ne sait pas d'avance lequel de ces deux moments opposés  $\frac{Pa}{4}$  et  $\frac{5}{6} Q \frac{b}{2}$ , dont le second est seul connu, surpassera l'autre, ou si la pièce fléchie tournera sa convexité en bas ou en haut, il faudra essayer successivement les deux équations résultant de la substitution de ces deux expressions de  $M''$  égales au signe près, ou

$$\left( R_0 b^2 c + \frac{3}{2} Q b - 1,5 P a \right) \left( R_0 b^2 c - \frac{3}{2} \eta_1 Q b + 1,5 \eta_1 P a \right) = \left( \frac{\gamma_1 c^2 G''}{2\eta_1 b^2 G'} \cdot \frac{R_0 P k}{T''_0} \right)^2,$$

$$\text{et } \left( R_0 b^2 c - \frac{7}{2} Q b + 1,5 P a \right) \left( R_0 b^2 c + \frac{7}{2} \eta_1 Q b - 1,5 \eta_1 P a \right) = \textit{idem},$$

et prendre pour  $P$  la solution donnée par la première ou par la deuxième selon qu'elle rendra positive la première ou la seconde des deux expressions de  $M''$ ; et la plus petite des deux solutions si toutes deux satisfont à la condition de  $M''$  positif. Comme ces équations ne diffèrent de celle qu'on a posée tout à l'heure qu'en ce que  $Q$  y est remplacé par  $-\frac{3}{2} Q$  et par  $\frac{7}{2} Q$ , et que le signe de  $P$  est changé dans la deuxième, elles reviennent à

(Du n° 156).

$$120,34 P^2 + 89100 P = 18900 \times 12150, \text{ d'où } P = 1059^{\text{e}}, 9,$$

$$120,34 P^2 - 197100 P = 900 \times 16650, \text{ d'où } P = 1710^{\text{e}}, 6.$$

La première valeur trouvée pour P rend positif  $M'' = \frac{Pq}{4} - \frac{5}{6} Q \frac{b}{2}$   
 $= 2P - 1500$ ; la seconde rend négatif ce même moment qui est  
 $M'' = -2P + 1500$  dans l'hypothèse pour laquelle cette deuxième  
 équation est posée; en sorte que c'est la première solution qui doit  
 être prise. Le moment du poids P l'emporte sur le moment de la  
 traction longitudinale Q, et l'axe de la pièce tournera sa convexité  
 en bas. On peut donc élever jusqu'à

$$P = 1060 \text{ kil.}$$

le poids capable d'être supporté par la pièce, au bout d'un levier  
 horizontal de 2<sup>m</sup>,40 implanté à son milieu, quand la traction hori-  
 zontale agit, par des embrevements, à une distance verticale de  
 0<sup>m</sup>,125 au-dessus de l'axe de la pièce à aussi son milieu.

La flèche de courbure prise par cette pièce sous le poids P sera  
 (n° 91) en faisant le coefficient d'élasticité  $E = 200\ 000\ 000$

$$f = \frac{Pa^3}{48EI} = \frac{P}{E} \frac{a^3}{4b^3c} = 0^{\text{m}}, 01675;$$

elle peut être regardée comme implicitement comprise dans le bras  
 de levier 0,125 que nous avons attribué à la traction horizontale Q  
 et qui, sans cela, était un peu trop fort. Cette approximation suffit  
 et il n'y a pas lieu de recourir aux méthodes qu'on verra exposées  
 à la quatrième section, art. IV, n° 415-417, pour déterminer la  
 flexion d'une pièce sollicitée à la fois transversalement et longitu-  
 dinalement.

DIXIÈME EXEMPLE. On demande à quel équarrissage on peut ré-  
 duire la même pièce, en supposant toujours les côtés  $b, c$  dans le  
 rapport de 6 à 5, si le poids P à supporter n'est que 800<sup>kil</sup>.

Solution. L'équation est la même, mais ne peut être résolue que  
 par tâtonnement, car l'inconnue est l'une des deux dimensions,  
 $c$  par exemple, et s'y trouve engagée au sixième degré. On a, en  
 faisant  $b = \frac{6}{5} c$  dans cette équation laissée sous sa première forme

(Du n° 156).

$$\left( R_0 b^3 c + \frac{3}{2} Q b - 4,5 P a \right) \left( R_0 b^3 c - \frac{3}{2} \eta_1 Q b + 4,5 \eta_1 P a \right) = ( )^2$$

et divisant les deux membres par (844)<sup>2</sup> :

$$\left[ (10c)^3 + \frac{10}{4} (10c) - \frac{100}{9} \right] \left[ (10c)^3 - \frac{10}{16} (10c) + \frac{100}{36} \right] - \left( \frac{5000}{3 \times 196} \right)^2 = 0.$$

En essayant  $c = 0,22$  le 1<sup>er</sup> membre est  $-11,609$ 

$$c = 0,22$$

$$+ 11,609$$

Donc (commencement du § 34), on a

$$10c = 0,22 + (0,22 - 0,22) \frac{11,609}{11,609 + 11,624},$$

ou

$$c = 0,2237 \text{ d'où } b = \frac{6}{5} c = 0,2684.$$

**ONZIÈME EXEMPLE.** Un poteau carré en chêne de 4 mètres de hauteur doit supporter une pression longitudinale  $Q = 20,000$  kilogrammes dont la résultante est dirigée suivant son axe, et il doit être soumis à une force horizontale  $P = 1000^k$ , agissant au bout d'un bras de levier  $k = 2$  mètres implanté à son milieu perpendiculairement à une de ses faces. Quel équilibrage doit-on lui donner ?

*Solution.* Le moment de torsion n'est, comme à l'exemple précédent, que la moitié du moment  $Pk$  de la force horizontale, vu que les deux extrémités du poteau sont empêchées de tourner, et le moment de flexion est celui des réactions horizontales  $\frac{P}{2}$  des appuis supérieur et inférieur. On a donc au milieu de la hauteur  $a$  :

$$M' = \frac{Pa}{4} = 1000^k \times m, \quad M_1 = \frac{Pk}{2} = 1000^k \times m.$$

Le plan de flexion est parallèle à une médiane ; et, vu que  $b = c$ , on peut regarder la pièce comme fléchie à plat, en sorte qu'il y a lieu de prendre l'équation du (1<sup>er</sup>) du § 53, p. 434, ou bien celles du § 58, p. 458, qu'on en tire en faisant disparaître le radical. Et comme on ne sait pas encore, vu la compression que la force longitudinale  $Q$  ajoute à celles que produit la flexion du côté qui devient concave, si le point dangereux sera de ce côté ou du côté qui devient convexe, on

(Du n° 156).

est encore obligé, dans ce problème, de considérer (§ 58) deux équations résultant des hypothèses successives  $v = \frac{c}{2} = \frac{b}{2}$ , et  $v = -\frac{c}{2} = -\frac{b}{2}$ .

Ces deux équations sont comprises dans

$$(R_0 bc^3 + Qc \mp 6M') (R_0 bc^3 - \eta_1 Qc \pm 6\eta_1 M') = \left( \frac{\gamma}{2\mu} R_0 \frac{M_1}{T_0} \right)^2$$

ou

$$\left( R_0 b^3 + Qb \mp \frac{3}{2} Pa \right) \left( R_0 b^3 - \frac{Q}{4} b \pm \frac{3}{8} Pa \right) = \left( \frac{1}{0,20817} R_0 \frac{Pk}{2T_0} \right)^2$$

qui devient en faisant

$$Q = 20\,000, P = 4000, a = 4, k = 3, R_0 = 600\,000, T_0 = 400\,000,$$

et multipliant par 1 000 000 :

$$\left[ (10b)^3 - \frac{10}{3} (10b) \mp 10 \right] \left[ (10b)^3 - \frac{10}{12} (10b) \pm 2,5 \right] - 144,2257 = 0.$$

De la première des deux équations données par les doubles signes

$$\text{on tire} \quad b = 0,2342;$$

$$\text{De la seconde} \quad b = 0,2445;$$

C'est une preuve que, d'après les données, le danger de rupture est plus fort du côté convexe que du côté concave de la pièce fléchie.

On pouvait le reconnaître par la condition (§§ 53 ou 58)

$$\frac{c}{b} Q^3 < R_0 \frac{(1-\eta_1)^3}{\eta_1(1+\eta_1)^3} \left[ 18 M'^2 + \frac{1}{2\eta_1} \left( \frac{\gamma}{2\mu} R_0 \frac{M_1}{T_0} \right)^2 \right],$$

qui, pour  $\eta_1 = \frac{1}{6}$ ,  $\frac{\gamma}{2\mu} = \frac{1}{0,20817}$  devient, en divisant par 1 000 000 000 000

$$8 < 0,6 \cdot \frac{27}{25} \left( 18 + \frac{9}{2} 23,0773 \right),$$

condition qui est satisfaite. Il faut donc prendre pour équarrissage

$$b = 0^m,2342.$$

157. La section transversale étant un cercle dont  $r$  est le rayon, on a  $f(\varphi) = r$ , et la formule précédente (p. 239) donne

$$PR = \frac{G\theta}{a} \cdot 2\pi \frac{r^4}{4} = G \frac{\pi r^4 \theta}{2a} \quad \text{d'où} \quad \theta = \frac{P}{G} \cdot \frac{2aR}{\pi r^4} (*).$$

158. La section transversale étant un carré dont le côté est  $b$  (fig. 13), on doit chercher à part l'expression de la résistance à la torsion de l'un des huit angles égaux à ABC. L'équation de AB est  $r = \frac{b}{2 \cos \varphi}$ . On a d'ailleurs

$$\int d\varphi \frac{1}{\cos^4 \varphi} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sin \varphi}{\cos^3 \varphi} + \frac{2}{3} \cdot \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi},$$

et par conséquent  $\int_0^{\pi/4} d\varphi \cdot \frac{1}{\cos^4 \varphi} = \frac{4}{3}$ . Ainsi le moment de la résistance du triangle ABC est  $\frac{G\theta}{a} \cdot \frac{b^4}{4} \cdot \frac{4}{3}$ , et par conséquent l'on a pour le moment de la résistance du carré

$$PR = G \frac{b^4 \theta}{6a},$$

d'où

$$\theta = \frac{P}{G} \cdot \frac{6aR}{b^4}.$$

Le moment de la résistance du carré est à celui du cercle inscrit dans le rapport de 1 à  $\frac{3\pi}{16}$  (\*\*).

159. Quant au cas d'une section rectangulaire, des re-

(\*) Nous reproduisons scrupuleusement les n<sup>os</sup> 157 à 160 de Navier quoiqu'ils soient rendus inutiles par notre note du n<sup>o</sup> 156, qui les complète et les rectifie.

(\*\*) Nous avons obtenu bien plus simplement, au § 1 de la note du n<sup>o</sup> 156, le moment d'inertie polaire  $J = \int r^2 d\omega = \frac{b^4}{6}$  du carré; il est



cherches fondées sur des notions que nous ne pouvons exposer ont montré que l'hypothèse précédente, qui consiste à supposer les résistances qui ont lieu dans chaque élément de la section transversale proportionnelles aux distances de ces éléments au centre de cette section, n'était pas ici exactement conforme aux effets naturels. On doit employer dans ce cas une méthode plus exacte, d'après laquelle on trouve pour l'expression du moment de résistance à la torsion d'une pièce rectangulaire homogène dont  $b, c$  représentent la largeur et l'épaisseur ( $a$ )

égal à la somme  $I + I' = 2I$  des moments (n° 81), autour des deux médianes.

Et nous avons montré au § 25 de la même note (voy. aussi § 29) que le moment de torsion  $M_t$  (PR de Navier) du prisme à base carrée n'est que les 0,84346 du produit  $GJ\theta$ , ici désigné par  $G \frac{b^4 \theta}{6a}$  (nous avons appelé  $\theta$  ce qui est ici appelé  $\frac{\theta}{a}$ ). En sorte que le moment de la résistance élastique du carré est à celui du cercle inscrit dans le rapport de  $0,84346$  à  $\frac{3\pi}{16} = 0,589$  ou de  $1$  à  $0,710$  et non de  $1$  à  $0,589$ .

(a) Note de Navier (1833). Cette expression a été donnée par M. Cauchy, Exercices de mathématiques, 4<sup>e</sup> année, p. 59.

Les équations différentielles qui expriment les conditions de l'équilibre et du mouvement des corps solides, et qui sont la base des recherches dont il s'agit, ont été données en premier lieu par l'auteur, pour le cas d'un corps homogène, dans un mémoire présenté en 1821 à l'Académie des sciences, et imprimé dans le tome VII de ses Mémoires. Cette matière a été depuis le sujet de recherches très-étendues, qui sont contenues principalement dans un mémoire de MM. Lamé et Clapeyron, présenté à l'Académie des Sciences en 1828 et imprimé dans le Journal de mathématiques de M. Crelle; dans un mémoire de M. Poisson imprimé dans le tome VIII des Mémoires de l'Académie, et dans les Exercices de mathématiques de M. Cauchy.

Nous remarquerons que toutes les formules présentées dans les

$$PR = G \frac{b^3 c^3 \theta}{3(b^3 + c^3) d},$$

d'où

$$\theta = \frac{P}{G} \frac{3(b^3 + c^3) a R}{b^3 c^3} \quad (*).$$

articles précédents sont conformes aux résultats qui ont été obtenus au moyen de ces recherches nouvelles. Les corps étant homogènes et l'effort dû à la pression atmosphérique pouvant être négligé par rapport aux efforts auxquels les corps sont exposés, on trouvera pour la constante désignée dans le n° 77 par E la même valeur numérique, soit que l'on cherche à la déterminer par des expériences directes faites en tirant une pièce prismatique dans le sens de sa longueur (auquel cas on a  $E = \frac{P\delta}{\Omega}$ , P désignant le poids qui tend la pièce,  $\Omega$  l'aire de la section transversale,  $\delta$  l'allongement divisé par la longueur primitive); soit qu'on détermine cette constante E en faisant fléchir transversalement une pièce rectangulaire ou circulaire, conformément à ce qui a été dit dans les n° 91 et suivants.

Quant à la constante G qui entre dans les formules relatives à la torsion, elle est (en supposant toujours les corps homogènes et négligeant l'effet de la pression atmosphérique qui s'exerce à leur surface) liée à la constante E par la relation  $G = \frac{2E}{5}$ .

(\*) Voyez toujours la note du n° 156. Il y a été dit que la formule citée de M. Cauchy pour le prisme rectangle a besoin d'être multipliée par un coefficient de correction  $\mu'$  (§ 40, p. 362) égal à 0,84346 lorsque  $b = c$  et croissant quand  $\frac{b}{c}$  augmente en sorte que  $\mu' = 1$  et la formulé de M. Cauchy est exacte quand l'un des côtés est très-grand par rapport à l'autre.

Par corps solides *homogènes*, Navier entend, dans sa note (a), ceux qui sont non-seulement d'égale nature en tous leurs points, mais encore *d'égale élasticité en tous sens à chaque point*, ou, ce que M. Cauchy appelle *isotrope*. Nous avons vu que ce n'est qu'à cette dernière condition qu'on a le coefficient  $G = \frac{2}{5} E$ .

**160.** Les résultats des numéros précédents serviront à calculer l'angle de torsion affecté par un corps prismatique sous un effort donné, lorsque la valeur de la constante  $G$  aura été déterminée par des expériences préliminaires. Ces expériences consistent à observer simultanément l'angle de torsion d'un corps, le poids qui produit la torsion, et le bras de levier au bout duquel agit ce poids. La valeur de  $G$  se calcule par les formules des n<sup>os</sup> 156 et suivants (a), qui donnent, si le corps est rond

$$G = P \frac{2aR}{\pi r^4 \theta};$$

si le corps est carré

$$G = P \frac{6aR}{b^4 \theta};$$

et s'il est rectangulaire,

$$G = P \frac{3(b^3 + c^3)aR}{b^3 c^3 \theta} \text{ (*)}.$$

**161 à 163 (\*\*).**

(a) *Note de Navier.* Il est sans doute superflu de remarquer que dans toutes ces formules, on doit mettre pour  $\theta$  le nombre exprimant la longueur de l'arc correspondant à l'angle de torsion dans le cercle dont le rayon est l'unité. Par conséquent si l'angle dont il s'agit est exprimé en degrés, il faut multiplier le nombre de degrés par  $\frac{\pi}{180}$  lorsque ce sont des degrés sexagésimaux; et par  $\frac{\pi}{200}$  lorsque ce sont des degrés centésimaux.

(\*) Voyez la note du n<sup>o</sup> précédent, 159, pour rappeler que de ces trois valeurs de  $G$ , la première seule,  $PR \cdot \frac{2}{\pi r^4} \cdot \frac{a}{\theta}$  est exacte.

(\*\*) Les expériences que Navier cite dans ces n<sup>os</sup> 161 à 163 seront rapportées avec beaucoup d'autres, au *Complément* des art. I à VI.

## ARTICLE VI.

DE LA RÉSISTANCE D'UN CORPS PRISMATIQUE A LA RUPTURE CAUSÉE  
PAR LA TORSION.

164. La torsion d'un solide en cause la rupture quand les molécules qui se trouvent le plus éloignées les unes des autres ne peuvent l'être davantage sans se désunir. En supposant qu'à l'instant où la rupture a lieu, les résistances des éléments du solide ont encore entre elles les rapports admis dans le n° 156, on formera comme il suit l'expression du moment de la résistance à la rupture. Conservant les dénominations du n° 156, et appelant

$r'$  la plus grande valeur de  $r$  dans la section transversale du solide;

$T$  un poids exprimant la résistance à la torsion, rapportée à l'unité de surface, à l'instant où la rupture a lieu;

$\frac{T r'}{r}$  sera la constante à la torsion, à l'instant de la rupture, pour les points des sections transversales situées à la distance  $r$  de l'axe du solide. On aura

$$\frac{T}{r'} \cdot d\varphi \cdot dr \cdot r^3$$

pour la résistance d'un élément de la section transversale; et pour l'équation d'équilibre,

$$PR = \frac{T}{r'} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{f(\varphi)} dr \cdot r^3 = \frac{T}{r'} \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \frac{1}{4} [f(\varphi)]^4.$$

En comparant cette expression de PR à celle du n° 156, on reconnaît que les valeurs du moment de la résistance à la rup-

ture se déduiront des valeurs trouvées dans les nos 157 et suivants, en écrivant T au lieu de  $\frac{G\theta}{a}$ , et divisant par  $r'$  (\*).

165. Quand la section transversale est un cercle, la valeur du moment de la résistance à la rupture est donc

$$PR = T \frac{\pi r^3}{2} \quad (**).$$

166. Quand la section transversale est un carré,  $b$  étant le côté,  $r' = \frac{3}{\sqrt{2}}$ ; la même valeur est

$$PR = T \frac{b^3}{3\sqrt{2}}$$

(\*) Nous reproduisons scrupuleusement les nos 164 à 168; mais, comme ceux dont nous avons parlé à la note du n° 157; ils sont rendus inutiles par notre note du n° 156 qui les complète et les rectifie; car, ainsi qu'il a été dit au § 17 de cette note, nous avons cru devoir donner pour chaque section la formule de la résistance à la rupture par torsion après l'expression du moment de torsion.

Il est inutile de répéter ici que l'expression donnée par Navier pour le moment PR capable de rompre (et qui revient à  $\frac{T}{r'} (I + I')$ ,

I et I' étant les moments d'inertie autour de deux droites rectangulaires), n'est exacte que pour la section circulaire, même en supposant, comme dit l'auteur, que « les résistances des éléments du solide ont encore, jusqu'à l'instant de la rupture, les rapports admis au n° 156. »

(\*\*) A une sous-note du § 17 de la note du n° 156, il a été annoncé que nous donnerions ici une formule de résistance immédiate ou prochaine par torsion (celle du texte n'étant exacte que pour la rupture éloignée). Nous l'avons donnée au § 61 de la note du n° 156.

Les moments des résistances, pour le carré et le cercle qui lui est inscrit, sont dans le rapport de 1 à  $\frac{3\pi}{8\sqrt{2}}$  (\*).

167. A l'égard d'une section rectangulaire, il résulte des recherches dont il a été question au n° 159 qu'en désignant par  $b$  et  $c$  les côtés de la section, on a pour l'expression du moment qui cause la rupture par torsion (a) :

(\*) Voyez aux §§ 28 et 46 de la note du n° 156 la formule exacte  $\text{Lim. } M_1 = 0,20817b^3T$ , de la résistance à la rupture (éloignée) du prisme à base carrée. Elle s'écrirait avec les notations de Navier  $PR = 0,20817b^3T$ ; et les moments de résistance pour le carré et pour le cercle qui lui est inscrit sont dans le rapport de 0,20817 à  $\frac{\pi}{16} = 0,19635$ , ou 1 à 0,9432, et non à  $\frac{8\pi}{8\sqrt{2}} = 0,83304$ .

(a) Note de Navier. Cette formule (p. suivante) n'a pas été donnée par M. Cauchy, mais on peut la déduire de l'analyse qu'il a employée pour traiter le cas d'une verge rectangulaire sollicitée à se tordre. Les formules que l'on présente ici pour les cas d'une pièce à base circulaire et carrée sont entièrement exactes.

Nous concevons dans tous les cas la rupture déterminée parce qu'un élément linéaire du corps a reçu un degré d'extension ou de compression plus grand que la nature du corps ne le comporte; et par suite auquel il y a disjonction ou écrasement. D'après cette notion, et en supposant toujours les corps homogènes et résistant également dans tous les sens, il existe nécessairement une relation déterminée entre la constante désignée ici par  $T$  et la constante désignée par  $R$  dans les n° 119 et suivants; cette relation est  $T = \frac{4R}{5}$ . Mais on ne peut s'attendre à ce que les relations de cette nature soient toujours vérifiées par les expériences, soit à raison du défaut d'homogénéité des corps, soit parce qu'à l'instant de la rupture les actions intérieures ne sont pas telles qu'on l'a supposé dans les solutions analytiques, solutions qui sont essentiellement fondées sur la supposition que le changement de figure est très-petit.

$$PR = T \frac{b^3 c^3}{3\sqrt{b^3 + c^3}} \quad (*).$$

168. La longueur d'un solide entre les deux extrémités n'influe point sur la résistance à la rupture causée par la torsion ; seulement, plus le solide est long, et plus l'angle dont on l'aura tordu pour le rompre sera grand. Les formules précédentes serviront à calculer les efforts nécessaires pour opérer la rupture d'un solide prismatique, lorsque la valeur de la constante  $T$  aura été déterminée par l'observation. Cette valeur se conclura des données de chaque expérience, si le corps est rond, par la formule

$$T = P \frac{2R}{\pi r^3},$$

$P$  représentant le poids qui opère la torsion,  $R$  le bras de levier de ce poids, et  $r$  le rayon du cylindre tordu ; et si le corps est carré ou rectangulaire, par les formules

$$T = P \frac{6R}{\sqrt{2} \cdot b^3}, \text{ ou } T = P \frac{3R\sqrt{b^3 + c^3}}{b^3 c^3}, \quad (**)$$

(\*) La formule  $PR$  ou  $\text{Lim. } M_1 = T \frac{b^3 c^3}{3\sqrt{b^3 + c^3}}$  est inexacte, parce que les considérations sur lesquelles Navier l'a fondée équivalent à assimiler (§ 24 de la note du n° 156) le rectangle à l'ellipse inscrite quant à la forme courbe que nous avons reconnue être prise par les sections non circulaires des prismes tordus ; or il résulterait de cette assimilation que le plus grand glissement ou le plus grand danger de rupture aurait lieu aux quatre angles des sections, tandis que l'on démontre rigoureusement que le glissement  $y$  est nul. Cette formule ne convient donc que pour les prismes *plats*, ou pour lesquels  $c^3$  est négligeable devant  $b^3$ . Elle doit être remplacée par  $\frac{2\mu}{\gamma} bc^2 T$ ,  $\frac{2\mu}{\gamma}$  variant de 0,20817 à 1/3. (§ 40 de la note n° 156 p. 362).

(\*\*) Même observation qu'aux notes des deux n° précédents sur ces formules données pour les prismes à base carrée et à base rectangle.

$b$  et  $c$  étant les côtés de la section transversale. On va exposer les expériences dont la valeur de la constante  $T$  peut être déduite.

**169 à 172 (\*)**.

(\*) Les expériences de rupture que l'auteur cite dans ces n<sup>os</sup> 169 à 172 seront rapportées au *complément* des articles I à VI.





---

## APPENDICES

### AUX NOTES DES ARTICLES I A VI

(n° 1 à 172), section I (1).

---

§ 1. *Objet, et Sommaires.* — Depuis que ce qui précède est imprimé, nous avons été assez heureux pour pouvoir prendre connaissance des feuilles inédites du Cours de mécanique physique et industrielle professé par M. le général Poncelet à la Faculté des sciences de Paris dans l'année 1839, en ce qui regarde la résistance des matériaux, feuilles qu'il avait déjà prêtées à d'autres auteurs. A cette communication il a bien voulu joindre quelques conseils, que lui a suggérés la lecture de la partie du présent ouvrage, pages 1 à 160, déjà imprimée au commencement de 1858.

Les deux sous-notes du § 43 de la note du n° 156 (p. 374 et 384) en ont déjà été le résultat, et nous en profiterons encore dans la section IV en traitant des pièces fléchies par des forces quelconques (2).

Le 1<sup>er</sup> APPENDICE est relatif à divers autres points traités par le

---

(1) Le COMPLÉMENT expérimental et pratique des mêmes art. I à VI, annoncé aux pages 43, 46, 85-86, 168, 169, 504 et 509, est renvoyé, comme nous avons dit, à un autre volume. Il doit contenir, avec l'article VII de Navier, des formules numériques. Il comprendra aussi les expériences relatives à la Section IV.

(2) Nous avons reconnu aussi, dans ces feuilles, que le mode de calcul des résistances des sections en simple T, qui nous a servi, en le généralisant, à établir, pour les doubles T inégaux, des formules bien plus simples que celles qui ont été données dans d'autres ouvrages (§§ 45 et 46 de la note du n° 120), est encore de M. Poncelet.

Savant que nous citons, dont le cours était, par son objet, purement élémentaire.

AU 2° APPENDICE, après avoir insisté sur la nécessité de reconnaître franchement désormais que les formules tant anciennes que nouvelles d'extension, torsion, flexion avec ou sans glissement, ne sont rigoureusement vraies que pour des modes particuliers d'action et de distribution des forces extérieures sur les bases des prismes, nous donnons, de ces formules, des démonstrations d'une forme synthétique, qui achèveront de convaincre de leur parfaite exactitude sous la condition exprimée, et feront renoncer tout à fait, nous l'espérons, aux hypothèses fausses ou gratuites invoquées jusqu'ici pour en établir quelques-unes. L'emploi, ensuite, des mêmes formules, comme approximation suffisante, quand cette condition n'est pas remplie, n'aura rien de contraire à la rigueur mathématique; ce sera une affaire non plus de théorie, mais d'application, fondée sur les faits qui prouvent le peu d'influence du mode de distribution ou de répartition de forces. Des formules plus compliquées, qui tiendraient compte de ce mode (et qui, vainement cherchées jusqu'ici, ne seront peut-être jamais trouvées), n'auraient même sur celle-ci à peu près aucun avantage pratique, vu l'ignorance où l'on est et sera peut-être toujours de la manière dont se distribuent, sur la surface des solides, les forces extérieures, qui y agissent toujours par l'intermédiaire d'autres solides, et dont on ne connaît généralement que la résultante et le moment résultant.

AU 3° APPENDICE nous démontrons d'une manière élémentaire les équations et formules générales de la théorie mathématique de l'élasticité appelées aussi formules et équations de la Mécanique moléculaire, à cause des considérations qui les ont fait découvrir dans le principe, et qui, dans notre opinion, leur servent toujours de fondement principal. Ces équations et formules seront invoquées dans la suite de cet ouvrage, et c'est d'ailleurs à leur emploi que seront dus probablement les perfectionnements ultérieurs de la théorie de la résistance des pièces solides, en sorte que leur établissement devait trouver une place dans notre livre.

AU 4° APPENDICE nous comparons nos formules nouvelles de torsion à l'expérience, et nous présentons diverses considérations sur les premières et les dernières recherches de M. Cauchy, ce qui nous

met dans le cas de traiter, par anticipation, des *vibrations tournantes* des pièces abandonnées à leurs réactions élastiques après avoir été tordues.

Enfin, au 5°, nous nous livrons à une discussion détaillée (qui se trouve résumé dans un dernier §) pour justifier les formules et équations générales du 3° appendice, dues à Navier, Cauchy, Poisson et MM. Lamé et Clapeyron, des attaques dont elles ont été l'objet quant aux relations qui existent entre leurs coefficients constants; relations qu'un savant expérimentateur a proposé, en 1847, de remplacer par d'autres, ce qui a fait naître une opinion sceptique tendant à se propager et que nous croyons devoir combattre. On y verra, ainsi qu'au 3° appendice, démontrés autrement qu'au § 8 de la note du n° 152 les rapports entre les modules d'élasticité  $G$  et  $E$ , et entre les contractions transversales  $\eta_i$  et les dilatations longitudinales  $i$  des prismes *lorsque leur matière est supposée isotrope*.

---

**1<sup>er</sup> APPENDICE. — Divers points traités par M. Poncelet  
d'une manière élémentaire.**

§ 2. *Expression exacte, obtenue élémentairement, de l'inclinaison prise par les divers éléments de l'axe d'une pièce droite après qu'elle a éprouvé une flexion de grandeur quelconque.* — Au § 3 de la note du n° 86 (p. 73-74), nous avons, en remplaçant l'inverse du rayon  $\rho$  de la courbure que prend l'axe d'une pareille pièce supposée encastree à une extrémité et primitivement horizontale, par son expression analytique connue

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\left(\frac{dy}{ds}\right)}{dx}$$

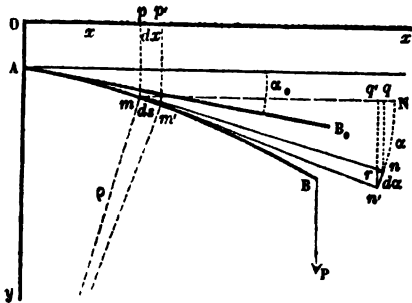
où  $x, y$  sont les coordonnées de ses points, et  $s$  son arc dont l'élément est  $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ , obtenu l'expression

$$\frac{Pa^3}{2\varepsilon} = \frac{Pa^3}{2EI}$$

pour le sinus de l'angle que fait la pièce avec l'horizon à son autre extrémité après qu'elle est fléchie.

Cette valeur est tout à fait exacte pour le sinus tandis qu'elle n'est qu'approchée quand on l'applique, comme Navier, à la tangente du même angle  $\alpha$  (p. 72).

M. Poncelet, en démontrant élémentairement cette valeur du sinus de l'inclinaison, l'applique, convenablement modifiée, à tous les points ou à tous les éléments de l'axe fléchi, et remplace constamment, ainsi, par un sinus  $\frac{dy}{ds}$ , le coefficient différentiel  $\frac{dy}{dx}$  des intégrales premières des équations d'élasticité. Il en résulte, outre l'avantage de rendre ces intégrales tout à fait exactes *quelque grande que soit la flexion*, celui de pouvoir appliquer les équations aussi bien à une pièce primitivement inclinée qu'à une pièce horizontale, ou, ce qui revient au même, aussi bien à une pièce sollicitée obliquement qu'à une pièce sollicitée perpendiculairement à sa longueur par la résultante de toutes les forces qui agissent à droite d'une section quelconque.



Solent donc Ox un axe des abscisses  $x$  perpendiculaire à la direction de la résultante  $P$  des forces agissant à droite d'un point  $m$  de l'axe ;

$\alpha$ , l'angle que la pièce AB faisait avec OX avant sa flexion ;

$\alpha$  L'angle  $Nmn$  que fait après la flexion,

avec une parallèle  $mN$  à Ox, l'élément  $mm' = ds$  de l'axe ou fibre moyenne de la pièce ;

$\rho$  le rayon de courbure, en  $m$ , après la flexion ;

$M$  le moment total des forces élastiques agissant à travers la section en  $m$ , autour d'une ligne perpendiculaire à  $P$  et à  $AmB$ , passant par le centre de gravité de la section et supposée être un des deux axes principaux d'inertie de celle-ci ;

I toujours le moment d'inertie de la section autour de cet axe, et  $E$  le coefficient d'élasticité d'extension ;

On a (§§ 4 et 2 de la note du n° 80, p. 31 à 33)  $M = \frac{EI}{\rho}$  si la pièce est primitivement droite. Or comme l'angle des deux normales à la courbe élastique en  $m$  et  $m'$  est égal à l'angle  $d\alpha$  des deux tangentes  $mn$ ,  $m'n'$  au même point, on a  $\rho d\alpha = ds$ . Donc

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{M}{EI},$$

ou, comme  $ds \cos \alpha = dx$ ,

$$\cos \alpha \, d\alpha = \frac{M}{EI} \, dx.$$

On en conclut en intégrant :

$$\sin \alpha = \sin \alpha_0 + \int_0^x \frac{M}{EI} \, dx,$$

conclusion que M. Poncelet met à la portée de ceux qui ne connaissent que les éléments en prenant  $mn = mm'n' = 1$ , de sorte que  $nn' = d\alpha$  et qu'en abaissant les perpendiculaires  $nq$ ,  $n'q'$  sur  $mn$ , et  $n'r$  sur  $n'q'$ , on a  $mq = \cos \alpha$ ,  $nq = \sin \alpha$ , d.  $\sin \alpha = n'r$  qui est  $= d\alpha \times \cos \alpha$  d'après la similitude des triangles  $nn'r$ ,  $nmq$  (1).

En sorte que si  $M = P(a-x)$  et si  $I$  est constant ou si la pièce est prismatique, on a

$$\sin \alpha = \sin \alpha_0 + \frac{P}{EI} \left( ax - \frac{x^2}{2} \right).$$

M. Poncelet observe, ailleurs, que cette détermination de l'angle  $\alpha$  se ferait également si l'axe de la pièce était primitivement un *arc de cercle* au lieu d'être une ligne droite; car il est facile de voir

(1) Nous nous servons ici de la caractéristique infinitésimale  $d$ , tandis que M. Poncelet se servait (Voy. notre note du n° 84) de petites lettres pour désigner les quantités infiniment petites, et de grandes lettres pour les quantités finies. L'illustre académicien a bien voulu nous dire que s'il en avait usé ainsi c'était moins à cause du peu de science acquise des élèves qu'en raison de la nature mobile et continuellement changeante d'un auditoire de cours public, et pour ne pas rebuter les nouveaux venus qui n'auraient pas assisté à l'explication, si facile du reste, de la valeur des notations  $d$  et  $\int$  dont l'usage est sans inconvénient avec des auditeurs toujours les mêmes, comme le prouve le succès des Cours faits à l'école centrale des Arts et Manufactures.

(on y reviendra section IV) qu'on a alors,  $\rho_0$  étant le rayon primitif et constant

$$M = EI \left( \frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0} \right)$$

d'où

$$\sin \alpha = \sin \alpha_0 + \int_0^x \left( \frac{1}{\rho_0} + \frac{M}{EI} \right) dx,$$

formule qui s'applique évidemment aussi au cas où la courbure primitive  $\frac{1}{\rho_0}$  changerait d'un point à l'autre, et, aussi, à celui où  $I$  varierait suivant une loi donnée, en sorte qu'on peut obtenir ainsi l'angle  $\alpha$  pour une pièce ayant primitivement la forme d'une courbe plané quelconque, à section constante ou graduellement variable.

§ 3. *Tracé de la courbe élastique, ou de la courbe affectée par l'axe ou fibre moyenne d'une pièce fléchie quelconque.* — M. Poncelet remarque d'abord qu'on peut effectuer géométriquement ce tracé de proche en proche à l'aide de la seule équation d'équilibre non intégrée (§ précédent)

$$\frac{1}{\rho} \text{ ou } \frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{\rho_0} + \frac{M}{EI}$$

si l'on connaît  $\alpha_0$  ou la direction de la tangente à l'élastique en un premier point, et les valeurs du moment  $M$  des forces en tous les points de la pièce. En effet, si l'on trace, en ce point initial  $A$ , la perpendiculaire à la tangente  $AB_0$ , on y portera une longueur égale au rayon  $\rho$  déterminé par l'équation précédente, ce qui donnera le centre de courbure et permettra de décrire, avec le même rayon, un petit arc de cercle qui se confondra sensiblement avec la courbe cherchée, à laquelle il est osculateur; puis, en portant sur la courbe d'axe primitive, dont on néglige l'allongement, une longueur égale au même arc, on mesurera pour son extrémité la valeur correspondante du rayon  $\rho_0$ , et on calculera pour le même endroit le moment  $M$ , ce qu'on suppose possible (comme par exemple lorsque la résultante  $P$  reste fixe, car alors son bras de levier dépend de l'abscisse nouvelle); il en résultera, en substituant dans  $\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_0} + \frac{M}{EI}$ , une nouvelle valeur de  $\rho$  qui servira à décrire un second petit arc, et ainsi de suite. Lorsque le rayon  $\rho$  deviendra trop considérable (ce qui arrive né-

cessairement quand on approche du point où la résultante  $P$  rencontre la courbe et où  $M$  s'anéantit), on se servira de  $\frac{d\alpha}{ds}$  au lieu de  $\rho$ , en tirant une droite faisant avec la tangente précédemment obtenue un très-petit angle qu'on prendra pour  $d\alpha$  en multipliant par  $\frac{2\pi}{360}$  sa valeur en degrés sexagésimaux, en sorte que  $d\alpha = 2 \frac{2\pi}{360}$  s'il est de 2 degrés; et l'on portera sur cette droite une longueur égale à  $a$  valeur de  $ds$  tirée de  $\frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{\rho_0} + \frac{M}{EI}$ , ce qui donnera un nouveau point de la courbe qui peut être regardée comme se confondant avec sa tangente sur la longueur  $ds$  déterminée de cette manière, et ainsi de suite.

Cette même méthode servirait à obtenir une première approximation du tracé en prenant les moments  $M$  avec leurs bras de levier anciens dans le cas où la flexion changerait la situation de la résultante  $P$ , comme lorsqu'elle se réduit par exemple (fig. § précédent) à un poids suspendu à une extrémité d'une pièce dont l'autre est encastree. Le tracé obtenu servirait à corriger les grandeurs des bras de levier et à obtenir, en recommençant le tracé, une deuxième et généralement suffisante approximation.

Mais le même savant observe qu'au lieu de se servir d'un pareil tracé par petits arcs et petites droites, sujet à erreur, on peut calculer avec toute l'approximation qu'on désire, en se servant de la valeur ci-dessus  $\sin \alpha$ , les coordonnées d'autant de points qu'on veut de la courbe élastique.

On a en effet,  $y$  étant l'ordonnée,  $\frac{dy}{dx} = \tan \alpha$ , d'où

$$y = \int_0^x dx \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}} \quad \text{où} \quad \sin \alpha = \sin \alpha_0 + \int_0^x \left( \frac{1}{\rho_0} + \frac{M}{EI} \right) dx;$$

en sorte que par de simples quadratures, effectuables numériquement au moyen, par exemple, de la formule de Simpson (§ 3 de la note du n° 85, p. 69) (1), si on ne peut les effectuer analytiquement, on peut obtenir la forme nouvelle de la pièce.

---

(1) On doit à M. Poncelet une autre formule de quadrature. On la trouve à la fin du chap. 1<sup>er</sup> des *Éléments de mécanique*, de M. Resal.

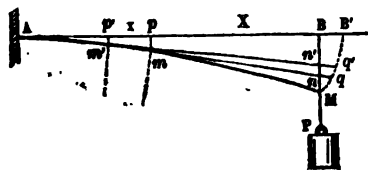
Et l'on obtient de même la longueur d'une portion quelconque de pièce fléchie en remarquant que  $ds = \frac{dx}{\cos \alpha}$ , d'où

$$s = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}} \quad \text{où } \sin \alpha \text{ a la même valeur.}$$

M. Poncelet remarque qu'on peut se dispenser des quadratures dans deux cas extrêmes, où la pièce était primitivement prismatique ( $\frac{1}{\rho_0} = 0$ ; I constant).

1° Le cas où  $\sin \alpha$  reste très-petit, car alors on peut supprimer son carré sous le radical (ou, plutôt, on peut développer  $(1 - \sin^2 \alpha)^{-\frac{1}{2}}$  en série convergente). Ce cas est celui des questions traitées n° 86 à 93 et dans la note du n° 86 (p. 73, 74).

2° Le cas où  $\sin \alpha$  se rapproche beaucoup de l'unité, ou le cas dans lequel la résultante P fait un angle très-aigu avec la pièce supposée droite ou très-peu courbe; car, alors, en écrivant  $(1 + \sin \alpha)(1 - \sin \alpha)$  à la place de  $1 - \sin^2 \alpha$ , il est facile de voir que le premier facteur peut être regardé comme constant, ce qui rend les expressions de  $y$  intégrables par arc de cercle <sup>(1)</sup>.



§ 4. Détermination élémentaire de la flèche. — Nous avons donné au commencement de la note du n° 86 (p. 72), d'après Duleau et d'autres auteurs, une démonstration élémentaire de l'expression  $f = \frac{Pa^3}{8EI}$  de la flèche de flexion

$f = MB$  prise par un prisme AM de longueur  $a$ , sollicité transversalement par une force P au bout M non encastré. M. Poncelet a rendu la démonstration plus exacte en prenant pour élément

(1) En tous cas l'intégration peut se faire par fonctions elliptiques de première et de seconde espèce de Legendre, même lorsque  $\frac{1}{\rho_0}$  n'est pas nul mais constant, en sorte qu'en décomposant une pièce quelconque en parties pouvant être regardées comme sensiblement circulaires on peut trouver, au moyen de ces sortes de transcendentes, la forme qu'elle prend après des flexions de grandeur quelconque (Voy. Note sur les flexions considérables des verges élastiques au Journal de mathématiques pures et appliquées, 1844).



de cette flèche, au lieu de la partie  $mn'$  qu'y interceptent obliquement les tangentes aux points consécutifs  $m, m'$ , la projection verticale de la partie  $qq'$  interceptée, par les mêmes rayons, sur la développante  $MB'$  de l'élastique  $Am'mM$ . Cette projection est à  $qq' = mq \cdot \frac{mm'}{\rho}$  comme  $pp' = x$  est à  $mm'$ . Donc, comme  $\frac{1}{\rho} = \frac{PX}{EI}$ , et  $mq$  = l'arc  $mM$ , la flèche  $f$  est exactement somme de produits  $\frac{P}{EI} \cdot mM \cdot Xx$ , qui sont sensiblement égaux à  $\frac{P}{EI} \cdot X^2x$  quand l'arc  $mM$  diffère peu de sa projection horizontale. Or cette somme fait bien  $\frac{P}{EI} \cdot \frac{a^3}{3}$  (p. 72-73).

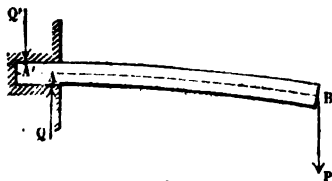
§ 5. *Cas où l'élastique reçoit une forme déterminée.* — Ce cas a lieu notamment quand on ploie une pièce sur un gabarit. Alors, si une extrémité est encastrée et si l'autre est sollicitée normalement par une force  $P$ , on a,  $X$  étant la distance de cette force au point quelconque où le rayon est  $\rho$ :

$$P = \frac{EI}{\rho X}$$

Quelque grande que soit cette force, M. Poncelet observe qu'elle ne suffira pas pour que la pièce suive partout le contour du gabarit, car, pour que cette condition soit remplie aux points dont la distance  $X$  au point d'application est infiniment petite, la force  $P$  aurait besoin d'être infinie. Il y aura donc une petite partie qui se détachera du gabarit, à moins que la courbure n'en soit nulle pour le dernier élément sur lequel  $P$  agit.

En général la courbure est nulle au point où la résultante des forces traverse une pièce qu'elles fléchissent, en sorte que si ce point n'est pas une extrémité il s'y fait une *inflexion*.

§ 6. *Condition des encastremets.* — Ils ne donnent généralement pas à la tangente à l'axe de la pièce une direction invariable et déterminée comme on le suppose dans les calculs.



M. Poncelet les compare à deux points d'appui très-rapprochés et opposés  $A, A'$  qui ne sont autre chose que les points d'application des résultantes  $Q, Q'$  des réactions des

faces inférieure et supérieure de l'enclave. Ces résultantes, si B est l'extrémité libre où se trouve appliquée une force transversale P, ont des intensités

$$Q' = P \cdot \frac{AB}{AA'}, \quad Q = Q' + P = P \cdot \frac{A'B}{AA'}$$

Des forces aussi considérables ne peuvent pas se développer sans que, préalablement, la matière des parois et la matière de la pièce fléchie n'aient éprouvé des compressions dans un sens normal à leurs faces de contact. Aussi il faut compter que l'axe de la pièce, à sa sortie, prend une certaine inclinaison, qui est en raison directe du moment fléchissant  $P \times AB$ , et inverse de la profondeur de l'encastrement, dont le mode plus ou moins imparfait a d'ailleurs une influence sensible.

Cette inclinaison avait été remarquée par M. Vicat (\*). Elle ne peut guère se déterminer, pour diverses matières de la paroi et du prisme et pour des encastremets plus ou moins serrés, que par des expériences dans lesquelles on pourrait la mesurer directement au cathétomètre, ou l'apprécier par des mesurages comparatifs et plus faciles de flèches prises par des pièces encastrees à un ou deux bouts et par des pièces simplement appuyées aux deux extrémités. On verra, à la section IV (notes des n° 371 à 374), que cette inclinaison prise aux encastremets a une influence notable sur la résistance des pièces doublement encastrees.

(\*) *Recherches expérimentales sur les phénomènes physiques qui précèdent et accompagnent la rupture ou l'affaissement d'une certaine classe de solides* (Ann. des Ponts et Ch., 2<sup>e</sup> semestre de 1833, p. 245-249). On ne peut pas tirer, à ce sujet, de données pratiques des expériences rapportées dans ce beau mémoire, parce que, faites sur des prismes de plâtre ou d'argile, elles remplissent seulement « l'objet presque exclusif » (et en quelque sorte négatif) que se proposait son auteur (page 202), à savoir « de prémunir les constructeurs contre le danger des théories connues. »

2° APPENDICE. — *Sur les conditions de l'exactitude mathématique des formules tant anciennes que nouvelles d'extension, de torsion, de flexion avec ou sans glissement. — Démonstration synthétique de ces formules quand on suppose ces conditions remplies.*

§ 7. *Rappel de ces conditions. Nécessité de les faire ressortir. Remarque sur l'ignorance où l'on est des données mêmes du problème des déformations et des résistances quand elles ne sont pas supposées remplies.* — Le Savant que nous venons de citer dans le premier appendice reconnaît, dans ses mêmes leçons de 1839, que la formule

$$P = E\omega i$$

du cas le plus simple de la théorie de la résistance des solides, qui donne l'extension ou la compression longitudinale  $i$  d'un prisme dont la section est  $\omega$  sous l'action de deux efforts longitudinaux opposés  $P$ , est essentiellement fondée sur la supposition que ces efforts exercés aux deux extrémités se trouvent répartis uniformément dans toute l'étendue des bases auxquelles ils sont appliqués (Voy. §§ 3 et 6 de la note ci-dessus du n° 21, p. 16 et 19).

MM. Lamé et Clapeyron avaient déjà reconnu et avoué cette condition expresse de l'extension uniforme dans leur beau mémoire de 1828 (1), où ils expriment aussi (2) qu'une torsion uniforme  $\theta$  n'est prise par un cylindre à base circulaire de rayon  $r$ , conformément à l'expression connue du moment  $M_1$

$$M_1 = G \frac{\pi r^4}{2} \theta$$

qu'autant que chaque point des bases supérieure et inférieure est sollicité par une force proportionnelle à sa distance à l'axe, et agissant perpendiculairement au rayon vecteur dans le plan de ces bases.

(1) *Sur l'équilibre intérieur des solides homogènes*, inséré au journal de Crelle 1834, et au t. IV des *Savants étrangers*, art. 40.

(2) *Idem*, art. 54, 52.

Nous avons énoncé, à bien des reprises, la nécessité de conditions analogues, relatives à l'action et à la répartition des forces extérieures, pour la parfaite exactitude des formules relatives aux cas de torsion uniforme d'autres cylindres ou prismes, et, aussi, de flexion soit *égale* sans glissement (flexion en arc de cercle) soit *inégaie* accompagnée de glissements transversaux et longitudinaux.

Et l'on peut remarquer, même, que si les démonstrations anciennes, fondées sur des hypothèses gratuites et souvent fausses relatives à la manière dont les choses se passent (par exemple la conservation de la forme plane des sections  $\omega$ ), conduisent à des résultats vrais dans des cas particuliers, c'est qu'on y suppose aussi, sans s'en apercevoir, des conditions de ce genre remplies quant au mode d'action et de distribution des forces. Par exemple, admettre, dans la flexion d'une pièce droite en arc de rayon  $\rho$ , que les actions intérieures s'exerçant normalement sur les éléments  $d\omega$  des diverses sections soient exprimés par  $\frac{E}{\rho} d\omega \cdot v$ , et, dans la torsion  $\theta$  d'un cylindre, que les actions tangentielles le soient par  $G\theta d\omega \cdot r$ , c'est bien supposer que dans l'étendue des deux bases, *qui sont aussi des sections*, les forces extérieures, qui doivent faire équilibre aux forces intérieures sur chacun des éléments  $d\omega$ , s'y distribuent suivant les mêmes lois qu'expriment ces deux produits, c'est à-dire proportionnellement aux distances  $v$  ou  $r$  des éléments  $d\omega$  à une même droite ou à un même point de  $\omega$ . Ou, ce qui revient au même, c'est substituer, aux forces extérieures données, des forces de même moment total, ayant ces modes de distribution et d'application sur les bases (1).

---

(1) On peut remarquer que c'est pour le cas exceptionnel de la flexion circulaire qu'ont été faites les premières des expériences sur lesquelles on appuie quelquefois l'hypothèse de la conservation de la forme plane des sections et de leur normalité aux fibres; car on y playait les pièces sur un gabarit cylindrique.

Si des expériences récentes ont paru donner la même chose pour des pièces posées sur deux appuis et chargées au milieu, on doit l'attribuer à ce que les glissements et gauchissements qui en résultent échappent aux mesurages ordinaires, même délicats. Nous avons vu en effet au § 64 de la note du n° 456 (p. 484) qu'un gauchissement, d'un quarantième de millimètre, de sections d'un cylindre elliptique de 0<sup>m</sup>,24 sur 0<sup>m</sup>,46 de largeur et d'épaisseur suffisait pour influer considérablement sur sa résistance à la torsion. Et, quant au glissement sans torsion, comme une formule du § 3 de la note du n° 453, au bas de la page 243, donne pour

Nous regardons comme nécessaire, désormais, de partir ouvertement de la chose tacitement substituée, ou de supposer explicitement ce qu'on admet ainsi implicitement; et, si l'on tient toujours à donner une théorie mathématique de la résistance des solides, de reconnaître franchement et de prime-abord que chacune de ces formules tant anciennes que nouvelles *n'est vraie que pour un mode particulier d'application et de distribution des forces extérieures sur les bases extrêmes des prismes qu'on y considère.*

En prenant ce mode pour une des *données* de chaque question, on démontre les formules d'extension, torsion, flexion, sans hypothèse sur ce qui arrive aux diverses sections quant aux déplacements, et qui se trouve être une conséquence rigoureuse de ce qu'on pose comme ayant lieu aux deux extrémités quant aux forces.

Chacune de ces formules donne ainsi une solution rigoureuse pour un cas ou un mode.

Mais quelles sont, demandera-t-on, les expressions, exactes et rigoureuses aussi, de l'extension, de la torsion, de la flexion, lorsque les forces extérieures sont appliquées et distribuées suivant de tout autres modes, ou, plus généralement, quelles sont les petites déformations des solides élastiques pour des *pressions* ou *tractions* données quelconques agissant tant normalement que tangentiellement sur les divers éléments de leur surface? M. Lamé a montré comment on peut arriver à les calculer pour un solide sphérique isotrope

$v = \frac{c}{2}, \frac{\eta G}{E} = \frac{1}{40}$ , l'expression  $x = \frac{24}{20} \frac{Pc}{G\omega} = \frac{7}{40} g.c$ , on voit qu'avec une inclinaison centrale  $g_0 = \frac{1}{8000}$  ou du quart de la limite 0,000667 conseillée pour les glissements, les points de la section rectangulaire d'une pièce fléchie ayant une hauteur  $0^m,20 = c$  s'écarteraient au maximum de  $\frac{1}{3}$  de millimètre du plan normal dans un sens parallèle aux fibres, ce qui est imperceptible.

L'inclinaison des sections sur les fibres des pièces fléchies non circulairement est d'ailleurs admise aujourd'hui par tout le monde, comme on voit aux ouvrages publiés en 1857, 1858, 1859 par MM. Morin, Belanger et Bresse; et nous avons fait voir au § 45 (p. 394) de la note du n° 456, que leur *inflexion en doucine* démontrée par nous analytiquement pour la première fois en 1854 (*Comptes-rendus de l'Académie*, t. XXXIX, p. 4027) après avoir été implicitement indiquée en 1847 (*id.* t. XXIV, p. 263), était une conséquence nécessaire même des considérations tout élémentaire de M. Jouravski, qui ont été reproduites par ces deux derniers auteurs.

plein ou creux (<sup>1</sup>). Mais, quant aux solides prismatiques, des siècles se passeront peut-être sans qu'on sache les déterminer, si jamais on le sait, à en juger par l'inutilité des tentatives des géomètres depuis trente ans (<sup>2</sup>), et des encouragements de l'Académie qui a enfin retiré du concours, en 1858, ce problème persévéramment proposé depuis mai 1846. Et si jamais on surmonte les difficultés d'intégration qu'il présente pour des corps à surface discontinue, il faut remarquer qu'une nouvelle et peut-être plus grande difficulté surgira et arrêtera les applications de la solution trouvée; c'est précisément de savoir *quelles sont ces pressions ou tractions* qui s'exercent sur les divers éléments de la surface du solide élastique dans chaque cas particulier. C'est, en effet, généralement par l'intermédiaire d'autres solides que les forces extérieures agissent sur un solide donné; or on ne sait pas comment elles se répartissent sur les faces de contact; on ignore, par exemple, avec quelle intensité un corps pesant, placé sur un autre corps, presse les différents points de la surface plane ou courbe où la juxtaposition a lieu; et, s'il y est suspendu par une corde, on ne sait pas déterminer comment se distribue l'action de celle-ci. On ne connaîtra donc alors, tout comme aujourd'hui, que les *résultantes* et les *moments résultants* de ces forces extérieures, jusqu'à l'époque nouvelle et inassignable où on aura appris à calculer les répartitions inconnues, qui sont les données même du grand problème des déformations et des résistances; en sorte que la solution si cherchée de ce problème ne serait jusque-là d'aucun usage.

Mais cette double et longue attente n'est pas nécessaire avant de résoudre les questions de pratique, qui n'exigent que des approximations. Nous l'avons souvent dit : des faits suffisamment nombreux montrent le peu d'influence du mode de répartition et d'application, et permettent d'employer les formules soit anciennes soit nouvelles d'extension, torsion, flexion, pour des forces quelconques agissant aux extrémités de prismes très-longs par rapport à leurs dimensions transversales en n'ayant égard qu'aux grandeurs de leurs

(<sup>1</sup>) *Mémoire sur l'équilibre d'élasticité des enveloppes sphériques.* (*Journal des math. pures et appl.*, t. XIX, 1854).

(<sup>2</sup>) *Leçons de M. Lamé sur la théorie mathématique de l'élasticité*, 1852, § 66, 67, 68.

résultantes et de leurs moments résultants. D'où il suit qu'il suffit de donner des démonstrations exactes des formules relativement à un cas ou à un mode particulier d'action des forces aux extrémités, pour que la théorie soit établie et qu'on puisse faire l'application de ses résultats aux divers autres cas qui peuvent s'offrir.

§ 8. *Observation sur la manière de présenter ces démonstrations.*

—Elles ont été données, pour la formule de l'extension, au § 3 de la note du n° 21 (voy. aussi au § 6); pour celles de la torsion, aux §§ 5 à 9 de la note du n° 156 quant à l'établissement des principes dont l'application se fait ensuite pour chaque forme de section; pour celle de la flexion circulaire sans glissement, au § 3 de la note du n° 80; enfin, pour celle de la flexion non circulaire avec glissement, au § 4 de la même note, au § 2 de celle du n° 153, et surtout au § 46 de la note du n° 156.

Mais comme nous avons suivi une marche différente à ce § de la note du n° 156 et aux §§ cités des deux autres notes, où les glissements n'étaient qu'indiqués ou incomplètement calculés, on nous demandera sans doute quelle est définitivement la méthode à préférer pour établir complètement et clairement les diverses formules, dans des cours de mécanique appliquée?

Nous n'osons faire de réponse générale et tout à fait catégorique, car le choix du mode d'exposition pour chaque cours dépendra de diverses considérations dont les principales seront fondées sur la nature et sur les dispositions de l'auditoire.

Nous croyons cependant qu'une manière presque entièrement synthétique sera ce qu'il y aura de plus généralement propre à ne laisser aucun doute dans l'esprit, d'autant plus que l'analyse pure n'a pu conduire jusqu'ici (voy. § 31. 3<sup>e</sup> appendice), même dans les cas les plus simples, à déterminer *directement* les déplacements ou déformations quand on prend pour données les forces, en sorte que c'est seulement par une marche mixte ou par des essais suivis de vérifications qu'on a pu arriver aux solutions.

Nous allons en donner une esquisse, bien imparfaite peut-être quant à la forme, mais que tout esprit attentif pourra retoucher, changer ou réduire.

§ 9. *Essai d'une théorie synthétique exacte de la résistance des solides. Principe, définitions et lemmes.*

**Principe ou demande.** Les molécules des corps (ou les particules élémentaires dans lesquelles on peut diviser ces molécules si elles sont étendues) exercent les uns sur les autres, à des distances imperceptibles, des actions attractives et répulsives qui font fonctions continues de ces distances.

**Définition I.** On appelle *pression* (ou quelquefois, suivant le sens ou le signe, tension, traction, et aussi *force élastique*), sur une très-petite face plane, la résultante des actions moléculaires qui s'exercent d'un côté à l'autre de cette face à travers sa superficie. On n'a pas besoin (comme on va voir) de considérer le *couple* qui peut accompagner cette résultante, et qui est d'ailleurs nul ou négligeable si, comme on le suppose, les faces, bien que très-petites, sont traversées en tous sens par un nombre excessivement grand d'actions moléculaires.

On rapporte généralement les pressions ou forces élastiques à l'unité superficielle des faces où elles s'exercent.

**Définition II.** Appliquer une *pression* donnée sur un petit élément de la surface extérieure ou enveloppe d'un solide, c'est en rapprocher d'autres corps dont les molécules exercent, à travers cet élément, des actions dont la résultante ait la grandeur et la direction de la force donnée.

**Corollaire I.** La résultante des actions exercées sur les molécules d'un élément polyédrique de la part des molécules qui lui sont extérieures peut être remplacée identiquement par la résultante des pressions sur toutes ses faces. Car si les pressions comprennent, en outre, des actions de molécules extérieures sur d'autres molécules extérieures suivant des lignes qui traversent deux des faces de l'élément, ces actions étrangères se détruisent deux à deux en composant la résultante générale.

**Définition III.** L'*état naturel* d'un corps solide est celui où toutes les pressions sont nulles à l'intérieur comme sur la surface; c'est-à-dire l'état où la résultante des attractions à travers chaque petite face ou élément superficiel est égale et opposée à celle des répulsions.

**Corollaire II.** Toute déformation d'un solide pris dans son état naturel y engendre des pressions. En effet elle développe, par le changement des distances (principe ou demande) des actions moléculaires nouvelles qui ne peuvent se faire équilibre comme les



anciennes à travers toutes les faces qu'on peut imaginer dans son intérieur.

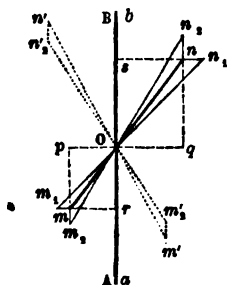
**Lemme I.** Si une déformation du solide (dont on abstrait ici la pesanteur) est telle que les pressions intérieures engendrées (cor. II) satisfassent aux conditions de l'équilibre de translation sur chacun des éléments de son volume dont toutes les faces sont intérieures, on le maintiendra dans sa nouvelle forme en appliquant (déf. II), sur son enveloppe ou sa surface extérieure, des pressions qui suivent la même loi, ou qui soient en équilibre de translation avec les pressions intérieures sur les divers éléments dont une ou plusieurs faces font partie de l'enveloppe.

En effet, 1° Il y aura, équilibre de translation de tous les éléments tant de ceux qui sont entièrement intérieurs que de ceux des extrémités ou des bords, qui sont limités en partie par la surface extérieure du solide.

2° La *non-translation* de tous ces éléments polyédriques juxtaposés, qu'on peut supposer aussi petits qu'on veut, ou la conservation de l'état de repos de leurs centres de gravité, entraîne leur *non-rotation*, puisque l'un d'eux ne pourrait tourner autour de son centre sans que les centres de ceux qui l'environnent changent de place. Donc, etc.

**Lemme II.** Quand le solide est non-seulement *homogène* (ou de même nature aux divers points), mais encore *isotrope* (ou de même contexture en tous sens autour de chaque point) : 1° Une dilatation linéaire  $i$  (positive ou négative), ou une déformation qui éloigne les unes des autres les faces planes et parallèles, de quantités égales à leurs distances multipliées par une fraction constante et très-petite  $i$ , ne produit sur ces faces que des pressions normales et proportionnelles à  $i$ ; 2° Elle ne produit, sur les faces perpendiculaires à celles-ci, et par conséquent parallèles au sens de la dilatation, que des pressions aussi normales et proportionnelles à  $i$ , mais d'une intensité moindre; 3° Un glissement  $g$ , ou une déformation qui fait cheminer les unes devant les autres, dans une certaine direction, sans changer leurs distances, les faces parallèles, de quantités égales à ces distances mutuelles multipliées par une même fraction très-petite  $g$ , ne produit sur elles que des pressions *tangentielles* proportionnelles à  $g$  et dans la direction du cheminement.

En effet, en vertu de la *continuité des fonctions* (principe ou demande) qui représentent les intensités des actions moléculaires, les forces nouvelles développées par les déformations sont proportionnelles aux augmentations très petites (positives ou négatives) subies par les distances  $mn$  entre molécules  $m, n$  situées de part et d'autre



de la face AB sur laquelle on prend les pressions, et qu'on peut supposer être restée immobile. Ces augmentations, quand on néglige les quantités très-petites du second ordre, sont mesurées par les excès, sur les distances primitives  $mn$ , des distances nouvelles  $m_1n_1$  ou  $m_2n_2$ , projetées sur la direction  $mn$ . Or on voit facilement : 1° Que ces excès sont toujours proportionnels à la petite dilatation  $i$  qui les produit, dilatation dont la mesure est, respectivement, selon qu'elle a lieu dans la

direction perpendiculaire à la face AB ou dans la direction parallèle à la droite  $ab$  tracée sur cette face, le quotient de  $mn_1 + nn_1$  qui sont dans la première direction, ou le quotient de  $mn_2 + nn_2$  qui sont dans la seconde, par la distance  $pq$  ou la distance  $rs$  des deux plans matériels  $mp$ ,  $nq$  ou  $mr$ ,  $ns$  perpendiculaires à ces directions et passant par  $m$ ,  $n$ .

2° Que ces mêmes excès, s'ils sont dus à un petit glissement, sont proportionnels à sa mesure  $g$  qui est, dans le sens  $ab$ , le quotient de  $mm_1 + nn_1$ , somme des chemins parcourus, divisée par  $pq$ , distance des deux plans matériels qui passent par  $mn$ , et qui sont parallèles à la face AB.

3° Que les forces moléculaires ainsi développées se distribuent d'une manière symétrique autour des normales à la face AB lorsqu'elles viennent d'une dilatation  $i$  perpendiculaire à cette face, en sorte que leur résultante ne peut être dirigée que suivant une de ces normales; qu'il en est de même quand la dilatation  $i$  est parallèle à cette face, puisqu'il n'y a aucune raison, après une pareille dilatation, pour que la résultante des actions s'écarte, dans un plan passant par une normale, plutôt à droite qu'à gauche de la direction de celle-ci; enfin, qu'elles se distribuent aussi symétriquement de part et d'autre des droites  $ab$  tracées sur la surface AB parallèlement à  $g$  lorsque ce glissement existe seul; car, à chaque force at-

tractive développée de  $m_2$  en  $n_2$ , répondra une force répulsive égale de  $n'$  en  $m'$  devenus  $n'_2$  et  $m'_2$ , agissant suivant une ligne symétrique à  $m_2n_2$  par rapport à  $ab$ , en sorte que la résultante de ces deux forces, transportées parallèlement à elles-mêmes sur un point O de AB, est bien dirigée suivant  $ab$ .

4° Que les composantes, normalement à une face, des forces produites à travers son plan par une dilatation sont généralement moindres lorsque cette dilatation lui est parallèle que lorsqu'elle lui est perpendiculaire. (Voyez le raisonnement simple du § 3 de la note n° 21, p. 16, et, aussi, les appendices 3° et 5° ci-après.)

Le **lemme III** se trouve ainsi établi dans toutes ses parties, bien que nous renvoyions plus loin la détermination du rapport numérique (qui sera trouvé de 3 à 1 comme il l'a déjà été, au reste, au § 8 de la note du n° 152, p. 200), entre les pressions normales produites sur une face par une dilatation qui lui est perpendiculaire et par une dilatation égale, mais qui lui est parallèle.

*N. B.* Pour simplifier, nous faisons abstraction de la pesanteur des solides et de la pression de l'atmosphère, et nous supposons d'abord les corps d'égale texture en tous sens. Une généralisation facile montrera ensuite que les théorèmes sont les mêmes quand la texture est égale seulement dans les sens transversaux, et qu'ils s'observent encore, avec de légères modifications, lorsque la texture est symétrique par rapport aux plans des sections et à deux autres plans perpendiculaires à ceux-ci; symétrie qu'on peut, du reste, définir *par ses effets élastiques*, consistant en ce que les dilatations et les glissements dans les sens de leurs trois intersections ne produisent, sur ces plans, que des actions dirigées suivant les mêmes lignes. (Voy. 3° appendice.)

#### § 10. (Suite). *Extension ou contraction.*

**Théorème I.** Lorsqu'un prisme isotrope en état d'équilibre d'élasticité et dont les faces latérales ne supportent aucune action, se trouve sollicité, sur ses bases, par des forces ou *tractions* normales égales et opposées, uniformément distribuées sur leurs superficies, toutes les parties de ce solide éprouvent des dilatations égales dans le sens longitudinal, et, dans les sens transversaux, des con-

tractions (ou dilatations négatives) aussi égales, qui sont une certaine fraction des dilatations longitudinales.

**Démonstration** (la même au fond que celle du § 3 de la note du n° 21). Divisons le prisme (comme nous ferons toujours) en éléments très-petits par trois systèmes de plans orthogonaux, les uns perpendiculaires, les autres parallèles à ses arêtes.

*Si ce que nous voulons démontrer a lieu*, chaque élément intérieur, de forme parallélépipède rectangle, éprouvera (d'après le 1° du lemme II) sur ses faces opposées, considérées deux à deux, des tractions ou pressions normales égales, dues aux dilatations perpendiculaires à ces faces; il y éprouvera (d'après le 2°) d'autres pressions ou tractions, aussi normales et égales, dues aux contractions ou dilatations qui leur sont parallèles. Cet élément sera donc en équilibre de translation.

Chaque élément des extrémités, ayant pour une de ses bases un élément superficiel d'une des deux bases du prisme, et chacun des éléments *des bords*, de même forme parallélépipède, qui auront pour une de leurs quatre faces latérales un élément superficiel de la surface latérale du prisme, seront aussi en équilibre de translation dans les trois sens rectangulaires si la dilatation longitudinale et les contractions transversales ont des grandeurs justement telles que la somme algébrique des pressions ou tractions qu'elles engendrent sur chaque base soit égale à la pression ou traction normale qu'on suppose y être exercée extérieurement, et que la somme algébrique des pressions ou tractions qu'elles engendrent sur chaque face latérale soit zéro.

Alors, aussi, chacun des éléments prismatiques *triangulaires* qui restent sur les bords sera également en équilibre, vu que la pression sera nulle sur sa face latérale extérieure, qui répond à l'hypoténuse de la base, comme sur les deux faces latérales intérieures, qui répondent aux côtés.

Il y aura donc équilibre de translation de tous les éléments; et, par conséquent, en vertu du lemme I, quand les forces extérieures agissant sur le solide déformé sont ce qu'on a supposé ou pris pour données, la déformation est bien ce qu'énonce le théorème.

**Scholie I.** Nous avons dit, § précédent (et déjà § 3 de la note du n° 21), que la pression ou traction déterminée sur une face par une dilatation qui lui est parallèle est moindre que celle qui est dé-

terminée par une dilatation normale égale. Il en résulte qu'en appelant  $i$  une dilatation longitudinale d'un prisme,  $\eta_i$  les contractions transversales qu'il doit prendre pour que les pressions dues à  $\eta_i$  sur ses faces latérales compensent les tensions dues à  $i$  sur ces mêmes faces, ou qu'elles ne supportent rien, on a le rapport  $\eta < 1$ . On l'a trouvé  $= 1/4$  au § 8 de la note du n° 152, et on y reviendra aux 3° et 5° appendices ; mais cette valeur numérique n'est pas nécessaire à invoquer pour l'établissement des théorèmes qui suivent.

§ 11. (Suite). *Lemme pour la torsion et la flexion.*

**Lemme III.** En appelant  $x, u, v$  des coordonnées rectangulaires dirigées, la première dans le sens longitudinal ou parallèle aux arêtes d'un prisme, les deux autres dans des sens transversaux,  $g', g''$  des glissements qui ont lieu simultanément sur une section dans les sens  $u, v$ ,  $G$  le coefficient d'élasticité qui, multiplié par ces glissements, donne (lemme II) les pressions tangentielles qu'ils engendrent dans leurs directions par unité superficielle ; enfin,  $p$  la pression normale sur les mêmes éléments des sections, il y a équilibre de translation *longitudinale* de chacun des éléments solides dans lesquels on peut diviser le prisme par des plans perpendiculaires aux  $x$ , aux  $u$ , aux  $v$  si l'on a :

$$1^{\circ} G \left( \frac{dg'}{du} + \frac{dg''}{dv} \right) + \frac{dp}{dx} = 0 \text{ partout.}$$

2°  $g''du - g'dv = 0$  au contour des sections ou le long des faces latérales supposées n'éprouver aucune action.

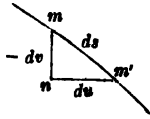
**Démonstration.** 1° Soient  $dx, du, dv$  les longueurs des trois arêtes contiguës parallèles aux  $x$ , aux  $u$ , aux  $v$ , d'un élément parallélépipède.

Le glissement  $g'$ , sur la section  $\omega$  ou sur la base  $du dv$  de cet élément, dans le sens  $u$ , est aussi le glissement qui a lieu, dans le sens longitudinal,  $x$ , sur la face latérale  $dv dx$  ; car l'un et l'autre sont mesurés par le rétrécissement d'un angle primitivement droit formé par  $dx$  avec  $du$  (et on peut remarquer en général que tout glissement relatif de deux côtés opposés d'un carré est accompagné d'un glissement relatif égal des deux autres côtés de ce carré changé ainsi en losange).

Cette face  $dv dx$  et la face opposée et égale éprouvent donc, dans

le sens  $x$ , des actions  $-Gg'dpdx$  et  $G\left(g' + \frac{dg'}{du} du\right)dvdx$ , dont la somme algébrique est  $G\frac{dg'}{du} du dv dx$ . De même les deux faces  $dudx$  éprouvent des actions longitudinales dont la somme est  $G\frac{dg''}{dv} dv dudx$ ; et les deux bases  $dudv$  éprouvent des actions normales dont la somme est  $\frac{dp}{dx} dx dudv$ . On a donc bien pour l'équilibre de translation longitudinale de cet élément et de tous les autres semblables, en divisant par le volume  $dx dudv$  :

$$G\left(\frac{dg'}{du} + \frac{dg''}{dv}\right) + \frac{dp}{dx} = 0.$$



2° Sur les bords, en retranchant les parallélépipèdes, il restera des éléments prismatiques ayant pour bases des triangles rectangles  $mn'm'$  dont les côtés sont  $du$  parallèlement aux  $u$ ,  $-dv$  parallèlement aux  $v$ , et dont l'hypoténuse est un élément  $ds$  du contour de la section. La face latérale  $ds dx$  répondant à  $ds$  ne supporte rien par hypothèse, puisqu'elle fait partie de la surface latérale extrême du prisme, et les faces  $dudx$ ,  $-dv dx$  supportent des actions longitudinales  $Gg'dudx$ ,  $-Gg'dv dx$ . On a donc pour l'équilibre

$$g'' du - g' dv = 0;$$

ce qu'il fallait démontrer.

§ 12. (Suite). *Torsion.*

**Théorème II.** Lorsque, les faces latérales du prisme ne supportant toujours aucune action, ses bases éprouvent, dans l'état d'équilibre d'élasticité, des actions seulement tangentielles répondant à de petits glissements  $g'$ ,  $g''$  dirigés suivant des droites matérielles primitivement parallèles aux  $u$  et aux  $v$ , et satisfaisant à  $\frac{dg'}{du} + \frac{dg''}{dv} = 0$  en tous les points des sections et à  $g'' du - g' dv = 0$  au contour, je dis :

1° Que les mêmes glissements  $g'$ ,  $g''$  ont lieu aux points correspondants de toutes les sections intermédiaires.

2° Qu'il n'y a aucune dilatation ou contraction longitudinale ni

transversale (quand on se tient, bien entendu, aux quantités très-petites du premier ordre ou de l'ordre de  $g'$ ,  $g''$  en négligeant celles des ordres supérieurs).

3° Qu'on a  $\frac{dg''}{du} - \frac{dg'}{dv}$  constant, et, dans tout le prisme, une torsion uniforme  $\theta = \frac{1}{2} \left( \frac{dg''}{du} - \frac{dg'}{dv} \right)$ .

**Démonstration.** 1° et 2°. Si la deuxième partie de ce qu'on veut démontrer a lieu, ou s'il n'y a aucune dilatation ou contraction longitudinale ni transversale, il ne s'exercera, en vertu du lemme II, aucune pression normale ou longitudinale sur les bases, perpendiculaires aux  $x$ , des éléments prismatiques dans lesquels on imagine le prisme divisé par des plans orthogonaux perpendiculaires aux  $x$ , aux  $u$ , aux  $v$ ; en sorte que si la première partie a lieu également, ou si l'on a, sur toutes les sections, des glissements  $g'$ ,  $g''$  satisfaisant à  $\frac{dg'}{du} + \frac{dg''}{dv} = 0$ ,  $g'' du - g' dv = 0$  comme sur les bases, ces éléments intérieurs seront tous en équilibre de translation longitudinale en vertu du lemme III (appliqué en faisant  $p = 0$ ). Il n'y aura pas non plus sur les faces latérales intérieures de ces éléments, en vertu du lemme II, de pressions normales, ni même de *pressions tangentielles transversales*; car ces dernières sortes de pression exigent, pour être engendrées, que les angles droits des côtés parallèles aux  $u$  et aux  $v$  deviennent légèrement aigus ou obtus, ou que les diagonales des bases  $du dv$  s'allongent ou s'accourcissent, ce qui est encore contraire au (2°) ou à la nullité supposée de toute dilatation ou contraction transversale. Enfin, puisque le (1°) de l'énoncé est supposé avoir lieu aussi, il s'exercera, sur les deux mêmes bases  $du dv$  de chaque élément, des pressions tangentielles, dans le sens  $u$ ,  $Gg'$ ,  $-Gg'$ , et, dans le sens  $v$ ,  $Gg''$ ,  $-Gg''$ , multipliées par leurs superficies qui sont égales; ces forces, les seules, comme on vient de voir, qui agissent latéralement, sont égales et opposées deux à deux; en sorte que les éléments intérieurs seront en équilibre de translation transversale comme de translation longitudinale sous l'action des pressions développées par les déformations satisfaisant aux (1°) et (2°) de l'énoncé du théorème.

Le solide ainsi déformé sera maintenu en équilibre (lemme I) par les forces extérieures supposées ou données qui sont aussi, sur les

bases,  $Gg'$ ,  $Gg''$  satisfaisant à  $\frac{dg'}{du} + \frac{dg''}{dv} = 0$ ,  $g''du - g'dv = 0$ , et zéro sur les faces latérales.

Les déformations, répondant à ces forces extérieures données, sont donc bien ce qu'on a énoncé au 1° et au 2° du théorème.

3° Puisqu'il n'y a de dilatations transversales nulle part et dans aucun sens, les points des sections n'éprouvent d'autres déplacements *transversaux* que ceux qui sont capables de les faire tourner les unes devant les autres. Considérons deux d'entre elles, très-voisines l'une de l'autre ; plaçons l'origine des  $u$ ,  $v$  sur l'axe de leur rotation relative, ce qui ne change rien à  $du$ ,  $dv$  qui entrent dans les équations de l'énoncé ; et appelons  $\theta$  le petit arc de cette rotation, d'un rayon = 1 et divisé par leur distance, en sorte que  $\theta r$  est l'arc pour un point  $m$  dont le rayon vecteur est  $r$ . Si nous appelons, en outre,  $x$  le très-petit déplacement longitudinal à ce point  $m$  dont les coordonnées transversales sont  $u$ ,  $v$ ,  $\frac{dx}{du}$  sera la diminution qu'aura éprouvée l'angle primitivement droit  $xmu$  d'une ligne  $mx$  parallèle aux arêtes et d'une ligne  $mu$  parallèle aux  $u$  en vertu du petit changement de direction de cette dernière ligne  $mu$ . Et on aura  $-\theta v$  pour la diminution du même angle droit  $xmu$ , due au changement de direction de  $mx$ , dont l'unité de longueur a maintenant une projection  $\theta r$  sur un plan perpendiculaire à l'axe de rotation ou sur la tangente en  $m$ , au cercle de rayon  $r$ , et par conséquent une projection  $\theta r \times \frac{-v}{r}$  sur la parallèle aux  $u$  menée par  $m$ . (Voy. d'ailleurs § 5 de la note du n° 156, p. 247.)

On aura, ainsi, la diminution totale de cet angle  $xmu$  ou le glissement  $g' = \frac{dx}{du} - \theta v$ . Et on trouvera de même  $g'' = \frac{dx}{dv} + \theta u$ .

D'où  $\frac{dg'}{du} - \frac{dg''}{dv} = 2\theta$ , quantité qui est nécessairement constante d'un bout à l'autre du prisme ou de la portion de prisme que l'on considère, puisqu'on vient de prouver que  $g'$  et  $g''$  sont les mêmes aux points correspondants de toutes les sections.

La troisième partie de l'énoncé se trouve ainsi démontrée comme les deux autres.

**Scholie II.** L'équation au contour des sections,  $g''du - g'dv = 0$  exprime seulement que les faces latérales n'éprouvent pas d'action



tangentielle dans le sens longitudinal. Elle ne suffit pas comme donnée avec  $\frac{dg'}{du} + \frac{dg''}{dv} = 0$  pour établir les diverses parties du théorème II; il faut y joindre la condition, également énoncée, mais non exprimée analytiquement, de nullité des actions tangentielles transversales et des actions normales sur les mêmes faces latérales. Les mêmes théorèmes auraient encore lieu, il est vrai, avec une légère modification, si les faces latérales éprouvaient des actions normales comme celle que produit la pression de l'atmosphère, et, aussi, des actions tangentielles transversales constantes d'un bout à l'autre comme celles que produirait un certain frottement latéral. Mais on peut ne considérer qu'ultérieurement ce cas complexe, donnant lieu à des déformations *résultantes* de celles qui sont dues séparément aux actions latérales dont on parle, et aux actions produisant les glissements  $g'$ ,  $g''$  et la torsion.

**Scholie III.** Si l'on prend pour  $g'$ ,  $g''$  des fonctions entières de  $u$ ,  $v$ , d'un nombre indéfini de termes, la condition  $\frac{dg'}{du} + \frac{dg''}{dv} = 0$  sert à réduire le nombre des coefficients indéterminés de l'une des deux; et, en les substituant à  $g'$ ,  $g''$  dans l'équation  $g''du - g'dv = 0$ , comme son premier membre satisfait à la condition connue pour être une différentielle complète, puisque cette condition est  $\frac{dg''}{dv} = \frac{d(-g')}{du}$ , ce premier membre s'intègre en quelque sorte de lui-même, ce qui donne l'équation générale des contours correspondants des sections, en une série entière égalée à zéro. Cette équation et ces expressions servent aux problèmes de torsion en astreignant en outre les coefficients indéterminés à satisfaire à  $\frac{dg''}{du} - \frac{dg'}{dv} =$  une constante  $2\theta$ ; et on retombe dans les expressions des glissements et dans l'équation des contours du § 10 de la note du n° 156, p. 255-256 (voy. aussi 3° appendice, § 35).

### § 18. (Suite) Flexion.

**Lemme IV.** Si, à travers une section droite, les diverses fibres d'un prisme ont éprouvé des dilatations longitudinales (positives ou négatives) proportionnelles à leurs ordonnées transversales  $v$  ou aux distances à une même droite ou ligne d'abscisses

tracés sur cette section, c'est-à-dire des dilatations exprimées par  $\frac{v}{\rho}$ ,  $\rho$  étant une constante, je dis :

1° Que ces fibres pourront, sans cesser d'être contiguës, prendre des contractions transversales  $\eta \frac{v}{\rho}$ , ou ayant un rapport constant  $\eta$  avec les dilatations correspondantes;

2° Que les petites droites matérielles tracées primitivement sur la section perpendiculairement entre elles se couperont encore normalement après cette modification.

**Démonstration** (semblable à celle du § 3 de la note du n° 80, p. 84). Donnons toujours à ces fibres, ou éléments longitudinaux, pour fixer les idées, la forme de parallépipèdes ayant pour bases les petits rectangles dans lesquels la section se trouve partagée en y traçant des lignes perpendiculaires et des lignes parallèles aux ordonnées  $v$ ; et contractons d'abord les fibres, suivant le sens  $v$ , dans ces proportions  $\eta \frac{v}{\rho}$ . Comme toutes celles de chaque zone perpendiculaire aux  $v$  seront contractées également, elles ne cesseront pas d'être contiguës après cette première modification, et leurs bases seront toujours des rectangles rectilignes. Ensuite, courbons la ligne d'abscisses, ou la ligne de division répondant à  $v = 0$ , en un arc de cercle de même longueur ayant son centre sur le plan prolongé de la section, à une distance  $\frac{r}{\eta}$ , mesurée du côté des  $v$  positifs, et courbons toutes les autres lignes de division, qui lui sont parallèles, en arcs concentriques, dont les lignes de division perpendiculaire deviendront les rayons. Il en résultera que les fibres, déjà contractées transversalement dans la proportion  $\eta \frac{v}{\rho}$  suivant le sens  $v$ , seront contractées suivant le sens perpendiculaire, dans la proportion  $\frac{v}{\rho}$ , c'est-à-dire, aussi,  $\eta \frac{v}{\rho}$ . Or

1° elles sont contiguës, 2° les angles des côtés de leurs bases devenues de petits quadrilatères mixtilignes n'ont pas cessé d'être droits.

Donc, etc.

**Théorème III** (flexion sans glissement, où flexion égale ou en arc de cercle). Si un prisme dont les faces latérales ne supportent

aucune action éprouve, sur ses deux bases, lorsque son équilibre d'élasticité est établi, des pressions extérieures seulement normales, représentées par  $E \frac{v}{\rho}$  pour l'unité superficielle de l'élément dont  $v$  est l'ordonnée par rapport à une ligne d'abscisses tracée de la même manière sur les deux bases,  $E$  étant le coefficient d'élasticité d'extension longitudinale du même prisme, et  $\rho$  une constante linéaire très-grande par rapport à  $v$ ; je dis que les sections  $\omega$  primitivement planes sont restées planes et normales aux fibres, que celles-ci ont pris la forme d'arcs de cercle ayant leurs centres sur une droite tirée parallèlement aux lignes d'abscisses et à la distance  $\rho$  de ces lignes; et qu'elles ont éprouvé, partout, en même temps que des dilatations longitudinales  $\frac{v}{\rho}$  (positives ou négatives avec  $v$ ), des contractions transversales  $\eta \frac{v}{\rho}$ ;  $\eta$  étant toujours le coefficient défini au scholie I, coefficient qui est tel que les faces latérales des fibres contiguës, ne se pressent pas l'une l'autre et que leurs tensions longitudinales sont représentées partout par  $E \frac{v}{\rho}$ .

**Démonstration.** Si ce qu'on veut démontrer a lieu (et le lemme IV en a prouvé la possibilité) un élément quelconque de fibre, d'une longueur assez petite pour être regardé comme rectiligne ou prismatique, est en équilibre de translation en le supposant entièrement *intérieur*, car ses bases  $d\omega$  éprouvent des tractions longitudinales égales et opposées  $E \frac{v}{\rho} d\omega$ , ses faces latérales n'éprouvent aucune action normale, et il n'y a aucune action tangentielle puisque les angles formés par les arêtes de ces éléments parallépipèdes avec les côtés des bases n'ont pas cessé d'être droits, et qu'il en est de même (lemme IV) des angles formés par les côtés des bases. Un élément, aussi parallépipède, dont une des bases ou une des faces latérales est extérieure, se trouve en équilibre par les mêmes motifs, et il en est de même d'un des éléments prismatiques triangulaires *restants*, par la raison donnée p. 529 à la démonstration du théorème I. Donc, d'après le lemme I, les déplacements énoncés sont bien ceux qui ont lieu dans l'état d'équilibre où les forces extérieures sont ce que porte le théorème.

**Scholie IV.** En appelant  $M$  le moment total, autour d'une des

lignes d'abscisses, des forces agissant sur une des deux bases, et  $d\omega$  les éléments superficiels de celles-ci, on a  $M = \int E \frac{v}{\rho} d\omega \cdot v = \frac{EI}{\rho}$ ,  $I$  étant le moment d'inertie  $\int v^2 d\omega$  de la base autour de cette ligne; en sorte que les dilatations sont  $\frac{M}{EI} v$ , et les tractions des fibres sont  $\frac{Mv}{I}$ .

**Théorème IV** (flexion inégale ou avec glissement). Si, toujours dans l'état nouveau d'équilibre où se trouve arrivé un corps qui était, dans l'état naturel, un prisme d'une longueur  $a$  et d'une section  $\omega$ , dont les faces latérales ne supportent aucune action, il s'exerce, par unité superficielle des éléments  $d\omega$  ayant  $v$  pour ordonnées transversales, des pressions normales  $\frac{Pa}{I} v$  sur une des deux bases et zéro sur l'autre, et, sur toutes deux, des actions tangentielles répondant à des glissements  $g'$ ,  $g''$  qui satisfont à  $G \left( \frac{dg'}{du} + \frac{dg''}{dv} \right) = -\frac{Pv}{I}$  partout et à  $g'' du - g' dv = 0$  au contour ( $I$  étant le moment d'inertie de sa section  $\omega$  autour de la ligne d'abscisses  $u$  supposée passer par son centre de gravité), je dis :

1° Qu'on a, aux points correspondants de toutes les sections intermédiaires, les mêmes glissements  $g'$ ,  $g''$ , avec des dilatations longitudinales *uniformément variables* d'un bout à l'autre, et exprimées ainsi par  $\frac{P(a-x)}{EI} v$  à travers une section à une distance  $x$  de

la première base, avec des contractions transversales  $\eta \frac{P(a-x)}{EI} v$  ( $\eta$  ayant la signification ci-dessus) ;

2° Que  $P$  est la somme des actions tangentielles sur chaque section, estimées dans le sens  $v$  ;

3° Qu'on a, partout,  $\frac{dg''}{du} - \frac{dg'}{dv} = 2\eta \frac{Pu}{EI}$ .

**Démonstration.** 1°. Si la première des trois parties de ce que nous voulons démontrer a lieu (et cela est possible d'après le lemme IV où l'on a prouvé la compatibilité de contractions telles que  $\eta \frac{P(a-x)}{EI} v$  avec des dilatations proportionnelles à  $v$  sur chaque section et représentées par  $\frac{P(a-x)}{EI} v$ ), les éléments prismatiques

contigus n'exerceront aucune pression normale les uns sur les autres (théorème I et scholie I), en sorte qu'en appelant  $p$  leurs tractions longitudinales, ou les composantes normales des pressions s'exerçant de l'avant à l'arrière au travers des sections, on aura  $p$  égal à la dilatation multipliée par le coefficient d'élasticité  $E$  comme si l'élément était isolé, ou  $p = -\frac{P(a-x)}{I}v$ , d'où  $\frac{dp}{dx} = \frac{Pv}{I}$ , en sorte

que l'équation  $G\left(\frac{dg'}{du} + \frac{dg''}{dv}\right) + \frac{dp}{dx} = 0$  du lemme III sera satisfaite.

Et comme on a aussi  $g'du - g'dv = 0$ , il y aura, d'après le 1<sup>o</sup> et le 2<sup>o</sup> de ce lemme III, équilibre de translation longitudinale de tous les éléments tant parallélépipèdes que prismatiques triangulaires situés au milieu ou sur les bords. Ils seront également en équilibre de translation latérale, car, sur leurs bases antérieure et postérieure, il y a, dans le sens  $u$ , respectivement des forces  $Gg'$ ,  $-Gg'$ , et, dans le sens  $v$ , des forces  $Gg''$ ,  $-Gg''$  multipliées par les superficies qui sont égales, et il n'y a aucune action dans ces sens sur les faces latérales d'après ce qu'on a vu au lemme IV (2<sup>e</sup> partie) et à la démonstration du théorème III.

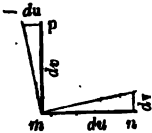
Donc, en vertu du lemme I, les déformations énoncées au 1<sup>o</sup> du théorème IV sont bien celles qui auront lieu dans l'état d'équilibre sous l'action des forces extérieures supposées à son énoncé.

2<sup>o</sup>. La somme des moments, autour de la ligne d'abscisses  $u$ , des forces de traction  $E\frac{P(a-x)v}{EI}d\omega$  s'exerçant sur les éléments  $d\omega$  de la section située à la distance  $x$  de la première base, est  $\frac{P(a-x)}{I}\int v^2d\omega = P(a-x)$ . Ce moment est celui d'une force  $P$  agissant parallèlement aux  $v$  dans le plan de la deuxième base du prisme. On a donc  $P = \int Gg''d\omega$ , somme des actions tangentielles dans le sens  $v$  sur cette base, et par conséquent sur toutes les sections.

N. B. Le moment total des tractions autour de l'axe des ordonnées  $v$  est de même  $\frac{P(a-x)}{I}\int uv d\omega$ . Si  $\int uv d\omega = 0$ , ou si la ligne des abscisses  $u$  est un axe principal d'inertie de  $\omega$ , ce moment est nul et on a  $\int Gg'd\omega = 0$  où une somme nulle pour les actions tangentielles estimées dans le sens  $u$  sur chaque section.

3°. En appelant  $x, u, v$ , comme au § 46 de la note du n° 156, p. 402, les petits déplacements des points du prisme dans les sens  $x, u, v$ , et décomposant, comme on fait au théorème II, les glissements  $g', g''$  qui sont les inclinaisons projetées de la nouvelle normale sur l'ancienne normale à l'élément  $d\omega$ , en inclinaisons de chacune d'elles sur la ligne d'axe ou fibre moyenne, on a  $g' = \frac{dx}{du} + \frac{du}{dx}$ ,  $g'' = \frac{dx}{dv} + \frac{dv}{dx}$ , d'où  $\frac{dg''}{du} - \frac{dg'}{dv} = \frac{d}{dx} \left( -\frac{du}{dv} + \frac{dv}{du} \right)$ .

Mais on a  $-\frac{du}{dv} = \frac{dv}{du}$  (comme on a déjà vu au même § 46, p. 402), puisque, d'après le 2° du lemme IV, l'angle droit  $pmn$  des petites lignes matérielles menées parallèlement aux  $u$ , aux  $v$ , par un point  $m$ , est resté droit en devenant  $p_1mn_1$ .



$$\text{Donc } \frac{dg''}{du} - \frac{dg'}{dv} = -2 \frac{d^2u}{dvdx}.$$

Or le déplacement transversal  $u$  d'un point de la section dont l'abscisse est  $u$  provient de l'accumulation, à partir de l'axe des ordonnées  $v$ , des contractions latérales des fibres situées sur une même parallèle à l'axe des  $u$ , en sorte qu'on a

$$u = -\int_0^u \eta \frac{P(a-x)}{EI} v du = -\eta \frac{P(a-x)}{EI} uv \text{ (}^1\text{)}.$$

Donc  $\frac{d^2u}{dvdx} = \eta \frac{Pu}{EI}$ , et, par conséquent  $\frac{dg''}{du} - \frac{dg'}{dv} = -2\eta \frac{Pu}{EI}$  conformément au (3°) de l'énoncé du théorème à démontrer.

(1) Cela résulte des modifications transversales éprouvées par une section quelconque d'après le lemme IV; car on a vu que l'axe des  $v$ , qui y était tracé, reste une ligne droite, au moins en projection sur un plan perpendiculaire à la fibre moyenne.

Mais comme l'axe des  $u$  se courbe (même lemme) en arc de cercle de rayon  $\frac{P}{\eta}$ , les déplacements  $v$  résultent à la fois de sa courbure et de l'accumulation des contractions des fibres situées sur une même parallèle aux  $v$ . On en déduit

$$v = \frac{u^2}{2} - \int_0^v \eta \frac{P(a-x)}{EI} v dv = \eta \frac{P(a-x)}{EI} \frac{u^2 - v^2}{2}, \text{ d'où } \frac{d^2v}{dudx} = -\eta \frac{Pu}{EI},$$

c'est-à-dire précisément  $\frac{d^2u}{dvdx}$  pris en signe contraire,

**Scholie V.** En prenant pour  $g'$ ,  $g''$ , comme nous avons dit au scholie II relatif à la torsion, et comme au § 46 de la note du n° 156 (p. 403), des fonctions de  $u$ ,  $v$  dont on astreindra les coefficients à remplir les conditions  $\frac{dg'}{du} + \frac{dg''}{dv} = -\frac{Pv}{I} \frac{dg''}{du} - \frac{dg'}{dv} = 2\gamma \frac{Pu}{EI}$ , puis substituant dans  $g''du - g'dv = 0$ , on a une équation différentielle du premier ordre, toujours intégrable en série quand elle ne l'est pas sous forme finie, et susceptible de représenter tous les contours possibles.

Les formules connues de la flexion se trouvent, ainsi, rigoureusement démontrées pour tout prisme, moyennant le mode de distribution de la force transversale  $P$  sur les éléments  $d\omega$  de sa deuxième base représenté par les valeurs des actions tangentielles  $Gg''d\omega$ . Vu la presque indifférence du mode de distribution (Voy. ci-dessus) on n'a besoin de connaître, dans la pratique, les glissements  $g'$ ,  $g''$  que pour les cas assez rares où ils ont une influence sensible dans l'équation de cohésion. Nous avons donné, au § 46 cité, leurs valeurs pour diverses formes du contour, obtenues par l'intégration de son équation différentielle  $g''du - g'dv = 0$ , quand cette intégration peut s'effectuer sous forme finie.

§ 14. *Observation sur la méthode suivie, etc.* — Les théorèmes ci-dessus, de I à IV (sauf peut-être le dernier, qui est relatif à la flexion inégale) auraient pu être énoncés et démontrés avec des notations de géométrie analytique élémentaire. Nous avons cru ne pas devoir le faire dans cette esquisse, et laisser à d'autres une pareille traduction, afin d'éviter les périphrases qui auraient nui à la clarté.

Ces théorèmes suffisent, en y joignant ceux qu'on a de même, comme nous avons dit, pour une matière dont la contexture est inégale, pour obtenir, en les particulierisant, l'extension, la torsion, la flexion et les glissements d'un prisme quelconque dont les extrémités sont sollicitées par des forces ayant une résultante donnée et un moment résultant donné. Tout le reste n'est qu'une affaire de calcul; et on peut en étendre les résultats approximativement, comme nous avons dit, au cas où les forces sollicitantes sont distribuées sur tout ou partie de la longueur du solide prismatique ou presque prismatique.

Si l'on trouve que la forme presque entièrement synthétique sous

laquelle nous avons voulu les présenter pour les établir avec rigueur est peu propre à faire saisir la raison de ce qu'ils énoncent, nous n'avons pas besoin de dire qu'on peut préparer de diverses manières l'intelligence de leurs diverses parties, par exemple comme nous avons fait aux notes des n<sup>os</sup> 21 (§ 3), 80 (§§ 3, 4), 153 (§ 2), 156 (§§ 5, 6, 7, 8, etc.), en sorte que l'énoncé final et sa démonstration serviront seulement à prouver leur exactitude, ou à justifier les suppositions de dilatations transversales nulles, etc., qu'on est obligé de faire *à priori* quand on procède sous une autre forme (1). On reviendra sur ce sujet à la fin de l'Appendice suivant.

RESERVE  
UNIVERSITY  
LIBRARY

3<sup>o</sup> APPENDICE. — *Établissement élémentaire des formules et des équations générales de la théorie de l'élasticité des corps solides.*

§ 15. *Avant propos. Observation sur le changement des notations.* — Nous avons évité, dans tout ce qui précède, de nous appuyer sur les formules et équations générales de l'élasticité, et

---

(1) Ainsi après avoir montré, dans un lemme géométrique, qu'une torsion  $\theta$  avec des déplacements longitudinaux  $x$  produit des glissements  $g' = \frac{dx}{du} - \theta v$ ,  $g'' = \frac{dx}{dv} + \theta u$ , ce qui donne la forme  $\frac{d^2x}{du^2} + \frac{d^2x}{dv^2} = 0$ ,  $(\frac{dx}{dv} + \theta u) du - (\frac{dx}{du} - \theta v) dv = 0$  aux équations exprimant, l'une l'équilibre des actions tangentielles longitudinales qu'ils engendrent sur les faces latérales extérieures des éléments, et, l'autre, la nullité de ces actions longitudinales sur les faces latérales extérieures du prisme, on démontre facilement le théorème II ainsi énoncé : « Lorsqu'un prisme n'a éprouvé que la torsion uniforme  $\theta$  sans dilatations longitudinales ni transversales, avec des déplacements longitudinaux  $x$  satisfaisant à la première de ces deux équations partout, et à la seconde au contour des sections, on le maintient dans son nouvel état d'équilibre en appliquant, sur ses bases, suivant les  $u$  et les  $v$ , des pressions tangentielles  $G \left( \frac{dx}{du} - \theta v \right)$ ,  $G \left( \frac{dx}{dv} + \theta u \right)$  par unité superficielle de ses éléments, sans aucune action sur les faces latérales ; » théorème qui contient toute la théorie de la torsion des prismes d'égale contexture transversale.



nous avons, à mesure du besoin (notes des n<sup>os</sup> 71, 80, 153 à 156) donné des démonstrations particulières de ce que nous avons à emprunter à l'importante théorie qu'elles résument, et qu'on a appelée aussi *mécanique moléculaire* à cause des considérations sur lesquelles elle est principalement basée.

Mais cette théorie, fondée de 1821 à 1829 par les beaux travaux de Navier, de Cauchy, de Poisson et de MM. Lamé et Clapeyron, comprend dans ses applications toute celle de la résistance des solides; c'est d'elle qu'il faudra toujours partir lorsqu'on voudra avancer ou perfectionner celle-ci; et nous aurons à l'invoquer dans la suite de cet ouvrage.

Nous croyons donc devoir exposer ici cette théorie générale de l'élasticité, avec quelque développement, mais dans les termes les plus simples et les plus élémentaires auxquels il nous a été possible de la ramener; ce qui nous fournira l'occasion de donner d'autres démonstrations que celles du § 8 de la note du n<sup>o</sup> 152 des théorèmes concernant certains rapports numériques (Voy. aussi 5<sup>e</sup> appendice), et de revenir sur ceux de torsion, de flexion, etc.

Pour n'avoir pas à invoquer continuellement des choses éparées dans les diverses Notes ci-dessus, nous reproduirons, et quelquefois d'une manière presque textuelle, des raisonnements déjà présentés, même au 2<sup>e</sup> appendice.

On comprendra aussi la nécessité où nous nous trouvons de nous servir ici d'autres notations. Nous avons dû suivre, jusqu'ici, celles des Leçons de Navier, où  $u, v$  sont des coordonnées transversales. Nous les désignerons par  $y, z$  suivant l'usage plus général, qui nous déterminera aussi à nommer

$$u, v, w,$$

ce que nous avons quelquefois désigné par  $x, u, v$ , savoir les petits déplacements des points dans les sens des trois coordonnées rectangulaires.

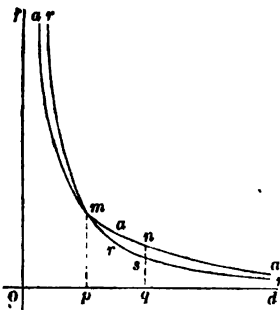
§ 16. *Actions moléculaires. Pressions ou forces élastiques dans un corps solide. Théorèmes de projections de plans de pression et de réciprocité des pressions tangentielles.* — L'élasticité des corps solides et même des fluides, leurs résistances diverses, leurs vibrations, la transmission, par leur intermédiaire, des efforts et des ébranlements, et, on peut dire, toutes leurs propriétés mécaniques,

prouvent que les molécules ou les dernières particules qui les composent exercent les unes sur les autres des actions répulsives indéfiniment croissantes pour leurs distances mutuelles les moindres, et devenant attractives pour des distances plus considérables, mais relativement insensibles quand ces distances, dont elles sont ainsi fonctions, acquièrent une grandeur perceptible <sup>(1)</sup>.

Il n'est pas nécessaire de connaître les intensités individuelles de ces actions moléculaires pour déterminer les résistances aux déformations des corps élastiques. Il suffit, en imaginant ces corps partagés en éléments polyédriques, de considérer les *résultantes* de celles qui s'exercent en très-grand nombre à travers leurs faces de séparation; résultantes tout à fait analogues aux *pressions* des fluides, mais pouvant avoir des inclinaisons quelconques sur les faces où elles agissent, et pouvant, ainsi, être attractives, tandis que, dans les masses fluides en repos, elles sont généralement normales et répulsives.

Nous appellerons donc en général *pression* (et quelquefois ten-

(1) M. Poisson et d'autres auteurs ont remarqué que si l'on répuque à admettre que ces forces changent ainsi de signe ou de sens pour une grandeur déterminée de la



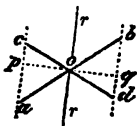
distance moléculaire, et que, lorsqu'elles sont devenues attractives, elles *croissent avec la distance où elles s'exercent*, pour décroître ensuite quand celle-ci passe une certaine autre grandeur, on peut très-bien supposer que l'action moléculaire est une différence de deux autres, l'une attractive, l'autre répulsive, toutes deux décroissantes quand la distance croît, et indéfiniment croissantes quand elle diminue; et représentées, comme a fait M. Poncelet (Introduction à la Mécanique Industrielle), la première par les ordonnées, parallèles à *Of*, de la courbe *aaa*, la deuxième par celles de la courbe *rrr* quand les abscisses sont les dis-

stances comptées sur *Od*. En effet, passé une distance égale à l'abscisse *Op* de leur point de rencontre *m*, la différence, auparavant répulsive, devient attractive; et, après avoir crû jusqu'à ce que la distance atteigne *Oq*, abscisse des points *n*, *s* où les tangentes aux deux courbes sont parallèles, elle décroît indéfiniment quand la distance augmente. L'une de ces deux forces (on ne sait laquelle) peut être supposée inhérente à la matière pondérable, et l'autre due à une influence étrangère telle que l'action d'un fluide impondérable sur ses parties et sur lui-même. Au moyen de la substitution de cette différence de deux forces à une force unique, Poisson évite plusieurs difficultés, mais que nous ne rencontrons pas.

sion, traction, ou plus généralement *force élastique*), sur un des deux côtés d'une petite face plane imaginée à l'intérieur d'un corps ou à la limite de séparation de deux corps, la *résultante de toutes les actions des molécules situées de ce côté, sur les molécules du côté opposé, et dont les directions traversent cette face*; en la regardant comme *positive* lorsqu'elle est *attractive*, et *négative* lorsqu'elle est *répulsive*.

Il suit immédiatement de cette définition que la *résultante des pressions sur les diverses faces d'un élément polyédrique est exactement la même que la résultante des actions exercées sur les molécules de cet élément de la part des molécules qui lui sont extérieures*; car si les pressions comprennent, en outre, des actions de molécules extérieures sur d'autres molécules extérieures, suivant des lignes qui traversent deux des faces de l'élément solide, ces actions étrangères se détruisent deux à deux en composant la résultante générale, et il ne reste que les actions des molécules du dehors sur celles de l'intérieur de l'élément du corps <sup>(1)</sup>.

Il suit encore de la définition ci-dessus que la *pression sur une petite face plane A est résultante des pressions supportées par les trois projections X, Y, Z de cette face sur trois plans rectangulaires passant par son centre*. — En effet, le nombre et l'intensité totale



des actions moléculaires qui s'exercent parallèlement à une même droite  $rr$  à travers diverses faces très-petites  $aob$ ,  $cod$ , etc., ayant le même centre de gravité, sont évidemment les mêmes pour toutes, si ces faces ont la même projection  $pq$  sur un plan perpendiculaire à  $rr$ ; car cette projection est la

(1) Cela n'a pas lieu lorsqu'on définit la pression sur une face, avec plusieurs auteurs : La *résultante des actions exercées sur les molécules du cylindre droit indéfini élevé sur cette face comme base, par toutes les molécules situées du côté opposé du plan de cette même face*. Alors, en effet, il est facile de voir que la résultante des pressions sur un élément polyédrique ne contient pas toutes les actions qui s'exercent du dehors au dedans de cet élément, qu'elle fait une sorte de double emploi de plusieurs et qu'elle contient beaucoup d'actions étrangères (Société philomathique, 30 décembre 1843 ou journal *l'Institut*, n° 524, et Comptes rendus de l'Académie, 7 juillet 1845, t. XXI, p. 24). Il en résulte des difficultés plusieurs fois rencontrées par Poisson (Mémoire sur les corps cristallisés, lu le 28 octobre 1839, t. 48 des Mémoires de l'Institut), et dont on se débarrasse en adoptant la définition que nous avons donnée.

section droite du faisceau prismatique des lignes parallèles joignant les molécules deux à deux. Cette intensité, proportionnelle du reste à la superficie des faces qui font partie d'un même plan, est, ainsi, en raison de la projection  $pq$  lorsque cette projection a des grandeurs différentes pour les diverses faces. Or on en déduit immédiatement que les actions parallèles à une droite quelconque, s'exerçant à travers notre face  $A$ , ont la même intensité totale que celles qui s'exercent à travers les trois projections  $X, Y, Z$ ; car celles-ci, projetées sur un même autre plan, donnent toujours, comme on sait, une somme égale à la projection de  $A$  sur ce dernier; par conséquent, comme les pressions sont les résultantes générales des actions s'exerçant dans toutes les directions, la pression sur  $A$  peut être remplacée par les pressions sur  $X, Y, Z$ .

Ce théorème, dit *des projections de plans de pression*, a été découvert sous une autre forme par M. Cauchy (30 septembre 1822, Société philomatique, 1823, p. 10, ou *Exercices de mathém.*, 1827, p. 49), comme conséquence de l'équilibre d'un élément tétraèdre trirectangle, dont la grande face, qui a les trois autres faces pour projections orthogonales, doit supporter une pression égale et opposée à la résultante des pressions que supportent celles-ci, en négligeant les forces accélératrices (telles que la pesanteur) agissant sur l'élément proportionnellement à son volume, qui est très-petit du troisième ordre tandis que les faces auxquelles les pressions sont proportionnelles ne sont très-petites que du second ordre (<sup>1</sup>).

Il suit de la même définition des pressions et de la même remarque

(<sup>1</sup>) On n'a pas à négliger des quantités d'ordre de petitesse immédiatement supérieur aux pressions lorsque l'on considère (comme nous avons fait à un mémoire présenté le 4 avril 1834), au lieu d'un seul tétraèdre, deux tétraèdres  $abcd, a'b'c'd'$  placés en sens contraire par rapport à leur centre de gravité commun  $o$ , supposé situé au milieu des quatre lignes qui joignent les sommets du premier aux sommets homologues du second. Les faces de l'un sont, ainsi, respectivement égales, parallèles et opposées aux faces de l'autre, et les pressions de l'extérieur à l'intérieur y agissent en sens contraire. L'équilibre exige qu'on ait zéro pour

la résultante des actions sur chacun d'eux, en y comprenant, s'il y a mouvement, les *inerties* ou produits des masses par les accélérations de leurs points; on a donc aussi zéro, évidemment, en composant les actions sur l'un avec les actions sur l'autre, prises en sens opposé. Or, dans cette composition, les pressions sur les

relative aux intensités totales des actions dans une direction déterminée que si l'on appelle, comme nous ferons désormais,

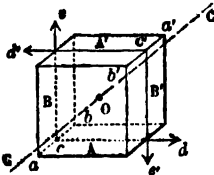
$$P_{xx}, P_{xy}, P_{xz}; P_{yz}, P_{yy}, P_{yz}; P_{zx}, P_{zy}, P_{zz},$$

les composantes, suivant les coordonnées  $x, y, z$ , des pressions supportées en un même point par l'unité superficielle de trois petits plans perpendiculaires à ces coordonnées rectangles, et ayant le même centre de gravité, la première sous-lettre indiquant le plan par sa normale, et, la seconde, le sens de décomposition, l'on a

$$(1) \quad P_{yz} = P_{zy}, \quad P_{zx} = P_{xz}, \quad P_{xy} = P_{yx}.$$

En effet, les intensités totales ou sommes d'actions s'exerçant parallèlement à une même droite  $r$  à travers deux petites faces *supposées égales en superficie* et perpendiculaires respectivement à  $y$  et à  $z$ , sont entre elles comme les projections de ces deux faces sur un même plan perpendiculaire à  $r$ , c'est-à-dire comme  $\cos(r, y)$  et  $\cos(r, z)$ . Décomposées, la première dans le sens  $z$ , la seconde dans le sens  $y$ , elles donnent  $\cos(r, y)\cos(r, z)$  et  $\cos(r, z)\cos(r, y)$ , ou la même chose. Donc, comme les pressions résultent de la composition des actions semblables pour toutes les directions  $r$ , on voit que *la pression sur la première face, estimée perpendiculairement à la seconde, a la même intensité que la pression sur la seconde, estimée perpendiculairement à la première*, ce qui donne bien  $P_{yz} = P_{zy}$ ; et ainsi de même des quatre autres composantes analogues.

C'est le théorème de *réciprocité des composantes tangentielles* de pression, également dû à M. Cauchy (*Exerc. de math.*, 1827, p. 47-48), qui l'a déduit de l'équilibre de rotation d'un élément parallépipède  $aa'$ , à peu près comme nous avons fait à la page 346 (§ 39 de la note du n° 156) (1).



faces égales et parallèles s'ajoutent, tandis que les forces accélératrices et les inerties disparaissent comme ayant les mêmes intensités totales pour les deux tétraèdres à cela près de quantités d'ordre de petitesse 4<sup>me</sup> ou au-dessus. En divisant par 2, on peut remplacer, avec la même approximation, chaque demi-somme de pressions sur deux faces égales appartenant aux deux tétraèdres, par la pression sur une face parallèle et de même superficie ayant son centre en  $o$ . Il en résulte le théorème énoncé; et démontré ainsi jusqu'à des quantités d'un ordre de petitesse supérieur de deux unités à celui des quantités entre lesquelles il établit des relations.

(1) On peut remarquer qu'en prenant, comme nous avons fait d'après M. Cau-

§ 17. *Formules des changements de plans de pression. Composantes de pressions sur trois plans rectangulaires ou obliques, et, pour chacun, suivant les trois normales à ces plans.* — Du premier des deux théorèmes du § précédent on peut déduire facilement des formules qui donnent les six composantes de pressions sur trois plans perpendiculaires à de nouvelles lignes quelconques  $x', y', z'$ , lorsqu'on connaît, pour le même point du corps, les six composantes

$$p_{xx}, p_{yy}, p_{zz}; \quad p_{yz}, p_{zx}, p_{xy}$$

des pressions sur les trois plans coordonnés rectangulaires l'un à l'autre (composantes dont les trois premières sont ce qu'on appelle les *pressions normales*, et, les trois dernières, les *pressions tangentielles*) (1).

En effet, soit, encore plus généralement, à obtenir la composante

$$p_{ns},$$

suivant une ligne  $s$ , de la pression sur une petite face qui a pour normale une ligne  $n$ , et pour superficie l'unité. Les projections de

chy, pour être des moments la droite COG également distante des quatre faces A, A', B, B' (supposées de même superficie), le théorème de l'égalité des composantes de pression qui sont, comme ces faces, très-petites du second ordre, se trouve démontré en ne négligeant que des quantités du quatrième ordre. En effet, les forces accélératrices ou d'inertie, si elles varient d'un point à l'autre, ne peuvent donner pour moment total qu'une quantité de cet ordre quatrième multipliée par le bras de levier commun. Cet ordre de petitesse est aussi celui des différences pouvant exister entre la demi-somme des composantes de pression sur A et sur A', ou sur B et sur B', et les composantes de pressions sur des faces égales et parallèles ayant leur centre en O. Il y a donc bien, entre les composantes réciproques de pression sur des faces ayant même centre, l'égalité qui était à démontrer.

(1) Cette notation, que nous employons depuis 1837 pour les six composantes, nous a été conseillée par Coriolis, et a été finalement employée par Cauchy (*Comptes rendus*, 20 février 1854, t. XXXVIII, p. 329).

Nous croyons devoir en donner la synonymie avec celles de divers auteurs.

Sens de décomposition.	Cauchy (1827).			Poisson.			Lamb et Clapeyron.			Coriolis, Cauchy (1854).			
	$x$	$y$	$z$	$x$	$y$	$z$	$x$	$y$	$z$	$x$	$y$	$z$	
Faces perpendiculaires à	$x$	A	F	E	$P_2$	$Q_3$	$R_3$	$N_1$	$T_3$	$T_2$	$p_{xx}$	$p_{xy}$	$p_{xz}$
	$y$	F	B	D	$P_2$	$Q_2$	$R_2$	$T_3$	$N_2$	$T_1$	$p_{yz}$	$p_{yy}$	$p_{yz}$
	$z$	E	D	G	$P_1$	$Q_1$	$R_1$	$T_2$	$T_1$	$N_3$	$p_{zx}$	$p_{zy}$	$p_{zz}$

cette face sur des plans respectivement perpendiculaires aux coordonnées rectanglées  $x, y, z$  auront des surfaces

$$\cos(n, x), \cos(n, y), \cos(n, z);$$

en sorte que, d'après le théorème invoqué, on aura d'abord pour les composantes  $p_{nx}, p_{ny}, p_{nz}$  des pressions sur la face nouvelle, estimées dans les sens anciens  $x, y, z$  :

$$(2) \quad \begin{cases} p_{nx} = p_{xx} \cos(n, x) + p_{yx} \cos(n, y) + p_{zx} \cos(n, z), \\ p_{ny} = p_{xy} \cos(n, x) + p_{yy} \cos(n, y) + p_{zy} \cos(n, z), \\ p_{nz} = p_{xz} \cos(n, x) + p_{yz} \cos(n, y) + p_{zz} \cos(n, z). \end{cases}$$

Ajoutant entre elles ces forces, décomposées toutes trois dans le sens  $s$ , ou multipliées respectivement par  $\cos(s, x), \cos(s, y), \cos(s, z)$ , on a la composante cherchée. Donc on a (en supprimant les parenthèses après  $\cos$  comme nous ferons souvent pour abrégé) :

$$(3) \quad p_{ns} = p_{xx} \cos nx \cos sx + p_{yy} \cos ny \cos sy + p_{zz} \cos nz \cos sz + \\ + p_{yz} (\cos ny \cos sz + \cos nz \cos sy) + \\ + p_{zx} (\cos nz \cos sx + \cos nx \cos sz) + \\ + p_{xy} (\cos nx \cos sy + \cos ny \cos sx).$$

En mettant successivement  $x', y', z'$  à la place de  $n$  et de  $s$ , on déduit de cette expression les six formules suivantes, dont on se sert souvent, et où nous représentons, pour abrégé encore plus, les cosinus par la lettre  $c$  avec les côtés de leur angle pour sous-lettres ou indices :

$$(h) \quad \left\{ \begin{aligned} p_{x'x'} &= p_{xx} c_{xx'}^2 + p_{yy} c_{yy'}^2 + p_{zz} c_{zz'}^2 + 2p_{yz} c_{yy'} c_{zz'} + 2p_{zx} c_{zz'} c_{xx'} + 2p_{xy} c_{xx'} c_{yy'} \\ p_{y'y'} &= p_{xx} c_{xy'}^2 + p_{yy} c_{yy'}^2 + p_{zz} c_{zy'}^2 + 2p_{yz} c_{yy'} c_{zy'} + 2p_{zx} c_{zy'} c_{xy'} + 2p_{xy} c_{xy'} c_{yy'} \\ p_{z'z'} &= p_{xx} c_{xz'}^2 + p_{yy} c_{yz'}^2 + p_{zz} c_{zz'}^2 + 2p_{yz} c_{yz'} c_{zz'} + 2p_{zx} c_{zz'} c_{xz'} + 2p_{xy} c_{xz'} c_{yy'} \\ p_{y'z'} &= p_{xx} c_{xy'} c_{xz'} + p_{yy} c_{yy'} c_{yz'} + p_{zz} c_{zy'} c_{zz'} + p_{yz} (c_{yy'} c_{zz'} + c_{yz'} c_{zy'}) + \\ &\quad + p_{zx} (c_{zy'} c_{zz'} + c_{zz'} c_{xy'}) + p_{xy} (c_{xy'} c_{yz'} + c_{xz'} c_{yy'}), \\ p_{z'x'} &= p_{xx} c_{xx'} c_{xz'} + p_{yy} c_{xy'} c_{yz'} + p_{zz} c_{zy'} c_{zz'} + p_{yz} (c_{yz'} c_{zz'} + c_{yz'} c_{zy'}) + \\ &\quad + p_{zx} (c_{zz'} c_{xz'} + c_{xz'} c_{zz'}) + p_{xy} (c_{xz'} c_{yz'} + c_{zz'} c_{xy'}), \\ p_{x'y'} &= p_{xx} c_{xx'} c_{xy'} + p_{yy} c_{yy'} c_{yy'} + p_{zz} c_{zy'} c_{zy'} + p_{yz} (c_{yz'} c_{zy'} + c_{yy'} c_{zz'}) + \\ &\quad + p_{zx} (c_{zz'} c_{xy'} + c_{zy'} c_{zz'}) + p_{xy} (c_{xz'} c_{yy'} + c_{xy'} c_{yz'}). \end{aligned} \right.$$

Ces formules s'appliquent aussi bien lorsque les directions nouvelles  $x', y', z'$  ont une obliquité quelconque l'une sur l'autre que lorsqu'elles forment un deuxième système orthogonal.

Seulement, alors,  $p_{x'x'}$ , etc., représentent les pressions, non sur

les plans  $y'z'$ ,  $z'x'$ ,  $x'y'$  parallèles à ces directions prises deux à deux, mais sur des plans perpendiculaires respectivement à  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$ ; et c'est dans les mêmes directions qu'ont lieu les décompositions; en sorte que  $p_{x'x'}$ ,  $p_{y'y'}$ ,  $p_{z'z'}$  sont bien trois composantes normales, mais  $p_{y'x'}$ ,  $p_{x'z'}$ ,  $p_{z'y'}$  ne sont pas trois composantes tangentielles aux plans de pression.

On voit, par la composition des trois dernières, que  $p_{y'x'} = p_{x'y'}$ ,  $p_{x'z'} = p_{z'x'}$ ,  $p_{z'y'} = p_{y'z'}$ , ce qui est une généralisation du *théorème de réciprocité* (§ précédent) facile à démontrer directement.

Il est facile, aussi, de prouver que des formules telles que (A) seraient encore vraies ou exprimeraient encore les six composantes de pression sur des plans perpendiculaires aux directions quelconques  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  et suivant ces directions nouvelles, même si les directions anciennes  $x$ ,  $y$ ,  $z$  étaient légèrement obliques l'une à l'autre, pourvu que les neuf cosinus fussent ceux des angles de  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$ , non pas avec  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , mais avec les lignes peu différentes suivant lesquelles se coupent les trois plans perpendiculaires à  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , c'est-à-dire avec trois lignes respectivement perpendiculaires à  $y$  et à  $z$ , à  $z$  et à  $x$ , à  $x$  et à  $y$  (!).

§ 18. *Dilatations et glissements. Leurs relations pour divers sens.* — Avant de chercher les relations entre les pressions dans les solides et les déformations qui les développent, étudions celles-ci en elles-mêmes, ou cinématiquement.

Soient, dans un corps, avant sa déformation ou les déplacements relatifs de ses parties, trois petites lignes matérielles rectangulaires partant d'un même point  $M$  parallèlement aux coordonnées  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , et changées, par ces déplacements, en trois lignes très-peu obliques entre elles  $M_1x_1$ ,  $M_1y_1$ ,  $M_1z_1$ . Appelons

$$\partial_x, \partial_y, \partial_z$$

les dilatations éprouvées respectivement par ces lignes, ou les proportions supposées très-petites de leurs allongements positifs ou négatifs. Et désignons par

---

(\*) Voyez le mémoire déjà cité *De la torsion des prismes*, 1853-1855; art. 41, en note.



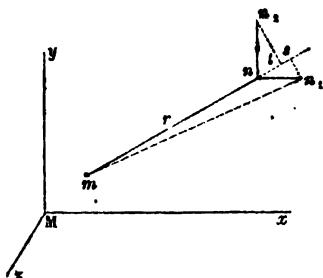
$$\varepsilon_{yz}, \varepsilon_{zx}, \varepsilon_{xy} \quad (1)$$

les *glissements*, ou les quantités, aussi très-petites, dont ont cheminé les unes devant les autres, pour l'unité de leur distance, les parallèles, soit aux  $y$ , soit aux  $z$ , dans le plan  $yMz$  devenu  $y_1M_1z_1$ , et ainsi des deux autres plans; glissements qui mesurent aussi les *inclinaisons* prises les unes sur les autres par les trois lignes  $Mx$ ,  $My$ ,  $Mz$  primitivement rectangulaires, ou les rétrécissements, évalués en arcs d'un rayon  $= 1$ , qui ont été éprouvés par leurs trois angles, et qui ne sont autre chose que les cosinus des angles actuels  $y_1M_1z_1$ ,  $z_1M_1x_1$ ,  $x_1M_1y_1$ , supposés devenus légèrement aigus lorsqu'on prend positivement les quantités  $g$ .

Ces trois dilatations et ces trois glissements, sensiblement les mêmes dans toute une petite étendue du corps autour du point  $M$ , donnent complètement sa déformation dans cette étendue, ou fournissent tout ce qu'il faut pour déterminer les changements de distance mutuelle des divers points qui y sont compris; car chaque distance nouvelle est la diagonale d'un parallélépipède dont les côtés sont les projections de la distance ancienne sur  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , augmentés dans les proportions  $\delta_x$ ,  $\delta_y$ ,  $\delta_z$ , et dont les trois angles plans adjacents sont connus par  $\varepsilon_{yz}$ ,  $\varepsilon_{zx}$ ,  $\varepsilon_{xy}$  qui représentent leurs cosinus.

Par exemple, s'il n'y a une qu'une dilatation

$$\delta_x$$



que, pour fixer les idées, nous supposons la même dans tout le corps, en sorte que la déformation de celui-ci consiste simplement en ce que les plans perpendiculaires aux  $x$  s'éloignent les uns des autres de quantités égales à leurs distances multipliées par la fraction constante très-petite  $\delta_x$ , la distance  $r = mn$  de deux mo-

(\*) M. Cauchy a adopté aussi cette notation, ou à peu près, car, à sa note citée du 20 février 1854 (*Comptes rendus*, p. 329), il désignait les mêmes six petites fractions par  $\varepsilon_{xx}$ ,  $\varepsilon_{yy}$ ,  $\varepsilon_{zz}$ ,  $2\varepsilon_{yz}$ ,  $2\varepsilon_{zx}$ ,  $2\varepsilon_{xy}$ , affectant les trois dernières du coefficient 2, afin de mieux prêter à ses formules symboliques abrégées.

lécules quelconques  $m$ ,  $n$  augmentera comme si, l'une des deux extrémités,  $m$ , restant fixe, l'autre,  $n$ , cheminait, dans le sens  $x$ , de

$$nn_1 = \partial_m \cdot r \cos(r, x),$$

car la projection  $r \cos(r, x)$  de  $r$  sur les  $x$  est la distance des deux plans parallèles aux  $x$  passant par  $m$ ,  $n$ . En projetant  $nn_1$  sur  $r$ , on a une longueur

$$ns = nn_1 \cos(r, x) = r \cdot \partial_m \cos^2(r, x),$$

qui est, à cela près d'une quantité très-petite du second ordre et négligeable, l'allongement de  $r$ . En divisant par  $r$  on obtient la proportion de cet allongement ou *la dilatation dans le sens  $r$* ; ou l'on a, en la représentant par  $\partial_r$ :

$$(5) \quad \partial_r = \partial_m \cos^2(r, x),$$

Si, au lieu d'une dilatation  $\partial_m$  on n'a qu'un glissement

$$g_{xy},$$

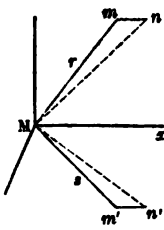
le même par tout le corps, ou si sa déformation a consisté en ce que tous les plans matériels perpendiculaires aux  $x$  ont glissé les uns devant les autres, parallèlement aux  $y$ , de quantités égales à leurs distances multipliées par la faction constante très-petite  $g_{xy}$ ; alors la distance moléculaire oblique  $mn = r$  s'allonge comme si,  $m$  restant fixe,  $n$  cheminait, dans le sens  $y$ , de  $nn_2$  égal à  $g_{xy}$  multiplié par la distance des plans perpendiculaires aux  $x$  passant en  $m$  et en  $n$ , ou multiplié par la projection  $r \cos(r, x)$  de  $r$  sur les  $x$ . En projetant ce cheminement  $nn_2 = g_{xy} r \cos(r, x)$  sur  $mn$  prolongé, on a l'allongement; et, en divisant par  $r$ , on a pour la proportion de la dilatation de  $r$ , due au glissement  $g_{xy}$ :

$$(6) \quad \partial_r = g_{xy} \cos(r, x) \cos(r, y).$$

En raisonnant de même, on peut déterminer un glissement quelconque

$$g_r.$$

ou le rétrécissement éprouvé par l'angle primitivement droit formé par deux lignes matérielles orthogonales  $Mm = r$ ,  $Mm' = s$  (figure page suivante), et qui mesure la quantité dont ont glissé les unes devant les autres, pour l'unité de leur distance, des parallèles soit à  $r$  soit à  $s$  dans leur plan  $mMm'$ .



Supposons en effet, d'abord, qu'il n'y ait qu'une dilatation  $\partial_x$ . L'angle  $mMm'$  change comme si, M restant fixe,  $m$  et  $m'$  cheminaient dans le sens  $x$ , de  $\partial_x$  multiplié par les projections de  $r$  et de  $s$  sur les  $x$ , c'est-à-dire de  $mn = \partial_x \cos(r, x)$  et  $m'n' = \partial_x \cos(s, x)$  en prenant, pour simplifier,  $r = s = 1$ .

Si  $m$  avait cheminé seul, dans le sens  $x$ , le glissement  $g_{r,x}$  qui est le cheminement du même point, estimé dans la direction de  $s$  ou de  $Mm'$ , aurait été  $mn$  projeté sur  $Mm'$ , ou

$$mn \cdot \cos(s, x) = \partial_x \cos(r, x) \cos(s, x).$$

Et si  $m'$  avait cheminé seul, on aurait eu

$$m'n' \cdot \cos(r, x) = \partial_x \cos(s, x) \cos(r, x)$$

ou la même chose. En ajoutant ces deux glissements ou rétrécissements partiels, on obtient

$$(7) \quad g_{r,s} = 2\partial_x \cos(r, x) \cos(s, x).$$

Supposons, en second lieu, qu'il n'y ait qu'un glissement

$$g_{xy} \text{ ou } g_{yx}$$

sans dilatation parallèle aux coordonnées; ou que les plans perpendiculaires aux  $y$  glissent les uns devant les autres, dans le sens  $x$ , de  $g_{xy}$  multiplié par leurs intervalles. L'angle  $mMm'$  (même figure) change comme si  $m$  et  $m'$  cheminaient, parallèlement aux  $x$ , de  $g_{xy}$  multiplié respectivement par les projections de  $r = 1$  et de  $s = 1$  sur l'axe des  $y$ , ou de

$$mn = g_{xy} \cos(r, y) \text{ et } m'n' = g_{xy} \cos(s, y).$$

Ajoutant entre elles, comme tout à l'heure, les projections de  $m'n'$  sur  $r$  et de  $mn$  sur  $s$ , on a pour le glissement cherché

$$(8) \quad g_{r,s} = g_{xy} [\cos(r, x) \cos(s, y) + \cos(r, y) \cos(s, x)].$$

§ 19. *Formules donnant les dilatations et glissements dans le sens d'axes rectangulaires quelconques quand on les connaît suivant trois premiers axes.* — S'il y a à la fois trois dilatations  $\partial_x, \partial_y, \partial_z$  et trois glissements  $g_{yz}, g_{zx}, g_{xy}$  suivant des axes rectangulaires donnés  $x, y, z$ , la dilatation  $\partial_r$  dans le sens nouveau  $r$  est somme des

dilatations qui leur sont séparément dues ; et il en est de même du glissement  $g_{rs}$ . On a ainsi, en général (en convenant toujours d'effacer les parenthèses et les virgules des désignations d'angles),

$$(9) \quad \partial_r = \partial_x \cos^2 rx + \partial_y \cos^2 ry + \partial_z \cos^2 rz + g_{yz} \cos ry \cos rz + \\ g_{xz} \cos rz \cos rx + g_{xy} \cos rx \cos ry.$$

$$(10) \quad g_{rs} = 2\partial_x \cos rx \cos sx + 2\partial_y \cos ry \cos sy + 2\partial_z \cos rz \cos sz + \\ + g_{yz} (\cos ry \cos sz + \cos rz \cos sy) + \\ + g_{xz} (\cos rz \cos sx + \cos rx \cos sz) + \\ + g_{xy} (\cos rx \cos sy + \cos ry \cos sx).$$

La première de ces deux formules aurait pu être obtenue en posant l'expression connue (la même que celle du carré de la résultante de trois forces, p. 450) du carré de la diagonale  $r(1 + \partial_r)$  du parallélépipède formé avec les côtés  $r \cos rx \cdot (1 + \partial_x)$ ,  $r \cos ry \cdot (1 + \partial_y)$ ,  $r \cos rz \cdot (1 + \partial_z)$ , dont les angles ont pour cosinus  $g_{yz}$ ,  $g_{xz}$ ,  $g_{xy}$ , puis développant, effaçant les produits et carrés des petites quantités  $\partial$ ,  $g$  et divisant par  $2r^2$ ; et la seconde aurait pu être déduite d'une expression plus générale, facile aussi à démontrer, donnant le produit de deux diagonales par le cosinus de leur angle quand leurs parallélépipèdes ont leurs côtés suivant les trois mêmes droites (1).

(1) *De la torsion des prismes*, 1855 (ou *Sav. étr.*, t. XIV), art. 6.

La formule (9)  $\partial_r = \partial_x \cos^2 rx + \dots$  montre que les dilatations  $\partial_r$ , qui ont lieu en un même point dans diverses directions, se distribuent de la même manière que les moments d'inertie d'un corps autour de divers axes; c'est-à-dire que les inverses  $\frac{4}{\sqrt{\pm \partial_r}}$  des racines carrées de leurs grandeurs absolues, portés

sur des droites tirées de ce point dans leurs directions, sont, suivant la remarque de M. Cauchy, les rayons vecteurs d'un même ellipsoïde, qui se change en deux hyperboloïdes conjugués lorsque les valeurs de  $\partial_r$  sont les unes positives les autres négatives, ou lorsqu'il y a des dilatations proprement dites dans certaines directions et des contractions dans les autres. Si  $r$  désigne la grandeur du rayon vecteur, ou si

$$r^2 \partial_r = \pm 4,$$

l'équation de cette surface en  $x$ ,  $y$ ,  $z$  se pose en faisant

$$\cos(r, x) = \frac{x}{r}, \quad \cos(r, y) = \frac{y}{r}, \quad \cos(r, z) = \frac{z}{r},$$

d'où l'équation

$$\partial_x x^2 + \partial_y y^2 + \partial_z z^2 + g_{yz} yz + g_{xz} zx + g_{xy} xy = \pm 4.$$

La stabilité de la contexture exige que cette surface *comprenne* ou enveloppe de toutes parts celle qu'on peut former de même avec les inverses des racines carrées

Elles servent, en mettant, pour  $r$  et  $s$ , successivement  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$ , c'est-à-dire les directions de coordonnées nouvelles *rectangulaires comme les anciennes*, à déterminer les dilatations et glissements qui leur sont parallèles en fonction des dilatations et glissements parallèles à un premier système de coordonnées  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Les formules, souvent employées, qui en résultent, sont les suivantes, où les cosinus sont désignés par  $c$  avec deux sous-lettres comme au § 17.

$$(11) \left\{ \begin{array}{l} \partial_{x'} = \partial_x C_{xx'}^2 + \partial_y C_{yx'}^2 + \partial_z C_{zx'}^2 + G_{yz} C_{yx'} C_{zx'} + G_{xz} C_{xx'} C_{zx'} + G_{xy} C_{xx'} C_{yx'} \\ \partial_{y'} = \partial_x C_{xy'}^2 + \partial_y C_{yy'}^2 + \partial_z C_{zy'}^2 + G_{yz} C_{yy'} C_{zy'} + G_{xz} C_{zy'} C_{xy'} + G_{xy} C_{xy'} C_{yy'} \\ \partial_{z'} = \partial_x C_{xz'}^2 + \partial_y C_{yz'}^2 + \partial_z C_{zz'}^2 + G_{yz} C_{yz'} C_{zz'} + G_{xz} C_{xx'} C_{zz'} + G_{xy} C_{xx'} C_{yz'} \\ G_{y'z'} = 2\partial_x C_{xy'} C_{xz'} + 2\partial_y C_{yy'} C_{yz'} + 2\partial_z C_{zy'} C_{zz'} + G_{yz} (C_{yy'} C_{zz'} + C_{yz'} C_{zy'}) + \\ \quad + G_{xz} (C_{xy'} C_{zz'} + C_{xz'} C_{xy'}) + G_{xy} (C_{xy'} C_{yz'} + C_{xz'} C_{yy'}) \\ G_{z'x'} = 2\partial_x C_{xx'} C_{xz'} + 2\partial_y C_{yx'} C_{yz'} + 2\partial_z C_{zx'} C_{zz'} + G_{yz} (C_{yx'} C_{zz'} + C_{yz'} C_{zx'}) + \\ \quad + G_{xz} (C_{xx'} C_{zz'} + C_{zx'} C_{xx'}) + G_{xy} (C_{xx'} C_{yz'} + C_{xz'} C_{yx'}) \\ G_{x'y'} = 2\partial_x C_{xx'} C_{xy'} + 2\partial_y C_{yy'} C_{yx'} + 2\partial_z C_{zy'} C_{xy'} + G_{yz} (C_{yx'} C_{xy'} + C_{zy'} C_{xz'}) + \\ \quad + G_{xz} (C_{xx'} C_{xy'} + C_{xy'} C_{xx'}) + G_{xy} (C_{xx'} C_{yy'} + C_{xy'} C_{yy'}) \end{array} \right.$$

§ 20. *Formules donnant les composantes des pressions en fonction des dilatations et glissements.*— Soit un corps solide dans l'état nommé *naturel* ou *primitif*, où on suppose qu'aucune force non réciproque (telle que la pesanteur) n'agisse encore sur ses points, et où il ne s'exerce aucune pression sur ses faces extérieures ni intérieures, c'est-à-dire où, à travers chacune, les attractions et les répulsions moléculaires se détruisent ou se font équilibre comme donnant deux résultantes égales et opposées quand on les compose après les avoir transportées parallèlement à elles-mêmes sur un même point.

Si on vient à déformer ce corps, ou à déplacer ses points matériels les uns par rapport aux autres, le changement de leurs distances mutuelles développe de nouvelles actions (§ 16) et engendre des pressions qui sont, comme on a vu, exprimables partout au

---

des limites des dilatations non dangereuses en divers sens. En supposant celle-ci ellipsoïdale comme l'autre, on déduit, de là, l'équation de cohésion ou de non-rupture la plus générale des corps solides (même mémoire de 1853-1855 sur la torsion des prismes, art. 24 et 424). Cette équation peut être facilement étendue à une contexture quelconque sans plans de symétrie, et il n'est pas nécessaire, en l'appliquant, de considérer les contractions —  $\partial$  et leurs limites, comme nous faisons en 1853 (§§ 2, 4, 7 de la note n° 3, et 13, 43 de celles des nos 413 et 456).

moyen (§ 17) des six composantes  $p_{xx}$ ,  $p_{yy}$ ,  $p_{zz}$ ,  $p_{yz}$ ,  $p_{zx}$ ,  $p_{xy}$ , de celles qui s'exercent à travers trois plans primitivement perpendiculaires aux coordonnées orthogonales  $x$ ,  $y$ ,  $z$ .

Ces six composantes sont nécessairement, en chaque point, *fonctions des trois dilations et des trois glissements* (§ 18) parallèles aux  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , car les actions moléculaires développées en sus des actions anciennes qui se détruisent, dépendent des augmentations positives ou négatives des distances  $r$  (§ 19) entre les molécules environnantes, augmentations dont les proportions  $\partial_r$  sont exprimables, comme on a vu, ainsi que les petits changements qui en résultent dans les inclinaisons des forces sur les directions de décomposition, au moyen des dilatations et glissements  $\partial_x$ ,  $\partial_y$ ,  $\partial_z$ ,  $\mathcal{E}_{yz}$ ,  $\mathcal{E}_{zx}$ ,  $\mathcal{E}_{xy}$ .

Et il est facile de voir que les fonctions exprimant les six composantes de pression sont *linéaires* ou *du premier degré* en  $\partial_x$ ,  $\partial_y$ ,  $\partial_z$ ,  $\mathcal{E}_{yz}$ ,  $\mathcal{E}_{zx}$ ,  $\mathcal{E}_{xy}$ .

En effet, comme les actions entre molécules sont fonctions de leurs distances mutuelles  $r$ , celles que développent de très-petites augmentations des distances  $r$  sont proportionnelles à ces augmentations, qui ont été appelées  $\partial_r$ . Or nous venons de voir qu'une dilatation  $\partial_x$ , par exemple, produit des augmentations  $\partial_r = \partial_x \cdot r \cos^2(r, x)$  ou proportionnelles à  $\partial_x$ ; que, de même, un glissement  $\mathcal{E}_{yz}$  produit des augmentations  $\partial_r = \mathcal{E}_{yz} \cdot r \cos(r, y) \cos(r, z)$  ou proportionnelles à  $\mathcal{E}_{yz}$ . Une pression, résultante de forces proportionnelles à ces petites augmentations, et dont les inclinaisons mutuelles n'ont éprouvé que des changements dont l'influence, aussi dépendante des dilatations et glissements, est d'ailleurs négligeable, est donc elle-même proportionnelle à la dilatation ou au glissement supposé avoir eu lieu dans la petite portion de corps élastique où elle s'engendre.

Et, s'il y a simultanément trois dilatations  $\partial_x$ ,  $\partial_y$ ,  $\partial_z$  et trois glissements  $\mathcal{E}_{yz}$ ,  $\mathcal{E}_{zx}$ ,  $\mathcal{E}_{xy}$ , chacune de ces six affections produit des augmentations de distances, et, par suite, des forces, qui s'ajoutent pour chaque couple de molécules situées dans la sphère d'activité l'une de l'autre; en sorte que la composante totale, ou la pression estimée dans un sens quelconque, est égale à une somme de termes proportionnels à ces six affections ou déformations partielles très-petites  $\partial_x$ ,  $\partial_y$ ,  $\partial_z$ ,  $\mathcal{E}_{yz}$ ,  $\mathcal{E}_{zx}$ ,  $\mathcal{E}_{xy}$ .

Sans même invoquer les formules (5) et (6) du § 19 qui donnent les augmentations  $r\delta$ , des longueurs  $r$ , on conçoit facilement d'une manière directe que plusieurs dilatations et glissements très-petits, dans des sens déterminés  $x, y, z$ , produisent des petits chemine-  
ments moléculaires qui s'additionnent lorsqu'on les projette sur chaque *distance* ou ligne de jonction  $r$  de deux molécules quel-  
conques; qu'une dilatation double, triple, etc. d'une autre dilata-  
tion amène un accroissement de distance double, triple, etc., en  
sorte qu'une résultante ou une composante totale de forces pro-  
portionnelles à ces accroissements positifs ou négatifs se compose  
d'une suite de termes proportionnels aux dilatations et aux glisse-  
ments qui les ont causés.

Nous pouvons donc poser, en désignant divers coefficients, dé-  
pendant de la nature du corps solide élastique autour d'un point  
donné quelconque, par la lettre

•

avec les deux sous-lettres de la composante de pression à laquelle  
ils appartiennent, suivies des sous-lettres de la dilatation ou du  
glissement qu'ils affectent, en doublant, pour la symétrie, celles  
des dilatations, les formules suivantes, applicables à des corps de  
contexture variable et quelconque :

$$(12) \begin{cases} p_{xx} = \alpha_{xxxx} \delta_x + \alpha_{xxyy} \delta_y + \alpha_{xxzz} \delta_z + \alpha_{xyyz} \xi_y + \alpha_{zzxx} \xi_x + \alpha_{xxyy} \xi_y, \\ p_{yy} = \alpha_{yyxx} \delta_x + \alpha_{yyyy} \delta_y + \dots, & p_{xz} = \alpha_{zxxz} \delta_x + \alpha_{zxyy} \delta_y + \dots, \\ p_{yz}, p_{zx}, p_{xy} = \text{des expressions analogues.} \end{cases}$$

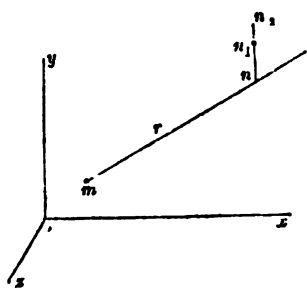
§ 21. *Nombre des coefficients  $\alpha$  essentiellement différents. Leur  
réduction de trente-six à quinze.* — Les 36 coefficients  $\alpha$  des for-  
mules (12) qu'on vient d'établir ne sont pas indépendants les uns des  
autres, et il est facile de voir qu'il y a entre eux vingt et une égalités.

Pour les reconnaître, je démontrerai d'abord, élémentairement,  
les deux théorèmes suivants :

1° Sur une face quelconque, la composante, suivant les  $x$ , de la  
pression engendrée par une dilatation  $\delta_y$ , a la même intensité que  
la composante, suivant les  $y$ , de la pression engendrée par un glis-  
sement  $\xi_y$  égal à cette dilatation  $\delta_y$  (ou, autrement dit,  $n$  désignant  
la normale à la face, le coefficient de  $\delta_y$  dans  $p_{nx}$  est le même que le  
coefficient de  $\xi_y$  dans  $p_{ny}$ ).

2° Sur une face quelconque, la composante, suivant les  $x$ , de la pression produite par un glissement  $g_{yx}$ , a la même intensité que la composante, suivant les  $y$ , de la pression produite par un glissement  $g_{xy}$  égal au glissement  $g_{yx}$  (ou, autrement dit, le coefficient de  $g_{yx}$  dans  $p_{nx}$  est le même que le coefficient de  $g_{xy}$  dans  $p_{ny}$ ).

*Démonstrations :* 1° Une dilatation  $\partial_y$ , ou une déformation qui éloigne les uns des autres les plans perpendiculaires à la coordonnée  $y$ , de quantités égales à leurs intervalles multipliés par la fraction très-petite  $\partial_y$ , allonge la distance  $r = mn$  de deux molécules quelconques  $m, n$  comme si, la première  $m$  restant fixe, l'autre



cheminait parallèlement aux  $y$  de  $\partial_y$  multiplié par l'intervalle des deux plans perpendiculaires à  $y$  passant par  $m$  et par  $n$ , ou *multiplié par la projection de  $r$  sur les  $y$* , c'est-à-dire comme si  $n$  cheminait de

$$nn_1 = \partial_y \cdot r \cos(r, y).$$

Et un glissement  $g_{xy}$ , ou une déformation qui fait glisser les uns devant les autres, dans le sens  $y$ , les plans perpendiculaires aux  $x$ , de quantités égales à leurs intervalles multipliés par la fraction très-petite  $g_{xy}$ , allonge la même distance  $r = mn$  comme si,  $m$  restant fixe,  $n$  cheminait parallèlement aux  $y$  de  $g_{xy}$  multiplié par l'intervalle des deux plans perpendiculaires aux  $x$  qui passent par  $m$  et par  $n$ , ou *multiplié par la projection de  $r$  sur les  $x$* , c'est-à-dire comme si  $n$  cheminait de

$$nn_2 = g_{xy} r \cos(r, x).$$

Ces petits cheminements de  $n$ , de même direction, étant l'un et l'autre projetés sur  $mn$  prolongé, donnent les allongements de  $r$ ; et ces allongements, si l'on a  $\partial_y = g_{xy}$ , sont entre eux comme

$$\cos(r, y) \quad \text{et} \quad \cos(r, x).$$

ou comme les projections de  $r$  suivant les  $y$  et suivant les  $x$ .

Les actions développées entre les molécules  $m, n$  dans la direction  $mn$  par ces deux déformations, suivent le même rapport. Si on les estime, la première suivant les  $x$ , la deuxième suivant les  $y$ , ou si on les multiplie, celle-là par  $\cos(r, x)$ , celle-ci par  $\cos(r, y)$ , on



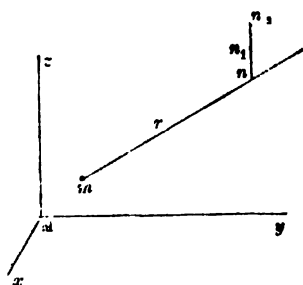
a des composantes de même intensité, puisque  $\cos(r,y)\cos(r,x)$  est la même chose que  $\cos(r,x)\cos(r,y)$ .

Donc, comme les pressions sont des résultantes de pareilles forces, s'exerçant entre molécules à travers une face donnée, on voit que sur une face quelconque, si  $\partial_v = g_{xy}$ , la composante, suivant les  $x$ , de la pression due à  $\partial_v$ , a la même intensité que la composante, suivant les  $y$ , de la pression due à  $g_{xy}$ ; ce qui est le premier des deux théorèmes énoncés.

2° Le second se démontre de même. Une déformation qui fait glisser les uns devant les autres, parallèlement aux  $z$ ; de  $g_{yz}$  multiplié par leurs intervalles, les plans perpendiculaires aux  $y$ , allonge  $mn = r$  comme si,  $m$  restant fixe,  $n$  cheminait parallèlement aux  $z$  de

$$nn_1 = g_{yz} \cdot r \cos(r,y).$$

Et une déformation qui fait glisser, aussi parallèlement aux  $z$ , de  $g_{xz}$  multiplié par leurs distances ou intervalles, les plans perpendiculaires aux  $x$ , allonge  $mn = r$  comme si,  $m$  restant toujours fixe,  $n$  cheminait de



$$nn_1 = g_{xz} \cdot r \cos(r,x).$$

Ces deux déformations développent donc, entre les molécules  $m, n$ , des forces qui, si

$g_{yz} = g_{xz}$ , sont entre elles comme

$$\cos(r,y) \text{ est à } \cos(r,x).$$

Estimées la première suivant  $x$ , la seconde suivant  $y$ , ou multipliées respectivement par  $\cos(r,x)$  et  $\cos(r,y)$ , ces deux forces donnent des composantes de même intensité. Il y a donc, aussi, égalité d'intensité des composantes de pression, sommes de toutes les composantes des forces moléculaires s'exerçant à travers la face quelconque donnée; ce qui est le deuxième théorème énoncé.

Ces théorèmes reviennent à ce que des composantes de pression, l'une suivant les  $x$ , l'autre suivant les  $y$ , sont un même multiple, la première de la dilatation  $\partial_v$ , la deuxième du glissement  $g_{xy}$  supposés les produire respectivement; et, aussi, un même multiple, la première de  $g_{yz}$ , la deuxième de  $g_{xz}$  supposés les engendrer; ou à ce

que, si  $n$  désigne la direction quelconque de la normale à la face donnée, et si les quatre sous-lettres des coefficients  $a$  ont des significations comme celles du § précédent, on a

$$a_{nx\ yy} = a_{ny\ xy}, \quad a_{nx\ yz} = a_{ny\ xz}$$

En mettant successivement  $x, y, z$  à la place de  $n$ , on reconnaît déjà six égalités entre les coefficients  $a$  des formules (12), et on voit généralement qu'ils ont la même valeur lorsqu'ils se déduisent l'un de l'autre en faisant permuter leur seconde sous-lettre avec une des deux dernières. Celles-ci (les deux dernières) peuvent toujours se permuter entre elles d'après la définition des glissements  $g_{yz}, g_{zx}, g_{xy}$ , sans changer la valeur du coefficient, et il en est de même des deux premières sous-lettres, puis qu'on a (§ 16)  $p_{xy} = p_{yx}, p_{xz} = p_{zx}, p_{yz} = p_{zy}$ . On peut, ainsi, sans changer la valeur du coefficient  $a$ , faire permuter une de ses deux premières sous-lettres avec une des deux dernières, choisie à volonté.

Cette première permutation peut être suivie d'une autre semblable, ce qui donnera par exemple  $a_{xx\ yy} = a_{xy\ xy} = a_{yy\ xx}$ , et ainsi des autres.

Donc, généralement, dans les formules générales (12), page 556, des six composantes de pression  $p_{xx}$ , etc., les coefficients ayant les mêmes quatre sous-lettres sont égaux, quel que soit l'ordre où elles se trouvent placées.

Il en résulte vingt et une égalités entre eux, ou leur réduction de trente-six à quinze distincts<sup>(1)</sup>.

(1) En effet les 36 produits ou combinaisons

$xx\ xx$	$xx\ yy$	$xx\ zz$	$xx\ yz$	$xx\ zx$	$xx\ xy$
$yy\ xx$	$yy\ yy$	$yy\ zz$	$yy\ yz$	$yy\ zx$	$yy\ xy$
$zz\ xx$	$zz\ yy$	$zz\ zz$	$zz\ yz$	$zz\ zx$	$zz\ xy$
$yz\ xx$	$yz\ yy$	$yz\ zz$	$yz\ yz$	$yz\ zx$	$yz\ xy$
$zx\ xx$	$zx\ yy$	$zx\ zz$	$zx\ yz$	$zx\ zx$	$zx\ xy$
$xy\ xx$	$xy\ yy$	$xy\ zz$	$xy\ yz$	$xy\ zx$	$xy\ xy$

se réduisent aux six de la première ligne, aux cinq dernières de la seconde et aux quatre dernières de la troisième.

§ 22. *Corps homogènes. Homogénéités* parallèle, semi-polaire ou cylindrique, et polaire ou sphérique. *Observations sur l'état dit naturel.* — On dit, dans une acception mécanique, qu'un solide est *homogène*, ou partout d'égale contexture, lorsqu'en tous ses points sa matière offre les mêmes résistances dans des directions homologues, tout en pouvant offrir des résistances très-différentes dans les diverses directions autour de chaque point.

Pour un pareil solide, les coefficients  $\mu$  des formules telles que (12) de la fin du § 20 exprimant les six composantes de pression sur trois plans rectangulaires, sont les mêmes en tous les points, car c'est seulement à cette condition que les mêmes déplacements moléculaires, ou les mêmes déformations, qui dépendent des dilatations et des glissements, développent partout les mêmes réactions élastiques dans des sens déterminés.

Si les intersections  $x, y, z$  de ces trois plans rectangulaires ont, pour tous les points, les mêmes directions, ou sont exactement parallèles à trois axes coordonnés fixes, l'*homogénéité* peut être dite *parallèle*. Telle est l'*homogénéité* des corps régulièrement cristallisés et de certains corps fibreux ou lamelleux.

Mais qu'on ploie, de manière à en faire un tuyau cylindrique, une lame plane jouissant de l'*homogénéité* parallèle que nous venons de définir; le solide sera toujours homogène, mais les coefficients  $\mu$  ne seront les mêmes en tous les points qu'autant qu'on prendra les six composantes de pression sur des plans faisant les mêmes angles tant avec l'axe du tuyau qu'avec son rayon; et l'*homogénéité* sera en quelque sorte *semi-polaire* ou cylindrique.

Elle serait *polaire* ou *sphérique* pour une sphère pleine ou creuse dans laquelle l'élasticité ou la résistance à une dilatation serait, à des points également éloignés du centre, constamment la même dans le sens du rayon, et la même aussi dans le sens tangentiel aux couches concentriques, mais différente cependant dans ces deux sens comparés.

On peut ainsi compter autant de genres d'*homogénéité* qu'il existe de systèmes de coordonnées *curvilignes* ou de surfaces orthogonales conjuguées (\*).

---

(\*) Voy. *Mémoire sur les divers genres d'homogénéité, etc.*, lu le 24 mai 1860 (*Comptes rendus*, tome L, p. 930).

Tous les genres d'homogénéité ont lieu à la fois dans un corps *isotrope* ou d'égal texture *en tous sens*; égalité qui peut être définie par ses effets mécaniques en disant que, dans ce corps, les mêmes déplacements moléculaires relatifs engendrent les mêmes pressions partout et dans toutes les directions; en sorte que, pour tout système de trois plans se croisant rectangulairement en un même point quelconque, les six composantes de pression soient exprimées de la même manière ou *avec les mêmes coefficients* en fonction des dilatations et des glissements dans les sens des intersections de ces plans quelconques rectangulaires.

Dans un solide *parallèlement homogène* on prouve facilement, au moyen des équations d'équilibre que nous donnerons sous les n<sup>os</sup> (38) et (39) aux §§ 27 et 28, que *lorsque les pressions extérieures ou s'exerçant sur la surface enveloppe sont nulles*, et qu'on abstrait la pesanteur, *les pressions intérieures sont toutes nulles aussi*, en sorte que le solide se trouve dans l'état que nous avons appelé *naturel*, à partir duquel les pressions provoquées par de petites déformations sont bien exprimées par les formules (12).

La même chose se prouverait pour les autres genres d'homogénéité, avec des équations d'équilibre analogues à (38) et (39) établies pour d'autres systèmes de coordonnées.

Mais il peut en être autrement dans un solide hétérogène. L'exemple des petites masses de verre appelées *larmes bataviques*, dont la surface a été solidifiée brusquement et avant le centre, montre que l'intérieur d'un corps peut être maintenu dans un état de tension considérable bien que l'enveloppe ne soit ni tendue ni pressée. De même, on conçoit que si la surface d'un corps était analogue à un métal, et les couches vers le centre analogues au caoutchouc, l'intérieur pourrait éprouver de fortes pressions, comme l'air dans une vessie gonflée, pendant que la surface extérieure ne supporterait que celle de l'atmosphère, qui est relativement négligeable, ou n'en supporterait même aucune si le corps était mis dans un espace vide d'air.

Tout ce que nous dirons ne s'appliquera donc qu'aux corps homogènes, les seuls dont on puisse affirmer qu'ils sont, à un moment donné, dans un état où aucune pression ne s'exerce à leur intérieur.

§ 23. *Cas (exceptionnel) où il y a des pressions antérieurement aux déformations exprimées par  $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z, g_{yz}, g_{zx}, g_{xy}$ .* — Dans ce cas, où l'état antérieur ou primitif n'est pas celui de l'équilibre naturel, si les six composantes des pressions primitives sont connues, et si on les appelle, pour le point M dont les coordonnées sont  $x, y, z$ , et dans les sens de ces coordonnées :

$$p^{\circ}_{xx}, p^{\circ}_{yy}, p^{\circ}_{zz}, p^{\circ}_{yz}, p^{\circ}_{zx}, p^{\circ}_{xy},$$

il suffira, lorsqu'elles ne seront pas très-considérables, de les ajouter aux six formules (12) du § 20, conformément au principe de composition ou de superposition du § 2 de la note du n° 21, pour avoir les composantes correspondantes ultérieures ou après les déformations, sur trois petites faces qui étalent menées primitivement par le point M perpendiculairement aux  $x, y, z$ , en sorte qu'en appelant

$$p^1_{xx}, p^1_{yy}, p^1_{zz}, p^1_{yz}, p^1_{zx}, p^1_{xy}$$

les six expressions (12), ou les composantes de pression qu'on a lorsque l'état antérieur était l'état naturel (§ 22), on pourra prendre approximativement

$$(13) \quad \begin{cases} p_{xx} = p^{\circ}_{xx} + p^1_{xx}, & p_{yy} = p^{\circ}_{yy} + p^1_{yy}, & p_{zz} = p^{\circ}_{zz} + p^1_{zz}, \\ p_{yz} = p^{\circ}_{yz} + p^1_{yz}, & p_{zx} = p^{\circ}_{zx} + p^1_{zx}, & p_{xy} = p^{\circ}_{xy} + p^1_{xy}; \end{cases}$$

c'est-à-dire que si l'on n'a alors à calculer que les pressions développées par les dilatations et glissements  $\lambda, g$ , ou les excès  $p_{xx} - p^{\circ}_{xx}$ ,  $p_{yy} - p^{\circ}_{yy}$ , etc., des pressions nouvelles sur les anciennes, on pourra s'en tenir aux formules (12) ou négliger de considérer les pressions antérieures.

C'est ce qu'on fait quelquefois, par exemple, pour les effets de la pesanteur, et c'est ce qu'on appelle *abstraire* cette force.

Mais lorsque ces pressions antérieures  $p^{\circ}$  seront d'un ordre de grandeur supérieur à celles que doivent développer les dilatations et glissements  $\lambda, g$ ; lorsque, par exemple, on aura lieu de croire qu'elles sont au moins cent fois, etc., plus grandes, il faudra, pour obtenir exactement celles-ci ou les différences  $p_{xx} - p^{\circ}_{xx}$ , etc., ajouter à  $p^1_{xx}, p^1_{yy}$ , etc., c'est-à-dire aux expressions (12), d'autres termes affectés à la fois des composantes antérieures  $p^{\circ}$  et des dilatations et glissements  $\lambda, g$ , car l'état antérieur influe alors sensi-

blement, comme on va voir, sur l'effet que produisent les déformations ultérieures.

Bien que les formules complètes à substituer ainsi à (13) soient rarement à employer dans les calculs de résistance des solides, nous devons les rapporter ici, non-seulement parce que les cas extraordinaires peuvent se présenter, mais aussi parce que nous aurons à invoquer, dans la discussion du cinquième appendice, ces formules complètes qui ont donné lieu à une méprise dont on a tiré une conséquence fautive.

Observons d'abord que, dans le cas du § 20 où les pressions étaient nulles avant les déformations, l'on a toujours, à cela près de quantités relativement négligeables, les mêmes formules (17) pour les pressions provenant des déformations, soit qu'on les prenne sur les trois plans primitivement perpendiculaires entre eux et aux  $x, y, z$ , et devenus légèrement obliques, soit qu'on les prenne sur trois autres plans actuellement rectangulaires ou peu obliques quelconques *mais fort rapprochés de ceux-ci*, par exemple sur trois plans actuellement perpendiculaires aux coordonnées  $x, y, z$  si les déplacements des points ont été très-petits (voyez § 29). En effet, les formules de changement de plan de pression (3) et (4) du § 17, lorsque les plans nouveaux ne font avec les plans anciens que des angles extrêmement petits, n'ajoutent aux divers termes des composantes anciennes, pour les changer aux nouvelles, que des produits de ces mêmes termes  $a \dots \delta$  ou  $a \dots g$  par des cosinus très-petits  $c_{yz}$ ,  $c_{xy}$ , etc., d'angles presque droits, produits qu'on peut négliger comme contenant en facteurs deux quantités très-petites, en sorte que les composantes des pressions sur les nouveaux plans sont sensiblement égales aux composantes des pressions sur les anciens plans.

Mais il n'en est pas de même lorsqu'il y avait des pressions considérables  $p^*$  antérieures aux déformations, c'est-à-dire aux dilations et glissements  $\delta, g$ . Alors, comme ces pressions  $p^*$  ne sont généralement pas égales en tous sens, des rotations même très-petites qu'on fait éprouver aux plans sur lesquels se prennent les pressions ajoutent des termes qui sont les produits des composantes primitives  $p^*_{xt}, \dots p^*_{xy}$  par les angles de ces rotations, termes qui sont du même ordre de grandeur que ceux qui viennent des produits tant des mêmes composantes antérieures que des coefficients  $a$  par les  $\delta$  ou les  $g$ , et il faut en tenir compte comme de ceux-ci.

Soient donc

$$x_1, y_1, z_1$$

les directions actuelles des petites droites matérielles, maintenant légèrement obliques l'une sur l'autre, qui étaient primitivement tirées du point M parallèlement aux  $x, y, z$ ; et soient

$$x', y', z'$$

celles des trois autres droites, rectangulaires ou peu obliques entre elles, *fort rapprochées de celles-ci et arbitraires du reste*, prises pour les normales aux trois plans sur lesquels on veut avoir les pressions. On trouve (voir la note qui va suivre) pour les six composantes de ces pressions, suivant les directions des droites  $x', y', z'$ , les formules suivantes, où  $c_{y_1, z'}$ ,  $c_{x_1, z'}$ , etc., désignent abrégativement (comme au § 17) les cosinus des angles des directions  $y_1$  et  $x'$ ,  $z_1$  et  $x'$ , et ainsi des autres; *cosinus qui sont tous très-petits* et égaux sensiblement aux compléments de ces angles, car ceux-ci sont presque droits par hypothèse :

$$(14) \begin{cases} p_{x_1, z'} = p^{xx}(1 + \partial_x - \partial_y - \partial_z) + 2p^{xy} c_{y_1, z'} + 2p^{xz} c_{x_1, z'} + p^{xz'} \\ p_{y_1, y'} = p^{yy}(1 - \partial_x + \partial_y - \partial_z) + 2p^{yz} c_{x_1, y'} + 2p^{xy} c_{x_1, y'} + p^{y'z'} \\ p_{z_1, z'} = p^{zz}(1 - \partial_x - \partial_y + \partial_z) + 2p^{zx} c_{x_1, z'} + 2p^{yz} c_{y_1, z'} + p^{z'z'} \\ p_{y_1, z'} = p^{yz}(1 - \partial_x) + p^{yy} c_{y_1, z'} + p^{zz} c_{x_1, y'} + p^{xz} c_{x_1, y'} + p^{xy} c_{x_1, z'} + p^{y'z'} \\ p_{x_1, z'} = p^{xz}(1 - \partial_y) + p^{zz} c_{x_1, z'} + p^{zx} c_{x_1, z'} + p^{xy} c_{y_1, z'} + p^{yz} c_{y_1, z'} + p^{z'z'} \\ p_{x_1, y'} = p^{xy}(1 - \partial_z) + p^{zx} c_{x_1, y'} + p^{yy} c_{y_1, z'} + p^{yz} c_{x_1, z'} + p^{zz} c_{z_1, y'} + p^{z'y'} \end{cases}$$

$p^{xz}$ ,  $p^{yy}$ , etc., représentant toujours les six expressions (12) des composantes ultérieures quand il n'y a pas de composantes antérieures  $p^o$ . Et les six petites quantités  $c_{y_1, z'}$ ,  $c_{x_1, z'}$ , etc., sont constamment liées avec les trois glissements  $g_{yz}$ ,  $g_{xz}$ ,  $g_{xy}$ , et avec les petits cosinus des angles des lignes  $x', y', z'$  entre elles, par les trois relations suivantes :

$$(15) \quad c_{y_1, z'} + c_{x_1, y'} = g_{yz} + \cos(y', z'), \quad c_{x_1, z'} + c_{x_1, z'} = g_{xz} + \cos(z', x'), \\ c_{x_1, y'} + c_{y_1, z'} = g_{xy} + \cos(x', y'),$$

qui se réduisent lorsqu'on suppose, comme il conviendra généralement, les directions  $x', y', z'$  rectangulaires entre elles, à

$$(16) \quad c_{y_1, z'} + c_{x_1, y'} = g_{yz}, \quad c_{x_1, z'} + c_{x_1, z'} = g_{xz}, \quad c_{x_1, y'} + c_{y_1, z'} = g_{xy}.$$

En effet, si  $x, y, z$  sont des lignes rectangulaires très-voisines de  $x_1, y_1, z_1$  et de  $x', y', z'$  on tire, de l'expression connue

$$g_{yz} = \cos(y_1 z_1) = \cos(y_1 x) \cos(z_1 x) + \cos(y_1 y) \cos(z_1 y) + \cos(y_1 z) \cos(z_1 z),$$

en négligeant les produits de quantités très-petites du premier ordre et en remplaçant  $\cos(y_1 y)$  et  $\cos(z_1 z)$  par l'unité dont ils ne diffèrent que de quantités du second ordre :

$$c_{x_1 y} + c_{y_1 z} = g_{yz} ;$$

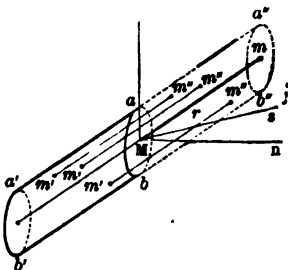
et on trouvera de la même manière :

$$c_{x_1 y} + c_{y_1 z} = \cos(y', z'), \quad c_{y_1 z} = c_{x_1 y} + c_{y_1 z}, \quad c_{x_1 y'} = c_{y_1 z} + c_{x_1 y},$$

égalités qui ajoutées toutes les quatre ensemble donnent, en réduisant, précisément la première des relations (15) dont les deux autres se démontrent de même ; et on en déduit les relations (16) en supposant  $x', y', z'$  rectangulaires, ou nuls les cosinus de leurs angles (1).

(1) Pour démontrer ces formules (14) donnant les six composantes de pression  $p_{x_1 x_1}, p_{y_1 y_1}$ , etc., du cas où il y a des pressions antérieures  $p^o$  considérables, il paraît nécessaire de s'appuyer sur un théorème important relatif à la valeur des pressions en général, théorème que nous avons évité d'invoquer dans le texte de cet appendice, parce qu'il se rattache aux points de théorie qui ont été récemment controversés, ou plutôt rejetés à peu près sans discussion (voy. le 5<sup>e</sup> appendice). Nous allons d'abord, au moyen de considérations comme celles du § 8 de la note du n<sup>o</sup> 452 (p. 497), établir ce théorème, ou cette formule fondamentale trouvée sous une autre forme par Cauchy et Poisson, et dont nous n'avons jamais regardé la vérité comme douteuse.

Soit  $ab$  la petite face à travers laquelle on veut prendre la pression qui est, comme nous savons, la résultante des actions des molécules  $m'$  situées à gauche (par exemple) sur les molécules  $m''$  situées à droite. Ajoutons d'abord ensemble celles de ces actions qui s'exercent à des distances  $m' m''$  toutes égales et parallèles à une même droite  $Mm = r$ , que nous tirons arbitrairement du centre  $M$  de  $ab$ . Leur somme aura la même intensité que l'action qui serait exercée sur une seule molécule  $m''$ , placée en  $m$ , par une masse concentrée au point  $M$ , et égale à celle de toute la matière contenue dans un cylindre oblique  $abb'a'$ , ayant  $ab$  pour base et des arêtes égales et parallèles à  $Mm = r$ ; car ce cylindre, situé à gauche de la face  $ab$ , contient évidemment toutes les molécules  $m'$  capables d'agir à travers  $ab$  à cette



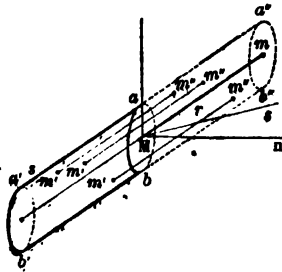


On peut choisir les directions. . . . .  $x', y', z'$   
 perpendiculaires aux directions. . . . .  $y_1, z_1, x_1$   
 ou bien aux directions. . . . .  $z_1, x_1, y_1$  respectivement,  
 ce qui est compatible avec la rectangularité de  $x', y', z'$ . On annu-

distance et dans cette direction, et dont chacune attire ou repousse une des molécules  $m''$ , contenues toutes elles-mêmes dans un cylindre égal  $abb'a''$  placé à droite.

Il en résulte que la pression à travers une petite face plane  $aMb$  prise dans un corps ou à la limite de séparation de deux corps solides ou fluides, est résultante des actions exercées, sur les diverses molécules  $m$  situées d'un côté de son plan, par des masses opposées placées en un même point central  $M$  de cette face, et égales respectivement aux masses de cylindres de la matière du côté opposé, ayant  $ab$  pour base, et pour hauteurs les distances respectives de ces molécules  $m$  au plan de  $ab$ .

Pour tirer de ce théorème presque évident une formule générale, appelons



- $n$  la direction de la ligne normale à la face  $ab = \omega$ ,
- $p_n$  la pression sur l'unité superficielle de  $\omega$ , cette pression étant décomposée suivant une ligne quelconque  $Ms$ ,
- $\rho$  la densité du corps, si la pression est prise à son intérieur,
- $\rho'$  la densité de la matière à gauche de la face  $ab$ , si la pression dont on s'occupe a lieu sur la face de séparation de deux corps,
- $R$  l'action de deux molécules  $m', m''$ , divisée par le produit  $m'm''$  de leurs masses ; ou la fonction qui représente cette action pour l'unité des deux masses (fonction qu'on peut supposer, si l'on veut, pour certaines configurations, dépendre non-seulement de la grandeur, mais aussi de la direction de  $r$  ou des angles  $(r,n), (r,s)$  sans que la formule en devienne plus compliquée).

La masse du cylindre  $abb'a'$ , que nous concentrons en  $M$ , sera

$$\rho' \cdot \omega \cdot r \cos(r, n).$$

Multipliant par la masse  $m''$  d'une molécule de droite, située en  $m$ , puis par la force  $R$  relative à la distance  $Mm = r$ , enfin par  $\cos(r, s)$  pour décomposer cette force dans la direction  $s$ , le produit

$$\rho' \omega m'' r R \cdot \cos(r, n) \cos(r, s)$$

est la composante de l'action, sur la molécule placée en  $m$ , de la masse que nous concentrons au point  $M$ . Prenant la somme de ces produits pour toutes les molécules  $m''$  de droite, et pour leurs distances  $Mm = r$  d'une multitude de grandeurs et

lera ainsi ou les secondes ou les premières des quantités  $\rho$  des premiers membres des relations (16) qu'on vient d'écrire, ce qui permettra d'effacer la moitié des termes affectés des cosinus  $\rho$  dans les expressions (14) des composantes de pression, et de remplacer les

de directions dans la sphère d'activité de M, on a la composante de pression  $\omega p_{ns}$ ; d'où, en désignant par S' une pareille somme :

$$(17) \quad p_{ns} = \rho' S' m'' R r \cos(r, n) \cos(r, s).$$

S'il ne s'agit que d'une pression intérieure, nous pouvons, pour plus de simplicité et de symétrie, prendre avec M. Cauchy, en la sous-doublant, la somme pour toutes les molécules situées à gauche comme à droite du plan de  $\omega$ ; car si la ligne  $r$ , égale et opposée à  $Mm$ , donne deux cosinus de signe contraire à ceux que donne  $Mm$ , leur produit est de même signe que le produit qui vient de  $Mm$ . On a donc

$$(18) \quad p_{ns} = \frac{\rho}{2} S m R r \cos(r, n) \cos(r, s) \left\{ \begin{array}{l} S \text{ étant le signe d'une somme rela-} \\ \text{tive à toutes les molécules } m \text{ au-} \\ \text{tour de M et dans sa sphère d'activité.} \end{array} \right.$$

Cette expression (17) ou (18)  $p_{ns} = \dots$  peut être regardée comme la formule fondamentale de la mécanique moléculaire, formule qu'il n'y a plus qu'à particulariser et développer pour en déduire toutes les autres. Nous aurions pu en tirer non-seulement les théorèmes de projections de plans de pression et de réciprocity de composantes tangentielles du § 46, mais aussi (comme on va voir) les formules linéaires (12)  $p_{xx} = a_{xxx} \partial_x + \dots$ ,  $p_{yy} = \dots$ , et les vingt et une égalités entre leurs trente-six coefficients  $a$ , ou la réductibilité de ceux-ci à quinze distincts. Nous avons préféré prouver cette réductibilité, mise en doute depuis peu par quelques savants (voy. 5<sup>e</sup> appendice), au moyen d'un raisonnement spécial et très-simple (§ 21), fait sur les actions moléculaires réellement en jeu sans avoir à remplacer chacune de leurs sommes partielles, comme nous venons de le faire, par une action égale exercée sur une seule molécule  $m$  par une masse concentrée en M; bien que ce remplacement nous semble parfaitement légitime, et qu'il nous paraisse incontestable (ici comme aux raisonnements du § 46) que l'intensité totale des actions s'exerçant à travers une face  $\omega$  dans une même direction  $r$ , soit proportionnelle à la projection  $\omega \cos(r, n)$  de cette face sur un plan perpendiculaire à  $r$ .

Cette formule (17) ou (18)  $p_{ns} = \dots$  est vraie non-seulement pour une substance simple, mais tout aussi bien pour une matière composée de molécules de différentes espèces ou de plusieurs substances, au nombre desquelles on peut, si l'on veut, mettre l'éther ou tout autre fluide connu ou inconnu, mais susceptible d'attraction ou de répulsion, ainsi que tout le monde l'admet pour cet agent hypothétique. En effet, alors  $p_{ns}$  est égal à une somme  $\Sigma$  de produits tels que (17)  $\rho' S' m'' R_{ij} \cos(r, n) \cos(r, s)$  dans lesquels  $\rho'$  est la densité d'une quelconque des substances du côté gauche de la face, ou la masse de cette substance qui est contenue dans l'unité de volume  $\rho' m''$ ; est la masse de chacune des particules égales dans lesquelles on partage une des substances du côté droit, et  $R_{ij}$  l'action de la première de ces substances sur la seconde, par unité de leurs masses. Or, on peut remplacer cette somme  $\Sigma$  par un produit unique  $\rho' S' m'' R r \cos(r, n) \cos(r, s)$ , en appelant  $\rho'$  la somme des densités particulières  $\rho'_i$ , et  $m''$  l'une des masses élémentaires égales

autres par les trois glissements  $g$  des mêmes indices. Mais on peut aussi satisfaire aux relations (16) en prenant les directions  $x', y', z'$ , de manière que

de tout le côté droit, si l'on prend  $R = \frac{\Sigma \rho' m' j R_{ij}}{m' \rho'}$ , c'est-à-dire si l'on représente par  $R$  une action moléculaire *moyenne*, composée par règle d'alliage en tenant compte des quantités des substances diverses qui agissent deux à deux l'une sur l'autre.

Et il n'y aurait rien à changer non plus à cette formule, si tout ou partie des molécules composantes étaient animées de ce mouvement vibratoire intestinal que quelques physiciens admettent, en attribuant aux forces  $R$  des valeurs relatives aux situations moyennes de ces molécules.

Cette formule générale (18) étant établie, remplaçons les directions arbitraires  $n, s$ , de la normale à la face, et du sens de décomposition,

par  $x, x$ , et par  $y, z$  dans l'état primitif;  
puis par  $x', x'$ , et par  $y', z'$  dans l'état nouveau.

Nous avons, pour l'état primitif de deux composantes de pression, l'une normale, l'autre tangentielle :

$$(19) \quad p_{xx} = \frac{\rho}{2} \Sigma m R r \cos^2(r, x), \quad p_{yz} = \frac{\rho}{2} \Sigma m R r \cos(r, y) \cos(r, z);$$

Et, pour l'état ultérieur,  $r_1, R_1$  et  $\rho_1$  étant ce que sont devenues la distance  $Mm = r$ , la fonction  $R$  et la densité  $\rho$  :

$$(20) \quad p_{x_1 x_1} = \frac{\rho_1}{2} \Sigma m R_1 r_1 \cos^2(r_1, x_1), \quad p_{y_1 z_1} = \frac{\rho_1}{2} \Sigma m R_1 r_1 \cos(r_1, y_1) \cos(r_1, z_1).$$

Pour démontrer les valeurs générales (14) des composantes après les déformations, suivant les directions  $x', y', z'$  arbitraires, mais peu différentes de  $x_1, y_1, z_1$ , il faut calculer  $r_1, R_1, \rho_1$  et les cosinus pour les mettre dans ces deux dernières expressions (20).

Or, on a d'abord, pour la densité nouvelle,

$$(21) \quad \rho_1 = \frac{\rho}{(1+\partial_x)(1+\partial_y)(1+\partial_z)} = \rho (1-\partial_x-\partial_y-\partial_z),$$

car le corps a été dilaté dans le rapport du dénominateur  $(1+\partial_x)(1+\partial_y)(1+\partial_z)$  à 1, et l'unité de volume contient moins de molécules dans cette proportion, la même que celle de 1 à  $1-\partial_x-\partial_y-\partial_z$ , à cela près de quantités d'ordre supérieur et négligeables.

Ensuite comme, dans l'état primitif ou avant les déformations,  $r \cos(r, x)$ ,  $r \cos(r, y)$ ,  $r \cos(r, z)$  étaient les coordonnées rectangulaires de l'extrémité  $m$  de  $Mm$  par rapport aux axes  $Mx, My, Mz$  se croisant à son autre extrémité  $M$ , et comme ces trois petites lignes dont les directions sont devenues  $M_1 x_1, M_1 y_1, M_1 z_1$ , légèrement obliques l'une à l'autre, se sont en même temps allongées dans les proportions  $\partial_x, \partial_y, \partial_z$ ,  $M_1 m_1 = r_1$  est la ligne de jonction actuelle des extrémités  $M_1, m_1$  d'une ligne brisée composée de trois lignes droites respectivement parallèles à  $x_1, y_1, z_1$ , et dont les longueurs sont

$$(1+\partial_x) r \cos(r, x), \quad (1+\partial_y) r \cos(r, y), \quad (1+\partial_z) r \cos(r, z).$$

$$c_{y_1z_1} = c_{x_1y_1} = \frac{1}{2} g_{yz}, \quad c_{x_1x'} = c_{x_1z_1} = \frac{1}{2} g_{zx}, \quad c_{x_1y'} = c_{y_1z_1} = \frac{1}{2} g_{xy}$$

Projetant donc ces trois lignes sur  $x'$ , et prenant la somme des projections, on a la longueur de  $r_1$ ; d'où

$$(22) \quad r_1 \cos(r_1, x') = (1 + \partial_x) r \cos(r, x) c_{x_1x'} + (1 + \partial_y) r \cos(r, y) c_{y_1x'} + (1 + \partial_z) r \cos(r, z) c_{z_1x'}$$

Mais  $c_{x_1x'}$  ou  $\cos(x_1, x')$  peut être remplacé par 1 à cela près d'une quantité du second ordre, parce que  $x_1$  et  $x'$  sont supposées ne faire entre elles qu'un très-petit angle; et, vu la petitesse de  $c_{y_1x'}$ ,  $c_{z_1x'}$ , cosinus d'angles presque droits, on peut négliger leurs produits par  $\partial_y$ ,  $\partial_z$ .

On a donc la première des trois expressions suivantes, dont les deux autres s'obtiennent par des projections de la même ligne brisée sur  $y'$  et sur  $z'$ :

$$(23) \quad \begin{cases} r_1 \cos r_1 x' = (1 + \partial_x) r \cos rx + r \cos ry c_{y_1x'} + r \cos rz c_{z_1x'} \\ r_1 \cos r_1 y' = r \cos rx c_{x_1y'} + (1 + \partial_y) r \cos ry + r \cos rz c_{z_1y'} \\ r_1 \cos r_1 z' = r \cos rx c_{x_1z'} + r \cos ry c_{y_1z'} + (1 + \partial_z) r \cos rz. \end{cases}$$

Élevant au carré la première de ces trois expressions et faisant le produit des deux autres entre elles, puis substituant dans (20)  $p_{x_1z_1} = \dots$  et  $p_{y_1z_1} = \dots$  les valeurs de  $\cos^2 r_1 x'$  et de  $\cos r_1 y' \cos r_1 z'$  qui en résultent, ainsi que la valeur (24) de la densité nouvelle  $\rho_1$  en négligeant les carrés et les produits des petites quantités  $\partial$ ,  $c$ , on a

$$(24) \quad \begin{cases} p_{x_1z_1} = \frac{\rho}{2} S m r^2 [(1 + \partial_x - \partial_y - \partial_z) \cos^2 rx + 2 \cos rx \cos ry c_{y_1z_1} + 2 \cos rz \cos rx c_{z_1x_1}] \frac{R_1}{r_1} \\ p_{y_1z_1} = \frac{\rho}{2} S m r^2 [(1 - \partial_x) \cos ry \cos rz + \cos^2 ry c_{y_1z_1} + \cos^2 rz c_{z_1y_1} + \\ + \cos rz \cos rx c_{x_1y'} + \cos rx \cos ry c_{x_1z_1}] \frac{R_1}{r_1}. \end{cases}$$

Reste à mettre pour  $\frac{R_1}{r_1}$  sa valeur. On peut<sup>le</sup> développer, par le théorème de Taylor, suivant les puissances de l'accroissement  $r_1 - r$  que  $r$  reçoit lorsque la fonction  $\frac{R}{r}$  devient  $\frac{R_1}{r_1}$ , et ne conserver que la première puissance de cet accroissement très-petit; ce qui donne

$$\frac{R_1}{r_1} = \frac{R}{r} + (r_1 - r) \frac{d}{dr} \frac{R}{r}.$$

Et l'on connaît la valeur de  $r_1 - r$  en fonction des dilatations et glissements dans trois sens, et des cosinus des angles de  $r$  avec les axes fixes  $x, y, z$ , car cet accroissement de  $r$  est ce que nous avons appelé  $r \partial_r$ , au § 49, et dont nous avons donné l'expression sextième (9), expression qu'on obtiendrait d'ailleurs en ajoutant ensemble les carrés des formules (23) quand  $x', y', z'$  sont rectangulaires, et en réduisant au moyen de (16)  $c_{y_1z_1} + c_{z_1y_1} = g_{yz}$ , etc.

Alors les lignes rectangulaires  $x', y', z'$  seront, comme il est facile de le prouver, bissectrices des petits angles de celles des deux

On a donc

$$(25) \frac{R_1}{r_1} = \frac{R}{r} + (\delta_x \cos^2 rx + \delta_y \cos^2 ry + \delta_z \cos^2 rz + g_{y_1} \cos ry \cos rz + g_{z_1} \cos rz \cos ry + g_{xy} \cos rx \cos ry) \frac{d^R}{dr}$$

Substituant dans (24), on trouvera précisément la première et la quatrième des formules à démontrer (14) du texte; car: 1° si l'on met d'abord pour  $\frac{R_1}{r_1}$  le premier terme  $\frac{R}{r}$  de (25), on a bien *tous les termes* que ces formules (14) ajoutent aux  $p^1_{xx}, p^1_{yy}, \dots$  ou aux six formules générales ordinaires (12) de la fin du § 20, puisque (19) donne  $\frac{\rho}{2} S m R r \cos^2(r, x) = p^0_{xx}$ , et ainsi des autres  $p^0$ ;

Et, 2° si l'on met pour  $\frac{R_1}{r_1}$ , dans (24), le second terme de (25), qui est affecté d'une parenthèse sextième, on ne pourra que retrouver  $p^1_{xy}$  et  $p^1_{yz}$ , ou ce que les formules (12) donnent déjà, car ce sera ce qu'on aurait si les  $p^0$  étaient nuls, ou si l'état primitif était l'état naturel.

Et, en effet, en négligeant les carrés et les produits des  $\delta$  et des  $g$ , ce qui revient à réduire à  $\cos^2 rx$  et à  $\cos ry \cos rz$  les quantités entre crochets de (24), on a bien la première et la quatrième formule générale ordinaire (12) si l'on pose

$$(26) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\rho}{2} S m r^3 \frac{d^R}{dr} \cos^2 rx = a_{xxxx}, \quad \frac{\rho}{2} S m r^3 \frac{d^R}{dr} \cos^2 rx \cos^2 ry = a_{xyyy}, \\ \frac{\rho}{2} S m r^3 \frac{d^R}{dr} \cos^2 rx \cos ry = a_{xxyy}, \text{ et ainsi des autres.} \end{array} \right.$$

Et les expressions (26) qu'on vient d'écrire montrent en même temps d'une manière évidente ce que nous avons prouvé autrement au § 24, à savoir l'égalité de tous ceux des 36 coefficients  $a$  qui sont affectés des quatre mêmes sous-lettres, ou leur réductibilité à 15 seulement; car les mêmes sous-lettres représentent les mêmes produits, sous le signe S, de quatre cosinus des angles primitifs  $(r, x)$ ,  $(r, y)$ ,  $(r, z)$  des distances moléculaires  $r$  avec les coordonnées.

Les formules complètes (14) du texte de l'Appendice, que nous venons de démontrer dans cette note, se réduisent évidemment aux formules (13), c'est-à-dire simplement à  $p_{x'x'} = p^0_{xx} + p^1_{xx}$ , et ainsi des autres, conformément au principe de composition ou de superposition (§ 2 de la note du n° 24), lorsque les pressions primitives  $p^0$  ne sont que du même ordre de grandeur que les pressions  $p^1$  dues aux seules déformations, ou, ce qui revient au même, lorsque les  $p^0$  sont très-petits en comparaison des coefficients  $a$  qui, multipliés par les quantités très-petites  $\delta$  et  $g$ , forment les six termes des formules (12) ou des  $p^1$ ; car les produits des  $p^0$  par les mêmes quantités  $\delta, g$ , sont alors négligeables. Et c'est ce qui a lieu dans les problèmes les plus ordinaires relatifs aux solides. Mais il en pourra être

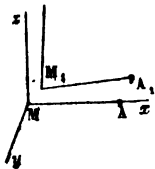
autres systèmes dont nous venons de parler, et aussi bissectrices des angles formés respectivement par les lignes  $x_1, y_1, z_1$ , et par

autrement dans les problèmes de vibrations de l'éther ou de l'air, etc., et même dans certains calculs d'effets de petites déformations nouvelles de solides déjà très-fortement pressés; et il conviendra quelquefois ainsi de ne négliger aucun terme des expressions, tirées de (14), des pressions nouvelles  $p_{x_1x_1} - p^0_{xx}, p_{y_1y_1} - p^0_{yy}$ , etc., que doivent développer ces déformations  $\delta, \epsilon$ .

On peut remarquer que dans ces formules démontrées (14) les termes affectés des six cosinus très-petits  $c$  sont précisément ceux qu'il faudrait ajouter à des composantes données  $p^0_{xx}, p^0_{yy}, \dots, p^0_{yz}$  de pression ayant lieu sur des plans très-peu obliques se occupant suivant  $x, y, z$ , pour en déduire les composantes de pression sur des plans perpendiculaires à  $x', y', z'$ , supposées avoir des directions peu différentes de  $x_1, y_1, z_1$ , d'après les formules générales de changement de plans de pression (4) du § 17; formules que nous avons dit, à la fin de ce § 17, s'appliquer au cas où les plans primitifs seraient légèrement obliques l'un à l'autre, pourvu que  $x, y, z$  (ici  $x_1, y_1, z_1$ ) représentent, dans les cosinus, les trois intersections de ces plans et non leurs trois normales. Ces termes seraient, en supposant les deux systèmes  $x_1, y_1, z_1$  et  $x', y', z'$  rectangulaires, ceux des composantes nouvelles de pression qu'on aurait s'il n'y avait aucune déformation, mais seulement une petite rotation des plans de pression dans le corps, où les pressions existantes varient avec les plans où on les prend.

Nous donnons dans le texte de l'Appendice, à la suite du renvoi de la présente note, les valeurs à attribuer aux cosinus très-petits  $c_{y_1z_1}, c_{z_1y_1}, c_{z_1x_1}, c_{x_1z_1}, c_{x_1y_1}, c_{y_1x_1}$ , pour diverses hypothèses simples sur les directions arbitraires de décomposition  $x', y', z'$  supposées rectangulaires. Donnons-en ici un autre exemple en anticipant sur le § 29, où les dilatations et glissements  $\delta_x, \dots, \epsilon_{yz}, \dots$  sont exprimés en fonction des déplacements  $u, v, w$  des points matériels, estimés dans les directions fixes  $x, y, z$ . Considérons en particulier le cas (le seul qui ait été supposé par les divers auteurs de mécanique moléculaire) où ces déplacements sont partout très-petits, et où, par suite, les directions presque rectangulaires  $x_1, y_1, z_1$  sont aussi, presque parallèles aux directions fixes  $x, y, z$ ; et nous pouvons choisir celles-ci pour nos directions arbitraires  $x', y', z'$ : alors on a, en effaçant les accents de  $x', y', z'$ ,

$$(27) \quad c_{y_1z_1} = \frac{dw}{dy}, \quad c_{z_1y_1} = \frac{dv}{dz}, \quad c_{z_1x_1} = \frac{du}{dz}, \quad c_{x_1z_1} = \frac{dw}{dx}, \quad c_{x_1y_1} = \frac{dv}{dx}, \quad c_{y_1x_1} = \frac{du}{dy};$$



car, par exemple, si A est l'extrémité d'une petite longueur arbitraire  $MA = a$  portée primitivement sur  $Mx$ , le point A, dont les coordonnées étaient  $x + a, y, z$ , s'est déplacé, dans le sens  $z$ , de plus que M dont les coordonnées étaient  $x, y, z$ , lorsque MA est devenu  $M_1A_1$ , de

$$w + \frac{dw}{dx} a - w = \frac{dw}{dx} a;$$

par conséquent, on a pour la projection de  $M_1A_1$  sur la direction fixe  $x$

$$a \quad c_{x_1z_1} = \frac{dw}{dx} a, \quad \text{d'où } c_{x_1z_1} = \frac{dw}{dx};$$

et on aurait de même, pour les cinq autres  $c$ , les valeurs (27) qu'on vient d'écrire.

les perpendiculaires à leurs trois plans légèrement obliques  $y_1z_1, z_1x_1, x_1y_1$ ; et ces bissectrices  $x', y', z'$  forment le système rec-

En les mettant respectivement à la place de  $c_{y_1z_1}, c_{x_1y_1}, \dots, c_{y_1x_1}$  dans les formules générales (44), où, à  $p^1_{xx}, p^1_{yy}, \dots$  on substituera leurs valeurs sextinômes (42) du § 20, et en faisant (§ 29 ci-après)

$$\partial_x = \frac{du}{dx}, \partial_y = \frac{dv}{dy}, \partial_z = \frac{dw}{dz}, \varepsilon_{yz} = \frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}, \varepsilon_{zx} = \frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz}, \varepsilon_{xy} = \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx},$$

on a les formules les plus complètes du cas des déplacements  $u, v, w$  très-petits, données à la page 438 du IV<sup>e</sup> volume (1829) des *Exercices de mathématiques*, par M. Cauchy, qui obtenait directement les expressions (23) de  $r_1 \cos r_1x, r_1 \cos r_1y,$

$r_1 \cos r_1z$ , avec  $x, y, z$  pour  $x', y', z'$  et (27)  $\frac{dw}{dy}$ , etc. pour  $e_{y_1z_1}$ , etc., en remarquant (comme ont fait aussi les autres auteurs de mécanique moléculaire) que la projection nouvelle  $r_1 \cos r_1x$ , sur les  $x$ , de la petite distance  $r = Mm$ , devenue  $r_1$ , de deux molécules  $M, m$  dont la première avait pour coordonnées  $x, y, z$ , et la seconde,  $x + r \cos r_x, y + r \cos r_y, z + r \cos r_z$ , est égale à la projection ancienne  $r \cos r_x$ , plus l'excès du déplacement  $u$ , dans le sens  $x$ , du point  $m$  sur le point  $M$ , et que cet excès est  $\frac{du}{dx} r \cos r_x + \frac{du}{dy} r \cos r_y + \frac{du}{dz} r \cos r_z$  d'après le théorème de Taylor à trois variables, en ne conservant que les premières puissances de leurs accroissements  $r \cos r_x, r \cos r_y, r \cos r_z$ .

Les sommes désignées ici par  $S$ , relatives à un nombre très-grand mais fini de particules disjointes n'ont rien de commun avec ces intégrales autour d'un point, par coordonnées sphériques, qui ont été employées par Navier (*Mém. lu le 4<sup>e</sup> mai 1824*; aux *Mém. de l'Institut*, t. VII), et aussi par d'autres auteurs de mécanique moléculaire pour le cas d'égale texture en tous sens, comme si le corps dont ce point fait partie était une masse continue, ou comme si ses points étaient contigus et en nombre infini; intégrales que Poisson et Cauchy ont ensuite démontré être impropres à représenter les pressions dans les solides et même dans les fluides, parce qu'en les transformant convenablement, non-seulement elles donnent zéro pour les composantes tangentielles  $p_{yz}, p_{zx}, p_{xy}$ , mais encore elles donnent pour les composantes normales  $p_{xx}, p_{yy}, p_{zz}$ , des quantités simplement proportionnelles aux carrés des densités, en sorte que si ces pressions étaient nulles primitivement elles seraient encore nulles après toute compression ou dilatation (Cauchy, *Exerc. de Mathém.*, 1828, p. 234, formule (52) en faisant, conformément aux pages 203, 204, 205,  $R = -G$ , d'où  $k = 0$ ; et formules semblables (40) de Poisson, p. 52 du *Mémoire* au 20<sup>e</sup> cahier du *Journal de l'École polytechnique*, en y faisant  $k = -k$ , conformément à ce qu'il dit à la p. 399 de son *Mémoire* du 4<sup>e</sup> avril 1828 inséré au t. VIII des *Mém. de l'Institut*; ce qui est la même chose, car il représente par  $K$  et  $k$  ce que Cauchy appelle  $G\Delta = \frac{k-2K}{4}$  et  $R\Delta = \frac{k+2K}{4}$ ).

Cette remarque, développée surtout par Poisson (p. 366, 399 du *Mém. de 1828*; *Nouvelle Théorie de l'action capillaire*, p. 34 et 278, et polémique avec Navier, aux t. XXXVI (1827), et XXXVII, XXXVIII, XXXIX (1828) des *Annales de chimie et de physique*), et susceptible d'être traduite en termes très-élémentaires, intéresse la théorie atomistique et la philosophie naturelle, parce qu'elle montre l'impossi-

tangulaire le plus rapproché possible du système presque rectangulaire  $x_1, y_1, z_1$ .

billité d'admettre l'existence d'aucun amas résistant et stable de matière continue dont les parties soient susceptibles d'agir à distance (voy. au *Bulletin de la Société philomatique*, séance du 20 janvier 1844, un *Mémoire sur la question de savoir s'il existe des masses continues et sur la nature probable des dernières particules des corps*, où l'on examine le célèbre système du P. Boscovich, etc.).

On peut remarquer aussi que nos démonstrations des formules de pression, soit dans cette note, soit dans le texte de l'Appendice, sont indépendantes du plus ou moins de grandeur du rapport entre le plus petit intervalle moléculaire et le rayon de l'activité sensible des forces d'attraction et de répulsion, en sorte qu'il n'est nullement nécessaire, pour établir ces formules, de supposer avec M. Poisson (1828, t. VIII des *Mém. de l'Institut*, p. 370, et, 1829, 20<sup>e</sup> cahier du *Journal de l'École polytechnique*, p. 7, 43, 25, 26) que le rayon contienne « un nombre immense de fois l'intervalle », de manière à pouvoir « négliger les actions entre les molécules les plus proches devant les actions plus nombreuses entre les autres. » En effet, il est possible sans doute, vu la complication des dispositions mutuelles et des actions entre les molécules voisines, que chaque dilatation générale  $\delta_x$  ou glissement général  $g_y$  ne déplace pas régulièrement ces molécules les unes par rapport aux autres comme cela aurait lieu pour les points contigus d'une masse continue; et il se peut que

les changements  $\delta_r = \frac{r_1 - r}{r}$  de leurs distances  $r$  soient, ainsi, les uns au-dessus

les autres au-dessous des valeurs  $\delta_x \cos^2(r, x)$ ,  $g_y \cos(r, y) \cos(r, z)$  dues à cette dilatation et à ce glissement (§ 48), supposés uniformément les mêmes pour tous les points matériels de la petite portion de corps que l'on considère. Mais ces irrégularités doivent évidemment se compenser et disparaître aussi bien pour les plus petites distances que pour les plus grandes lorsqu'on prend une moyenne pour un très-grand nombre de couples de molécules, ou une résultante d'un nombre considérable d'actions développées par ces changements partiels de distance; en sorte que les formules dressées en supposant ces changements partiels proportionnels aux  $\delta$  et aux  $g$  (§ 20) peuvent être regardées comme ayant toute l'approximation que comporte ce genre de calcul.

Observons encore que si, dans les expressions de la note du n<sup>o</sup> 452 (p. 498-504),

il y a  $r^3 \frac{dR}{dr}$  là où nous mettons maintenant  $r^3 \frac{d^R}{dr}$ , cela n'empêche pas ces formules d'être d'accord avec celles que nous venons de poser, car

on a  $r^3 \frac{d^R}{dr} = r^3 \frac{dR}{dr} - Rr$ , et le terme  $-Rr$  disparaît en prenant les sommes

S quand les pressions primitives sont nulles, en vertu des expressions (49).

Nous espérons que les considérations développées à la présente note ne seront pas inutiles à ceux qui voudront lire, sans y rencontrer trop de difficultés, les mémoires de mécanique moléculaire composés de 1824 à 1829 par d'illustres savants. Ce que nous venons de donner est plus général, puisque nous avons attribué aux déplacements des divers points d'un même corps des grandeurs absolues et même relatives quelconques, pourvu qu'ils ne déforment que très-peu chaque portion imperceptible, ou que les  $\delta$ ,  $g$  restent partout très-petits.



Mais, nous le répétons, le choix de ces lignes de décomposition, très-proches de  $x_1, y_1, z_1$ , est indifférent quand il n'y avait pas de pressions antérieures. Il l'est également quand il n'y avait avant les déformations qu'une pression constante  $p_0$ , normale aux faces où elle s'exerçait, ou quand

$$p^{\circ}_{xx} = p^{\circ}_{yy} = p^{\circ}_{zz} = p_0, \quad p^{\circ}_{yz} = 0, \quad p^{\circ}_{zx} = 0, \quad p^{\circ}_{xy} = 0;$$

car alors, au moyen des relations (16), les formules générales (14) se réduisent à

$$(28) \quad \begin{cases} p_{x|x'} = p_0(1 + \partial_x - \partial_y - \partial_z) + p^1_{xx}, & p_{y|z} = p_0 g_{yz} + p^1_{yz}, \\ p_{y|y'} = p_0(1 - \partial_x + \partial_y - \partial_z) + p^1_{yy}, & p_{z|x'} = p_0 g_{xz} + p^1_{zx}, \\ p_{z|z'} = p_0(1 - \partial_x - \partial_y + \partial_z) + p^1_{zz}, & p_{x|y'} = p_0 g_{xy} + p^1_{xy}. \end{cases}$$

Les formules (14), (28) se réduisent à (13), c'est-à-dire aux formules (12) du § 20, augmentées simplement de  $p^1_{xx}, p^1_{yy}$ , etc. lorsque, comme nous avons dit, ces composantes de pressions primitives sont du même ordre de grandeur que les excès  $p_{x|x'} - p^{\circ}_{xx}, p_{y|y'} - p^{\circ}_{yy}$ , etc., ou que les pressions complémentaires développées par les déformations  $\partial, g$ ; car, alors, les produits des  $p^{\circ}$  par les  $\partial$ , les  $g$ , les  $c$ , sont négligeables; mais on voit bien qu'il n'en est pas de même quand les pressions primitives  $p^{\circ}$  sont considérables en comparaison de celles que les déformations développent.

§ 24. *Corps où il y a, en chaque point, un ou plusieurs plans de symétrie de texture, ou plans principaux d'élasticité. Réduction des formules de pressions à un moindre nombre de termes pour ces sortes de corps.* — Ainsi que nous avons dit au § 22, pour un corps isotrope ou d'égale texture en tous sens les formules (12) des pressions doivent se modifier de manière à avoir les mêmes coefficients  $a$  avec tous les systèmes possibles des trois plans sur lesquels elles sont prises.

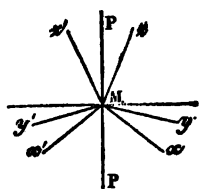
Cette condition de l'isotropie d'un corps pourrait s'exprimer analytiquement en mettant pour les six composantes  $p_{xx}, \dots, p_{yy}, \dots$  parallèles à  $x, y, z$ , leurs valeurs (12) en fonction de  $\partial_{x_1}, \dots, g_{y_2}, \dots$  dans les expressions (4) des six composantes  $p_{x_1|x_1}, \dots, p_{y_2|y_2}, \dots$  suivant de nouveaux axes aussi rectangulaires  $x', y', z'$ , et en substituant ensuite, à  $\partial_{x_1}, \dots, g_{y_2}, \dots$  leurs valeurs en  $\partial_{x_1}, \partial_{y_1}, \partial_{z_1}, g_{y_2}, g_{z_2}, g_{x_2}, g_{z_1}, g_{x_1}, g_{y_1}$  exprimées par les formules (11) retournées; ce qui donnerait, pour

les coefficients de ces six dernières quantités, des polynômes de 36 termes dont chacun devrait se réduire à un seul  $\alpha_{xxxx}, \alpha_{xyyy}, \dots$  quels que fussent les angles de  $x', y', z'$  avec  $x, y, z$ .

Mais on évite une pareille complication en considérant d'abord un cas bien moins particulier que l'isotropie, savoir le cas où la matière a une contexture symétrique par rapport à un certain plan, que nous appelons plan de symétrie, ou, avec M. Cauchy, plan principal d'élasticité.

Supposons que ce plan soit perpendiculaire aux  $x$ .

Sans avoir besoin de faire aucune supposition sur le mode de distribution des molécules de part et d'autre de ce plan PP, nous



pouvons définir la symétrie par ses effets mécaniques, en lui donnant pour caractère que, dans les six composantes de pression, les dilatations ou glissements soient affectés des mêmes coefficients en prenant successivement leurs directions suivant trois axes rectangulaires  $x, y, z$  et suivant trois axes

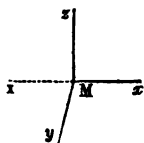
$x', y', z'$  symétriques à ceux-ci par rapport au plan donné. Nous arriverions facilement à prouver ainsi, sans développer le calcul, que les coefficients  $\alpha$  de  $p_{xx}, p_{yy}, p_{zz}, p_{yz}, p_{zx}, p_{xy}$  dans lesquels  $x$  entre comme sous-lettre un nombre impair de fois doivent être nuls (<sup>1</sup>).

Mais, plus simplement, il suffit de le prouver pour un des cas, celui, par exemple, où l'un des axes du premier des deux systèmes est perpendiculaire au plan donné; car les pressions, dilatations et glissements, pour toute autre direction attribuée aux axes, s'expriment, des deux côtés du plan, en multipliant par les mêmes cosinus (form. 4 et 11) les pressions, dilatations et glissements relatifs au cas de perpendicularité d'un des trois axes au même plan donné.

Or, pour cette supposition particulière où l'axe  $x$  ou  $Mx$  est perpendiculaire au plan donné et où par conséquent les deux autres

(<sup>1</sup>) C'est ce que nous avons fait dans une première rédaction de notre mémoire sur la torsion, lu le 13 juin 1853. M. Cauchy, en en prenant connaissance, y a substitué (Comptes rendus, 20 février 1854, p. 329) la démonstration plus simple que nous donnons ici.

axes  $y, z$  du premier système sont deux droites  $My, Mz$  tracées sur ce plan, le second système d'axes est encore  $y, z$  avec  $x$  prolongement de  $x$  en arrière du plan de symétrie  $yMz$ , en sorte que la pression est prise successivement sur la face de droite et sur la face de gauche de ce même plan.



Alors les actions moléculaires qui forment la deuxième pression sont les mêmes que celles qui formaient la première, mais elles s'exercent en sens opposé, en sorte que les composantes  $p_{xy}, p_{xz}$  de la deuxième pression suivant les deux axes des  $y$  et des  $z$ , qui n'ont pas changé de sens, sont égales, au signe près, aux composantes  $p_{xy}, p_{xz}$  de la première pression suivant les mêmes axes; et sa composante, suivant l'axe nouveau  $x$ , directement opposé à  $x$ , est égale à la composante primitive et de même signe. Donc on a

$$p_{xy} = -p_{xy}, \quad p_{xz} = -p_{xz}, \quad p_{xx} = p_{xx}.$$

La dilatation dans le sens  $x$  aura même grandeur et même signe que la dilatation dans le sens  $x$ , savoir, toujours le signe  $+$  s'il y a allongement, et le signe  $-$  s'il y a accourcissement suivant  $x$ . Donc

$$\delta_x = \delta_x.$$

Quant aux glissements  $g_{xy}, g_{yx}$ , ou aux rétrécissements des angles droits  $xMy, xMz$ , ils seront égaux, au signe près, à ceux des angles  $xMy, xMz$ , car les deux premiers deviendront obtus quand les deux derniers deviendront aigus et réciproquement; d'où

$$g_{xy} = -g_{xy}, \quad g_{yx} = -g_{yx}.$$

Et les autres quantités  $p, \delta, g$ , dans les indices desquelles  $x$  n'entre pas, resteront les mêmes après le changement de l'axe  $Mz$  en son prolongement  $Mx$ .

Il faut donc, pour que  $yMz$  soit un plan de symétrie de texture, que les équations (12) donnant les six composantes de pression dans le corps où on suppose qu'il n'y avait aucune pression antérieure aux déformations, restent les mêmes quand on change à la fois les signes de

$$p_{xz}, p_{xy}, g_{xz}, g_{xy},$$

tout le reste conservant son signe.

Cela exige que les coefficients de  $g_{xx}$ ,  $g_{xy}$ , soient nuls dans  $p_{xx}$ ,  $p_{yy}$ ,  $p_{zz}$ ,  $p_{yz}$ , et que les coefficients de  $\partial_x$ ,  $\partial_y$ ,  $\partial_z$ ,  $g_{yz}$  soient nuls dans  $p_{xx}$ ,  $p_{xy}$ , ou que les formules (12) des composantes de pression se réduisent à la forme suivante (29). On a désigné par les mêmes lettres les coefficients qui doivent être faits égaux d'après le principe de la réductibilité, à quinze, des trente-six coefficients du cas le plus général, en sorte qu'on effacera les accents si, comme nous, on ne met pas ce principe en doute :

$$(29) \begin{cases} p_{xx} = a\partial_x + f'\partial_y + e''\partial_z + hg_{yz}, \\ p_{yy} = f''\partial_x + b\partial_y + d'\partial_z + kg_{yz}, \\ p_{zz} = e'\partial_x + d''\partial_y + c\partial_z + lg_{yz}, \\ p_{yz} = h'\partial_x + k'\partial_y + l'\partial_z + dg_{yz}, \\ p_{zx} = eg_{xx} + h''g_{xy}, \\ p_{xy} = h'''g_{xx} + fg_{xy}. \end{cases}$$

S'il y a, au même point  $(x, y, z)$  du corps, un second plan de symétrie ou plan principal d'élasticité, perpendiculaire aux  $y$ , les équations (29) devront rester les mêmes en changeant pareillement et à la fois les signes de  $p_{yz}$ ,  $p_{xy}$ ,  $g_{yz}$ ,  $g_{xy}$ .

Donc, quand il y a deux plans de symétrie perpendiculaires respectivement à deux cordonnées rectangulaires, les formules des composantes normales  $p_{xx}$ ,  $p_{yy}$ ,  $p_{zz}$  ne contiennent que les trois dilatations  $\partial_x$ ,  $\partial_y$ ,  $\partial_z$ , et celles des composantes tangentielles  $p_{yz}$ ,  $p_{zx}$ ,  $p_{xy}$ , ne contiennent chacune que le glissement de mêmes indices; ce qui entraîne nécessairement l'existence d'un troisième plan de symétrie ou plan principal d'élasticité, perpendiculaire à la troisième coordonnée.

En sorte que les formules se réduisent, pour trois plans de symétrie, à

$$(30) \begin{cases} p_{xx} = a\partial_x + f'\partial_y + e''\partial_z & p_{yz} = d g_{yz} \\ p_{yy} = f''\partial_x + b\partial_y + d'\partial_z & \text{et } p_{zx} = e g_{xx} \\ p_{zz} = e'\partial_x + d''\partial_y + c\partial_z & p_{xy} = f g_{xy} \quad (*) \end{cases}$$

(1) M. Cauchy établissait, en 1828, les formules trinômes et monômes (30) en supposant qu'il y a des molécules d'égale masse et de même nature distribuées symétriquement par rapport à chacun des trois plans  $yMx$ ,  $zMx$ ,  $xMy$  et en annulant, en conséquence, ceux des coefficients ( $m$  des formules générales [12]) dans l'expression desquels un ou deux cosinus entrent avec une puissance impaire sous

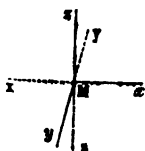
qui sont à douze coefficients (au lieu de trente-six du cas général), réductibles à six (au lieu de quinze) en effaçant les accents.

Dans un pareil corps, il ne pourrait y avoir d'autres pressions antérieures aux déformations (§ 22) que les trois pressions normales

le signe 8 (note du § précédent) parce que 8 représente alors une somme nulle de termes égaux deux à deux au signe près.

On peut encore rendre sensible cette réduction des formules sextinômes (12) à la forme (30) par le raisonnement suivant, analogue à ceux du commencement du § 4 de la note du n° 80 (p. 36) et du (3<sup>e</sup>) de la démonstration (p. 527) du lemme II au § 9 (2<sup>e</sup> appendice), et qui revient, au fond, à la démonstration de deux lemmes donnés par M. Lamé pour le cas plus particulier d'égalité élasticités en tous sens (4<sup>e</sup> leçon sur l'élasticité, 1852, §§ 46 et 47, p. 39-44, et 20<sup>e</sup> leçon sur les coordonnées curvilignes, 1859, p. 364-366), excepté qu'au lieu d'une torsion simple, supposée par M. Lamé, nous prenons ici un glissement pour seconde particularisation des déplacements relatifs des points du corps.

4<sup>o</sup> Dans un corps dont la contexture est symétrique par rapport aux plans tels



que  $yMz$  ou perpendiculaires aux  $x$ , une dilatation dans le sens  $x$  ne peut produire sur ces plans qu'une pression normale  $p_{xx}$  ou dirigée suivant les  $x$ ; car il n'y a pas de raison pour que la direction de cette pression s'incline sur  $yMz$  plutôt d'un côté que du côté opposé. Et pareille chose peut être dite de l'effet d'une dilatation dans un sens transversal, tel que  $y$  ou  $z$ . Donc  $\partial_x, \partial_y, \partial_z$  peuvent entrer dans  $p_{xx}$ , mais n'entrent pas dans  $p_{xy}$  ni dans  $p_{yz}$ .

5<sup>o</sup> Si la contexture est symétrique, en outre, par rapport aux plans tels que  $zMx$  perpendiculaires aux  $y$ , un glissement  $g_{xx}$ , parallèlement aux  $x$ , des plans perpendiculaires aux  $x$ , ne peut produire sur  $yMz$  qu'une pression dirigée parallèlement au plan  $zMx$ , car il n'y a pas de raison pour qu'elle s'incline sur ce plan plutôt d'un côté que de l'autre. De plus, cette pression ne saurait avoir de composante parallèle aux  $x$ , car si nous considérons les actions de la gauche à la droite de la face  $yMz$  dont les directions coupent une même droite tracée sur cette face, par exemple la droite  $yMy$ , nous verrons que celles qui s'exercent sur la matière de l'onglet ou angle dièdre  $zMx$  et la matière de l'onglet opposé  $zMx$ , devenus l'un et l'autre légèrement aigus, sont attractives vu que leurs molécules se sont éloignées; et que celles qui ont été développées de même entre les deux onglets  $zMx$ ,  $zMx$  devenus obtus, sont répulsives, et ont précisément les mêmes intensités et les mêmes inclinaisons sur  $Mx$ , chacune à chacune, en vertu de la symétrie supposée; en sorte que leurs composantes suivant les  $x$  s'entredétruisent. La pression sur  $yMz$ , développée par  $g_{xx}$ , n'ayant de composante ni suivant  $y$  ni suivant  $z$ , est dirigée suivant  $x$ . Donc  $g_{xx}$  n'entre ni dans  $p_{xx}$  ni dans  $p_{xy}$ .

Il n'entre pas non plus dans  $p_{yy}$ , car il est facile de voir que les forces développées par le glissement  $g_{xx}$  à travers la face  $zMx$  perpendiculaire aux  $y$ , entre les quatre angles trièdres qui sont en avant de cette face et les quatre angles trièdres qui sont en arrière, se détruisent deux à deux en vertu de la double symétrie supposée.

En sorte que les formules ont bien la forme trinôme et monôme (30).

Mais nous regardons la démonstration du texte comme plus simple et plus indépendante de toute hypothèse sur la distribution moléculaire.

$p^{\circ}_{xx}, p^{\circ}_{yy}, p^{\circ}_{zz}$ , car des pressions tangentielles  $p^{\circ}_{yz}, p^{\circ}_{zx}, p^{\circ}_{xy}$  auraient altéré la symétrie originelle supposée. Les formules (14) du cas où il existait des pressions antérieures se réduiraient donc, dans le système d'axes bissecteurs  $x', y', z'$  dont on a parlé § 23, p. 567-568 (et pour lesquels  $c_{yz} = c_{zy} = \frac{1}{2} g_{yz}$ , etc.), à

$$(31) \begin{cases} p_{x'x'} = p^{\circ}_{xx} + (a + p^{\circ}_{xx})\partial_x + (f' - p^{\circ}_{xx})\partial_y + (e' - p^{\circ}_{xx})\partial_z, \\ p_{y'y'} = p^{\circ}_{yy} + (f'' - p^{\circ}_{yy})\partial_x + (b + p^{\circ}_{yy})\partial_y + (d' - p^{\circ}_{yy})\partial_z, \\ p_{z'z'} = p^{\circ}_{zz} + (e'' - p^{\circ}_{zz})\partial_x + (d'' - p^{\circ}_{zz})\partial_y + (c + p^{\circ}_{zz})\partial_z, \\ p_{y'z'} = \left( d + \frac{p^{\circ}_{yy} + p^{\circ}_{zz}}{2} \right) g_{yz}, p_{z'x'} = \left( e + \frac{p^{\circ}_{zz} + p^{\circ}_{xx}}{2} \right) g_{xz}, \\ p_{x'y'} = \left( f + \frac{p^{\circ}_{xx} + p^{\circ}_{yy}}{2} \right) g_{xy}. \end{cases}$$

§ 25. Corps où il y a un axe de symétrie ou d'élasticité. — Supposons, maintenant, que tout soit égal, quant aux résistances élastiques, autour d'une droite,  $Mx$  par exemple, appelée alors un axe d'élasticité<sup>(1)</sup>; ou (pour mieux préciser) que les six formules de composantes de pression en fonction des dilatations et glissements dans leurs trois sens rectangulaires  $x, y, z$  conservent les mêmes coefficients lorsque, le sens  $x$  restant le même,  $x$  et  $y$  varient ou sont changés en deux autres droites quelconques  $x', y'$  perpendiculaires entre elles et à  $x$ .

Il faut pour cela, d'abord, que les coefficients ne changent pas quand on change seulement soit  $z$ , soit  $y$ , en son prolongement, c'est-à-dire il faut que  $xy, xz$  soient deux plans de symétrie (§ précédent), ou que les formules de pressions se réduisent aux formes trinômes et monômes (30) qu'on vient de leur donner. Et ces formules doivent aussi rester les mêmes en changeant l'un contre l'autre les axes  $y$  et  $z$ , en sorte qu'on doit avoir

$$(32) \quad b = c, \quad f = e, \quad f' = e', \quad f'' = e', \quad d'' = d'.$$

(1) M. Cauchy appelait, en 1828, axes d'élasticité les intersections des trois plans de symétrie (Exercices de math. t. 3, p. 235). Depuis, en appelant ceux-ci plans principaux d'élasticité (Comptes rendus, 1854, t. 38, p. 329) il a donné le nom d'axes d'élasticité (Id. p. 330) aux droites que nous appelons ici de cette manière.



$$p_{y'z'} = d. g_{y'z'}$$

le coefficient d ayant même valeur que dans la quatrième formule (30)  $p_{yz} = d. g_{yz}$ . Mettant pour  $g_{y'z'}$ , sa valeur trouvée  $\partial_x$ , et pour  $p_{yy}$ ,  $p_{zz}$ , leurs valeurs (30) d' $\partial_x$  et c.  $\partial_x$ , on obtient, eu égard à  $c = b$  :

$$2d = b - d'.$$

ou précisément la valeur (33) à démontrer.

Les formules de pressions, quand il y a un axe d'élasticité parallèle aux  $x$ , sont, ainsi :

$$(34) \begin{cases} p_{xx} = a\partial_x + e'\partial_y + e''\partial_z, & p_{yz} = d. g_{yz}, \\ p_{yy} = e\partial_x + (2d + d')\partial_y + d'.\partial_z, & \text{et } p_{zz} = e. g_{zz}, \\ p_{xz} = e'\partial_x + d'.\partial_y + (2d + d')\partial_z, & p_{xy} = e. g_{xy}. \end{cases}$$

Les conditions nécessaires (32) et (33) que nous venons d'établir entre les valeurs des coefficients, sont aussi suffisantes pour que tout soit pareil autour de l'axe des  $x$ , car il est facile de s'assurer, au moyen des formules de changements de plans et d'axes des §§ 17 et 19, que lorsqu'elles sont remplies on a pour les cinq autres composantes de pressions dans le sens des nouveaux axes  $x, y', z'$ , quel que soit l'angle  $y'My$ , des expressions en  $\partial_x, \partial_{y'}, g_{y'z'}$ ,  $g_{z'z}, g_{xy'}$ , semblables aux expressions (34) en  $\partial_x, \partial_{y' \dots} g_{xy}$ .

§ 26. *Corps isotropes. Formules de pressions à deux coefficients ou à un seul.* — Si, outre l'axe d'élasticité parallèle aux  $x$ , il y a un axe d'élasticité parallèle aux  $y$ , il faut qu'on ait encore, et par les mêmes raisons

$$d = e, \quad d' = e'' = e', \quad a = 2d + d' = 2e + e';$$

d'où résulte qu'il y a alors un troisième axe d'élasticité qui est parallèle aux  $z$ , et les formules sont

$$(35) \begin{cases} p_{xx} = (2e + e')\partial_x + e\partial_y + e\partial_z, & p_{yz} = e g_{yz} \\ p_{yy} = e\partial_x + (2e + e')\partial_y + e\partial_z, & \text{et } p_{zz} = e g_{zz} \\ p_{xz} = e\partial_x + e\partial_y + (2e + e')\partial_z, & p_{xy} = e g_{xy} \text{ (}^1\text{)}. \end{cases}$$

(<sup>1</sup>) Elles coïncident avec celles des *Leçons sur l'élasticité* (1852), § 20, p. 54, de M. Lamé, relatives au cas de très-petits déplacements, en remplaçant

par  $\lambda, \mu, \theta$   $\partial_x + \partial_y + \partial_z$  (dilatation cubique).



Et comme, en changeant les axes  $M_y, M_z$  en deux autres  $M_{y'}, M_{z'}$  sans changer l'axe des  $x$ , les formules des composantes ont les mêmes coefficients (§ précédent), on voit que la droite  $M_{y'}$ , tracée d'une manière arbitraire dans le plan  $yM_z$  des deux axes d'élasticité  $M_y$  et  $M_z$ , est aussi un axe d'élasticité.

Il en sera de même de toute droite tracée par le point  $M(x, y, z)$  dans le plan  $xM_{y'}$  des deux axes d'élasticité  $M_{y'}$  et  $M_x$ ; c'est-à-dire que toutes les droites possibles tirées par ce point  $M$  sont des axes d'élasticité, et que, par rapport à trois axes rectangulaires dirigés d'une manière absolument quelconque, se croisant en  $M$ , les expressions des six composantes de pression ont les mêmes coefficients que celles que nous venons d'écrire.

C'est ce qu'on exprime en disant, avec M. Lamé, que le corps a une *élasticité constante*, et, avec M. Cauchy, qu'il est *isotrope* (*Exercices d'analyse et de physique mathématique*), ou que l'élasticité est la même dans tous les sens (*Exerc. de math.*, 1828, p. 167, 230, 256).

Les trente-six coefficients  $a$  des formules (12) se réduisent à deux,  $e$  et  $e'$ , et on peut dire même à un seul, car, en vertu de ce que les trente-six coefficients sont réductibles à quinze, ou de ce que le coefficient de  $\delta_y$  dans  $p_{xx}$  est, comme nous l'avons démontré élémentairement au § 21 et analytiquement à la note du § 23, égal au coefficient de  $g_{xy}$  dans  $p_{xy}$ , on a

$$e = e';$$

en sorte qu'en remplaçant  $e$  et  $e'$  par  $G$ , lettre qui a constamment désigné ce coefficient de *glissement* dans le texte de Navier (n° 156 à 160) et dans toutes nos notes, on a, dans le cas de l'*isotropie*

$$(36) \quad \left\{ \begin{array}{ll} p_{xx} = G(3\delta_x + \delta_y + \delta_z) & p_{yz} = Gg_{yz}, \\ p_{yy} = G(\delta_x + 3\delta_y + \delta_z) & \text{et } p_{xz} = Gg_{xz}, \\ p_{zz} = G(\delta_x + \delta_y + 3\delta_z) & p_{xy} = Gg_{xy}. \end{array} \right.$$

Si l'on suppose une pression  $p_0$ , la même en tous sens (pour ne pas altérer l'isotropie), antérieure aux déformations  $\delta$  et  $g$ , les formules de pression après ces déformations sont (en particulierisant (34)) :

$$(37) \quad \left\{ \begin{array}{l} p_{xx} = p_0 + (3G + p_0)\delta_x + (G - p_0)\delta_y + (G - p_0)\delta_z \\ p_{yy} = p_0 + (G - p_0)\delta_x + (3G + p_0)\delta_y + (G - p_0)\delta_z \\ p_{zz} = p_0 + (G - p_0)\delta_x + (G - p_0)\delta_y + (3G + p_0)\delta_z \\ p_{xy} = (G + p_0)\xi_{xy}, \quad p_{xz} = (G + p_0)\xi_{xz}, \quad p_{yz} = (G + p_0)\xi_{yz} \end{array} \right.$$

Mais les expériences de Savart, et la simple considération de la manière dont s'opèrent le refroidissement et la solidification des corps, prouvent que l'isotropie est fort rare, non-seulement dans les métaux forgés ou laminés, mais même dans les métaux coulés ou dans les matières fibreuses ou grenues<sup>(1)</sup>. Aussi, plutôt que de prendre, au lieu des formules (36) à un seul coefficient  $G$ , les formules (35) à deux coefficients  $e$  et  $e'$ , qui ne sont composées comme celles-ci que pour des corps parfaitement isotropes, il conviendra de se servir le plus qu'on pourra des formules (29) ou (30) ou (34) relatives au cas plus général d'une élasticité inégale dans deux ou trois sens. C'est ce que nous avons fait dans les théories de la flexion et de la torsion où nous avons supposé constamment la contexture longitudinale des prismes autre que la contexture latérale, et même celle-ci différente dans les divers sens transversaux (voyez la discussion du 5<sup>e</sup> Appendice ci-après).

§ 27. *Relations des pressions aux divers points successifs, tant entre elles qu'avec les forces accélératrices non réciproques, telles que la pesanteur. Équations différentielles indéfinies de l'équilibre intérieur, à satisfaire en tous les points d'un corps quelconque.* — Pour obtenir les relations qui peuvent exister entre les pressions aux points successifs d'un corps quelconque, et aussi celles qui les lient avec les forces accélératrices *non réciproques* ou émanant du dehors, telles que la pesanteur, qui sollicitent sa matière, nous poserons les trois équations d'équilibre de translation d'un très-petit élément de son volume. Soient :

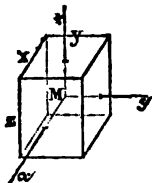
**X, Y, Z** les composantes, parallèlement aux axes des  $x, y, z$ , de ces forces extérieures ou non réciproques dont la matière

(1) *Annales de Chimie et de Physique*, t. 44 (1829) et autres. L'illustre physicien, peu confiant dans les métaux, fit ses expériences de *réaction de torsion* les plus décisives avec des prismes en plâtre, matière qui encore n'offre pas une isotropie parfaite.

du corps éprouve l'action, par unité de son volume, au point M dont les coordonnées rectangles sont  $x, y, z$ , et qui peut varier avec ces coordonnées;

$x, y, z$  les petites dimensions, parallèles aux mêmes coordonnées, de l'élément solide auquel nous supposons la forme d'un parallépipède rectangle, et dont le point M occupe le centre.

$P_{zx}, P_{yy}, P_{xz}, P_{yx} = P_{xy}, P_{xz} = P_{zx}, P_{xy} = P_{yx}$ , comme aux §§ précédents, les six composantes de pression, parallèlement aux coordonnées, sur l'unité superficielle des trois faces planes qui leur sont perpendiculaires, et dont le centre de gravité est au même point M.



Les deux faces  $xy$  de cet élément, perpendiculaires aux  $z$ , éprouvent des pressions contraires qui sont, l'une un peu au-dessus, l'autre un peu au-dessous de celle qui serait supportée par une face parallèle passant en M, pression dont les composantes suivant  $x, y, z$  sont  $p_{zx}, p_{zy}, p_{zz}$  par unité superficielle. La différence, pour ce qui re-

garde la composante suivant  $x$ , sera le coefficient différentiel  $\frac{dp_{zx}}{dz}$

multiplié par la distance  $z$  de ces faces, et aussi par leur superficie  $xy$ ; la résultante de ces deux premières composantes de pression suivant  $x$  est

$$\frac{dp_{zx}}{dz} z \cdot xy.$$

Les deux faces opposées  $yz$ , et les deux faces opposées  $zx$ , fourniraient de même, et aussi suivant les  $x$ , les deux différences ou résultantes  $\frac{dp_{zx}}{dx} x \cdot yz$ , et  $\frac{dp_{yx}}{dy} y \cdot zx$ . On a donc, pour l'équilibre de translation de l'élément dont on s'occupe, sollicité en sens opposé par la force  $X \cdot xyz$ , une équation dont on peut diviser tous les termes par le volume  $xyz$  de cet élément, et qui est la première des trois équations suivantes; les deux autres s'obtiennent de même en exprimant les conditions de l'équilibre de translation dans le sens  $y$  et dans le sens  $z$ :

$$(38) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dp_{xx}}{dx} + \frac{dp_{yy}}{dy} + \frac{dp_{zz}}{dz} = X \\ \frac{dp_{xy}}{dx} + \frac{dp_{yy}}{dy} + \frac{dp_{zy}}{dz} = Y \\ \frac{dp_{xz}}{dx} + \frac{dp_{yz}}{dy} + \frac{dp_{zz}}{dz} = Z. \end{array} \right.$$

Ces trois équations (38), données pour la première fois par M. Cauchy <sup>(1)</sup>, sont une généralisation de celles de l'hydrostatique. On n'a pas besoin de faire remarquer qu'en les posant on ne pouvait pas négliger les forces telles que *Xxyz comme très-petites de troisième ordre*, ainsi qu'on a fait au § 16 en démontrant, par l'équilibre d'un élément tétraèdre, le théorème des projections de plans de pression; car, ici, les pressions, qui sont toujours du second ordre comme les superficies des faces de l'élément, n'entrent que pour les différences des grandeurs qu'elles ont sur deux faces parallèles, égales et très-proches l'une de l'autre, en sorte que tout était du troisième ordre dans les équations, avant leur division par le volume *xyz* de l'élément dont elles expriment l'équilibre.

Au reste, les seconds membres des deux premières sont nuls lorsqu'il n'y a pas d'autre force que la pesanteur supposée agir dans la direction *z*; et le second membre de la troisième est supposé nul aussi lorsqu'on *abstrait*, comme nous avons dit (commencement du § 23), les effets de la pesanteur, ou que l'on ne considère que les effets produits en sus. Alors les équations (38) ne font que régir la succession des valeurs des composantes de pression dans tous le corps, et par conséquent la suite des valeurs des dilatations et glissements dont ces composantes sans fonctions. Il est facile d'apercevoir que les équations  $G' \frac{dg'}{du} + G'' \frac{dg''}{dv} = 0$ ,  $G' \frac{dg'_1}{du} + G'' \frac{dg''_1}{dv} + \frac{P''v}{I} = 0$  des pages 249, 347, 400 et 537 (théor. IV) n'en sont que des cas particuliers.

### § 28. Relations entre les pressions intérieures et les pressions ex-

<sup>(1)</sup> Mémoire du 30 septembre 1822, au *Bulletin de la Société philomatique*, 1823, p. 44, et *Exercices de math.*, 1827, p. 414.

*térieures. Équations définies, à satisfaire principalement aux points de la surface-limite de chaque corps.* — Outre les forces désignées par X, Y, Z au § précédent, agissant sur tous les points de sa masse, le corps éprouve des actions, aussi extérieures ou non réciproques, en certains points particuliers, qui sont ordinairement ceux de son enveloppe ou de sa surface extérieure, ou bien des *faces de séparation des portions de corps que l'on a besoin de considérer séparément et successivement.* Soient

- $\omega$  ces forces ou *pressions extérieures*, par unité superficielle des éléments de surface où elles agissent;
- n les directions des normales aux mêmes éléments, directions généralement variables d'un point à l'autre, ainsi que les intensités  $\omega$ ;

On aura les projections d'un quelconque de ces éléments superficiels sur trois plans perpendiculaires aux  $x, y, z$  en multipliant sa surface A successivement par  $\cos(n, x), \cos(n, y), \cos(n, z)$ ; et la somme des composantes, dans le sens  $x$ , des pressions intérieures qui s'y exercent, savoir

$$A [p_{xx} \cos(n, x) + p_{yx} \cos(n, y) + p_{zx} \cos(n, z)]$$

sera la composante, dans ce même sens  $x$ , de la pression *intérieure* sur A, d'après le théorème (§ 16) de projections de plans de pression. Donc, comme la composante  $A\omega \cos(\omega, x)$  de la pression *extérieure*  $A\omega$  doit faire équilibre à la pression intérieure, on aura, en divisant par A, la première des trois équations suivantes; les deux autres s'obtiennent en prenant les composantes suivant  $y$  et suivant  $z$ :

$$(39) \begin{cases} p_{xx} \cos(n, x) + p_{yx} \cos(n, y) + p_{zx} \cos(n, z) = \omega \cos(\omega, x) \\ p_{xy} \cos(n, x) + p_{yy} \cos(n, y) + p_{zy} \cos(n, z) = \omega \cos(\omega, y) \\ p_{xz} \cos(n, x) + p_{yz} \cos(n, y) + p_{zz} \cos(n, z) = \omega \cos(\omega, z) \end{cases}$$

Ces équations d'équilibre, dans lesquelles on mettra pour les six composantes de pression, comme dans les équations (38), leurs valeurs en fonction des dilatations et glissements, donnent des conditions dites *définies* que doivent remplir, aux limites des corps ou portions de corps, les valeurs de ces inconnues, tirées par intégration des équations (38) dites *indéfinies* parce qu'elles s'appli-

quent à tous les points indistinctement ; en sorte qu'elles serviront à déterminer les constantes ou fonctions arbitraires.

Il faudra toutefois y joindre d'autres conditions particulières ou *définies*, purement géométriques, qui peuvent être à remplir aussi, telles que celles d'appui, d'encastrement, de jonction, etc., d'après lesquelles certains points ou certains éléments linéaires ou superficiels sont astreints ou à l'immobilité ou à la coïncidence avec ceux d'autres corps.

Les équations  $\left(\frac{dz}{dv} + \theta u\right) du - \left(\frac{dz}{du} - \theta v\right) dv = 0$ ,  $G''g''du - G'g'dv = 0$ ,  $G''g''_1du - G'g'_1dv = 0$ , des pages 253, 348, 369, 401 qui expriment la nullité des actions longitudinales sur les faces latérales des prismes tordus ou fléchis, sont des cas particuliers d'une des équations définies (39).

§ 29. *Expressions des dilatations et glissements, et par suite des composantes de pression en fonction des déplacements éprouvés dans l'espace par les points des corps déformés.* — Les équations différentielles (38), en y substituant, aux pressions, leurs valeurs (12) à (14), ou (29) à (36), contiennent généralement six inconnues  $\partial_x, \partial_y, \partial_z, g_{yz}, g_{zx}, g_{xy}$  pour chaque point. Pour pouvoir les résoudre, il est ordinairement nécessaire d'exprimer ces dilatations et glissements en fonction de *trois* autres inconnues, qui sont les *déplacements éprouvés par les points dans les sens des trois coordonnées*.

Nous appellerons

$$u, v, w$$

ces déplacements, estimés ou projetés dans les sens rectangulaires respectifs des  $x$ , des  $y$ , des  $z$ , en sorte que

$$x + u, y + v, z + w$$

sont les coordonnées nouvelles du point matériel quelconque appartenant au corps dont on s'occupe, et qui avait  $x, y, z$  pour coordonnées primitives.

Il importe de remarquer que toutes les formules ci-dessus s'appliquent à des cas où les déplacements *ont des grandeurs aussi considérables qu'on veut* dans l'espace, et même relativement les uns aux autres pour des points suffisamment éloignés dans un même

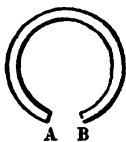
corps ; mais à la condition expresse que les déplacements relatifs de points très-rapprochés soient fort petits, ou que les distances entre points appartenant à chaque portion très-peu étendue du solide ne changent que dans de très-faibles proportions.

En sorte que les quantités que nous avons appelées  $\delta_r$  (§§ 17, 18), et par conséquent celles que désignent  $\delta_x, \delta_y, \delta_z, \epsilon_{yx}, \epsilon_{xz}, \epsilon_{xy}$  soient, partout, des fractions numériques extrêmement petites, ce qui exige des relations particulières, pour les points successifs, entre les valeurs de  $u, v, w$ , du reste aussi grandes qu'on veut individuellement, et même aussi différentes qu'on veut pour des points non voisins.

Sans cela, l'action nouvelle développée entre deux molécules à la distance très-petite  $r$ , ou dans la sphère d'activité sensible l'une de l'autre, ne serait pas proportionnelle à l'augmentation  $r_1 - r$  ou  $r$ , de cette distance (§§ 18 à 23). Les expressions (5) à (37) ne seraient plus vraies. La contexture du corps changerait ainsi que les arrangements de ses molécules. Il ne retournerait plus à sa forme primitive lorsqu'on ferait cesser l'action des forces qui l'ont déformé ; et, même, il s'énervait (note du n° 2) ou il romprait.

Or, les déformations peuvent très-bien remplir cette condition de petitesse dans chaque très-petite portion du corps, tout en étant considérables lorsqu'on envisage le corps entier.

Ainsi, l'expérience prouve qu'on peut ployer une lame élastique droite, longue et mince, de manière à faire toucher les deux bouts A, B, auparavant très-éloignés, sans que la contexture de cette lame soit altérée ou sans qu'elle perde la propriété de revenir ensuite d'elle-même à la forme rectiligne. C'est qu'alors la dilata-



atation positive de sa face devenue convexe et la dilatation négative de sa face devenue concave sont restées des fractions extrêmement petites, un deux-millième par exemple, et le déplacement relatif considérable des extrémités résulte d'une accumulation de petits déplacements angulaires sur toute sa longueur.



L'expérience prouve aussi qu'un fil métallique CD peut revenir à son premier état après qu'on l'a tordu de manière à faire tourner l'une de ses extrémités devant l'autre d'une demi-circonférence  $ab$ , et même de plusieurs circonférences, si, en raison de sa grande longueur et de son faible diamètre, le glissement relatif le plus considérable sur chaque section transversale est resté très-petit, un millième par exemple, ou n'a dilaté que d'un deux-millième les *hélices à 45 degrés* (§ 3 de la note du n° 156) tracées sur sa surface, et qui forment la suite des éléments linéaires les plus dilatés par la torsion d'un cylindre à base circulaire.

Les formules et équations ci-dessus, où n'entrent que les dilatations et glissements  $\delta$ ,  $g$  qui peuvent être très-petits, disons-nous, avec des grandeurs quelconques absolues ou relatives de  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , sont donc plus générales que les formules et équations, connues depuis trente ans, qui ont été dressées en partant de la supposition que les déplacements  $u$ ,  $v$ ,  $w$  soient partout très-petits, au point que les *directions* des lignes de jonction  $r$  des molécules varient extrêmement peu dans l'espace, car c'est sur la supposition d'extrême petitesse du changement de ces directions qu'est fondée en grande partie la manière connue de dresser ces formules.

On trouve facilement pour une des trois dilatations et pour un des trois glissements, *s'ils sont très-petits*, les expressions suivantes en fonction de déplacements  $u$ ,  $v$ ,  $w$  de grandeur quelconque

$$(40) \quad \delta_u = \frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{du}{dx} \right)^2 + \left( \frac{dv}{dx} \right)^2 + \left( \frac{dw}{dx} \right)^2 \right]$$

$$(41) \quad g_{xy} = \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} + \left( \frac{du}{dx} \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dx} \frac{dw}{dy} \right) \quad (1)$$

en sorte que les conditions à remplir par ces déplacements  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , ou les relations qu'ils doivent avoir entre eux, comme nous venons de dire, pour ne produire que de petites dilatations et de petits glissements et ne pas altérer, ainsi, la contexture des solides, sont que les trois expressions comme (40) et les trois expressions

(1) En effet, prenons sur les lignes matérielles  $Mx$ ,  $My$ , menées primitivement



comme (41) n'aient partout pour valeurs que de très-petites fractions.

Ces expressions générales mises à la place de  $\partial_x, \partial_y, \partial_z, \varepsilon_{yz}, \varepsilon_{xz}, \varepsilon_{xy}$  dans celles (12) à (37) des composantes de pression  $p_{xx}, \dots, p_{xy}$  donneraient entre  $u, v, w$ , par la substitution dans les équations d'équilibre (38), des équations différentielles non linéaires et fort compliquées.

Mais si les conditions de petitesse des dilatations et glissements sont remplies, on peut toujours, en ne s'occupant à la fois que d'une portion peu étendue d'un corps élastique, amener par une translation et une rotation les situations anciennes et les situations nouvelles de ses points à être extrêmement voisines, et, par conséquent, les déplacements à être très-faibles.

Supposons donc

$$u, v, w$$

assez petits pour qu'on puisse négliger leurs carrés et leurs pro-

par le point M du corps parallèlement aux axes coordonnés rectangulaires des  $x$  et des  $y$ , deux longueurs très-petites  $MA = a, MB = b$  (fig. page suivante) nous aurons :

		Avant les déplacements.	Après les déplacements.
Coordonnées	de M	$x, y, z$	$x + u, \quad y + v, \quad z + w$
	de A	$x+a, y, z$	$x+a+u+\frac{du}{dx}a, y+v+\frac{dv}{dx}a, z+w+\frac{dw}{dx}a$
	de B	$x, y+b, z$	$x+u+\frac{du}{dy}b, y+b+v+\frac{dv}{dy}b, z+w+\frac{dw}{dy}b$
Longueurs	de MA	$a$	$a(1+\partial_x)$
	de MB	$b$	$b(1+\partial_y)$

D'où, après les déplacements :

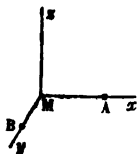
$$\overline{MA}^2 = a^2(1+\partial_x)^2 = a^2 \left[ \left(1 + \frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dw}{dx}\right)^2 \right]$$

$$\cos \text{AMB} = \frac{1 + \frac{du}{dx}}{1 + \partial_x} \cdot \frac{\frac{du}{dy}}{1 + \partial_y} + \frac{\frac{dv}{dx}}{1 + \partial_x} \cdot \frac{1 + \frac{dv}{dy}}{1 + \partial_y} + \frac{\frac{dw}{dx}}{1 + \partial_x} \cdot \frac{\frac{dw}{dy}}{1 + \partial_y}.$$

duits ainsi que ceux de leurs dérivées; les expressions (40), (41) et les quatre autres semblables non écrites se réduisent à la forme suivante; qui rend linéaires les équations différentielles dont nous venons de parler :

$$(42) \left\{ \begin{array}{lll} \partial_x = \frac{du}{dx}, & \partial_y = \frac{dv}{dy}, & \partial_z = \frac{dw}{dz}, \\ \varepsilon_{yx} = \frac{dv}{dx} + \frac{dw}{dy}, & \varepsilon_{xz} = \frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz}, & \varepsilon_{xy} = \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}. \end{array} \right.$$

On peut démontrer ces expressions d'une manière simple. Soient pris, avant les déplacements, sur les droites matérielles  $Mx$ ,  $My$  parallèles aux coordonnées  $x$ ,  $y$ , deux petites longueurs  $MA = MB = a$ . Les excès des déplacements du point A sur ceux du point M sont



$\frac{du}{dx} a$  dans le sens des  $x$ ,

$\frac{dv}{dx} a$  dans le sens des  $y$ ;

en sorte que : 1°  $MA$  projetée, après les déplacements, sur une parallèle aux  $x$ , donne  $a + \frac{du}{dx} a$ ; par conséquent on a pour la dilatation :

$$\partial_x = \frac{du}{dx};$$

2° La même ligne  $MA$ , projetée sur une parallèle aux  $y$ , donne  $\frac{dv}{dx} a$ ; par conséquent le petit retrécissement éprouvé par l'angle droit  $AMB$  ou  $xMy$  si  $My$  a conservé la même direction, est

De l'expression de  $\overline{MA}^2 = a^2(1 + \partial_x)^2$  on peut, en divisant par  $a^2$  et extrayant la racine carrée, déduire la proportion, de grandeur quelconque, de la dilatation  $\partial_x$  produite par des déplacements aussi quelconques  $u$ ,  $v$ ,  $w$ ; et substituant dans  $\cos AMB$  cette valeur de  $\partial_x$  et une valeur semblable pour  $\partial_y$ , on obtient le changement quelconque éprouvé par un angle primitivement droit. Mais si  $\partial_x$ ,  $\partial_y$  et les cosinus sont très-petits, on peut remplacer  $(1 + \partial_x)^2$  par  $1 + 2\partial_x$ , et le cosinus par  $\varepsilon_{xy}$ , en remplaçant, dans ses dénominateurs,  $1 + \partial_x$  et  $1 + \partial_y$  par 1. Il en résulte les expressions (40) et (44). (*Mémoire* lu le 22 février 1847; *Comptes rendus*, t. XXIV, p. 260, et aussi *Société philomathique*, 26 mars 1844.)

$$\frac{dv}{dx}$$

Celui que le même angle aurait éprouvé si  $MBy$  seul eût changé de direction est, par la même raison,  $\frac{du}{dy}$ , évalué aussi en arc d'un rayon = 1. Le rétrécissement total, dû aux petits changements de direction des deux côtés, est leur somme; donc :

$$\varepsilon_{xy} = \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}$$

et ainsi de même des valeurs des deux autres dilatations et des deux autres glissements (42) (1).

§ 30. *Équations différentielles contenant les déplacements supposés très-petits.* — En mettant les valeurs (42) des dilatations et glissements dans formules (30) des pressions  $p_{xx} \dots p_{xy}$  du cas de trois plans de symétrie de contexture, et substituant ensuite dans les équations d'équilibre indéfinies  $\frac{dp_{xx}}{dx} + \dots = X$ , etc., on a ces trois équations aux différences partielles linéaires du second ordre :

(1) On arrive d'une autre manière aux expressions plus générales (40), (41), et on établit en même temps quelques formules qui nous serviraient plus loin, en considérant que les déplacements de grandeur quelconque  $u, v, w$ , pour ne produire que de très-petites déformations dans chaque petite portion du corps, doivent se composer de déplacements très-petits, que nous appellerons  $u_0, v_0, w_0$ , suivis de translations et de rotations sans déformations. Supposons que, pour une des petites portions du corps, la rotation, autour de l'origine des coordonnées, ait donné des directions  $x_1, y_1, z_1$  aux lignes matérielles primitivement dirigées suivant les axes des  $x, y, z$ , et qu'ensuite leur point de concours ait éprouvé, parallèlement à ces axes fixes, des translations  $a, b, c$ ; on aura pour les coordonnées finales du point  $(x, y, z)$ , en désignant par  $c_{xy_1}, c_{xz_1}$ , etc., des cosinus comme à la note du § 23,

$$(43) \begin{cases} x + u = (x + u_0)c_{xx_1} + (y + v_0)c_{xy_1} + (z + w_0)c_{xz_1} + a, \\ y + v = (x + u_0)c_{yx_1} + (y + v_0)c_{yy_1} + (z + w_0)c_{yz_1} + b, \\ z + w = (x + u_0)c_{zx_1} + (y + v_0)c_{zy_1} + (z + w_0)c_{zz_1} + c; \end{cases}$$

car ces seconds membres sans leurs derniers termes  $a, b, c$  représentent, après les déplacements  $u_0, v_0, w_0$  et les rotations, les projections, sur les directions fixes  $x, y, z$ , de la ligne brisée  $(x + u_0) + (y + v_0) + (z + w_0)$ , dont les trois parties sont devenues parallèles à  $x_1, y_1, z_1$ . En les différenciant par rapport à  $x$ , on a les trois premières équations suivantes, dont les six autres, simplement indiquées, s'obtiennent en différenciant par rapport à  $y$  et par rapport à  $z$  :

$$(45) \left\{ \begin{aligned} a \frac{d^2u}{dx^2} + f \frac{d^2u}{dy^2} + e \frac{d^2u}{dz^2} + \frac{d}{dx} \left[ (f + f') \frac{dv}{dy} + (e + e'') \frac{dw}{dz} \right] &= X \\ f \frac{d^2v}{dx^2} + b \frac{d^2v}{dy^2} + d \frac{d^2v}{dz^2} + \frac{d}{dy} \left[ (d + d') \frac{dw}{dz} + (f + f'') \frac{du}{dx} \right] &= Z \\ e \frac{d^2w}{dx^2} + d \frac{d^2w}{dy^2} + c \frac{d^2w}{dz^2} + \frac{d}{dz} \left[ (e + e') \frac{du}{dx} + (d + d'') \frac{dv}{dy} \right] &= Z \quad (1) \end{aligned} \right.$$

qui se réduisent, dans le cas de l'isotropie, aux suivantes :

$$(44) \left\{ \begin{aligned} 1 + \frac{du}{dx} &= \left( 1 + \frac{du_0}{dx} \right) c_{xx1} + \frac{dv_0}{dx} c_{xy1} + \frac{dw_0}{dx} c_{xz1} \\ \frac{dv}{dx} &= \left( 1 + \frac{du_0}{dx} \right) c_{yx1} + \frac{dv_0}{dx} c_{yy1} + \frac{dw_0}{dx} c_{yz1} \\ \frac{dw}{dx} &= \left( 1 + \frac{du_0}{dx} \right) c_{zx1} + \frac{dv_0}{dx} c_{zy1} + \frac{dw_0}{dx} c_{zz1} \\ \frac{du}{dy} &= \dots, \quad 1 + \frac{dv}{dy} = \dots, \quad \frac{dw}{dy} = \dots \\ \frac{du}{dz} &= \dots, \quad \frac{dv}{dz} = \dots, \quad 1 + \frac{dw}{dz} = \dots \end{aligned} \right.$$

Ajoutant membre à membre les trois premières élevées au carré, on a, en vertu des relations connues entre les neuf cosinus,

$$\left( 1 + \frac{du_0}{dx} \right)^2 + \left( \frac{dv_0}{dx} \right)^2 + \left( \frac{dw_0}{dx} \right)^2 = \left( 1 + \frac{du}{dx} \right)^2 + \left( \frac{dv}{dx} \right)^2 + \left( \frac{dw}{dx} \right)^2,$$

équation où l'on peut, en développant, supprimer les carrés de  $\frac{du_0}{dx}$ ,  $\frac{dv_0}{dx}$ ,  $\frac{dw_0}{dx}$

et remplacer  $\frac{du_0}{dx}$  par  $\partial_x$  vu que les translations et les rotations ne changent rien aux dilatations. On a ainsi précisément l'expression (40) en réduisant et divisant par 2.

Et si l'on multiplie chacune à chacune et par ordre les équations (44) provenant de la différentiation de (43) par rapport à  $x$ , et les équations (44) provenant de la différentiation de (43) par rapport à  $y$ , on obtient

$$\left( 1 + \frac{du}{dx} \right) \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} \left( 1 + \frac{dv}{dy} \right) + \frac{dw}{dx} \frac{dw}{dy} = \text{une expression semblable en } u_0, v_0, w_0,$$

équation qui n'est autre chose que (44) en développant, effaçant les produits des dérivées de  $u_0$ ,  $v_0$ ,  $w_0$ , et remplaçant  $\frac{du_0}{dy} + \frac{dv_0}{dx}$  par  $g_{xy}$ , puisque les translations et rotations ne changent non plus rien aux glissements.

(1) S'il y avait, antérieurement aux petits déplacements  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , des pressions  $p^{\circ}_{xx}$ ,  $p^{\circ}_{yy}$ , ...  $p^{\circ}_{xy}$  assez considérables pour influencer (§ 23) sur la production de pressions nouvelles par ces déplacements, il faudrait, dans le cas que nous considérons, où ces déplacements sont très-petits, et où l'on prend les pres-

$$(47) \left\{ \begin{array}{l} e \left( \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d^2 u}{dy^2} + \frac{d^2 u}{dz^2} \right) + (e + e') \frac{d}{dx} \left( \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} \right) = X \\ e \left( \frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{d^2 v}{dy^2} + \frac{d^2 v}{dz^2} \right) + (e + e') \frac{d}{dy} \left( \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} \right) = Y \\ e \left( \frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{d^2 w}{dy^2} + \frac{d^2 w}{dz^2} \right) + (e + e') \frac{d}{dz} \left( \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} \right) = Z \end{array} \right. \quad (1)$$

où  $\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}$ , somme des dilatations *linéaires* en trois sens, représente la *dilatation cubique*, ou la petite proportion de l'augmentation du volume de la matière, en chaque point.

Ces équations peuvent être obtenues directement, sans passer par la considération des pressions, en posant (voir 5<sup>e</sup> appendice, p. 694) les trois conditions d'équilibre de translation d'une molécule  $m$ , ou (avec les désignations de la note du § 23) en égalant à zéro les trois sommes  $mSmR_1 \cos(r_1, x)$ ,  $mSmR_1 \cos(r_1, y)$ ,  $mSmR_1 \cos(r_1, z)$  de composantes des actions qu'exercent sur elle les molécules environnantes  $m$ , et en développant  $R_1$  et les cosinus jusqu'aux

siens après comme avant les déplacements sur trois plans perpendiculaires aux directions *fixes* des coordonnées  $x, y, z$ , se servir, pour  $p_{xx}, \dots, p_{yy}$ , des formules de pression de M. Cauchy, qu'on peut construire avec les éléments donnés à la note du § 23, p. 572 (form. 212 de l'Appendice complémentaire, p. 795).

Lorsqu'il y a trois plans de symétrie, les formules dont nous parlons se réduisent, vu que  $p^o_{yz} = 0, p^o_{zx} = 0, p^o_{xy} = 0$ , à

$$(46) \left\{ \begin{array}{l} p_{xx} = p^o_{xx} \left( 1 + \frac{du}{dx} - \frac{dv}{dy} - \frac{dw}{dz} \right) + a \frac{du}{dx} + r' \frac{dv}{dy} + e' \frac{dw}{dz} \\ p_{yy} = p^o_{yy} \left( 1 - \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} - \frac{dw}{dz} \right) + \dots; \quad p_{zz} = p^o_{zz} (1 - \dots) + \dots \\ p_{yz} = p^o_{yz} \frac{dw}{dy} + p^o_{zz} \frac{dv}{dz} + d \left( \frac{dv}{dx} + \frac{dw}{dy} \right), \\ p_{zx} = \dots, \quad p_{xy} = \dots \end{array} \right.$$

d'où il résulte que les trois équations différentielles indéfinies en  $u, v, w$  sont les équations (45) avec  $p^o_{xx}, p^o_{yy}, p^o_{zz}$  ajoutés respectivement aux coefficients du premier, du second et du troisième terme de chacune de ces équations.

(1) Ou, s'il y a une pression antérieure  $p_0$  d'une grandeur non négligeable devant  $e$ ,

$$(48) \left\{ \begin{array}{l} (e + p_0) \left( \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d^2 u}{dy^2} + \frac{d^2 u}{dz^2} \right) + (e + e') \frac{d}{dx} \left( \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} \right) = X, \\ (e + p_0) \left( \frac{d^2 v}{dx^2} + \dots \right) + \dots = Y, \quad (e + p_0) \left( \frac{d^2 w}{dx^2} + \dots \right) + \dots = Z. \end{array} \right.$$

dérivées du second ordre (inclusivement) des déplacements  $u$ ,  $v$ ,  $w$ .

§ 31. *Usage général des formules et équations de ce 3<sup>e</sup> appendice.* — Lorsque des déplacements sont tels que les composantes des pressions qu'ils engendrent (formules 12 à 87) satisfassent aux trois équations différentielles indéfinies (38)  $\frac{dp_{xx}}{dx} + \dots = X$ , etc., pour tous les points du corps élastique déformé, et aux équations définies telles que (39)  $p_{xx} \cos(n, x) + \dots = \varpi \cos(\varpi, x)$ , etc., pour les points appartenant à sa surface-enveloppe, il y a équilibre de tous les éléments de ce corps élastique, et il sera maintenu dans sa nouvelle forme par les forces  $\varpi$  appliquées sur cette surface extérieure, en y joignant les forces accélératrices  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  (ordinairement nulles ou à supprimer) agissant sur les diverses parties de sa masse.

Si les déplacements  $u$ ,  $v$ ,  $w$  sont partout donnés, de simples différentielles feront donc connaître les forces accélératrices  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  et les pressions extérieures  $\varpi$ , qui sont capables de les produire.

Si, au contraire, comme il arrive le plus souvent, les forces sont ce qui est donné, et les déplacements ou les déformations sont ce qu'on cherche, la solution du problème dépend de l'intégration des équations telles que (45), (47) indéfinies ou relatives à tous les points, avec détermination des constantes ou fonctions arbitraires de manière à satisfaire aux conditions définies ou particulières à certains points, conditions dont les unes sont statiques et exprimées par les équations (39) à la surface, les autres géométriques (§ 28 p. 587) et sans lesquelles les déplacements resteraient indéterminés comme étant affectés additivement de petites translations et rotations générales quelconques.

Cette intégration, effectuée par M. Lamé pour les sphères pleines ou creuses, n'a pu encore être opérée d'une manière directe pour aucun corps prismatique ou cylindrique fini, dans les cas même les plus simples.

Mais on a pu vérifier par les équations ci-dessus, pour ces corps, plusieurs solutions particulières qu'un raisonnement simple faisait pressentir et portait à essayer. Telles ont été depuis longtemps (comme on a dit au § 7, etc.) l'extension longitudinale constante d'un

prisme quelconque tiré uniformément sur ses deux bases, et la torsion, aussi constante, d'un cylindre circulaire sollicité, aux deux bouts, d'une certaine manière que les formules mêmes révèlent (\*).

Et, depuis, nous sommes arrivé à un grand nombre d'autres solutions en suivant une marche en quelque sorte *mixte* ou *semi-inverse*, qui consiste à se donner à la fois une *partie des forces* et une *partie des déplacements* ou de leurs relations mutuelles constituant les déformations; ce qui réduit la part laissée à l'intégration et la ramène à pouvoir s'opérer par les méthodes connues, de manière à déterminer quels sont et les *autres déplacements* et les *autres forces*, en s'assurant, bien entendu, que les données choisies sont compatibles entre elles, ce qui est la part inévitable de l'essai et de la vérification (\*\*).

C'est ainsi, en prenant pour *données sur les déplacements*, une déformation par torsion  $\theta$  avec des dilatations longitudinales nulles ou constantes d'un bout à l'autre pour chaque fibre, ou en posant *à priori*

$$\frac{d^2u}{dx^2} = 0, \quad \frac{dv}{dx} = -\theta z, \quad \frac{dw}{dx} = \theta y,$$

et, pour *données sur les forces*, la nullité des actions longitudinales sur les faces latérales (et, aussi, des forces accélératrices X, Y, Z), que nous avons réduit la première des équations indéfinies (45) à

$$f \frac{d^2u}{dy^2} + e \frac{d^2u}{dz^2} = 0,$$

et la première des trois équations définies statiques (39), posées pour les faces latérales, sur lesquelles on a  $\cos(n,x) = 0$ ,  $\frac{\cos(n,y)}{\cos(n,z)} = \frac{-dz}{dy}$ , à

$$-f \left( \frac{du}{dy} - \theta z \right) dz + e \left( \frac{du}{dz} + \theta y \right) dy = 0,$$

équations qui sont intégrables pour une infinité de contours de la base, et qui ne diffèrent que par les notations de celles de la p. 348,

(\*) Mémoire de MM. Lamé et Clapeyron, de 1828 (Savants étrangers, t. IV), aux cas simples des art. 40 et 54.

(\*\*) Mémoire sur la torsion, aux Sav. étr., t. XIV.—Mémoire sur la flexion, au Journal des mathématiques pures et appliquées, 1836.

démonstrées élémentairement à la note du n° 156. Et on reconnaît que la supposition, en outre, de la nullité des dilatations tant longitudinales que transversales, ou de

$$\frac{du}{dx} = 0, \frac{dv}{dy} = 0, \frac{dw}{dz} = 0, \frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy} = 0,$$

répond à celle de *liberté complète des faces latérales*, et d'actions *seulement tangentielles* sur les bases.

Et c'est d'une manière analogue, en prenant pour données une *déformation par flexion*, avec des pressions transversales nulles sur les faces latérales de toutes les fibres (données dont la suite démontre encore la compatibilité) que nous avons pu ramener aussi les équations différentielles en  $u, v, w$ , à pouvoir s'intégrer pour des bases d'une infinité de formes, ce qui résout suffisamment le problème de la *flexion inégale* ou avec glissements.

Nous ne rapporterons pas ici la suite des calculs qui nous y ont conduit, mais nous *vérifions* analytiquement, au moyen des formules et équations établies dans cet appendice, les résultats, démontrés déjà plus élémentairement à l'appendice précédent (§§ 9 à 13) ainsi qu'aux notes des n° 80, 152, 156. Cette vérification achèvera de justifier les suppositions telles que celles d'actions ou de dilatations transversales nulles, etc., et de convaincre de la vérité des théorèmes résumés au 2° appendice.

§ 32. *Conditions de compatibilité, à remplir pour que six fonctions de coordonnées, x, y, z représentent bien, aux divers points d'un corps, les dilatations et les glissements dans les sens de ces coordonnées.* — Avant de présenter les vérifications particulières, faisons une remarque générale et essentielle : c'est qu'il ne suffit pas que six fonctions des coordonnées  $x, y, z$ , mises à la place de

$$p_{xx}, p_{yy}, p_{zz}, p_{xy}, p_{yz}, p_{zx}$$

satisfassent à trois équations indéfinies (38)  $\frac{dp_{xx}}{dx} + \dots = X, \frac{dp_{xy}}{dy}, \text{ etc.}$ ,

et à trois équations définies (39)  $p_{xx} \cos(n, x) + \dots = \omega \cos(\omega, x)$ , etc. pour fournir une solution, ou pour représenter un système de composantes de pression aux divers points d'un corps élastique. Il faut encore que les valeurs correspondantes en  $x, y, z$ , de



$$\partial_x, \partial_y, \partial_z, g_{xx}, g_{yy}, g_{zz}, g_{xy},$$

tirées des six équations (42)  $p_{xx} = a_{xxxx}\partial_x + a_{xxyy}\partial_y + \dots$ ,  $p_{yy} = \text{etc.}$  ou autres analogues de (29) à (37) en mettant ces fonctions pour  $p_{xx}$ ,  $p_{yy}$ , etc., puissent elles-mêmes représenter, en tous les points, trois dilatations et trois glissements.

Or cela exige, entre les six fonctions,  $\partial_x, \partial_y, \dots, g_{xy}$ , ou, plutôt, entre leurs dérivées du second ordre, certaines relations ou *conditions de compatibilité*, telles qu'elles donnent bien les mêmes valeurs valeurs aux trois inconnues finales qui sont les déplacements  $u, v, w$ , et dont il résulte que trois de ces fonctions étant données, la forme des trois autres s'ensuit, à cela près de fonctions arbitraires disparaissant par les doubles différentiations.

Ces relations ou conditions sont les trois suivantes qui donnent, comme on voit, les dérivées des dilatations au moyen de celles des glissements :

$$(49) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2 \frac{d^2 \partial_x}{dy dz} = \frac{d}{dx} \left( \frac{dg_{xx}}{dy} + \frac{dg_{xy}}{dz} - \frac{dg_{yz}}{dx} \right), \\ 2 \frac{d^2 \partial_y}{dz dx} = \frac{d}{dy} \left( \frac{dg_{xy}}{dz} + \frac{dg_{yz}}{dx} - \frac{dg_{xx}}{dy} \right), \\ 2 \frac{d^2 \partial_z}{dx dy} = \frac{d}{dz} \left( \frac{dg_{yz}}{dx} + \frac{dg_{xz}}{dy} - \frac{dg_{xy}}{dz} \right); \end{array} \right.$$

et les trois suivantes, qui donnent réciproquement les dérivées des glissements au moyen de celles des dilatations; elles ne font pas tout à fait double emploi aux trois précédentes (49), car celles-ci ne donnent, en les combinant ensemble, que les différentielles de (50) par rapport à  $x$ , à  $y$ , à  $z$  respectivement :

$$(50) \quad \frac{d^2 g_{yz}}{dy dz} = \frac{d^2 \partial_y}{dz^2} + \frac{d^2 \partial_z}{dy^2}, \quad \frac{d^2 g_{zx}}{dz dx} = \frac{d^2 \partial_z}{dx^2} + \frac{d^2 \partial_x}{dz^2}, \quad \frac{d^2 g_{xy}}{dx dy} = \frac{d^2 \partial_x}{dy^2} + \frac{d^2 \partial_y}{dx^2}.$$

Les six relations que nous venons d'écrire se vérifient d'elles-mêmes quand on suppose très-petits les déplacements  $u, v, w$ , ou quand on a (form. 42)  $\frac{du}{dx} = \partial_x, \frac{du}{dy} = \partial_y, \frac{du}{dz} = \dots, \frac{dv}{dx} + \frac{dw}{dy} = g_{xy}$ , etc.

Et il est facile de voir, au moyen des formules de la deuxième note du § 29 (p. 593), qu'elles ont également lieu quand les déplacements

ont des grandeurs quelconques, mais telles que  $\partial_x, \partial_y, \dots g_{xy}$  restent très-petites (1);

Elles suffisent, car celles (50) s'obtiennent en tirant  $u = \int \partial_x dx$ ,  $v = \int \partial_y dy$ ,  $w = \int \partial_z dz$  des trois premières équations  $\frac{du}{dx} = \partial_x$ , etc., et substituant dans les trois dernières  $\frac{dv}{dx} + \frac{dw}{dy} = g_{yz}$ , etc., puis faisant disparaître par des différentiations les intégrales substituées. Celles (49) s'obtiennent en tirant de même, par élimination,  $u, v, w$  des trois dernières pour substituer dans les premières. Et si l'on tire les inconnues d'une ou deux des premières et de deux ou une des dernières on n'obtient que les mêmes relations, ou d'autres telles que  $\frac{d}{dz} \left( \frac{d^2 \partial_y}{dx^2} - \frac{d^2 \partial_x}{dy^2} \right) = \frac{d^2}{dx dy} \left( \frac{dg_{yz}}{dx} - \frac{dg_{xz}}{dy} \right)$  qui rentrent dans (49).

Ces six relations (49), (50) montrent bien que si l'on se donne ou  $\partial_x, \partial_y, \partial_z$  ou  $g_{yz}, g_{xz}, g_{xy}$ , les trois fonctions non données s'en déduisent, toutefois d'une manière qui n'est pas complètement déterminée, car, à leurs valeurs, se trouvent ajoutées respectivement trois sommes de fonctions arbitraires de la forme

$$\varphi(x, y) + \psi(z, x), \quad \varphi_1(y, z) + \psi_1(x, y), \quad \varphi_2(z, x) + \psi_2(y, z),$$

qui disparaissent, comme nous avons dit, en différentiant deux fois pour substituer dans (49); (50).

(1) En effet, si l'on ajoute les trois premières équations (44) de cette note du § 29, multipliées respectivement par  $C_{zx1}, C_{yz1}, C_{xz1}$ , on obtient en remplaçant  $\frac{du}{dx}$  par  $\partial_x$ , la première des six équations suivantes; et si l'on ajoute les six dernières (44) multipliées respectivement par  $C_{xz1}, C_{yz1}, C_{zx1}, C_{xy1}, C_{yx1}, C_{zy1}$ , en remplaçant  $\frac{dv}{dx} + \frac{dw}{dy}$  par  $g_{yz}$ , on a la quatrième des suivantes; et les autres, simplement indiquées, s'obtiennent de même :

$$\begin{aligned} 1 + \partial_x &= \left(1 + \frac{dw}{dx}\right) C_{zx1} + \frac{dv}{dx} C_{yz1} + \frac{dw}{dx} C_{xz1}, \\ 1 + \partial_y &= \dots \quad 1 + \partial_z = \dots \\ g_{yz} &= \frac{du}{dy} C_{xz1} + \frac{dw}{dz} C_{zy1} + \left(1 + \frac{dv}{dy}\right) C_{yz1} + \frac{dv}{dz} C_{yx1} + \frac{dw}{dy} C_{zx1} + \left(1 + \frac{dw}{dz}\right) C_{zy1}, \\ g_{xz} &= \dots \dots \quad g_{xy} = \dots \dots \end{aligned}$$

Or, en substituant les valeurs qu'elles donnent pour  $\partial_x, \partial_y, \dots g_{xy}$  dans les équations (49) et (50) on trouve que celles-ci sont satisfaites identiquement, bien que  $u, v, w$  puissent avoir des grandeurs considérables.

§ 33. *Vérfications et généralisations diverses au moyen des mêmes formules et équations. Et, d'abord, contraction du volume d'un corps homogène de forme et de contexture quelconques sous une pression extérieure normale et constante.*—Commençons par le cas simple où un pareil corps n'éprouve qu'une pression constante

$$-q$$

agissant normalement, comme celle d'un fluide en repos, sur sa surface-enveloppe, à l'unité de laquelle elle est rapportée.

Il faut, dans les équations définies (39)  $p_{xx} \cos(n,x) + p_{xy} \dots = \varpi \cos(\varpi, x)$ , etc., faire  $\varpi = -q$ , et, vu la normalité de cette force, faire  $\cos(\varpi, x) = \cos(n, x)$ ,  $\cos(\varpi, y) = \cos(n, y)$ ,  $\cos(\varpi, z) = \cos(n, z)$ . Elles seront satisfaites par

$$(51) \quad p_{xx} = p_{yy} = p_{zz} = -q, \quad p_{yz} = 0, \quad p_{zx} = 0, \quad p_{xy} = 0.$$

Et l'on aura ces mêmes valeurs (51) pour les composantes de pression en tous les points du solide. En effet :

1° Elles satisfont évidemment aussi aux équations indéfinies avec seconds membres nuls (38)  $\frac{dp_{xx}}{dx} + \frac{dp_{xy}}{dy} + \frac{dp_{xz}}{dz} = 0$ , etc.

2° En mettant  $-q$  et zéro à la place des six premiers membres des équations (12)  $p_{xx} = \alpha_{xxxx} \delta_x + \dots$ ,  $p_{yy} = \alpha_{yyyy} \delta_y + \dots$  du cas le plus général de contexture homogène, ces équations du premier degré, résolues par rapport aux  $\delta$  et aux  $g$ , donnent des expressions de la forme suivante, où  $A, A', A'', B, B', B''$  expriment six quantités constantes, fonctions des trente-six coefficients  $\alpha$  de (12)

$$(52) \quad \delta_x = -\frac{q}{A}, \quad \delta_y = -\frac{q}{A'}, \quad \delta_z = -\frac{q}{A''}, \quad g_{yz} = \frac{q}{B}, \quad g_{zx} = \frac{q}{B'}, \quad g_{xy} = \frac{q}{B''}$$

qui satisfont bien aux conditions de *compatibilité* (49) et (50) du § précédent, puisque toutes leurs dérivées sont nulles.

On voit qu'un corps homogène, ainsi sollicité, se *comprime ou se déforme partout de la même manière*.

On le reconnaît aussi en cherchant les déplacements  $u, v, w$  supposés très-petits. Ils s'obtiennent en égalant chacun d'eux à une fonction du premier degré en  $x, y, z$ , à quatre coefficients indéterminés, et substituant dans (52)  $\frac{du}{dx} = -\frac{q}{A}, \dots, \frac{dv}{dx} + \frac{dw}{dy} = \frac{q}{B}, \dots$ . Cette substitution détermine six coefficients, et il est facile

de voir que, sur les six autres, trois représentent de petites translations dans les sens des axes coordonnés  $x, y, z$ , et, les trois derniers, des rotations aussi très-petites autour des mêmes axes. Ils restent arbitraires comme constantes de l'intégration, à moins qu'on n'impose des conditions définies géométriques (§ 28, p. 587), par exemple l'immobilité : 1° d'un point, ce qui annule les trois translations ; 2° d'un petit plan matériel passant par ce point, et 3° d'une petite droite comprise dans ce plan, ce qui annule les petites rotations.

Pareille indétermination se rencontre d'abord nécessairement dans la recherche des déplacements  $u, v, w$  pour tous les problèmes sur les corps élastiques, puisque les translations et les rotations générales ne changent pas les distances mutuelles dont dépendent les actions entre molécules. Nous la ferons disparaître dans ce qui suivra, comme nous venons de le dire, savoir en rendant fixe, ordinairement, l'origine des coordonnées, un élément superficiel d'un des plans coordonnés, et un élément linéaire d'un des deux axes coordonnés qui y sont tracés.

Si la matière a trois plans de symétrie perpendiculaires aux  $x, y, z$ , les formules de pression (30) substitués à (12) montrent que les trois glissements  $g_{yz}, g_{zx}, g_{xy}$  sont partout nuls.

Et s'il y a isotropie, les formules de pression (35) donnent

$$(53) \quad \partial_x = \partial_y = \partial_z = \frac{-q}{2e + 3e'};$$

d'où, en appelant  $c$  la contraction cubique, c'est-à-dire la diminution proportionnelle du volume :

$$(54) \quad c = -\partial_x - \partial_y - \partial_z = \frac{3q}{2e + 3e'}; \text{ ou } c = \frac{3}{5} \frac{q}{e} \text{ si l'on admet } e = e'.$$

§ 34. *Suite des vérifications et généralisations. Extension longitudinale et contraction latérale uniforme d'un corps prismatique homogène de contexture quelconque en divers sens. Emploi du principe de simultanéité ou de superposition.*— Soit un corps prismatique homogène, de contexture parallèle quelconque (§ 22), qui est sollicité, seulement sur ses bases, par une pression ou traction normale constante

$p$

par unité superficielle.

$$\frac{dv}{dx}$$

Celui que le même angle aurait éprouvé si  $MB_y$  seul eût changé de direction est, par la même raison,  $\frac{du}{dy}$ , évalué aussi en arc d'un rayon = 1. Le rétrécissement total, dû aux petits changements de direction des deux côtés, est leur somme; donc :

$$\varepsilon_{xy} = \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}$$

et ainsi de même des valeurs des deux autres dilatations et des deux autres glissements (42) (1).

§ 30. *Équations différentielles contenant les déplacements supposés très-petits.* — En mettant les valeurs (42) des dilatations et glissements dans formules (30) des pressions  $p_{xx} \dots p_{yy}$  du cas de trois plans de symétrie de contexture, et substituant ensuite dans les équations d'équilibre indéfinies  $\frac{dp_{xx}}{dx} + \dots = X$ , etc., on a ces trois équations aux différences partielles linéaires du second ordre :

(1) On arrive d'une autre manière aux expressions plus générales (40), (44), et on établit en même temps quelques formules qui nous serviront plus loin, en considérant que les déplacements de grandeur quelconque  $u, v, w$ , pour ne produire que de très-petites déformations dans chaque petite portion du corps, doivent se composer de déplacements très-petits, que nous appellerons  $u_0, v_0, w_0$ , suivis de translations et de rotations sans déformations. Supposons que, pour une des petites portions du corps, la rotation, autour de l'origine des coordonnées, ait donné des directions  $x_1, y_1, z_1$  aux lignes matérielles primitivement dirigées suivant les axes des  $x, y, z$ , et qu'ensuite leur point de concours ait éprouvé, parallèlement à ces axes fixes, des translations  $a, b, c$ ; on aura pour les coordonnées finales du point  $(x, y, z)$ , en désignant par  $c_{xy_1}, c_{xz_1}$ , etc., des cosinus comme à la note du § 23,

$$(43) \begin{cases} x + u = (x + u_0)c_{xx_1} + (y + v_0)c_{xy_1} + (z + w_0)c_{xz_1} + a, \\ y + v = (x + u_0)c_{yx_1} + (y + v_0)c_{yy_1} + (z + w_0)c_{yz_1} + b, \\ z + w = (x + u_0)c_{zx_1} + (y + v_0)c_{zy_1} + (z + w_0)c_{zz_1} + c; \end{cases}$$

car ces seconds membres sans leurs derniers termes  $a, b, c$  représentent, après les déplacements  $u_0, v_0, w_0$  et les rotations, les projections, sur les directions fixes  $x, y, z$ , de la ligne brisée  $(x + u_0) + (y + v_0) + (z + w_0)$ , dont les trois parties sont devenues parallèles à  $x_1, y_1, z_1$ . En les différenciant par rapport à  $x$ , on a les trois premières équations suivantes, dont les six autres, simplement indiquées, s'obtiennent en différenciant par rapport à  $y$  et par rapport à  $z$  :

$$(45) \begin{cases} a \frac{d^2u}{dx^2} + f \frac{d^2u}{dy^2} + e \frac{d^2u}{dz^2} + \frac{d}{dx} \left[ (f + f') \frac{dv}{dy} + (e + e'') \frac{dw}{dz} \right] = X \\ f \frac{d^2v}{dx^2} + b \frac{d^2v}{dy^2} + d \frac{d^2v}{dz^2} + \frac{d}{dy} \left[ (d + d') \frac{dw}{dz} + (f + f') \frac{du}{dx} \right] = Z \\ e \frac{d^2w}{dx^2} + d \frac{d^2w}{dy^2} + c \frac{d^2w}{dz^2} + \frac{d}{dz} \left[ (e + e'') \frac{du}{dx} + (d + d') \frac{dv}{dy} \right] = Z \quad (1) \end{cases}$$

qui se réduit, dans le cas de l'isotropie, aux suivantes :

$$(44) \left\{ \begin{aligned} 1 + \frac{du}{dx} &= \left( 1 + \frac{du_0}{dx} \right) c_{xx1} + \frac{dv_0}{dx} c_{xy1} + \frac{dw_0}{dx} c_{xz1} \\ \frac{dv}{dx} &= \left( 1 + \frac{du_0}{dx} \right) c_{yx1} + \frac{dv_0}{dx} c_{yy1} + \frac{dw_0}{dx} c_{yz1} \\ \frac{dw}{dx} &= \left( 1 + \frac{du_0}{dx} \right) c_{zx1} + \frac{dv_0}{dx} c_{zy1} + \frac{dw_0}{dx} c_{zz1} \\ \frac{du}{dy} &= \dots, \quad 1 + \frac{dv}{dy} = \dots, \quad \frac{dw}{dy} = \dots \\ \frac{du}{dz} &= \dots, \quad \frac{dv}{dz} = \dots, \quad 1 + \frac{dw}{dz} = \dots \end{aligned} \right.$$

Ajoutant membre à membre les trois premières élevées au carré, on a, en vertu des relations connues entre les neuf cosinus,

$$\left( 1 + \frac{du_0}{dx} \right)^2 + \left( \frac{dv_0}{dx} \right)^2 + \left( \frac{dw_0}{dx} \right)^2 = \left( 1 + \frac{du}{dx} \right)^2 + \left( \frac{dv}{dx} \right)^2 + \left( \frac{dw}{dx} \right)^2,$$

équation où l'on peut, en développant, supprimer les carrés de  $\frac{du_0}{dx}$ ,  $\frac{dv_0}{dx}$ ,  $\frac{dw_0}{dx}$

et remplacer  $\frac{du_0}{dx}$  par  $\partial_x$  vu que les translations et les rotations ne changent rien aux dilatations. On a ainsi précisément l'expression (40) en réduisant et divisant par 2.

Et si l'on multiplie chacune à chacune et par ordre les équations (44) provenant de la différentiation de (43) par rapport à  $x$ , et les équations (44) provenant de la différentiation de (43) par rapport à  $y$ , on obtient

$$\left( 1 + \frac{du}{dx} \right) \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} \left( 1 + \frac{dv}{dy} \right) + \frac{dw}{dx} \frac{dw}{dy} = \text{une expression semblable en } u_0, v_0, w_0,$$

équation qui n'est autre chose que (44) en développant, effaçant les produits des dérivées de  $u_0$ ,  $v_0$ ,  $w_0$ , et remplaçant  $\frac{du_0}{dy} + \frac{dv_0}{dx}$  par  $\xi_{xy}$ , puisque les translations et rotations ne changent non plus rien aux glissements.

(1) S'il y avait, antérieurement aux petits déplacements  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , des pressions  $p^x_x, p^y_y, \dots, p^x_y$  assez considérables pour influer (§ 23) sur la production de pressions nouvelles par ces déplacements, il faudrait, dans le cas que nous considérons, où ces déplacements sont très-petits, et où l'on prend les pres-

*elliptiques de contexture quelconque.* — Considérons d'abord un prisme de contexture homogène absolument quelconque dans les divers sens autour de chaque point. On suppose qu'il n'est sollicité extérieurement que sur ses bases, et seulement par des forces tangentielles  $p_{xz}$ ,  $p_{xy}$ , les mêmes sur toutes deux aux points *correspondants* ou ayant mêmes coordonnées transversales.

Voyons à quelles conditions ses diverses sections seront, s'il est possible, sollicitées par les mêmes forces que ses bases, et ses diverses fibres n'éprouveront latéralement aucune action dans un sens perpendiculaire à leur longueur, c'est-à-dire à quelles conditions on pourra avoir partout

$$(61) \quad p_{xz} = 0, \quad p_{xy} = 0, \quad p_{zx} = 0, \quad p_{yz} = 0, \quad \frac{dp_{xz}}{dx} = 0, \quad \frac{dp_{xy}}{dx} = 0.$$

En substituant ces valeurs des composantes de pression ou de leurs dérivées dans les trois équations différentielles indéfinies (38)

$\frac{dp_{xz}}{dx} + \dots = 0$ , on reconnaît qu'elles y satisfont à condition qu'outre (61) on ait partout

$$(62) \quad \frac{dp_{xy}}{dy} + \frac{dp_{xz}}{dz} = 0;$$

car c'est à quoi  $p_{xz} = 0$  réduit la première de ces équations dont les deux autres se vérifient indistinctement.

Et elles satisfont aux trois équations définies (39)  $p_{xz} \cos(n, x) + \dots = \omega \cos(\omega, x)$ , etc., à condition qu'on ait, aux points du contour des sections,  $\frac{dz}{dy}$  étant tiré de l'équation de ce contour, la relation

$$(63) \quad p_{xz} dy - p_{xy} dz = 0;$$

car. pour les bases, où (57)  $\cos nx = 1$ ,  $\cos ny = 0$ ,  $\cos nz = 0$ , et  $\omega \cos \omega x = 0$ ,  $\omega \cos \omega y = p_{xy}$ ,  $\omega \cos \omega z = p_{xz}$ , ces équations (39) se réduisent à  $0 = 0$ ,  $p_{xy} = p_{xy}$ ,  $p_{xz} = p_{xz}$ ; et, pour les faces latérales du prisme, où  $\omega = 0$ ,  $\cos nx = 0$ ,  $\frac{\cos ny}{\cos nz} = \frac{-dz}{dy}$ , la première se réduit à (63) et les deux autres à  $0 = 0$ .

Nous avons remarqué au § 32 que cela ne suffit pas encore pour que  $p_{xz} \dots p_{xy}$ , ainsi déterminés, représentent des composantes de pression. Il faut aussi qu'en les mettant à la place des premiers membres des équations (42)  $p_{xz} = \dots p_{xz} \dots + \dots$ ,  $p_{xy} = \dots p_{xy} \dots + \dots$ , etc.,

relatives à la contecture du prisme, les  $\partial_x, \partial_y \dots g_{xy}$  qu'on en tire satisfassent aux conditions de compatibilité (49), (50), p. 598, nécessaires pour qu'ils expriment bien des dilatations et des glissements aux points successifs d'un même corps. Or les quatre premières de ces six équations (12), savoir  $p_{xx} = \dots, p_{yy} = \dots, p_{zz} = \dots, p_{yz} = \dots$ , en mettant zéro pour leurs premiers membres conformément à (61), donnent

$$(64) \quad \left\{ \begin{array}{l} \partial_x = \eta_1 g_{xy} + \eta_2 g_{xz}, \quad \partial_y = \eta'_1 g_{xy} + \eta'_2 g_{xz}, \quad \partial_z = \eta''_1 g_{xy} + \eta''_2 g_{xz}, \\ \eta_1, \eta_2, \text{ etc.}, \text{ étant huit nombres fonctions des rapports mutuels des coefficients } \mathfrak{A}. \end{array} \right.$$

Substituant dans les deux dernières (12)  $p_{xx} = \dots, p_{yy} = \dots$ , elles deviendront

$$(65) \quad \left\{ \begin{array}{l} p_{xx} = G'' g_{xx} + H'' g_{xy}, \quad p_{yy} = H'' g_{xx} + G' g_{xy} \\ G', G'', H'', H'' \text{ étant des constantes ou des coefficients d'élasticité de glissement, fonctions des } \mathfrak{A}. \end{array} \right.$$

En les différentiant par rapport à  $x$ , leurs premiers membres s'anulent d'après (61), et elles donnent

$$(66) \quad \frac{dg_{xx}}{dx} = 0, \quad \frac{dg_{xy}}{dx} = 0, \quad \text{d'où} \quad \frac{d\partial_x}{dx} = 0, \quad \frac{d\partial_y}{dx} = 0, \quad \frac{d\partial_z}{dx} = 0, \quad \frac{dg_{yz}}{dx} = 0.$$

En conséquence les conditions de compatibilité (50), (49) se réduisent à :

$$(67) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 g_{yz}}{dy dz} = \frac{d^2 \partial_y}{dz^2} + \frac{d^2 \partial_z}{dy^2}, \quad \frac{d^2 \partial_x}{dy^2} = 0, \quad \frac{d^2 \partial_x}{dz^2} = 0, \quad \frac{d^2 \partial_x}{dy dz} = 0, \\ 0 = -\frac{d}{dy} \left( \frac{dg_{xx}}{dy} - \frac{dg_{xy}}{dz} \right), \quad 0 = \frac{d}{dz} \left( \frac{dg_{xx}}{dy} - \frac{dg_{xy}}{dz} \right). \end{array} \right.$$

Les deux dernières montrent, eu égard à ce que, d'après (66), la dérivée par rapport à  $x$  de la différence entre parenthèses est nulle aussi, qu'on doit avoir, en tous les points

$$(68) \quad \frac{dg_{xx}}{dy} - \frac{dg_{xy}}{dz} = 2\theta, \quad 2\theta \text{ représentant une constante.}$$

Quant aux trois premières (67), si l'on met pour  $\partial_x, \partial_y, \partial_z, g_{yz}$  leurs expressions (64) en  $g_{xx}, g_{xy}$ , on voit qu'elles seront satisfaites de deux manières :

1° Si le solide a partout un plan de symétrie de contecture perpendiculaire aux  $x$ ; car, alors, les formules générales (12)  $p_{xx} = \dots$ , etc., se réduisent à la forme (29) qui est telle que les quatre premières, exprimant  $p_{xx}, p_{yy}, p_{zz}, p_{yz}$ , ne contiennent que



les dilatations  $\lambda$  et le glissement  $g_{yz}$  sans  $g_{zx}$  ni  $g_{xy}$ ; en sorte que tous les  $\gamma$  sont nuls et que (64) deviennent

$$(69) \quad \lambda_x = 0, \quad \lambda_y = 0, \quad \lambda_z = 0, \quad g_{yz} = 0.$$

Alors (68) suffit comme condition de compatibilité; et les expressions (65) de  $p_{xz}$ ,  $p_{xy}$  se trouvent remplacées par les deux dernières formules (29) de composantes de pression

$$(70) \quad p_{xz} = e g_{xz} + h'' g_{xy}, \quad p_{xy} = h'' g_{xz} + f g_{xy}$$

2° Si, la contexture étant quelconque,  $g_{xz}$ ,  $g_{xy}$  ne sont que des fonctions linéaires de  $y$ ,  $z$ . Cela exige que le contour des sections soit de forme elliptique; car en substituant des expressions telles que  $g_{xz} = C + C'y + C''z$ ,  $g_{xy} = C_1 + C'_1y + C''_1z$  dans (65)  $p_{xz} = C''g_{xz} + \dots$ ,  $p_{xy} = \text{etc.}$ , et celles-ci dans l'équation définie (63)  $p_{xz}dy - p_{xy}dz = 0$  relative aux points du contour, on a une équation différentielle du premier ordre qui s'intègre d'elle-même puisque son premier membre est une différentielle exacte en  $y$ ,  $z$  en vertu de l'équation indéfinie (62) qui est la même chose que  $\frac{dp_{xz}}{dz} = \frac{d(-p_{xy})}{dy}$ ; mais l'intégrale, représentant l'équation de ce contour, n'est que du second degré, et le contour ne peut être qu'une ellipse.

D'où cette double conclusion :

1° Toutes les fois qu'un prisme dont la matière offre partout des plans de symétrie perpendiculaires à ses arêtes ou aux  $x$  n'éprouve sur ses faces latérales aucune action et supporte, sur ses bases, dans l'état d'équilibre, des actions tangentielles  $p_{xy}$ ,  $p_{xz}$  satisfaisant, en tous les points de ces bases, à (62)  $\frac{dp_{xy}}{dy} + \frac{dp_{xz}}{dz} = 0$ , et, sur leur contour, à (63)  $p_{xz}dy - p_{xy}dz = 0$ , et qu'il y a, aussi en tous les points des bases, une relation (66)  $\frac{dg_{xz}}{dy} - \frac{dg_{xy}}{dz} = \text{constante } 2\theta$  entre les dérivées des glissements répondant aux actions tangentielles, ou tirés de (29) ou (70)  $p_{xz} = e g_{xz} + h'' g_{xy}$ ,  $p_{xy} = h'' g_{xz} + f g_{xy}$ , ce prisme éprouve d'un bout à l'autre la même déformation résultant des glissements  $g_{xy}$ ,  $g_{xz}$  ainsi déterminés, constants sur chaque parallèle aux arêtes, sans aucune dilatation ou contraction dans le

*sens longitudinal ni dans les sens transversaux*; ce qui est une généralisation du théorème II donné au § 11, 2<sup>e</sup> appendice, p. 531.

2<sup>o</sup> Il en est de même avec une contexture *homogène parallèle* (§ 21) *absolument quelconque* ou sans plan de symétrie si les bases sont *elliptiques*, ce qui entraîne la linéarité en  $y, z$ , de  $p_{xx}, p_{xy}$  satisfaisant à (62) et (63).

On reconnaît facilement, dans le cas de contours quelconques et de plans de symétrie perpendiculaires aux arêtes, que la déformation est une torsion uniforme  $\theta$  avec un petit cheminement longitudinal  $u$  des lignes matérielles primitivement droites et parallèles aux arêtes, et l'on prouve la relation (68) sans invoquer les conditions générales de comptabilité du § 32, en supposant *très-petits* les déplacements  $u, v, w$ , (qui peuvent en effet y être toujours amenés pour chaque portion courte du prisme si l'on rend fixe un de ses points et deux de ses éléments (§ 33) de manière à abstraire les translations générales d'une certaine grandeur); car alors (69) et les deux premières (66) sont la même chose que

$$(71) \quad \frac{du}{dx} = 0, \quad \frac{dv}{dy} = 0, \quad \frac{dw}{dz} = 0, \quad \frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy} = 0, \quad \frac{d}{dx} \left( \frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz} \right) = 0, \quad \frac{d}{dx} \left( \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} \right) = 0,$$

$$\text{d'où} \quad \frac{d^2 w}{dx^2} = 0, \quad \frac{d^2 v}{dx^2} = 0, \quad \text{d'où} \quad \frac{dw}{dx} = f(y, z), \quad \frac{dv}{dx} = F(y, z),$$

$$\text{d'où} \quad \frac{df(y, z)}{dz} = \frac{d}{dx} \frac{dw}{dz} = 0, \quad \frac{dF(y, z)}{dy} = \frac{d}{dx} \frac{dv}{dy} = 0,$$

prouvant que  $f$  est fonction de  $y$  seul,  $F$  de  $z$  seul. Mais  $0 = \frac{d}{dx} \left( \frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy} \right) = \frac{dF(z)}{dz} + \frac{df(y)}{dy}$  prouve que  $\frac{df}{dy}$  et  $-\frac{dF}{dz}$  ne peuvent être que deux constantes égales. En les désignant par  $\theta$  on a ainsi

$$(72) \quad \frac{dw}{dx} = 0y, \quad \frac{dv}{dx} = -\theta z, \quad g_{xx} = \frac{du}{dz} + 0y, \quad g_{xy} = \frac{du}{dy} - \theta z,$$

qui vérifient la relation (68) et qui montrent que les glissements  $g_{xx}, g_{xy}$  produisent (§ 5 de la note du n<sup>o</sup> 156, au 2<sup>e</sup> Appendice § 11) une torsion uniforme  $\theta$  d'un bout à l'autre du prisme ou cylindre.

On a ainsi pour l'équation différentielle indéfinie (62)  $\frac{dp_{xy}}{dy} + \frac{dp_{xy}}{dz} = 0$

$$(73) \quad f \frac{d^2 u}{dy^2} + (h'' + h''') \frac{d^2 u}{dy dz} + e \frac{d^2 u}{dz^2} = (h'' - h''') \theta.$$

En prenant arbitrairement pour  $u$  l'une quelconque des intégrales, en nombre infini, de cette équation, par exemple, une des intégrales en termes entiers  $u = \theta(c_0 + c_1y + c_1'z + c_2y^2 + 2c_2'yz + c_2''z^2 + c_3y^3 + 3c_3'yz + \dots)$ , où l'on restreindra le nombre des coefficients indéterminés  $c$  en substituant dans (73) et égalant à zéro les sommes de ceux qui affectent les mêmes puissances ou produits des puissances de  $y, z$ , puis en mettant cette expression de  $u$  en  $y, z$  dans l'équation définie (63)  $p_{xz}dy - p_{xy}dz = 0$ , ou

$$(74) \left[ e \left( \frac{du}{dz} + \theta y \right) + h'' \left( \frac{du}{dy} - \theta z \right) \right] dy - \left[ f \left( \frac{du}{dy} - \theta z \right) + h''' \left( \frac{du}{dz} + \theta y \right) \right] dz = 0,$$

on aura l'équation différentielle première des contours de bases pour lesquels le déplacement longitudinal  $u$  prend cette valeur lorsqu'on imprime au prisme une torsion  $\theta$ . Cette équation différentielle (74) ou (63) s'intégrera toujours d'elle-même, vû, comme nous avons dit, (62)  $\frac{dp_{xz}}{dz} = \frac{d(-p_{xy})}{dy}$ , et donnera, aussi en termes entiers, l'équation générale des contours répondant à l'expression  $u = \theta(c_0 + c_1y + c_1'z + c_2y^2 + \dots)$  du déplacement longitudinal <sup>(1)</sup>, et analogue à celles du § 10 et du § 39 de la note du n° 156, p. 256, 349 (avec  $u$  et  $v$  au lieu de  $y$  et  $z$ ), en sorte qu'on pourra résoudre, pour une contexture à un seul plan de symétrie, les diverses questions de torsion que nous avons résolues dans cette note pour une contexture à un axe ou bien à trois plans de symétrie.

On arrive, au reste, au même but, comme nous avons dit au scolie III, § 12, 2° Appendice, sans faire entrer en considération le déplacement  $u$ , en égalant directement les glissements  $g_{xy}, g_{xz}$  à des séries entières en  $y, z$ , et en astreignant leurs dérivées premières aux conditions exprimées par (62) et (68). Leur substitution

<sup>(1)</sup> On simplifie le calcul en faisant  $y = y' \sqrt{f}$ ,  $z = z' \sqrt{e}$ ,  $h'' + h''' = 2h \sqrt{ef}$ . Il n'est pas besoin de dire qu'on fait disparaître le second membre de l'équation différentielle (73) (si on ne le regarde pas comme toujours nul) en prenant  $u =$  une autre inconnue  $u'$  plus un terme  $\frac{h'' - h'''}{2f} \theta y^2$  ou  $\frac{h'' - h'''}{h'' + h'''} \theta yz$  ou  $\frac{h'' - h'''}{2e} \theta z^2$ ; transformation qu'on opérerait si par exemple on voulait se servir d'intégrales de forme transcendante.

dans l'équation définie (74) et l'intégration facile de celle-ci donneraient les équations des contours.

Dans le cas (2°) plus général quant à la contexture, mais plus particulier quant au contour (contour elliptique), où il n'y a toujours que des composantes de pression  $p_{xx}$ ,  $p_{xy}$ , ces forces tangentielles appliquées sur les bases produisent, outre la torsion  $\theta$ , des dilatations longitudinales ayant une expression comme  $\partial_x = C_1 + C'_1 y + C''_1 z$  dont l'effet est une flexion uniforme (voy. § suivant) et des déformations transversales  $\partial_y$ ,  $\partial_z$ ,  $g_{yz}$ , aussi fonctions linéaires de  $y$ ,  $z$ , et dans un rapport tel avec  $\partial_x$  qu'on ait partout  $p_{yy}$ ,  $p_{zz}$ ,  $p_{yz}$  nuls ainsi que  $p_{xx}$ .

Pour déterminer  $\theta$ , et par suite les  $\partial$  et  $g$ , au moyen du moment  $M_1$  qui fait tordre, on n'a qu'à opérer l'élimination de  $\partial_x$ ,  $\partial_y$ ,  $\partial_z$ ,  $g_{yz}$ , dont on a parlé ci-dessus, entre les six formules de composantes de pression en faisant  $p_{xx} = 0$ ,  $p_{yy} = 0$ ,  $p_{zz} = 0$ ,  $p_{yz} = 0$ , ou qu'à calculer les quatre coefficients des expressions (65)

$$(75) \quad p_{xy} = G'g_{xy} + H''g_{xz}, \quad p_{xz} = H''g_{xy} + G''g_{xz},$$

et qu'à y faire

$$(76) \quad g_{xy} = 2\theta(Ay - Bz), \quad g_{xz} = 2\theta(A'y - B'z),$$

$A$ ,  $B$ ,  $A'$ ,  $B'$  étant quatre indéterminées entre lesquelles la substitution dans (62)  $\frac{dp_{xy}}{dy} + \frac{dp_{xz}}{dx} = 0$ , et (68)  $\frac{dg_{xz}}{dy} - \frac{dg_{xy}}{dx} = 2\theta$  donne déjà ces deux équations

$$(77) \quad G'A + H''A' = H''B + G''B', \quad A' + B = 1;$$

puis, pour en avoir deux autres, à assimiler, avec l'équation du contour elliptique donné, l'équation qui résulte de la substitution de (75), (76) dans  $p_{xz}dy - p_{xy}dz = 0$  et de l'intégration, équation qui est

$$(H''A + G''A')y^2 - 2(G'A + H''A')yz + (G'B + H''B')z^2 = \text{constante}.$$

L'équation d'une ellipse dont le centre est à l'origine des coordonnées et dont les axes de figure  $b$  et  $c$  font un angle  $\alpha$  avec les axes des  $y$  et des  $z$ , est

$$\left(2 \frac{y \cos \alpha + z \sin \alpha}{b}\right)^2 + \left(2 \frac{z \cos \alpha - y \sin \alpha}{c}\right)^2 = 1.$$

Si l'on appelle  $I, I'$  ses moments d'inertie principaux  $\frac{\pi b^3 c^3}{64}, \frac{\pi b^3 c}{64}$   
 et si l'on fait (note du n° 83)

$$(73) \int z^2 d\omega = I \cos^2 \alpha + I' \sin^2 \alpha = I_1, \int y^2 d\omega = I \sin^2 \alpha + I' \cos^2 \alpha = I'_1, \int yz d\omega = (I' - I) \sin \alpha \cos \alpha = K,$$

on peut l'écrire

$$(79) \quad I_1 y^2 - 2Kyz + I'_1 z^2 = \frac{\pi b^3 c^3}{256}.$$

L'assimilation fournira donc

$$\frac{I_1}{H''A + G''A'} = \frac{I'_1}{G'B + H''B'} = \frac{K}{G'A + H''A'},$$

d'où, avec (77), des valeurs de  $A, B, A', B'$  qui mises dans (76) donnent

$$(80) \quad g_{xy} = 20 \frac{(G''K - H''I_1)y - (G''I'_1 - H''K)z}{G'I_1 + G''I'_1 - (H'' + H''')K}, \quad g_{zz} = 20 \frac{(G'I_1 - H''K)y - (G'K - H''I'_1)z}{G'I_1 + G''I'_1 - (H'' + H''')K}.$$

Substituant dans (75)  $p_{xy} = \dots, p_{zz} = \dots$ , et celles-ci dans l'expression du moment de torsion

$$M_1 = \int d\omega (p_{xy}y - p_{zz}z),$$

on obtient :

$$(81) \quad M_1 = 4\theta \frac{(G'G'' - H''H''')(I_1 I'_1 - K^2)}{G'I_1 + G''I'_1 - (H'' + H''')K};$$

formule où l'on peut remplacer  $I_1, I'_1, K$  par les valeurs (78), ce qui donne

$$(82) \quad M_1 = \frac{4\theta (G'G'' - H''H''')II'}{G'I + G''I' + (I' - I)\sin \alpha [(G' - G'')\sin \alpha - (H'' + H''')\cos \alpha]}.$$

Cette expression se réduit bien à celle  $\frac{4\theta}{\frac{1}{G'I} + \frac{1}{G''I'}}$  du bas de la

page 351 (§ 39 de la note du n° 156) dans le cas particulier  $H'' = 0, H''' = 0, \alpha = 0$  où il y a trois plans de symétrie de contexture perpendiculaires aux  $x, y, z$  et où les axes ou diamètres principaux de l'ellipse sont parallèles aux  $y$  et aux  $z$ .

Il n'est pas plus nécessaire de connaître les trente-six (ou quinze) coefficients des formules (12) pour appliquer cette expression du moment de torsion  $M_1$ , que pour appliquer l'expression  $P = E\omega_x$

de simple extension d'un prisme de contexture quelconque, où  $E$  représente une fonction des mêmes coefficients (§ 34). De même que pour celle-ci il suffit de déterminer préalablement  $E$  par une expérience d'extension faite sur un prisme de même matière, de même il suffirait de quatre expériences sur des cylindres elliptiques offrant des valeurs différentes de  $\frac{I'}{I} = \frac{b^2}{c^2}$  et de  $\alpha$  pour obtenir les valeurs des coefficients  $G', G'', H'', H'''$  relatifs à un bloc donné de matière, envisagé suivant un azimuth déterminé choisi arbitrairement.

Si ces expériences donnent à peu près  $H'' = H'''$ , on peut, comme lorsque la matière a des plans de symétrie perpendiculaires aux  $x$  (et qu'on admet l'égalité de  $h''$  et  $h'''$  des formules 29), changer les axes transversaux des  $y, z$ , en d'autres  $y', z'$  pour lesquels les composantes tangentielles ont des expressions monômes

$$p_{xy'} = G'_1 g_{xy'}, \quad p_{xz'} = G''_1 g_{xz'},$$

axes qui font, avec  $y$  et  $z$ , comme il est facile de voir, un angle  $\delta$  déterminé par

$$\text{tang } 2\delta = \frac{2H''}{G' - G''} \quad (1).$$

Alors on peut poser une *équation de cohésion* comme celle du § 39 de la note du n° 156, p. 354,

$$1 = \text{ou } > \left( \frac{G'_1 g_{xy'}}{T'_0} \right)^2 + \left( \frac{G''_1 g_{xz'}}{T''_0} \right)^2,$$

et l'appliquer en calculant par tâtonnement le maximum du second membre pour les divers points du contour elliptique, après avoir mis pour  $g_{xy'}, g_{xz'}$ , leurs valeurs  $g_{xy} \cos \delta + g_{xz} \sin \delta$ ,  $g_{xz} \cos \delta - g_{xy} \sin \delta$ , et, pour  $g_{xy}, g_{xz}$ , les expressions (80).

La condition de cohésion est plus compliquée quand on n'a pas  $H'' = H'''$ . On arriverait à la poser en changeant les trois axes coordonnés des  $x, y, z$  en d'autres dirigés dans les sens supposés connus et rectangulaires où les *limites des dilatactions non dangereuses* de la matière ont leurs plus grandes et leurs plus petites valeurs

---

(1) Mémoire sur la torsion des prismes (*savants étrangers*, t. XIV), art. 46.

absolues et relatives, et supposant, autour d'eux, une distribution ellipsoïdale des inverses des racines carrées de ces limites (1).

§ 36. *Suite des vérifications et généralisations. Flexion égale ou circulaire, sans glissement, d'un prisme homogène ayant une con- texture quelconque dans les diverses directions.* — Supposons que ce prisme ne soit sollicité que sur ses bases par des actions normales variant linéairement avec les coordonnées transversales  $y, z$ , ou ayant sur toutes deux cette expression

$$p_{xx} = E(\lambda_0 + \frac{z}{\rho'} + \frac{y}{\rho''})$$

où  $\lambda_0, \rho', \rho''$  sont trois constantes, dont les deux dernières sont très- grandes par rapport aux dimensions transversales, et  $E$  le coeffi- cient d'élasticité d'extension ou de compression longitudinale.

Voyons si l'on peut avoir partout la même pression longitudinale ou tension  $p_{xx}$  des fibres, avec les cinq autres composantes nulles, ou si l'on peut avoir, en tous les points

$$(83) \quad p_{xx} = E(\lambda_0 + \frac{z}{\rho'} + \frac{y}{\rho''}), p_{yy} = 0, p_{zz} = 0, p_{yz} = 0, p_{zx} = 0, p_{xy} = 0.$$

Ces expressions satisfont aux trois équations différentielles indé- finies (38)  $\frac{dp_{xx}}{dx} + \frac{dp_{xy}}{dy} + \frac{dp_{xz}}{dz} = 0$ , etc., puisqu'elles annulent les premiers membres. Elles satisfont aussi identiquement aux équations définies (39)  $p_{xx} \cos(n, x) + \dots = \varpi \cos(\varpi, x)$ , etc., tant aux points des bases, pour lesquels  $\cos(n, x) = \cos(\varpi, x) = 1$ ,  $\cos(n, y) = \cos(\varpi, y) = 0$ ,  $\cos(n, z) = \cos(\varpi, z) = 0$ , qu'aux points des faces latérales, pour les- quels on a  $\cos(n, x) = 0$ ,  $\varpi = 0$ . Elles satisfont aussi aux conditions de compatibilité du § 32, car elles donnent

$$(84) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda_x = \lambda_0 + \frac{z}{\rho'} + \frac{y}{\rho''}, \\ \text{et (comme au § 34)} \lambda_y = -\eta \lambda_x, \lambda_z = -\eta' \lambda_x, \xi_{yz} = \eta'' \lambda_x, \\ \xi_{xz} = \eta''' \lambda_x, \xi_{xy} = \eta^{iv} \lambda_x, \end{array} \right.$$

qui, substituées dans (49) et (50), les réduisent à  $0 = 0$ , en sorte que les déformations exprimées par (84) sont possibles ou compatibles

(1) Même mémoire, art. 24. On peut étendre ce qui y est dit pour une con- texture à trois plans de symétrie à une con texture quelconque, moyennant le chan- gement d'axes dont nous parlons.

entre elles, et l'analyse confirme à ce sujet, comme on voit, notre démonstration géométrique du § 3 de la note du n° 80.

Le prisme, ainsi déformé, sera donc maintenu en équilibre par les pressions ou tractions (83)  $p_{xx} = E(\delta_0 + \frac{z}{\rho'} + \frac{y}{\rho''})$  appliquées aux bases  $\omega$ ; pressions qui ont, sur chacune,

$E\omega\delta_0$ , pour résultantes ;

$$\frac{E}{\rho'} \int z^2 d\omega, \quad \frac{E}{\rho''} \int y^2 d\omega \text{ pour moments autour des axes des } y, \text{ des } z,$$

supposés être les axes principaux d'inertie passant par les centres de gravité des bases.

Or, sans avoir besoin de déduire de (84) les valeurs des déplacements  $u, v, w$  (qui seraient, comme il est facile de voir, représentés, s'ils sont très-petits, par des expressions entières du second degré en  $x, y, z$ , dont les coefficients se trouvent aisément en les laissant d'abord indéterminés), la forme  $\delta_x = \delta_0 + \frac{z}{\rho'} + \frac{y}{\rho''}$  de l'expression transversalement variable de la dilatation longitudinale d'une fibre quelconque prouve que le prisme prend une courbure uniforme ayant  $\frac{1}{\rho'}$ ,  $\frac{1}{\rho''}$  pour projections sur les plans des  $zx$  et des  $xy$ , ou qu'il fléchit en arc de cercle d'un rayon  $\rho$  déterminé par  $\frac{1}{\rho^2} = \frac{1}{\rho'^2} + \frac{1}{\rho''^2}$ .

§ 37. *Suite des vérifications et généralisations. Flexion inégale, ou avec glissements, d'un prisme homogène dont la matière a partout un plan de symétrie de contexture perpendiculaire à ses arêtes ou aux  $x$ .* — On suppose que ce prisme, d'une longueur  $a$ , est sollicité sur ses seules bases, savoir :

Sur la 2<sup>e</sup>, pour laquelle  $x=a$ , par des forces tangentielles  $p_{xy}, p_{xz}$  ;

Sur la 1<sup>re</sup>, pour laquelle  $x=0$ , par les mêmes forces  $p_{xy}, p_{xz}$  aux points correspondants, mais, en outre, par des forces normales  $p_{xx}$  proportionnelles à une coordonnée transversale  $z$ , et

pouvant ainsi être représentées par  $\frac{Pa}{I}z$ ,  $I$  désignant le moment d'inertie  $\int z^2 d\omega$  de la section autour de l'axe des  $y$  supposé être un de ses deux axes principaux, et  $P$  étant une constante dont nous allons reconnaître la signification.



Voyons si la pression  $p_{xx}$  peut varier linéairement aussi avec la coordonnée longitudinale  $x$ , et si les pressions tangentiellees sur les sections peuvent être les mêmes d'un bout à l'autre que sur les bases, les fibres ne supportant latéralement aucune action transversale à l'intérieur, ou si l'on peut avoir partout

$$(85) \quad p_{xx} = \frac{P(a-x)z}{I}, \quad p_{yy} = 0, \quad p_{zz} = 0, \quad p_{yz} = 0, \quad \frac{dp_{xx}}{dx} = 0, \quad \frac{dp_{xy}}{dx} = 0.$$

En substituant ces valeurs des composantes de pression, on trouve qu'elles satisfont aux équations indéfinies (38)  $\frac{dp_{xx}}{dx} + \dots = 0$ , etc., à condition qu'on ait partout, entre les actions tangentiellees, la relation

$$(86) \quad \frac{dp_{xy}}{dx} + \frac{dp_{xz}}{dz} = \frac{Pz}{I};$$

car c'est à quoi les valeurs (85) réduisent la première de ces trois équations, en rendant identiques les deux dernières. Elles satisfont aussi aux équations définies (39)  $p_{xx} \cos(nx) + \dots = \varpi \cos(\varpi, x)$ , etc. :

1° sur les bases  $x=0$  et  $x=a$ , où  $\cos(n, x)=1$ ,  $\cos(n, y)=0$ ,  $\cos(n, z)=0$ ,  $\varpi \cos(\varpi, x) = \frac{Pax}{I}$  et zéro,  $\varpi \cos(\varpi, y) = p_{xy}$ ,  $\varpi \cos(\varpi, z) = p_{xz}$ ;

2° sur les faces latérales, où  $\varpi=0$ ,  $\cos(n, x)=0$ ,  $\frac{\cos(n, y)}{\cos(n, z)} = \frac{-dz}{dy}$ , à condition qu'on ait, aux points des contours des bases et des sections,

$$(87) \quad p_{xz} dy - p_{xy} dz = 0.$$

Voyons maintenant à quelle condition les expressions des dilata-tions et glissements tirés des équations (85) sont compatibles entre elles. Ces équations, combinées avec les formules (39)  $p_{xx} = a\partial_x + f\partial_y + e''\partial_z + hg_{yz}$ , etc., du cas d'un plan de symétrie, donnent  $\eta, \eta', \eta''$ , étant, comme au § 34, des fonctions des rapports mutuels des coefficients  $a, f$ , etc. :

$$(88) \quad \partial_x = \frac{P(a-x)z}{EI}, \quad \partial_y = -\eta\partial_x, \quad \partial_z = -\eta'\partial_x, \quad g_{yz} = \eta''\partial_x,$$

$$\frac{dg_{xz}}{dx} = 0, \quad \frac{dg_{xy}}{dx} = 0;$$

qui réduisent à  $0=0$  les trois conditions de compatibilité (50) du § 32, ainsi que la première des conditions (49); et les deux autres (49) sont réduites à

$$\frac{2\eta P}{EI} = \frac{d}{dy} \left( \frac{dg_{xy}}{dz} - \frac{dg_{xz}}{dy} \right), \quad 0 = -\frac{\eta'' P}{EI} + \frac{d}{dz} \left( \frac{dg_{xz}}{dy} - \frac{dg_{xy}}{dz} \right).$$

On en déduit, vu que  $\frac{d}{dx} \left( \frac{dg_{xz}}{dy} - \frac{dg_{xy}}{dz} \right)$  est nul d'après (88) :

$$(89) \quad \frac{dg_{xz}}{dy} - \frac{dg_{xy}}{dz} = -P \frac{2\eta y - \eta'' z}{EI};$$

condition qui s'accorde avec celle du milieu de la p. 461, § 46 de la note du n° 156, en remplaçant  $y, z$  par  $u, v$ ,  $-P$  par  $P'$  et supposant  $\eta'' = 0$  ou  $g_{yz}$  nul partout.

Toutes les fois donc qu'un prisme ou cylindre, dont les faces latérales sont libres, et dont la matière offre partout des plans de symétrie perpendiculaires à ses arêtes ou aux  $x$ , supporte dans l'état d'équilibre, sur l'une de ses bases, des pressions ou tractions normales  $p_{xx} = \frac{Px}{I}$ , et, sur toutes deux, des actions tangentielles

$$p_{xy}, p_{xz} \text{ satisfaisant à (86) } \frac{dp_{xy}}{dy} + \frac{dp_{xz}}{dz} = \frac{Px}{I} \text{ en tous leurs points,}$$

et, aux contours, à (87)  $p_{xz} dy - p_{xy} dz = 0$ , et telles aussi que les glissements  $g_{xy}, g_{xz}$  qui y répondent d'après (29)  $p_{xz} = eg_{xz} + h''g_{xy}$ ,

$$p_{xy} = h''g_{xz} + fg_{xy} \text{ aient entre eux la relation (89) } \frac{dg_{xz}}{dy} - \frac{dg_{xy}}{dz} =$$

$$= -P \frac{2\eta y - \eta'' z}{EI}, \text{ ce prisme se trouve avoir éprouvé les déformations}$$

qu'indiquent les expressions (86) des dilatations et glissements, c'est-à-dire une flexion, dans le plan  $xz$ , décroissant d'un bout à l'autre uniformément de  $x=0$  à  $x=a$ , en même temps que des contractions transversales dans les proportions  $\eta, \eta'$  avec les dilatations longitudinales  $\partial_x$  des fibres, et des glissements déterminés par  $g_{yz} = \eta'' \partial_x$ , ainsi que par les valeurs de  $g_{xz}, g_{xy}$  fonctions de  $y, z$  et satisfaisant aux conditions exprimées (88), (89).

Le moment total, autour d'une parallèle aux  $y$  tracée sur une section quelconque  $\omega$ , des actions s'exerçant à travers cette section est,

$$\int p_{xz} x d\omega = \frac{P(a-x)}{I} \int x^2 d\omega = P(a-x);$$

en sorte que comme il ne s'exerce, sur la deuxième base  $x=a$ , que

les forces  $p_{xz}$ , on a pour l'équilibre de translation, dans le sens  $z$ , de la partie intermédiaire, dont la longueur est  $a - x$

$$\int p_{xz} d\omega = P,$$

c'est-à-dire que  $P$  représente la somme constante des forces transversales  $p_{xz} d\omega$  agissant aux divers points de chaque section.

Si l'on égale  $g_{xy}$ ,  $g_{xz}$  à des fonctions entières de  $y$ ,  $z$ , à coefficients indéterminés, en astreignant ces coefficients à satisfaire à (86) et (89), ce qui en réduit le nombre; puis, si l'on substitue dans (87)  $p_{xz} dy - p_{xy} dz = 0$ , on a l'équation différentielle première des contours des sections des prismes qui prennent la flexion qu'on vient de dire, sous l'action des forces transversales  $p_{xy}$ ,  $p_{xz}$  répondant à

ces expressions de  $g_{xz}$ ,  $g_{xy}$ , et jointes aux forces normales  $\frac{Pa}{I} z$  sur

une des bases. Mais le premier membre de cette équation des contours (87) n'est pas une différentielle exacte comme le premier membre de (83) ou (74) du cas de la torsion (§ 35), en sorte que nous n'avons obtenu des intégrales ayant une forme finie que lorsque

$$\gamma'' = 0,$$

ou que la matière offre trois plans de symétrie; et nous n'avons, ainsi, à présenter aucun autre exemple que ceux qui ont été donnés au § 46 de la note du n° 156.

On voit toujours que l'analyse, fondée sur les formules et les équations de la mécanique moléculaire, dont l'établissement et l'emploi ont été l'objet de ce 3° Appendice, vérifie d'une manière simple, en les généralisant, les résultats et les théorèmes que nous avons démontrés au 2° Appendice (§§ 10 à 12), ainsi qu'à la note du n° 156, par d'autres considérations. Ces théorèmes, qui donnent l'extension, la torsion, la flexion avec ou sans glissements, de prismes sollicités à leurs extrémités par des forces appliquées et distribuées suivant certains modes servant de types, et auxquels les autres modes sont assimilables avec une approximation suffisante, se trouvent ainsi confirmés de plusieurs manières et mis hors de doute, bien qu'aucun des résultats qu'ils énoncent ne puisse, dans l'état actuel de l'analyse, être obtenu par voie tout à fait directe ou purement analytique, et que l'on ne soit encore arrivé à aucun d'eux, même au plus simple (ce-

lui de l'extension) que par voie d'essai et de vérification, suivie au moins partiellement.

4<sup>e</sup> APPENDICE. — *Comparaison de nos formules de torsion à l'expérience. — Digression sur les vibrations tournantes.*

§ 38. *Expériences de M. Wertheim sur la torsion des prismes à base rectangle, et observations sur les conséquences qu'il en tire.* — Nous avons dit, p. 283 et 297, aux sous-notes des §§ 21 et 26 de la note du n° 156, en citant des chiffres à l'appui, que nos formules de moment de torsion étaient d'accord non-seulement avec les expériences anciennes de Duleau et de Savart sur les prismes carrés et rectangles, mais aussi avec les expériences récentes de M. Wertheim, qui ont porté également sur des cylindres elliptiques.

Nous l'avions exprimé déjà en février 1858, aux p. 78 et 95 d'un écrit distribué aux membres de l'Académie des sciences et à divers autres savants (*Notice sur nos travaux*).

Cependant M. Wertheim, à la p. 17 d'un écrit du même genre, distribué en novembre 1859, conteste cet accord, et il persiste à émettre, comme il avait fait aux p. 248, 249 (§ XV) et 284, 285 (§ XXV) de son *Mémoire sur la torsion*, inséré aux *Annales de chimie et de physique* en juin et juillet 1857, l'opinion que la formule du mo-

ment de torsion de M. Cauchy  $M_1 = \frac{G\theta}{3} \frac{b^3c^3}{b^2+c^2}$  pour les prismes rectangles est seule exacte dans les conditions-limites que suppose jusqu'à présent toute théorie, savoir des torsions extrêmement petites et des prismes d'une longueur extrêmement grande par rapport à leurs dimensions transversales.

L'intérêt de la vérité et de la science nous oblige à combattre ici cette opinion, que M. Cauchy n'a point soutenue (car il a adopté notre formule des prismes rectangles en abandonnant la sienne), et à montrer que les expériences de M. Wertheim ne la confirment point, mais sont plutôt, dans ce qu'elles peuvent offrir de concluant,

favorables à notre analyse ou à la formule en série transcendante qui, substituée par nous à celle de M. Cauchy, donne des résistances moins fortes dans une proportion qui est 0,843 pour  $b=c$ , et qui ne se rapproche de 1 que pour  $b$  très-grand par rapport à  $c$ .

On discutera avec détail, au 5<sup>e</sup> Appendice, un point de théorie qui, depuis 1848, nous sépare de l'honorable physicien. Il a proposé alors des formules de *composantes de pression* que nous n'avons pu adopter, et qui donneraient, dans les corps solides isotropes ou d'égale élasticité en tous sens, la relation suivante entre le coefficient d'élasticité d'extension  $E$  et le coefficient d'élasticité de glissement ou de torsion  $G$

$$G = \frac{3}{8} E = 0,375 E ;$$

tandis que nous pensons, avec Navier et les autres auteurs de mécanique moléculaire qui ont écrit de 1821 à 1830, qu'on a, pour les mêmes solides,

$$G = \frac{2}{5} E = 0,400 E.$$

Nos formules de torsion pure sont sans doute indépendantes de ce dissentiment, car elles ne contiennent pas  $E$ , mais seulement  $G$ , et elles s'appliquent même aux prismes dont l'élasticité est autre dans le sens longitudinal que dans les sens transversaux. Mais, lorsqu'il s'agit de comparer numériquement les résultats des formules avec ceux des expériences, il convient d'avoir, pour la matière de chacun des prismes, la valeur du coefficient  $G$ . Or M. Wertheim l'évalue constamment en prenant les  $3/8 = 0,375$  du coefficient  $E$ , qu'il mesure au moyen d'expériences d'extension longitudinale faites sur chaque prisme, et dont il ne donne pas le détail. Les comparaisons sont, en conséquence, affectées de trois causes d'incertitude : celle qui porte sur la relation  $G = 3/8 E$  admise par lui pour les solides isotropes, celle qui porte sur l'isotropie supposée (car la texture des prismes n'était peut-être pas la même longitudinalement et transversalement), enfin celle que peut offrir la valeur de  $E$ , variant souvent avec la grandeur des extensions qu'on opère pour arriver à sa mesure.

On ne peut, par ces motifs, rien tirer de certain du troisième ta-

bleau du § XV, p. 249 (1) du *Mémoire sur la torsion* de M. Wertheim, où l'on voit que, pour les plus petites torsions de dix de ses prismes de fer et d'acier, les nombres  $c$  (dernière colonne) par lesquels il faut multiplier la formule de M. Cauchy pour avoir ce que fournit l'expérience, sont, pour des rapports des deux côtés de la base

	2	6	8	12	1	4	4,5	2	4,5	3,5
respectivement	0,87;	1,03;	0,98;	0,99;	0,96;	0,94;	0,96;	0,99;	0,96;	1,08;
au lieu de	0,86;	0,92;	0,94;	0,95;	0,84;	0,84;	0,90;	0,86;	0,90;	0,89;

que donnerait notre formule, ou la colonne des valeurs de  $\mu'$  de notre tableau p. 362 du § 22 de la note du 156. Les nombres de la deuxième de ces trois lignes de chiffres ont, en effet, été obtenus par M. Wertheim en prenant  $G = \frac{3}{8}E$ ; ils se rapprocheraient sensiblement de ceux de la troisième en prenant  $G = \frac{2}{5}E$ , ce qui les réduirait tous de  $1/16$ ; et, en outre,  $G$  peut excéder encore  $\frac{2}{5}E$  si la contexture longitudinale est différente de la contexture transversale, ou bien si  $E$  a été évalué au moyen d'extensions un peu fortes, ce qui tendrait encore à diminuer ou à éloigner de l'unité les multiplicateurs numériques  $c$  appelés par M. Wertheim *coefficients de correction* de la formule de M. Cauchy, regardée par lui comme exacte *théoriquement* ou à la limite.

On ne peut rien inférer non plus qui soit favorable à l'opinion que le coefficient de correction se rapproche de l'unité à mesure que la longueur augmente par rapport aux côtés des sections, des deux expériences sur les prismes de Flint, citées par M. Wertheim à la p. 248, ni du reste de ce que contiennent les deux tableaux, p. 245 et 246, disposés, dit-il (p. 248), « pour faire ressortir cette relation importante. » On trouve en effet, à ces deux tableaux, si l'on compare entre elles les expériences pour lesquelles le rapport (colonne  $\frac{a}{b}$ ) des deux côtés de la section est sensiblement le même, que le coefficient de correction, mis à la dernière colonne,

---

(1) On obtient les pages du volume des *Annales* en ajoutant 194 aux pages de l'extrait publié à part.

décroit à peu près aussi souvent qu'il croit lorsque le rapport (colonne  $\frac{l}{b}$ ) de la longueur au petit côté augmente.

L'expérience n'offre donc aucune raison de penser que la formule de torsion des prismes rectangles, à laquelle M. Cauchy est arrivé, en 1829, par un genre d'analyse dont il n'a jamais soutenu l'exactitude et qu'il a finalement abandonné, soit « rigoureusement vraie à la limite, » comme le répète M. Wertheim dans sa *Notice* de 1859, c'est-à-dire pour de très-petites torsions et de très-grandes longueurs, et qu'il ne faille lui faire subir une correction que lorsque les longueurs sont trop petites ou les torsions trop fortes.

§ 39. *Examen de la formule de torsion des prismes rectangles données en 1829 par M. Cauchy comme approchée.* — Nous devons répéter même ici ce que nous avons dit à la p. 290 (§ 24, note n° 156), qu'il y a impossibilité que cette formule de torsion de M. Cauchy soit jamais vraie pour les prismes à base carrée, quelque longs et minces qu'on les suppose ; car, quand les deux côtés  $b$ ,  $c$  de la base rectangle sont égaux, elle se confond avec la formule ancienne  $M_1 = G\theta J$  (p. 272) qui faisait le moment de torsion toujours proportionnel au moment d'inertie (dit *polaire*)  $J$  des sections, même non circulaires, autour de l'axe de torsion ; d'où il résulterait que, pour des prismes ou cylindres très-longs, une section ronde et une section carrée de même moment d'inertie donneraient la même résistance à la torsion autour de leur axe de figure, ou autrement dit, que la section carrée *resterait plane* comme la section circulaire. Or le raisonnement le plus élémentaire prouve qu'il n'en peut être ainsi (§ 4 de la note n° 156), et que les sections carrées doivent s'infléchir vers leurs quatre angles, de manière à rester normales aux quatre arêtes vives devenues des hélices, ce qui apporte nécessairement à la résistance une diminution, telle qu'est celle que nous évaluons théoriquement par le coefficient 0,843462 multipliant  $G\theta J$ .

Et l'analyse ne prouve pas moins que le raisonnement la nécessité de cette réduction, dénotée depuis longtemps par les expériences de Duleau et de Savart. Nos formules, en effet, résultent de valeurs des petits déplacements qui satisfont certainement d'une manière rigoureuse aux équations d'équilibre d'élasticité (3<sup>e</sup> Appendice), dont part aussi M. Cauchy, lorsque les forces extérieures qui font

tordre sont appliquées aux extrémités suivant le mode spécifié au § 35, et qui se trouve indiqué d'une manière plus particulière pour chaque forme de section par les expressions de  $Gg'$ ,  $Gg''$  ou  $G'g'$ ,  $G''g''$  récapitulées au § 40 de la note du n° 156. La formule de M. Cauchy est donc en défaut tout au moins pour le mode indiqué d'application et de distribution des forces.

Une autre raison grave porte à abandonner cette formule du moment de torsion des prismes rectangles, et doit faire renoncer, pour la recherche de ce moment, au genre d'analyse dont l'illustre géomètre l'a déduite en 1829; c'est que cette analyse donne, lorsqu'on la pousse plus loin, ou lorsqu'on n'efface finalement que des termes d'ordre supérieur de deux unités à ceux qu'il a supprimés, un résultat qui n'est que les deux tiers de celui qu'il a obtenu, ainsi que nous l'avons montré dans un mémoire présenté le 20 novembre 1843 et approuvé sur son rapport (*Comptes rendus*, t. XVII, p. 1189 et p. 1234). On serait donc conduit à adopter une expression moindre d'un tiers que la sienne; or, ainsi réduite, elle s'écarte considérablement non-seulement de notre formule nouvelle dont l'exactitude est bien certaine pour le mode particulier d'application de forces qu'elle suppose, mais aussi de toutes les expériences (!).

(!) Déjà nous avons montré cette réduction nécessaire d'un tiers dans une note jointe à une lettre du 12 mars 1839 à laquelle M. Cauchy a répondu en nous renvoyant à des méthodes dont la publication l'occupait, en sorte qu'il abandonnait déjà alors son analyse de 1829.

Cette analyse est en effet basée sur la supposition que les inconnues du problème, c'est-à-dire les composantes de pression intérieure et les petits déplacements ou leurs dérivées, sont développables en série convergente suivant les puissances des coordonnées transversales  $y, z$ , dont les plus grandes valeurs sont les demi-dimensions transversales  $\frac{b}{2}, \frac{c}{2}$  supposées très-petites par rapport à la longueur du prisme, et qu'on peut faire, dans les résultats, certaines suppressions de termes; en sorte que,  $p$  représentant une de ces inconnues, et

$$p'', \frac{dp''}{dy}, \frac{dp''}{dz}, \frac{d^2p''}{dy^2}, \frac{d^2p''}{dydz}, \dots$$

sa valeur et celles de ses dérivées au centre de la section ou pour  $y=0, z=0$ , on aurait

$$(a) p = p'' + \frac{dp''}{dy}y + \frac{dp''}{dz}z + \frac{1}{2} \left( \frac{d^2p''}{dy^2}y^2 + 2 \frac{d^2p''}{dydz}yz + \frac{d^2p''}{dz^2}z^2 \right) + \frac{1}{2.3} \left( \frac{d^3p''}{dy^3}y^3 + \dots \right) + \text{etc.}$$

série que M. Cauchy écrirait  $p = p_{0,0} + p_{1,0}y + p_{0,1}z + \frac{1}{2} (p_{2,0}y^2 + 2p_{1,1}yz + p_{0,2}z^2) + \dots$

avec la notation de son mémoire (*Exercices de math.*, t. IV) où il désigne aussi



§ 40. Confirmation, par les expériences de Duleau et de Savart, et aussi par celles de M. Wertheim, de la loi établie par notre

par A, B, C, D, E, F, G, H, I ce que nous appelons  $P_{xx}$ ,  $P_{yy}$ ,  $P_{zz}$ ,  $P_{yz}$ ,  $P_{zx}$ ,  $P_{xy}$ ,  $u$ ,  $v$ ,  $w$ .

D'où il résulte, pour le moment de torsion  $M_1 = \int_{\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy \int_{\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} dz (p_{xy} - p_{yx})$  du prisme rectangle dont la base est  $b \times c$ , en substituant, intégrant et réduisant :

$$(b) M_1 = \frac{bc}{42} \left( b^3 \frac{d^3 p_{xz}}{dy^3} - c^3 \frac{d^3 p_{xy}}{dz^3} \right) + \frac{b^3 c^3}{288} \left( \frac{d^3 p_{xz}}{dy^2 dz} - \frac{d^3 p_{xy}}{dy dz^2} \right) + \frac{bc}{480} \left( b^4 \frac{d^3 p_{xz}}{dy^3} - c^4 \frac{d^3 p_{xy}}{dz^3} \right) + \text{termes du 8° ordre et au-dessus en } b, c.$$

En se bornant, comme a fait M. Cauchy, au premier terme  $\frac{bc}{42}$  ( ) de cette expression, on arrive à sa formule.

En effet, on a, les pressions étant nulles sur les quatre faces du prisme rectangle :

$$(c) \quad p_{xy} = 0, \quad p_{yy} = 0, \quad p_{yz} = 0 \quad \text{pour } y = \pm \frac{1}{2} b \text{ quel que soit } z,$$

$$(d) \quad p_{xz} = 0, \quad p_{yz} = 0, \quad p_{zx} = 0 \quad \text{pour } z = \pm \frac{1}{2} c \text{ quel que soit } y,$$

d'où M. Cauchy tire, en mettant pour  $p_{xy}$  ou  $p_{yy}$ , etc., son développement (a) et égalant à zéro les sommes de termes affectées des mêmes puissances de  $x$  ou  $y$ , une suite d'équations, partageables chacune, en raison du  $\pm$ , en deux autres qui, additionnées ensemble, et ensuite soustraites l'une de l'autre, donnent, en divisant par 2, ces équations plus simples :

Pour  $p = p_{xy}$  ou  $p_{yy}$  ou  $p_{yz}$

$$(e) \quad \left\{ \begin{aligned} p^0 + \frac{1}{2} \frac{d^2 p^0}{dy^2} \left( \frac{b}{2} \right)^2 + \dots = 0, \quad \frac{dp^0}{dx} + \frac{1}{2} \frac{d^3 p^0}{dy^2 dx} \left( \frac{b}{2} \right)^2 + \dots = 0, \quad \frac{d^2 p^0}{dz^2} + \frac{1}{2} \frac{d^4 p^0}{dy^2 dz^2} \left( \frac{b}{2} \right)^2 + \dots = 0, \\ \frac{dp^0}{dy} + \frac{1}{6} \frac{d^3 p^0}{dy^3} \left( \frac{b}{2} \right)^2 + \dots = 0, \quad \frac{d^2 p^0}{dy dz} + \frac{1}{6} \frac{d^4 p^0}{dy^2 dz} \left( \frac{b}{2} \right)^2 + \dots = 0, \quad \frac{d^3 p^0}{dy dz^2} + \frac{1}{6} \frac{d^5 p^0}{dy^2 dz^2} \left( \frac{b}{2} \right)^2 + \dots = 0; \end{aligned} \right.$$

Pour  $p = p_{xz}$  ou  $p_{yz}$  ou  $p_{zx}$

$$(f) \quad \left\{ \begin{aligned} p^0 + \frac{1}{2} \frac{d^2 p^0}{dz^2} \left( \frac{c}{2} \right)^2 + \dots = 0, \quad \frac{dp^0}{dy} + \frac{1}{2} \frac{d^3 p^0}{dy dz^2} \left( \frac{c}{2} \right)^2 + \dots = 0, \quad \frac{d^2 p^0}{dy^2} + \frac{1}{2} \frac{d^4 p^0}{dy^2 dz^2} \left( \frac{c}{2} \right)^2 + \dots = 0, \\ \frac{dp^0}{dz} + \frac{1}{6} \frac{d^3 p^0}{dz^3} \left( \frac{c}{2} \right)^2 + \dots = 0, \quad \frac{d^2 p^0}{dy dz} + \frac{1}{6} \frac{d^4 p^0}{dy dz^2} \left( \frac{c}{2} \right)^2 + \dots = 0, \quad \frac{d^3 p^0}{dy^2 dz} + \frac{1}{6} \frac{d^5 p^0}{dy^2 dz^2} \left( \frac{c}{2} \right)^2 + \dots = 0. \end{aligned} \right.$$

Or  $p_{yz}$  appartient aux relations (e) comme aux relations (f); et on en tire :

$$(g) \quad p^0_{yz} = -\frac{1}{2} \frac{d^2 p^0_{yz}}{dy^2} \left( \frac{b}{2} \right)^2 \dots = -\frac{1}{2} \frac{d^2 p^0_{yz}}{dz^2} \left( \frac{c}{2} \right)^2 \dots = \frac{1}{6} \frac{d^4 p^0_{yz}}{dy^2 dz^2} \left( \frac{b}{2} \right)^2 \left( \frac{c}{2} \right)^2 \dots;$$

d'où il suit que  $p^0_{yz}$  n'a qu'une valeur qui dépend de termes du quatrième ordre

*formule de torsion des prismes rectanglés.* — Dans la vérification expérimentale que nous avons faite de notre formule de torsion des

en  $b, c$ , termes supposés négligeables, en sorte que comme il est égal au glissement  $g_{yz} = \frac{dv^o}{dz} + \frac{dw^o}{dy}$  multiplié par un coefficient d'élasticité, on peut prendre approximativement

$$(h) \quad \frac{dv^o}{dx} + \frac{dw^o}{dy} = 0.$$

Cette équation exprime que deux droites primitivement parallèles aux  $y$  et aux  $z$ , tracées sur la section  $\omega$  et se coupant à son centre, sont restées perpendiculaires entre elles après le déplacement des points du corps; mais chacun des deux termes dont son premier membre se compose représente la grandeur angulaire de la rotation effectuée par ces deux droites autour de l'axe du prisme, en sorte qu'en appelant  $\psi$  cette rotation on a

$$(A \text{ bis}) \quad \psi = \frac{dw^o}{dy} = - \frac{dv^o}{dx}.$$

Mais  $\frac{d\psi}{dx}$  ou l'accroissement de cette rotation pour l'unité d'une petite longueur  $dx$  n'est autre chose que la torsion désignée par  $\theta$  dans tout ce qui précède. On a donc

$$\theta = \frac{d}{dx} \frac{dw^o}{dy} = - \frac{d}{dx} \frac{dv^o}{dx};$$

en sorte que  $p_{xy} = G' g_{xy} = G' \left( \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dx} \right)$ ,  $p_{xz} = G'' g_{xz} = G'' \left( \frac{dw}{dx} + \frac{dv}{dz} \right)$  donnent, l'indice 0 signifiant toujours la valeur que prennent les divers coefficients différentiels pour  $y = 0, z = 0$ ,

$$(i) \quad \frac{dp_{xy}}{dx} = G' \left( -\theta + \frac{d^2 w^o}{dy dx} \right), \quad \frac{dp_{xz}}{dy} = G'' \left( \theta + \frac{d^2 w^o}{dy dx} \right);$$

d'où, en éliminant  $\frac{d^2 w^o}{dy dx}$  (qui mesure, comme il est facile de voir, le degré de *gauchissement* de la section, assimilée, au moins sur une petite portion autour de son centre, à un parabolôïde hyperbolique) :

$$(j) \quad \frac{4}{G''} \frac{dp_{xz}}{dy} - \frac{4}{G'} \frac{dp_{xy}}{dx} = 2\theta;$$

équation conforme à  $\frac{dg''}{du} - \frac{dg'}{dv} = 2\theta, \frac{dg_{xz}}{dy} - \frac{dg_{xy}}{dx} = 2\theta$  des pages 404, 533, 605

et qui se trouve ainsi démontrée avoir lieu, au moins approximativement, dans tout prisme rectangulaire tordu par des forces appliquées d'une manière quelconque à ses extrémités, pourvu qu'on admette le développement de  $p_{yz}$  en série convergente entière, et que les dimensions transversales  $b, c$  de ce prisme soient assez petites pour qu'on puisse négliger le dernier membre de la triple égalité (g).

prismes rectangles par les expériences de Duleau et de Savart sur des barres carrées, le coefficient  $G$  était évalué, non pas en le dé-

Mais on peut, des mêmes considérations et suppositions, tirer, avec M. Cauchy, une deuxième relation entre  $\frac{dp^{\circ}_{xz}}{dy}$  et  $\frac{dp^{\circ}_{xy}}{dz}$ , qui entrent dans (b)  $M_1$ .

Prenons pour cela la première des trois équations (38) d'équilibre intérieur, p. 585

$$(k) \quad \frac{dp_{xz}}{dx} + \frac{dp_{xy}}{dy} + \frac{dp_{xz}}{dz} = 0;$$

mettons-y, pour les  $p$ , leurs développements, et égalons à zéro la somme des termes affectés de  $yz$ ; ou, ce qui revient au même, différencions-la une fois par rapport à  $y$ , une fois par rapport à  $x$ , et faisons ensuite  $y = 0$ ,  $z = 0$ , nous aurons

$$(l) \quad \frac{d^2 p^{\circ}_{xy}}{dy^2 dz} + \frac{d^2 p^{\circ}_{xz}}{dy dz^2} = - \frac{d^2 p^{\circ}_{xz}}{dx dy dz}.$$

Mais les équations (e), (f) qui expriment la condition de nullité de la pression extérieure sur les faces latérales donnent

$$(m) \quad \frac{dp^{\circ}_{xz}}{dy} = - \frac{1}{2} \frac{d^2 p^{\circ}_{xz}}{dy dz^2} \left(\frac{c}{2}\right)^2 + \text{termes du 4}^{\circ} \text{ ordre}; \quad \frac{dp^{\circ}_{xy}}{dz} = - \frac{1}{2} \frac{d^2 p^{\circ}_{xy}}{dy^2 dz} \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \text{termes du 4}^{\circ} \text{ ordre}.$$

En ajoutant celles-ci après les avoir multipliées respectivement par  $b^2$  et par  $c^2$  et substituant, à la somme de dérivées du 3<sup>e</sup> ordre qui en résulte dans le second membre, sa valeur (l), on a

$$(n) \quad b^2 \frac{dp^{\circ}_{xz}}{dy} + c^2 \frac{dp^{\circ}_{xy}}{dz} = \frac{b^2 c^2}{8} \frac{d^2 p^{\circ}_{xz}}{dx dy dz} + \text{termes du 6}^{\circ} \text{ ordre}.$$

Ce second membre peut être négligé comme très-petit, car  $\frac{d^2 p^{\circ}_{xz}}{dx dy dz}$  n'est point d'un ordre de grandeur supérieur aux termes du premier membre, et même il sera habituellement nul puisque, dans les problèmes de torsion, on ne suppose pas de composante de pression normale aux sections. On a donc pour la deuxième relation approximative cherchée

$$(o) \quad b^2 \frac{dp^{\circ}_{xz}}{dy} + c^2 \frac{dp^{\circ}_{xy}}{dz} = 0.$$

D'où l'on tire, en combinant avec (j)

$$(p) \quad \frac{dp^{\circ}_{xz}}{dy} = \frac{2c^2}{b^2 + c^2}, \quad \frac{dp^{\circ}_{xy}}{dz} = \frac{-2b^2}{b^2 + c^2}.$$

M. Cauchy substitue ces deux valeurs dans l'expression (b) du moment  $M_1$ , réduite à son premier terme

$$(q) \quad \frac{bc}{4\alpha} \left( b^2 \frac{dp^{\circ}_{xz}}{dy} - c^2 \frac{dp^{\circ}_{xy}}{dz} \right)$$

qui est du quatrième ordre en  $b$ ,  $c$ , en négligeant les termes suivants, qui apparaissent comme du 6<sup>e</sup> ordre et au-dessus [ce terme conservé revient bien à sa for-

duisant de E, comme fait M. Wertheim, mais au moyen d'expériences des mêmes auteurs sur des barres rondes de même matière, ex-

mule (403)  $\frac{4}{3} h i (h^2 E_{1,0} - i^2 F_{0,1})$  en remplaçant  $h$ ,  $i$  par  $b$ ,  $c$ ; et on voit par ses formules (404) qu'il néglige effectivement les termes au delà des premières puissances des coordonnées transversales dans les développements de  $E=p_{xx}$ ,  $F=p_{xy}$ .

Cette substitution donne sa formule connue

$$(r) \quad M_1 = \frac{4}{3} \frac{b^2 c^3 \theta}{b^2 + c^2}.$$

Mais, observons que dans l'expression complète (b) du moment  $M_1$ , si le troisième terme

$$\frac{bc}{480} \left( b^4 \frac{d^6 p_{xx}}{dy^3} - c^4 \frac{d^6 p_{xy}}{dz^3} \right)$$

du sixième ordre, est bien négligeable vu que les équations de condition

$$(f), (e) \quad \frac{d^2 p_{xx}}{dy^2} = -\frac{4}{2} \frac{d^6 p_{xx}}{dy^2 dz^2} \left( \frac{c}{2} \right)^2 - \dots, \quad \frac{d^2 p_{xy}}{dz^2} = -\frac{4}{2} \frac{d^6 p_{xy}}{dy^2 dz^2} \left( \frac{b}{2} \right)^2 - \dots$$

le font monter, par substitution, au huitième ordre, il n'en est pas de même du deuxième terme, du sixième ordre en apparence

$$(s) \quad \frac{b^2 c^2}{288} \left( \frac{d^6 p_{xx}}{dy dz^2} - \frac{d^6 p_{xy}}{dy^2 dz} \right);$$

car, au nombre des équations de condition (f), (e), s'en trouvent deux, déjà réécrites (m), qui donnent

$$(t) \quad \frac{d^2 p_{xx}}{dy dz^2} = -\frac{8}{c^2} \frac{d p_{xx}}{dy} - \text{etc.}, \quad \frac{d^2 p_{xy}}{dy^2 dz} = -\frac{8}{b^2} \frac{d p_{xy}}{dz} - \text{etc.},$$

en sorte que, par substitution, ce terme (s) se change en

$$(u) \quad -\frac{bc}{36} \left( b^2 \frac{d p_{xx}}{dy} - c^2 \frac{d p_{xy}}{dz} \right)$$

ou se réduit au 4<sup>e</sup> ordre, comme celui dont M. Cauchy tient compte, et est même précisément égal au tiers de celui-ci (q) pris en signe contraire. On a donc, en ne négligeant que ce qui est au-dessus du 4<sup>e</sup> ordre,

$$(v) \quad M_1 = \frac{2}{3} \frac{bc}{42} \left( b^2 \frac{d p_{xx}}{dy} - c^2 \frac{d p_{xy}}{dz} \right) = \frac{2}{3} \frac{4}{3} \frac{b^2 c^3 \theta}{b^2 + c^2}$$

c'est-à-dire les deux tiers de la formule de torsion de M. Cauchy.

Une pareille réduction s'explique, du reste, par la valeur que prennent les développements de la forme (a) des composantes tangentielles de pression  $p_{xx}$

périences aux résultats desquels on appliquait la formule incontestée

$$M_1 = G\theta J = G\theta \frac{\pi r^4}{2} \text{ du moment de torsion des cylindres circulaires}$$

et  $p_{xy}$  quand on a égard à leur nullité sur les faces latérales respectives  $x = \pm \frac{c}{2}$

et  $y = \pm \frac{b}{2}$ , ou aux équations de condition (e) et (f) qui sont une conséquence de cette nullité. En effet si, dans ces développements (a), nous mettons à la place des dérivées du 3<sup>e</sup> ordre leurs valeurs (d) et autres, tirées des équations dont nous parlons, nous obtenons

$$p_{xy} = \left(1 - \frac{4y^2}{b^2}\right) \left(p^c_{xy} + \frac{dp^c_{xy}}{dy} y + \frac{dp^c_{xy}}{dz} z\right) + \text{termes du 4<sup>e</sup> ordre en } y, z, b,$$

$$p_{xz} = \left(1 - \frac{4z^2}{c^2}\right) \left(p^c_{xz} + \frac{dp^c_{xz}}{dy} y + \frac{dp^c_{xz}}{dz} z\right) + \text{idem en } y, z, c,$$

expressions dont on pouvait même prévoir d'avance la forme puisqu'elles doivent satisfaire à la condition de s'annuler pour  $y^2 = \frac{b^2}{4}$  et pour  $z^2 = \frac{c^2}{4}$  ou sur les faces latérales, et qui montrent que les pressions tangentielles (ou les glissements  $g_{xy}$ ,  $g_{xz}$  auxquels elles sont proportionnelles quand il y a trois plans de symétrie de contecture) suivent une loi de décroissance parabolique du centre au contour des sections le long des médianes. Or si on les met à la place de  $p_{xy}$ ,  $p_{xz}$  dans l'expression générale du moment de torsion

$$M_1 = \int_{-\frac{1}{2}b}^{\frac{1}{2}b} dy \int_{-\frac{1}{2}c}^{\frac{1}{2}c} dx (p_{xz} y - p_{xy} z),$$

on obtient, non pas le premier terme  $\frac{bc}{12} \left(b^2 \frac{dp^c_{xz}}{dy} - c^2 \frac{dp^c_{xy}}{dz}\right)$  de (b), auquel s'est tenu M. Cauchy, mais les deux tiers de ce terme; ce qui s'explique géométriquement si l'on remarque que la valeur moyenne du facteur parabolique  $1 - \frac{4b^2}{y^2}$ ,

de  $-\frac{b}{2}$  à  $\frac{b}{2}$ , est  $\frac{2}{3}$ , ou que le segment dont les ordonnées sont les diverses valeurs de ce facteur a pour aire les deux tiers du rectangle circonscrit. C'est la diminution graduelle obligée de  $p_{xy}$ ,  $p_{xz}$  quand on chemine du centre au contour des sections, comme nous venons de dire, qui produit cette réduction d'un tiers.

Nous verrons tout à l'heure (§ 45) que M. Cauchy a opéré cette réduction dans sa formule des vibrations tournantes, ce qui fait qu'elle n'est pas en harmonie avec sa formule du cas d'équilibre de torsion, ainsi que l'a très-bien remarqué M. Wertheim.

Concluons simplement de cet examen qu'il faut renoncer, avec M. Cauchy lui-même, à sa formule de torsion, bien que son invention ait été un grand pas fait dans la découverte des lois de cette espèce de déformation des pièces solides.

L'établissement de cette formule, que nous venons de résumer, est, en effet,

de rayon  $r$ . Or le résultat moyen des expériences de Duleau sur des fers carrés ayant pour longueurs

124 fois, 104 fois, 223 fois et 137 fois le côté de la base, a été, ainsi, qu'il fallait multiplier  $G0J$  par

0,846

nombre fort peu différent du coefficient théorique 0,843462 (\*).

Et le résultat moyen des expériences de Savart sur des barreaux carrés en cuivre ayant pour longueurs

139 fois, 115 fois, 71 fois et 116 fois le côté de la base a donné

0,811

s'écartant de quelques centièmes de notre même coefficient, mais différant évidemment encore plus que celui-ci « d'être égal à l'unité, » valeur qu'il devrait avoir suivant M. Wertheim pour des prismes carrés très-longs et minces.

M. Wertheim dit sur ce même sujet, à la p. 17 de sa notice de 1859, en rappelant ses écrits antérieurs, qu'il « croit avoir fait voir, à l'aide des recherches de Duleau et de Savart, que les coefficients de correction de la formule de Cauchy peuvent varier, lors même que la forme de la section reste la même, ce qui est en opposition avec la théorie de M. de Saint-Venant » ; et c'est sans doute au passage suivant de sa note des *Comptes rendus* de 1849 qu'il fait allu-

basé sur une certaine hypothèse (employée pour la première fois par Poisson dans son mémoire de 1828 inséré au t. VIII de ceux de l'Institut), celle du développement des inconnues en série entière, et sur des suppressions de termes dont on ne connaît pas la valeur relativement aux autres. Tant qu'on ne particularise pas les déplacements de manière qu'ils produisent une torsion, on n'obtient, entre les coefficients de ces séries (les dérivées  $dp''$ ) que les relations ci-dessus ( $e$ ), ( $f$ ) qui, même en y joignant ( $j$ ), ( $o$ ), sont en nombre insuffisant; car on voit que chacun d'eux n'entre que dans une seule des équations ( $e$ ), ( $f$ ). On ne peut donc pas faire d'élimination de manière à en obtenir les valeurs par approximations successives. Il faut, pour tirer les premiers, en supprimer d'autres qui peuvent être très-influents (et qu'on reconnaît l'être effectivement en se bornant par exemple au cas  $b = c$  et faisant de prime abord  $\frac{dv}{dx} = -\theta x$ ,  $\frac{dw}{dx} = \theta y$ ). On n'a donc ainsi aucune assurance d'exactitude, ni même de suffisante approximation.

(\*) En attendant le complément expérimental des articles I à VI, on peut voir le détail de ces expériences aux art. 78 et 86 de notre *Mémoire* de 1853-55 sur la torsion. (Sav. *étr.*)

sion (1) : « Si, dans les résultats obtenus par Duleau et par Savart on ne compare entre eux que des métaux de même qualité, par exemple, du fer anglais rond à du fer anglais carré, on trouve toujours pour  $\alpha$  (le coefficient de correction) des nombres inférieurs à 0,84 (notre valeur théorique) et qui varient entre 0,760 et 0,811. »

Mais nous répondons : 1° Qu'au lieu de 0,76 il serait juste de prendre, pour les fers anglais employés par Duleau, 0,826, moyenne qu'on obtient en excluant l'expérience numérotée 93, faite avec un fer rond venu sans doute aussi de l'Angleterre, mais non pas des mêmes mines que les fers carrés, et d'une *qualité* évidemment toute différente de ceux-ci (2) ;

2° Que, pour les fers du Périgord, dont les échantillons étaient bien plus nombreux, il a été trouvé une moyenne de 0,804 ;

3° Enfin que, si un moment de torsion dont la grandeur « peut varier quand la section est la même » est *en opposition avec notre théorie*, il n'est pas moins en opposition avec la théorie de M. Cauchy, et même avec la théorie de Coulomb, dont la formule  $M_1 = G\theta \frac{\pi r^4}{4}$  relative aux cylindres à base circulaire, a été cependant adoptée généralement jusqu'ici. Cette variabilité du moment pour même section serait en opposition même avec toute autre formule analytique qu'une théorie quelconque essaierait aujourd'hui d'y substituer, car de longtemps, et peut-être jamais, on ne pourra y faire entrer autre chose que la forme et les dimensions de la section du prisme ou cylindre, et tenir compte par exemple de sa longueur ou du rapport de celle-ci à la dimension transversale moyenne. L'influence de cette longueur du prisme, quand elle est appréciable, dépend de la manière dont les couples tordants sont appliqués aux extrémités ; elle serait nulle si l'on pouvait réaliser les modes d'application et de distribution des forces que nous avons rappelés au 2° Appendice (§ 7). M. Wertheim trouve généralement la résistance à une torsion donnée par unité de longueur, d'autant plus faible que le prisme est plus court ; le contraire serait peut-être trouvé si l'on appliquait les forces d'une autre manière qu'il ne fait. Cette influence devient, d'ailleurs, négligeable pour les prismes ou cylindres

(1) T. XXVIII, p. 427.

(2) *Mémoire sur la torsion* (aux Sav. étr., t. XIV), art. 78.

suffisamment longs, et son évaluation restera probablement toujours, pour les autres (lorsqu'on voudra la faire malgré son peu d'intérêt pratique) dans le domaine de l'empirisme et des *coefficients de correction* dont il conviendra d'affecter nos formules, et non pas celle de M. Cauchy, que M. Wertheim préfère, quoique cet illustre géomètre l'ait abandonnée ainsi que la tentative analytique qui l'y avait conduit (1), et qui ne donne le vrai résultat que lorsqu'une des deux dimensions de la base est très-grande par rapport à l'autre.

Au reste, les expériences de M. Wertheim manifestent très-bien et d'une manière non douteuse (p. 247 de son *Mémoire* de 1855-1857) une chose qu'il dit ailleurs, à savoir, « qu'à égales longueur et largeur, la *correction* (ou ce dont le *coefficient de correction* est au-dessous de l'unité) diminue avec l'épaisseur, » ou « que, la longueur et l'aire de la section restant constantes, la correction diminue à mesure que l'une des dimensions transversales devient un plus grand multiple de l'autre. »

Or, en cela, elles confirment pleinement notre théorie, qui donne *absolument la même chose*, car on peut voir à notre tableau de la p. 362 (§ 40 de la note du n° 156) que les valeurs de  $\mu'$ , qui sont précisément les nombres ou coefficients de correction par lesquels il faut multiplier la formule Cauchy  $\frac{4\theta}{\frac{1}{G'I} + \frac{1}{G''I}}$ , ou  $\frac{G\theta}{3} \frac{b^3c^3}{b^3+c^3}$  quand

$G' = G'' = G$ , croissent graduellement de 0,843 à 1 lorsque le rapport  $\frac{b}{c}$  des deux côtés du rectangle croît de 1 à l'infini.

C'est ce que nous avons déjà remarqué à la p. 297 ci-dessus.

§ 41. *Expériences de M. Wertheim sur les cylindres à base d'ellipse.* — Le savant physicien, après en avoir rapporté les résultats, dit qu'on obtient la formule de torsion de ces cylindres « en substituant, dans la formule que M. Cauchy a trouvée pour les prismes rectangulaires, à la place du moment d'inertie du rectangle par rapport à l'axe, le moment polaire de l'ellipse. » Il renvoie à ce sujet aux ouvrages de MM. Persy, Poncelet, Moseley et Wies-

---

(1) *Comptes rendus de l'Académie*, 20 février 1854, t. XXXVIII, p. 326-332.



bach, mais sans doute seulement pour la définition du moment d'inertie dit *polaire*, qui est pris autour de l'axe de torsion (supposé passer par le centre de figure de la section), car nous ne sachons pas qu'aucun de ces auteurs ait proposé une pareille substitution pour arriver à une formule de torsion des cylindres elliptiques, ni même qu'ils se soient occupés de ces sortes de cylindres. Comme le moment polaire de la section rectangle n'entre pas dans la formule de M. Cauchy, M. Wertheim entend sans doute par *substituer*, à ce moment, celui de la section elliptique inscrite, *multiplier* la formule par le rapport de celui-ci à celui-là. Ces deux moments sont respectivement  $\frac{\pi bc^3}{64} + \frac{\pi b^3 c}{64}$  et  $\frac{bc^3}{12} + \frac{b^3 c}{12}$ ,  $b$  et  $c$  étant les dimensions transversales. La formule Cauchy  $\frac{G\theta}{3} \frac{b^3 c^3}{b^3 + c^3}$  doit être ainsi multipliée par  $\frac{3\pi}{16}$ , d'où résulte pour le cylindre elliptique le moment de torsion

$$(91) \quad M_1 = \frac{G\theta}{16} \frac{\pi b^3 c^3}{b^3 + c^3};$$

c'est-à-dire précisément l'expression qu'on a vue démontrée à la p. 278 ci-dessus ou au § 22 de la note du n° 156, et que nous avons donnée dès 1847 (1) à un mémoire faisant suite à deux autres dont M. Wertheim cite des passages (2); et nous avons remarqué alors, après l'avoir trouvée par une analyse directe, qu'elle est semblable à celle de M. Cauchy, écrite sous la forme  $G\theta \frac{4II'}{I+I'}$ , et qu'elle s'en déduit en mettant, au lieu des moments d'inertie  $I, I'$  de la section rectangle autour de ses axes principaux de figure, ceux de la section elliptique; mais avec cette différence toutefois que, seulement approchée pour la section rectangle, cette formule est exacte pour la section elliptique.

Or M. Wertheim trouve que cette formule (91), qui nous est due, est d'accord avec ses expériences sur la torsion des cylindres à base d'ellipse lorsque la longueur est suffisamment grande. Nous ne voyons donc pas le motif de cette observation de l'honorable et

(1) 10 mai, *Comptes rendus*, t. XXIV, p. 849.

(2) 22 février, *id.*, p. 367, et 22 mars, p. 488.

conscientieux expérimentateur, que « dans la théorie de M. de Saint-Venant, cet accord prouverait que le premier gauchissement qui seul existerait dans des cylindres elliptiques et dont l'influence sur le moment de résistance à la torsion n'a pas été déterminée par ce géomètre, serait complètement négligeable sous ce rapport. »

Nous avons appelé, en février 1847, avant tout calcul et à la suite d'un simple raisonnement, *premier gauchissement* des sections celui qui est dû à l'inégalité de leurs deux dimensions, et qui existe seul pour une section elliptique, afin de le distinguer d'un deuxième gauchissement, dû à leurs angles saillants, et qui existe seul pour une section carrée (*Comptes rendus*, p. 263); et nous avons complètement, en mars et en mai, « déterminé l'influence » de l'un comme de l'autre (*id.*, p. 488 et 849). Celle du premier se trouve déterminée par la formule même (91) relative à l'ellipse, ou, si l'on veut, par son rapport  $\left(\frac{2bc}{b^2+c^2}\right)^2$  à  $G\theta J = G\theta \left(\frac{\pi bc^3}{64} + \frac{\pi b^3 c}{64}\right)$  qu'on aurait si la section restait plane au lieu de se gauchir. Cette influence est bien loin d'être « négligeable, » puisque, dans le cas  $\frac{b}{c} = 4$  des cylindres des expériences n<sup>os</sup> 12 et 14, le rapport en question a pour valeur  $\frac{64}{25} = 2,56$ ; et en tous cas elle est, d'après M. Wertheim, précisément ce que donne moyennement l'expérience.

En résumé, et autant que peuvent le permettre l'absence de mesure directe des coefficients d'élasticité de torsion des matières, l'ignorance où l'on est de leur contexture isotrope ou non isotrope, enfin les erreurs d'observation inévitables dans les expériences les mieux faites, et qui sont toujours accusées par les sinuosités et brisures des lignes représentant graphiquement la suite des résultats, on voit que celles de M. Wertheim confirment nos formules de torsion, comme avaient déjà fait les expériences plus anciennes de l'ingénieur Duleau et de l'académicien Savart.

§ 42. *Vibrations tournantes.* — *Leur équation différentielle.* — Bien que nous ayons le dessein de réserver pour une autre partie de notre travail la recherche générale des mouvements vibratoires des pièces élastiques et des conditions de résistance aux écarte-

ments moléculaires que ces mouvements amènent, nous croyons devoir parler ici, par anticipation, des vibrations tournantes, afin de compléter à peu près ce qui est relatif à la torsion, à ses effets et à la comparaison de ses formules avec l'expérience, et aussi de préparer un élément à la discussion qui occupera le 5<sup>e</sup> Appendice.

Ces sortes de vibrations consistent dans la suite des détorsions et torsions rapides et alternatives éprouvées par une tige élastique qu'on abandonne à elle-même après l'avoir tordue, ou bien que l'on frotte transversalement d'une certaine manière avec un archet dont l'action intermittente à de petits intervalles renouvelle les torsions suivies de détorsions.

Pour en déterminer la durée et les autres circonstances, considérons d'abord un état d'équilibre dans lequel la tige prismatique ou cylindrique serait sollicitée en tous ses points par des forces extérieures transversales qui tendent à lui imprimer, autour d'un certain axe longitudinal et intérieur, des torsions variant d'un bout à autre d'une manière continue. Soient :

$\psi$  l'angle (en arc d'un rayon = 1) dont sa section transversale  $\omega$  a tourné autour de cet axe par rapport à une des sections extrêmes dont elle est à la distance  $x$  ;

$\theta = \frac{d\psi}{dx}$  la torsion par unité de longueur, entre cette section et celle qui en est distante de  $dx$  ;

$G$  le coefficient d'élasticité de glissement de la matière (supposée d'abord d'égale texture dans les divers sens *transversaux*) ;

$M_1$  le moment de réaction de torsion sur  $\omega$ , ou le moment, autour de l'axe de torsion, des forces intérieures ou moléculaires qui agissent à travers cette section ; moment nécessairement égal, pour l'équilibre, à celui des forces extérieures qui agissent entre  $\omega$  et la deuxième section extrême ;

$J_1$  la fonction des dimensions et de la forme des sections transversales par laquelle on multiplie, dans les formules de la note du n<sup>o</sup> 156 (récapitulées à son § 40)  $G$  et la torsion  $\theta$  pour avoir le moment de torsion  $M_1$  (en sorte que  $J_1 =$  le moment d'inertie

polaire  $J = \frac{\pi r^4}{4}$  pour une section circulaire de rayon  $r$ ,

$J_1 = \frac{\pi}{16} \frac{b^3 c^3}{b^2 + c^2}$  pour une section elliptique de dimensions  $b, c$ ,

$J_1 = 0,84346 J = 0,84346 \frac{b^4}{6}$  pour un carré ayant pour côté  $b$ , etc.)

Si sur toutes les sections entre  $\omega$  et la deuxième extrémité, les forces extérieures qui font tordre étaient appliquées tangentielle-ment et distribuées comme on a dit à la note du n° 156 et comme l'indiquent les expressions de  $Gg'$  ou  $Gg_{xy}$ ,  $Gg''$  ou  $Gg_{xz}$  récapitulées aussi à son § 40, chaque portion de prisme comprise entre deux sections très-voisines se trouverait dans les conditions nécessaires à la parfaite exactitude des formules de torsion données à la même note, et l'on aurait rigoureusement partout

$$(92) \quad M_1 = GJ_1 \theta = GJ_1 \frac{d\psi}{dx}.$$

De même que nous avons regardé, en nous appuyant sur certains faits, cette expression comme suffisamment approchée pour les prismes d'une certaine longueur, sollicités par des forces appliquées et distribuées d'une autre manière mais agissant seulement aux deux extrémités où elles font couples, en sorte que la torsion  $\theta$  soit constante dans l'intervalle, nous la supposerons encore approximativement applicable pour une torsion variant d'un bout à l'autre continuellement et peu rapidement, et produite par des forces transversales faisant couples sur toutes les sections, mais distribuées sur chacune d'une manière quelconque, ou, du moins, de la manière qui va être plus particulièrement considérée (pour les *inerties*) et qui consiste en ce que ces forces, sur chaque élément  $d\omega$ , sont proportionnelles à sa superficie et au rayon vecteur, auquel elles sont perpendiculaires.

C'est une hypothèse du même genre que celle qu'on fait généralement pour la *flexion*, lorsqu'on applique la formule du moment

$$M = \frac{EI}{\rho}$$

au cas de forces transversales agissant d'une manière continue, comme le poids propre des pièces horizontales, ou la pression d'un fluide; et l'expérience prouve que l'approximation donnée par cette supposition est très-suffisante.

La formule (92) donnera, à l'aide de cette supposition, pour l'angle de torsion ou de rotation, à une distance  $x$  de l'extrémité prise pour origine, l'expression

$$(93) \quad \psi = \frac{1}{GJ_1} \int_0^x M_1 dx,$$

qu'on pourrait même appliquer à une section non constante mais variant d'une manière continue et peu rapide, en faisant passer  $J_1$  sous le signe  $\int$  ou en écrivant

$$(94) \quad \psi = \frac{1}{G} \int_0^x \frac{M_1}{J_1} dx.$$

Considérons maintenant une tige à laquelle aucune force extérieure n'est plus appliquée mais qui est agitée par des vibrations tournantes; et soient :

$\rho$  la densité de sa matière (ou le poids du mètre cube divisé par la gravité  $g = 9^m,809$ ),

$t$  le temps au bout duquel l'angle de rotation de  $\omega$  est  $\psi$ ,

$r$  le rayon vecteur de l'élément  $d\omega$  de la même section  $\omega$ , ou la ligne de jonction du centre de cet élément au point où l'axe immobile de torsion rencontre  $\omega$ ,

$J = \int r^2 d\omega$  le moment d'inertie polaire ou autour de ce point,

$a$  la longueur totale de la tige.

La seule force transversale ou perpendiculaire à l'axe de torsion qui anime l'élément matériel  $\rho d\omega dx$  de la tranche comprise entre  $\omega$  et la section qui en est distante de  $dx$ , est son *inertie*

$$- \rho d\omega dx \frac{d^2(r\psi)}{dt^2}$$

ou  $-\rho d\omega dx \cdot r \frac{d^2\psi}{dt^2}$  puisqu'on suppose que  $\psi$  est le même pour tous les points de chaque section. Il y a aussi une force d'inertie *longitudinale*  $-\rho d\omega dx \frac{d^2u}{dt^2}$  si  $u$  est, au bout du temps  $t$ , le petit déplacement longitudinal dont notre théorie de la torsion a révélé l'existence, mais nous n'avons pas besoin d'en tenir compte parce qu'elle n'a aucun moment autour de l'axe de torsion. On a donc, en multipliant l'inertie transversale par son bras de levier  $r$  et faisant la somme

$$GJ_1 \frac{d^2\psi}{dx^2} = - \int_0^a \rho dx \frac{d^2\psi}{dt^2} \int_0^\omega r^2 d\omega = - \rho J \int_0^a \frac{d^2\psi}{dt^2} dx.$$

Pour nous débarrasser de l'intégrale  $\int_x^a$  nous n'avons qu'à différentier par rapport à  $x$ ; nous aurons, pour sa différentielle, l'excès de  $\int_{x+dx}^a$  sur  $\int_x^a$  ou la quantité sous le  $\int$  prise en signe contraire; d'où, en divisant par  $dx$  :

$$GJ_1 \frac{d^2\psi}{dx^2} = \rho J \frac{d^2\psi}{dt^2};$$

équation qu'on pouvait poser directement en remarquant que la tranche d'épaisseur  $dx$  est sollicitée sur ses deux sections extrêmes par des couples ou des moments  $-GJ_1 \frac{d\psi}{dx}$  et  $GJ_1 \left( \frac{d\psi}{dx} + d. \frac{d\psi}{dx} \right)$  qui doivent, ensemble, faire équilibre aux forces d'inertie  $-\rho dx \frac{d^2\psi}{dt^2} r d\omega$  dont le moment total est  $-\rho dx \frac{d^2\psi}{dt^2} \int r^2 d\omega$ .

On a donc l'équation aux dérivées partielles du second ordre

$$(95) \quad \frac{d^2\psi}{dx^2} = \alpha^2 \frac{d^2\psi}{dt^2} \text{ en faisant } \frac{G}{\rho} \frac{J_1}{J} = \alpha^2.$$

Elle est exacte quand la tige est un cylindre à section circulaire (cas où  $J_1 = J$ ,  $\alpha = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$ ) car les forces d'inertie qui produisent la suite des détorsions et torsions sont appliquées et distribuées sur chaque section ou tranche mince précisément comme il le faut pour que la formule  $M_1 = GJ_1\theta$  soit rigoureuse. Pour toute autre forme de section elle n'est qu'approchée.

§ 43. *Durée ou nombre des vibrations tournantes du ton le plus grave.* — Or on démontre de deux manières, comme nous allons voir, que la durée de chacune des vibrations les plus longues de celles qui se font entendre simultanément est

$$(96) \quad \begin{cases} \frac{2a}{\alpha} = 2a \sqrt{\frac{\rho}{G} \frac{J}{J_1}} & \text{quand la tige est fixée aux deux bouts,} \\ & \text{libre aux deux bouts.} \\ \frac{4a}{\alpha} = 4a \sqrt{\frac{\rho}{G} \frac{J}{J_1}} & \text{quand elle est fixée à un bout, libre à l'autre.} \end{cases}$$

1° Par la méthode de d'Alembert (du problème de la corde vi-

branto). Elle consiste à se servir de l'intégrale sous forme finie de l'équation (95)  $\frac{d^2\psi}{dt^2} = a^2 \frac{d^2\psi}{dx^2}$ . Cette intégrale est

$$(97) \quad \psi = f(x+at) + F(x-at)$$

$f$  et  $F$  désignant deux fonctions arbitraires; car il en résulte

$$(98) \quad \frac{d\psi}{dx} = f'(x+at) + F'(x-at), \quad \frac{d\psi}{dt} = af'(x+at) - aF'(x-at),$$

d'où, par de nouvelles différentiations,  $\frac{d^2\psi}{dx^2} = a^2 \frac{d^2\psi}{dt^2}$ .

Or si la tige est fixée aux deux bouts de manière que ses sections extrêmes ne puissent tourner on a  $\psi = 0$  pour  $x = 0$  et pour  $x = a$ , d'où

$$(99) \quad 0 = f(at) + F(-at), \quad 0 = f(a+at) + F(a-at).$$

Comme  $at$  est une variable positive et indéfiniment croissante, ces deux égalités subsisteront si nous le remplaçons, dans la première, par  $x+at$ , et, dans la seconde, par  $x+a+at$ . Il en résultera deux autres égalités qui retranchées l'une de l'autre donnent

$$f(x+at+2a) = f(x+at);$$

d'où résulte que le premier terme  $f(x+at)$  de la valeur (97) de  $\psi$  ne change pas quand  $at$  croît de  $2a$ , ou  $t$  de  $\frac{2a}{a}$ ; par conséquent aussi quand on le fait croître de nouveau de  $\frac{2a}{a}$  et ainsi de suite. Il en est de même du second terme  $F(x-at)$ , car la première égalité (99) écrite  $F(-at) = -f(at)$  prouve que dès que la variable de la fonction  $F$  commence à devenir négative, ou que  $at$  devient  $> x$ , cette fonction est et reste égale et de signe contraire à la fonction  $f$  de la même variable prise positivement.

Donc  $\psi$  redevient bien le même périodiquement quand  $t$  augmente successivement de  $\frac{2a}{a}$  lorsque la tige est fixée aux deux bouts.

Et si elle est fixe au premier bout, libre au deuxième, on a  $\psi = 0$  pour  $x = 0$ , et la torsion  $\theta = \frac{d\psi}{dx} = 0$  pour  $x = a$ , ce qui donne

$$(100) \quad 0 = f(at) + F(-at),$$

et  $0 = f'(a+at) + F'(a-at)$  d'où en multipliant par  $adt$  et intégrant

$$(101) \quad \text{Constante} = f(a+at) - F(a-at).$$

Ces deux égalités (100) et (101) subsisteront en remplaçant la variable positive  $at$ , dans la première par  $x+at$ , et dans la seconde par  $x+a+at$ . Si ensuite on les ajoute ensemble on a

$$\text{Constante} = f(x+2a+at) + f(x+at),$$

qui retranché de

$$\text{Constante} = f(x+4a+at) + f(x+2a+at)$$

qui s'en déduit en remplaçant  $at$  par  $2a+at$ , donne :

$$f(x+at+4a) = f(x+at);$$

nouvelle égalité prouvant, avec (100)  $F(-at) = -f(at)$  que dès que la variable  $at$  devient  $> x$ , les deux termes de l'expression (97) de  $\psi$ , et par conséquent l'angle de torsion d'une section quelconque de la tige, redeviennent les mêmes périodiquement quand  $t$  augmente de  $\frac{4a}{\alpha}$ .

Enfin si elle est libre aux deux bouts (cas plus difficile à réaliser expérimentalement),

on a  $\frac{d\psi}{dx} = 0$  pour  $x = 0$  comme pour  $x = a$ , ce qui donne

$$0 = f'(at) + F'(-at), \quad 0 = f'(a+at) + F'(a-at),$$

d'où l'on déduira, en raisonnant comme dans le cas où les deux extrémités sont fixes, que les expressions (98) de  $\frac{d\psi}{dx}$  et  $\frac{d\psi}{dt}$ , c'est-à-dire la torsion et la vitesse angulaire en chaque point, redeviendront les mêmes quand  $t$  augmentera de  $\frac{2a}{\alpha}$ ; en sorte que la durée de la période, et le nombre des vibrations par seconde, seront les mêmes que quand les extrémités sont toutes deux fixes.

Les durées (96) ainsi déterminées seront bien celles des vibrations les plus longues, ou qui feront entendre les sons les plus graves, car la périodicité qu'on vient de démontrer n'empêche pas une périodicité à intervalles deux fois, trois fois... plus courts, qui aura lieu et qui sera manifestée par des sons simultanés plus aigus, lorsqu'il se formera des nœuds de vibration, ou que quelques sections resteront immobiles entre les deux sections extrêmes.



2° Par l'intégration en séries trigonométriques ou par la méthode de Taylor, Daniel Bernoulli, Lagrange. — L'équation aux dérivées partielles (95)  $\frac{d^2\psi}{dt^2} = \alpha^2 \frac{d^2\psi}{dx^2}$  est satisfaite en mettant pour  $\psi$  toute somme d'expressions

$$C e^{m'x} e^{m't}, \text{ où } C, m, m' \text{ sont des constantes,}$$

à condition que  $m'^2 = \alpha^2 m^2$ ; d'où  $\psi = \Sigma C e^{m'x} e^{\pm i m a t}$ . Mais comme l'amplitude inconnue  $\psi$  de la vibration n'est pas de nature à augmenter indéfiniment avec le temps,  $m$  doit être une quantité imaginaire. Nous le remplacerons par  $\pm m\sqrt{-1}$  sans partie réelle qui ne ferait que changer la valeur du coefficient arbitraire  $C$ . Remplaçons les deux exponentielles népériennes par les binômes trigonométriques équivalents, et donnons à  $C$  une partie imaginaire. Si nous écrivons à la suite l'un de l'autre les quatre termes compris dans

$$(\cos mx \pm \sqrt{-1} \sin mx) (\cos mat \pm \sqrt{-1} \sin mat)$$

en les multipliant chacun par quatre coefficients de la forme  $A + B\sqrt{-1}$ ,  $A' + B'\sqrt{-1}$ , etc., et si, effectuant les multiplications, nous prenons  $A, B$ , etc., de manière que les imaginaires disparaissent, il reste une expression

$$\psi = \Sigma (A \sin mx \sin mat + B \sin mx \cos mat + C \cos mx \sin mat + D \cos mx \cos mat),$$

où  $\Sigma$  est relatif à toutes les valeurs possibles des constantes  $A, B, C, D, m$ . Mais si la tige est fixée au premier bout on doit faire  $C = 0$ ,  $D = 0$  ou ne laisser subsister que les premiers termes entre parenthèses afin d'avoir

$$\psi = 0 \text{ pour } x = 0.$$

Si la tige est fixée au deuxième bout comme au premier, ou si  $\psi = 0$  pour  $x = a$ , il faut  $\sin ma = 0$ , d'où

$$ma = n\pi, \quad n \text{ étant un nombre entier quelconque;}$$

et si elle est libre à ce deuxième bout, ou si la torsion  $\frac{d\psi}{dx} = 0$  pour  $x = a$  il faut  $\cos ma = 0$  d'où

$$ma = \frac{2n-1}{2} \pi, \quad n \text{ étant un nombre entier.}$$

Enfin si elle est libre aux deux bouts, ou si  $\frac{d\psi}{dx} = 0$  pour  $x = 0$  comme pour  $x = a$ , on a  $A = 0, B = 0, C$  et  $D$  non nuls et  $\sin ma = 0$ , d'où  $m = \frac{n\pi}{a}$ .

On a donc, pour la tige fixée aux deux bouts

$$(102) \quad \psi = \sum_{n=1}^{\infty} \left( A \sin \frac{n\pi x}{a} t + B \cos \frac{n\pi x}{a} t \right) \sin \frac{n\pi}{a} x;$$

pour la tige libre aux deux bouts

$$(103) \quad \psi = \sum_{n=1}^{\infty} \left( C \sin \frac{n\pi x}{a} t + D \cos \frac{n\pi x}{a} t \right) \cos \frac{n\pi}{a} x;$$

et pour la tige fixée à un bout, libre à l'autre :

$$(104) \quad \psi = \sum_{n=1}^{\infty} \left( A \sin \frac{2n-1}{2a} \pi x t + B \cos \frac{2n-1}{2a} \pi x t \right) \sin \frac{2n-1}{2a} \pi x;$$

expressions qui manifestent bien que les tiges reviennent périodiquement au même état quand  $\frac{n\pi x}{a} t$  et  $\frac{2n-1}{2a} \pi x t$  augmentent de  $2\pi$ ,

ou, respectivement,  $t$  de  $\frac{2a}{n\pi}$  et de  $\frac{4a}{(2n-1)\pi}$  en sorte que les nombres  $N$  de vibrations du ton le plus grave sont bien conformes aux expressions (96).

§ 44. *Rapport du nombre des vibrations longitudinales au nombre des vibrations tournantes d'une même tige, dans un temps donné.* — Comme le nombre des vibrations par seconde est égal à l'unité divisée par la durée d'une vibration, si nous appelons

- $n'$  le nombre des vibrations tournantes,
- $n$  le nombre des vibrations longitudinales,

il résulte des formules de durée (96) qu'on a

$$(105) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Quand la ligne est fixée aux deux bouts ou libre aux deux bouts } N' = \frac{1}{2a} \sqrt{\frac{G J_1}{\rho J}} \\ \text{Id. à un seul bout } \dots \dots \dots N' = \frac{1}{4a} \sqrt{\frac{G J_1}{\rho J}} \end{array} \right.$$

Et comme, en supposant la tige animée de vibrations longitudi-

nales donnant lieu à des déplacements  $u$  égaux pour tous les points de chacune de ses sections  $\omega$ , la tranche dont la hauteur est  $dx$  a une inertie  $-\rho\omega dx \cdot \frac{d^2u}{dt^2}$  qui doit être tenue en équilibre par les tractions opposées  $-E\omega \frac{du}{dx}$  et  $E\omega \left( \frac{du}{dx} + d \frac{du}{dx} \right)$  sur ses deux bases  $\omega$ , ce qui donne cette équation, semblable à (95) :

$$(106) \quad \frac{d^2u}{dt^2} = \frac{E}{\rho} \frac{d^2u}{dx^2},$$

on trouvera, dans les deux mêmes circonstances relatives à l'immobilité des extrémités de la tige

$$(107) \quad \kappa = \frac{1}{2a} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad \text{et} \quad \kappa = \frac{1}{4a} \sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

On a donc pour le rapport du nombre des vibrations longitudinales au nombre des vibrations tournantes accomplies dans le même temps par une même tige prismatique, rapport qui se détermine, dans les expériences, au moyen des deux sons musicaux perçus :

$$(108) \quad \frac{\kappa}{\kappa'} = \sqrt{\frac{E J}{G J_1}}.$$

§ 45. *Application à une tige rectangulaire. Vérification, par les vibrations, de notre formule de torsion du prisme à base rectangle.*—On a, pour cette tige ou ce prisme,  $b$  et  $c$  étant toujours les deux côtés de la base, et

$$\mu'$$

le coefficient numérique, compris entre 0,843462 et 1, donné pour toutes les valeurs de  $\frac{b}{c}$  par le tableau de la page 362 (§ 40 de la note du n° 156) et par lequel il faut multiplier la formule de M. Cauchy  $\frac{G\theta}{3} \frac{b^3c^3}{b^2+c^2}$  pour avoir le moment de torsion  $M_1$  fourni par les séries transcendentes :

$$J_1 = \frac{M_1}{G\theta} = \frac{\mu'}{3} \frac{b^3c^3}{b^2+c^2}, \quad J = \frac{bc^3}{12} + \frac{b^3c}{12};$$

en sorte qu'on a pour le nombre des vibrations tournantes de la tige rectangulaire, dans l'unité de temps

$$(109) \quad N' = \frac{1}{2a} \frac{2bc}{b^2+c^2} \sqrt{\mu' \frac{G}{\rho}} \quad (1),$$

et, pour le rapport (108) du nombre des vibrations longitudinales au nombre des vibrations tournantes relatives à cette tige

$$(110) \quad \frac{N}{N'} = \frac{b^2+c^2}{2bc} \sqrt{\frac{1}{\mu'} \frac{E}{G}}.$$

Or voici un tableau comparatif des valeurs de  $\mu'$  fournies par notre théorie (tableau de la p. 362) et des valeurs *expérimentales*

(1) M. Cauchy trouve, au 4<sup>e</sup> volume des *Exercices de Math.*, formule (448) de la page 62 (66), l'expression suivante (en remplaçant ses notations  $\rho$ ,  $2i$ ,  $2h$ , par  $N'$ ,  $b$ ,  $c$ , et  $i = h$  par  $G$ )

$$N' = \frac{1}{2a} \frac{2bc}{b^2+c^2} \sqrt{\frac{2}{3} \frac{E}{\rho}};$$

ou ce que nous aurions si nous prenons pour  $M_1$  les deux tiers de la formule  $M_1 = \frac{G\theta}{3} \frac{b^2c^2}{b^2+c^2}$  du moment de torsion donnée par le même Savant.

Cela vient de ce qu'en établissant l'équation du mouvement vibratoire l'illustre analyste opère cette réduction d'un tiers, qu'il omet en établissant sa formule d'équilibre; réduction qui est forcée, comme nous l'avons vu par l'expression ( $v$ ) de la note du § 39 (p. 625), lorsqu'on a égard au décroissement parabolique des pressions du centre aux bords, ou lorsqu'on tient compte de termes d'ordre supérieur des développements en série entière en remplaçant  $c^2 \frac{d^3 p^o_{xz}}{dydz^2}$ ,  $b^2 \frac{d^3 p^o_{xy}}{dy^2dz}$  par leurs valeurs  $-8 \frac{d^2 p^o_{xz}}{dy}$ ,  $-8 \frac{d^2 p^o_{xy}}{dz}$  en fonction des termes d'ordre inférieur, tirés des équations ( $t$ ), qui ne sont autre chose que deux des équations définies ou équations de condition ( $s$ ), ( $f$ ) de cette même note, exprimant la nullité des pressions sur les faces latérales.

M. Cauchy pose en effet, au bas de la page 54, deux groupes d'équations (42) et (43) déduites de celles d'équilibre (38)  $\frac{dp_{xy}}{dx} + \frac{dp_{yy}}{dy} + \frac{dp_{yz}}{dz} = Y$ ,  $\frac{dp_{xz}}{dx} + \frac{dp_{yz}}{dy} + \frac{dp_{zz}}{dz} = Z$ , et qui reviennent, avec nos notations, (si l'on suppose nulles les forces accélératrices telles que la pesanteur), à

$$\frac{d}{dx} \frac{dp^o_{xy}}{dz} + \frac{d^2 p^o_{yy}}{dydz} + \frac{d^2 p^o_{yz}}{dz^2} = \rho \frac{d^2 w^o}{dt^2} \frac{dw^o}{dz}, \quad \frac{d}{dx} \frac{d^3 p^o_{xy}}{dy^2 dz} + \frac{d^4 p^o_{yy}}{dy^2 dz^2} + \frac{d^4 p^o_{yz}}{dy^2 dz^3} = \rho \frac{d^2}{dt^2} \frac{c^2 w^o}{dy^2 dz},$$

$$\frac{d}{dx} \frac{dp^o_{xz}}{dy} + \frac{d^2 p^o_{yz}}{dy^2} + \frac{d^2 p^o_{zz}}{dydz} = \rho \frac{d^2 w^o}{dt^2} \frac{dw^o}{dy}, \quad \frac{d}{dx} \frac{d^3 p^o_{xz}}{dy dz^2} + \frac{d^4 p^o_{yz}}{dy^2 dz^2} + \frac{d^4 p^o_{zz}}{dy dz^3} = \rho \frac{d^2}{dt^2} \frac{d^2 w^o}{dy dz^2};$$

et, entre ces quatre équations, il élimine ce qui vient des composantes  $p_{yy}$ ,  $p_{zz}$ ,

qu'on tire de (410) en supposant la tige isotrope ou en y faisant (§ 8 de la note du n° 452, p. 202).

$$\frac{E}{G} = \frac{5}{2},$$

et en y mettant pour  $\frac{N}{N}$  : 1° Les résultats qui m'ont été communiqués par M. Wertheim en 1849 (Comptes rendus 15 janvier, t. XXVIII, p. 72) de trois expériences sur des tiges carrées en fer, en verre ordinaire et en cristal, 2° ceux de *vingt et une* expériences sur des tiges tant carrées que rectangulaires qui forment le tableau de la p. 320 ou du § XXI du Mémoire inséré par le même auteur aux *Annales de chimie et de physique* en juin 1857.

$p_{yz}$ , en remplaçant d'abord, dans les premiers membres de la seconde et de la quatrième, les dérivées du 3<sup>e</sup> et du 4<sup>e</sup> ordre par leurs valeurs tirées de (c), (f) en fonction des dérivées d'ordre inférieur de deux unités, puis ensuite  $\frac{d^2 p_{yz}}{dx^2}$  et  $\frac{d^2 p_{yz}}{dy^2}$  par  $-\frac{8}{c^2} p_{yz}$  et  $-\frac{8}{b^2} p_{yz}$ . Il lui reste, en effaçant un terme du 4<sup>e</sup> ordre  $\frac{b^2 c^2}{96} \rho \frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{d^2 v^o}{dy^2 dz} + \frac{d^2 w^o}{dy dz^2} \right)$ :

$$\frac{2}{3} \frac{d}{dx} \left( b^2 \frac{dp_{xz}}{dy} - c^2 \frac{dp_{xy}}{dz} \right) = \rho \frac{d^2}{dt^2} \left( b^2 \frac{dv^o}{dy} - c^2 \frac{dw^o}{dz} \right),$$

équation qui, combinée avec (h bis) et avec (p) en remplaçant  $\theta$  par  $\frac{d\psi}{dx}$ , donne

$$\frac{d^2 \psi}{dt^2} = \frac{2}{3} \frac{b^2 c^2}{(b^2 + c^2) \left( \frac{b^2}{G'} + \frac{c^2}{G''} \right)} \frac{1}{\rho} \frac{d^2 \psi}{dx^2};$$

ou, précisément, quand  $G' = G'' = G$ , l'équation aux dérivées partielles (95)  $\frac{d^2 \psi}{dt^2} = \frac{G J_1}{\rho J_1} \frac{d^2 \psi}{dx^2}$  du mouvement vibratoire lorsqu'on fait  $J_1$  égale aux deux tiers de ce qui résulterait de l'adoption de la formule de M. Cauchy pour les prismes rectangles.

Cette remarque, faite aussi par M. Wertheim (mais dont il tire une autre conclusion), vient à l'appui de ce que nous avons dit de la nécessité de réduire d'un tiers cette formule, si l'on adhère au genre d'analyse qui l'a fournie, et par conséquent de l'abandonner, ou bien de ne s'en servir, à cause de sa forme commode, qu'affaiblie d'un coefficient numérique variable  $\mu'$  (table, p. 362) qui en fasse coïncider les résultats avec ceux de notre formule en série transcendante.

Rapport $\delta : c$ des côtés....	1	1	1	1	1	1,006	1	1,003	1,005	1,515	1,990
$\mu'$ d'après la théorie.....	0,843	0,843	0,843	0,843	0,843	0,843	0,843	0,843	0,843	0,848	0,853
$\mu'$ d'après les expériences	0,873	0,879	0,881	0,818	0,853	0,866	0,867	0,878	0,869	0,810	0,839
<i>Suite.</i> Rapport $\delta : c$											
	2,24	2,025	2,60	3,902	4,004	2,97	4,525	4,687	4,915	6,07	8,25
	8,56	11,50	0,863	0,878	0,888	0,894	0,895	0,895	0,903	0,904	0,908
	0,920	0,937	0,939	0,950	0,898	0,865	0,944	0,877	0,894	0,861	0,897
	0,861	0,896	0,837	0,868	0,897	0,863					

Les valeurs fournies par l'expérience sont, comme on voit, tantôt au-dessus tantôt au-dessous de celles qui résultent de notre formule théorique en série transcendante, et on ne saurait guère désirer un accord plus complet, vu la difficulté des observations et l'incertitude où l'on est sur l'isotropie des matières mises en expérience.

§ 46. *Observation sur l'amplitude des vibrations soit tournantes soit longitudinales ou transversales. Elle n'est bien utile à calculer qu'en supposant une masse étrangère unie à la tige immédiatement après le choc.*— Ce qui précède suffit à notre objet actuel.

Quant à l'amplitude  $\psi$  de la rotation dans le cas des vibrations tournantes, ou  $u$  du déplacement dans le cas des vibrations longitudinales, elle est bien aussi intéressante à connaître pour en déduire les plus grands glissements, qui dépendent de la torsion  $\theta = \frac{d\psi}{dx}$ , ou les plus grandes dilatations longitudinales  $\frac{du}{dx}$ , à limiter pour obtenir la stabilité de la cohésion; et cette connaissance s'obtient par la détermination des coefficients A, B, C, D des séries transcendantes telles que (402), (403), (404). Mais c'est lorsque les vibrations sont produites par des chocs qu'on est dans le cas de faire ces calculs de stabilité ou de *résistance vive*; et alors, comme la tige commence à vibrer accompagnée d'une masse étrangère (celle qui l'a heurtée), les coefficients  $m$  (§ 41) ont pour valeurs, non plus la suite des nombres naturels multipliés par  $\pi$  ou  $\frac{\pi}{2}$ , mais les diverses racines d'une équation transcendante, ainsi que nous le verrons par la suite, surtout pour les vibrations *transversales* (1);

(1) Société philomatique, 24 janvier 1854, ou Journal *l'Institut*, 15 février 1854. — *Comptes rendus de l'Académie*, 10 août 1857, t. XIV, p. 204.

et les coefficients A, B, C, D ont besoin d'être déterminés d'une autre manière que quand la tige est isolée comme dans les expériences sur les sons produits.

Disons seulement encore ici, pour l'éclaircissement de ce qui est relatif à une tige vibrant seule : 1° que la formule (102) du cas où les deux extrémités sont fixes, est identique à celle qui a été donnée par D. Bernoulli pour la corde vibrante, et prouve, si on suppose la vitesse initiale nulle ou  $\frac{d\psi}{dt} = 0$  pour  $t = 0$ , que le mouvement effectif résulte de la superposition d'une suite de mouvements vibratoire simples coexistants, dont chacun serait représenté par une expression comme celle de Taylor (1)  $\psi = B \sin \frac{n\pi}{a} x \cos \frac{n\pi x}{a} t$ , répondant au cas où la rotation initiale  $\psi$  des sections est supposée exprimée par  $\psi = B \sin \frac{n\pi}{a} x$ ; 2° que la suite des coefficients A, B, dont chacun répond à une valeur de  $n$ , se détermine facilement, pour une rotation initiale et une vitesse initiale connues quelconques  $\psi = \varphi x$  et  $\frac{d\psi}{dt} = \varphi_1 x$  pour  $t = 0$ , en employant le procédé dont il a été fait usage au § 25 de la note du n° 156 pour la torsion du prisme rectangle, c'est-à-dire en intégrant de  $x=0$  à  $x=a$  les deux membres des égalités  $\varphi x = \sum B \sin \frac{n\pi}{a} x$ ,  $\varphi_1 x = \frac{\pi x}{a} \sum n A \sin \frac{n\pi}{a} x$ , ou  $\varphi x = \sum B \sin \frac{2n-1}{2a} \pi x$ ,  $\varphi_1 x = \frac{\pi x}{2a} \sum (2n-1) A \sin \frac{2n-1}{2a} \pi x$ , après les avoir multipliées par le facteur  $dx \sin \frac{n\pi}{a} x$  ou  $dx \sin \frac{2n-1}{2a} \pi x$ , ce qui annule tous les termes des  $\sum$  hors celui où  $n$  a la même valeur que dans ce facteur. Il en résulte les mêmes formules qui sont données par Poisson aux 1° et 2° de l'art. 495 de la deuxième édition de son *Traité de mécanique* pour les vibrations longitudinales, en remplaçant  $u$ ,  $l$ ,  $a$ ,  $\varphi'$  par  $\psi$ ,  $a$ ,  $a$ ,  $\varphi_1$ . En conséquence, pour une torsion initiale constante  $\theta$ , d'un bout à l'autre de la tige libre à une extrémité et sans vitesse initiale, on aurait :

---

(1) *Methodus incrementorum directa et inversa* (Londini, 1715), p. 89. Prop. XXII, Probl. XVII (*definire motum nervi tensi*).

$$(111) \left\{ \begin{aligned} \psi &= \frac{8\theta_0 a}{\pi^2} \sum \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2} \sin \frac{2n-1}{2a} \pi x \cdot \cos \frac{2n-1}{2a} \pi a t, \\ 0 &= \frac{d\psi}{dx} = \frac{4\theta_0}{\pi} \left( \frac{1}{1} \cos \frac{\pi x}{2a} \cos \frac{\pi x t}{2a} - \frac{1}{3} \cos \frac{3\pi x}{2a} \cos \frac{3\pi x t}{2a} + \frac{1}{5} \cos \frac{5\pi x}{2a} \cos \frac{5\pi x t}{2a} - \dots \right). \end{aligned} \right.$$

5° APPENDICE. — *Discussion théorique et expérimentale détaillée, relative aux relations entre les coefficients des formules de l'élasticité des solides, et à la réductibilité de leur nombre. — Remarques sur les corps régulièrement cristallisés.*

§ 47. *Rappel de la réduction du nombre des coefficients soit pour une texture quelconque soit pour des textures particulières.* — Nous avons démontré, au 3° appendice, § 20, d'une manière élémentaire, les formules générales linéaires (12)

$$(112) \left\{ \begin{aligned} p_{xx} &= \mathfrak{a}_{xxxx} \partial_x + \mathfrak{a}_{xyxy} \partial_y + \mathfrak{a}_{xzzz} \partial_z + \mathfrak{a}_{xyzx} \mathfrak{g}_{yz} + \dots \\ p_{yy} &= \mathfrak{a}_{yyxx} \partial_x + \dots, \quad p_{zz} = \mathfrak{a}_{zzxx} \partial_x + \dots \\ p_{yz} &= \mathfrak{a}_{yzxx} \partial_x + \dots, \quad p_{zx} = \mathfrak{a}_{zzxx} \partial_x + \dots, \quad p_{xy} = \mathfrak{a}_{xyxx} \partial_x + \dots \end{aligned} \right.$$

des six composantes de pression développées à l'intérieur d'un corps pris dans son état naturel, par trois petites dilatations  $\partial_x$ ,  $\partial_y$ ,  $\partial_z$  et trois petits glissements  $\mathfrak{g}_{yz}$ ,  $\mathfrak{g}_{zx}$ ,  $\mathfrak{g}_{xy}$ , en partant de la seule loi physique des actions fonctions continues des très-petites distances entre les particules matérielles d'une ou de plusieurs espèces qui exercent ces actions les unes sur les autres.

Et, au § 21, nous avons fait voir, aussi très-simplement, *comme conséquence nécessaire de la même loi*, la réduction obligée des trente-six coefficients  $\mathfrak{a}$  de ces formules à quinze distincts, pour une texture absolument quelconque de la matière du corps.

Dans la note du § 23, nous avons donné, de cette forme linéaire des expressions (12), et des vingt et une égalités produisant cette réduction, une autre démonstration due à M. Cauchy, fondée toujours



seulement sur l'existence d'actions entre molécules disjointes, et qui s'étend au cas où il y avait, antérieurement aux déformations que déterminent les dilatations et glissements, des pressions dont les six composantes

$$p'_{xx}, p'_{yy}, p'_{zz}, p'_{yz}, p'_{xz}, p'_{xy}$$

portent alors à vingt et une le nombre des constantes entrant dans les formules des composantes  $p_{xx}, \dots, p_{xy}$  après ces déformations.

Il en résulte, lorsqu'il y a trois plans de symétrie, des formules à six coefficients a, b, c, d, e, f, au lieu de douze, puisque ceux que désignent les mêmes lettres avec ou sans accents, dans les expressions (30) du 2<sup>e</sup> appendice, sont égaux, comme on a dit, ce qui fait (formules 34) neuf constantes lorsqu'il y avait, antérieurement aux déplacements, trois pressions normales sur ces plans.

Et lorsqu'il y a isotropie ou égale élasticité autour de chaque point, il en résulte des formules (36) à un seul coefficient.

Mais, depuis quelques années, la réduction dont nous parlons a été contestée. Nous allons rapporter avec détail les motifs spécieux de cette contestation, et nous essayerons de montrer qu'il n'y a nullement lieu de s'y arrêter.

§ 48. *Conséquences de cette réduction pour les corps isotropes. Expérience confirmative de M. Cagniard de Latour. Première contestation, par M. Oersted (et qui porterait sur toutes les formules quels que fussent leurs coefficients).* — Les formules (36) du cas d'isotropie, obtenues en faisant  $e = e' = G$  dans (35), sont, lorsqu'il n'y avait pas de pressions antérieures aux déformations  $\delta, g,$

$$(113) \quad \begin{cases} p_{xx} = G(3\delta_x + \delta_y + \delta_z), & p_{yz} = Gg_{yz}, \\ p_{yy} = G(\delta_x + 3\delta_y + \delta_z), & p_{xz} = Gg_{xz}, \\ p_{zz} = G(\delta_x + \delta_y + 3\delta_z), & p_{xy} = Gg_{xy}, \end{cases}$$

d'où ces conséquences, déjà tirées en partie ci-dessus, et dont la 2<sup>e</sup>, la 4<sup>e</sup>, la 5<sup>e</sup> ont été reconnues pour la première fois par Poisson en 1827 (1).

1<sup>o</sup> Une dilatation d'un corps isotrope produit une pression nor-

(1) *Annales de chimie et de physique*, 3<sup>e</sup> série, t. XXXVI (1827), p. 385, et t. XXXVIII (1828), p. 330.

male trois fois plus forte sur un plan perpendiculaire à sa direction que sur un plan parallèle (1).

2° Quand un prisme isotrope, dont les faces latérales sont libres, est tiré ou pressé uniformément sur ses deux bases, il éprouve des contractions ou dilatations transversales dont la proportion est du 1/4 de la proportion de sa dilatation ou contraction longitudinale; et par conséquent sa section transversale diminue dans une proportion moitié de celle-ci. En effet (comme on a déjà vu au § 34), si  $x$  est le sens longitudinal, on tire de  $p_{yy} = 0$ ,  $p_{zz} = 0$  qui expriment que les faces latérales du prisme et de ses éléments prismatiques n'éprouvent aucune action,  $\partial_y = \partial_z = -\frac{\partial_x}{4}$ .

3° Le coefficient d'élasticité  $E = \frac{p_{xx}}{\partial_x}$  d'extension longitudinale ou de flexion est égal à 2 fois  $\frac{1}{2}$  le coefficient d'élasticité  $G$  de glissements ou de torsion. Car lorsque  $\partial_y = \partial_z = -\frac{\partial_x}{4}$  on a  $p_{xx} = \frac{5}{2} G \partial_x$ , d'où  $E = \frac{5}{2} G$ .

(1) C'est ce que nous avons démontré au § 8 de la note du n° 452, p. 499-200, d'une manière différente de celle du § 25 des Appendices, et qui se rapporte aux considérations de la note du § 23, p. 570.

A et G étant, comme à cette note du n° 452, les coefficients de  $\partial_x$  dans  $p_{xx}$  et dans  $p_{xz}$ , on a, avec nos désignations actuelles (note citée du § 23)

$$A = \frac{\rho}{2} S m r^3 \left( \frac{dR}{dr} \right) \cos^4 r x, \text{ et } G = \frac{\rho}{2} S m r^3 \left( \frac{dR}{dr} \right) \cos^2 r x \cos^2 r z.$$

Et si  $x'$ ,  $z'$  sont deux directions bissectrices des angles de  $x$  avec  $z$ , d'où

$$\cos r x = (\cos r x' - \cos r z') \sqrt{\frac{1}{2}}, \quad \cos r z = (\cos r x' + \cos r z') \sqrt{\frac{1}{2}},$$

la démonstration citée de  $A = 3G$  revient (p. 200) à élever à la quatrième puissance la première de ces deux expressions et à la substituer dans celle de  $A$ , puis à développer et à effacer, vu la symétrie moléculaire, les sommes où il entre des puissances impaires des cosinus.

Mais on arrive au même résultat plus simplement et sans faire ces suppressions fondées sur la supposition de molécules égales se correspondant deux à deux, en mettant à la fois pour  $\cos r x$  et pour  $\cos r z$  leurs valeurs en  $\cos r x'$ ,  $\cos r z'$  dans l'expression de  $G$  qu'on vient d'écrire, car en il résulte

$$G = \frac{\rho}{2} S m r^3 \left( \frac{dR}{dr} \right) \cdot \frac{1}{4} (\cos^4 r x' - 2 \cos^2 r x' \cos^2 r z' + \cos^4 r z') = \frac{1}{4} (A - 2G + A),$$

d'où  $3G = A$ ,

4° La dilatation ou contraction *cubique* du même prisme, ou la proportion de l'augmentation ou diminution de son volume, sous cette traction ou pression exercée sur ses bases, est moitié de sa dilatation linéaire longitudinale. En effet, alors,  $\delta_x + \delta_y + \delta_z =$

$$\delta_x - \frac{\delta_x}{4} - \frac{\delta_x}{4} = \frac{\delta_x}{2}.$$

5° La contraction cubique  $c$  subie par un corps isotrope qui éprouve sur toute sa surface une pression constante (telle que celle d'un fluide) est les  $\frac{3}{2}$  de la contraction ou dilatation linéaire  $\delta$  subie par un prisme de même matière supportant une pression ou traction égale à celle-ci par unité superficielle de ses bases seulement. En effet, rappelons ce qu'on a dit au § 33, que dans le cas d'une pression uniforme  $q$  (pression proprement dite ou non traction) par unité superficielle sur toute la surface, les équations indéfinies (38) et définies (39) sont satisfaites par  $p_{xx} = p_{yy} = p_{zz} = -q$ ,

$p_{yz} = 0, p_{zx} = 0, p_{xy} = 0$ , d'où  $\delta_x = \delta_y = \delta_z = \frac{-q}{5G}$ , ou contraction cu-

bique  $c = -\delta_x - \delta_y - \delta_z = \frac{3q}{5G} = \frac{3}{2} \frac{q}{E} = \frac{3}{2} \delta$ . Et, si l'isotrope est par-

faite, cette conséquence  $c = \frac{3}{2} \delta$  s'applique aussi à la diminution proportionnelle de la capacité d'un vase de forme quelconque sous une pression uniforme  $q$  subie extérieurement et intérieurement, car il se changera en un solide exactement semblable ayant un volume moindre dans cette proportion  $c = \frac{3}{2} \frac{q}{E}$ , comme s'il était plein.

Une expérience faite en 1827 par M. Cagniard de Latour, qui dilatait de 0<sup>m</sup>,006, ou de  $\frac{1}{336}$  de sa longueur, un fil de laiton de 2<sup>m</sup>,03 plongé dans l'eau d'un tube ayant une section à peu près double de la sienne, et qui mesurait par l'abaissement du niveau de cette eau la diminution ou contraction correspondante de la section du fil, avait confirmé la deuxième de ces conséquences, dont toutes les autres suivent (1).

Mais, vers le même temps, M. Oersted (2), rejetant une correction récemment proposée par MM. Colladon et Sturm (3) aux résultats

(1) *Annales de chimie et de physique*, 2<sup>e</sup> série, t. XXXVI, p. 385.

(2) *Idem*, t. XXXVIII (1828), p. 326.

(3) *Idem*, t. XXXVI, p. 443 et 225.

des expériences de compression de l'eau dans les *piézomètres* ou petites bouteilles ouvertes à col capillaire gradué, dans lesquelles et en même temps autour desquelles on exerce une forte pression, contestait un principe contenu dans la cinquième conséquence ci-dessus, à savoir que la diminution proportionnelle du volume et de la capacité d'un solide creux dont l'extérieur et l'intérieur sont soumis à la même pression constante, est la même que celle qui aurait lieu si l'évidement était un solide plein. M. Oersted, persistant dans une opinion qu'il avait émise en 1823 <sup>(1)</sup>, soutenait au contraire que les pressions égales s'exerçant à l'intérieur et à l'extérieur n'avaient d'autre effet que de diminuer l'épaisseur de la paroi du piézomètre sans changer ses autres dimensions, en sorte que, suivant lui, l'abaissement de l'index dans le col capillaire gradué donnait bien la contraction *réelle* du liquide, à cela près d'une quantité tout à fait négligeable, sans avoir besoin d'y ajouter, comme MM. Colladon et Sturm, la diminution de capacité du piézomètre, évaluée en multipliant cette capacité par la compressibilité cubique du verre <sup>(2)</sup>. Il appuyait son assertion critique de deux expériences comparatives faites avec une bouteille en verre et avec une bouteille *en plomb*, qu'il regardait comme dix-huit fois plus compressible que le verre; expériences qui lui donnaient pour la diminution du volume de l'eau, sous une atmosphère, deux nombres dont la très-petite différence n'excédant pas 2 millionièmes de ce volume, prouvait, à son sens, que dans ces sortes d'expériences le changement de la capacité du vase devait être négligé.

<sup>(1)</sup> *Annales de chimie et physique*, 2<sup>e</sup> série, t. XXI, p. 99, et XXII, p. 192.

<sup>(2)</sup> MM. Colladon et Sturm, après avoir mesuré la dilatabilité linéaire d'une baguette prismatique de verre, qu'ils étendaient par traction longitudinale, la triplaient pour avoir la dilatabilité ou compressibilité cubique, en sorte qu'ils prenaient  $c = 3\delta$  au lieu de  $c = \frac{3}{2}\delta$ . C'est que MM. Poisson et Cauchy n'avaient pas encore démontré que la dilatation longitudinale d'un prisme dont les faces latérales sont libres est accompagnée d'une diminution d'épaisseur, et qu'elle a ainsi une valeur double de la contraction déterminée par une pression qui s'exerce sur toute la surface d'un solide. M. Aimé (*Ann. de ch. et de phys.*, 1843, 3<sup>e</sup> série, t. VIII, p. 357), fait la correction en multipliant par  $c = \frac{3}{2}\delta$ , conformément à la 5<sup>e</sup> conséquence ci-dessus, la capacité du piézomètre.

§ 49. *Remarque de M. Regnault sur le défaut général d'isotropie des solides employés dans les expériences.* — On sait que M. Regnault a fait précéder ses belles recherches sur les gaz et les vapeurs, d'expériences nouvelles de compression des liquides dans des piézomètres.

Tout en trouvant sans fondement l'objection ci-dessus de M. Oersted à laquelle il a été répondu suffisamment depuis (voyez ci-après), et en admettant, comme MM. Colladon et Sturm et comme M. Aimé, la nécessité d'avoir égard à la diminution de capacité des vases que l'on comprime en même temps que le liquide qu'ils contiennent, l'illustre académicien fait la remarque suivante, expliquant d'avance et judicieusement les désaccords plus ou moins sensibles qui pourraient être trouvés entre les résultats d'expériences et les formules pratiques *alors connues*, toutes déduites d'expressions théoriques *relatives aux seuls corps isotropes* (1).

« On ne peut pas se dissimuler que les formules mathématiques...  
 « ne présentent de grandes incertitudes.... Les géomètres admettent que les molécules d'un corps solide se meuvent avec une  
 « égale facilité dans tous les sens, ou qu'un déplacement égal, suivant une direction quelconque, développe toujours une force de  
 « réaction égale. Cette proposition est certainement inexacte,  
 « même dans les corps à cristallisation confuse. Il est très probable qu'une molécule d'un corps solide éprouve des résistances  
 « très-inégales dans ses déplacements en divers sens..... »

C'était, comme l'on voit, attribuer les désaccords qui pourraient être rencontrés, à une *élasticité inégale* ou à un *défaut d'isotropie* de la matière des vases mis en expérience. C'était accuser ou suspecter, non pas les formules établies pour des corps solides qui seraient certainement d'égal élasticité en tous sens, mais la supposition que cette égalité fût ordinaire tandis qu'il la regardait comme extrêmement rare, et n'ayant même jamais lieu parfaitement.

M. Regnault signalait d'ailleurs, un peu plus loin, l'incertitude

(1) Relation des expériences entreprises pour déterminer les principales lois physiques et les données numériques qui entrent dans le calcul des machines à vapeurs. Première partie, 1847, in-4° (ou t. XXI des *Mémoires de l'Institut*); 7° mémoire, *De la compressibilité des liquides*, p. 432.

que peut offrir la *correction*, calculée au moyen d'un coefficient d'élasticité qu'on détermine sur une tige de verre, vu que la texture de cette tige pleine peut être toute différente, comme il le remarque, de celle du piézomètre, dont les parois minces ne sont probablement pas constituées de la même manière « dans le sens longitudinal et dans le sens transversal ; » observation qui se rapporte bien encore, comme l'on voit, au défaut d'isotropie.

§ 50. *Interprétation différente des faits par M. Wertheim.* — Mais M. Wertheim, invité alors par M. Regnault à se livrer à des recherches sur ce sujet digne de son habileté, crut devoir interpréter autrement les faits constatés par lui; et, ne mettant nullement en doute l'*homogénéité* (c'est-à-dire, dans l'acception qu'il y attache, l'*isotropie*) du laiton et du verre des cylindres creux dont il mesurait simultanément la dilatation linéaire longitudinale et l'augmentation proportionnelle ( $\partial_x + \partial_y + \partial_z$ ) de capacité intérieure par une traction dans le sens de la longueur, il attribua le désaccord entre les résultats de ses expériences et l'expression ci-dessus ( $\partial_x + \partial_y + \partial_z = \frac{\partial \sigma}{2}$ , 4<sup>e</sup> conséquence) relative, comme on a dit, aux seuls corps isotropes, à ce que les formules théoriques (113) trouvées par MM. Navier, Cauchy, Poisson, Lamé et Clapeyron pour les corps d'égale élasticité en tous sens étaient entachées d'une grave erreur et avaient besoin d'être profondément modifiées.

Il s'appuya pour cette modification sur divers passages des écrits de M. Cauchy, que nous allons citer et discuter avec détail.

§ 51. *Remarque sur ce qui peut prêter à confusion, à cet égard, dans les écrits de M. Cauchy.* — On connaît le caractère général de surabondance des travaux de ce grand analyste, et la multiplicité des points de vue sous lesquels il présente les matières qu'il traite, sans exprimer de préférence et en laissant le plus souvent à ses lecteurs le soin de la discussion et du choix.

Or, au troisième volume (1828) du recueil de mémoires qu'il a publiés comme une suite de simples *Exercices de mathématiques*, après avoir démontré qu'il y a toujours, en chaque point d'un corps élastique déformé, trois dilatations ou condensations linéaires principales, et trois tensions ou pressions principales, aussi ortho-

gonales, autour desquelles toutes les autres grandeurs de même espèce se distribuent symétriquement comme les diamètres d'un ellipsoïde autour de ses trois axes, M. Cauchy observe que si le corps a la même élasticité en tous sens, les directions de ces trois pressions doivent évidemment être les mêmes que celles de ces trois dilatations. Puis il ajoute (p. 167, 168) « qu'il semble naturel de « supposer, du moins quand les déplacements sont très-petits, que « les trois pressions sont proportionnelles respectivement aux trois « dilatations. » Mais les résultats de cette hypothèse, reproduite d'un mémoire de 1822 (\*), ne le satisfont bientôt plus, et il la modifie ou la complète (p. 177-178) en supposant que les valeurs des pressions principales se composent de deux parties, l'une toujours mesurée par la dilatation linéaire principale correspondante multipliée par un certain coefficient constant  $k$ , l'autre égale à la dilatation cubique ou à la somme des trois dilatations linéaires au même point, multipliée par un autre coefficient  $\kappa$ . De cette hypothèse nouvelle, il déduit analytiquement, pour trois autres plans rectangulaires quelconques, par exemple pour ceux qui sont perpendiculaires aux coordonnées  $x, y, z$ , des composantes de pression de même forme que celles qui s'accordent avec les équations d'équilibre indéfinies et définies de Navier, mais avec deux coefficients au lieu d'un seul, savoir

$$(114) \left\{ \begin{array}{l} p_{xx} = k \frac{du}{dx} + \kappa \left( \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} \right), \quad p_{yy} = \frac{1}{2} k \left( \frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy} \right), \\ p_{yy} = k \frac{dv}{dy} + \kappa \left( \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} \right), \quad p_{zz} = \frac{1}{2} k \left( \frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz} \right), \\ p_{zz} = k \frac{dw}{dz} + \kappa \left( \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} \right), \quad p_{xy} = \frac{1}{2} k \left( \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} \right), \end{array} \right.$$

formules qui reviennent à (35) ci-dessus (3<sup>e</sup> appendice, p. 581) en remplaçant

$$e \text{ par } \frac{1}{2} k, \text{ et } e' \text{ par } \kappa,$$

---

(\*) *Bulletin de la Société philomathique*, janvier 1823, p. 9. Note relative à des recherches entreprises à l'occasion d'un mémoire de M. Navier du 4<sup>e</sup> août 1820 (*id.*, p. 72) sur la flexion des plans élastiques. M. Cauchy y donne pour la première fois sa théorie des pressions intérieures, généralement obliques aux faces où elles s'exercent, et de leurs relations en divers sens et aux divers points d'un corps quelconque.

et qui conduisent identiquement aux équations de Navier en faisant  $k = 2\kappa$ . M. Cauchy les applique, dans la dernière partie du tome de 1828 (p. 256, 338, 357), à des problèmes d'équilibre et de mouvement vibratoire en faisant

$$\frac{k + \kappa}{\kappa} = \theta,$$

ou en mettant  $\kappa(\theta - 1)$  à la place de  $k$ , et sans donner habituellement au rapport  $\theta$  la valeur = 3 répondant à  $k = 2\kappa$ , parce que les intégrations qu'il opère sont tout aussi faciles en laissant  $\theta$  indéterminé.

Mais, intermédiairement, ou entre ces deux parties du même volume de 1828, M. Cauchy, dans deux admirables Mémoires (sur l'*Équilibre d'un système de points matériels*, et sur la *Pression ou tension dans un pareil système*) ne part d'aucune autre hypothèse que de celle qui consiste à regarder les corps comme composés de points sollicités par des actions mutuelles fonctions de leurs distances; et, par une suite de déductions exactes ou en ne se servant ni de l'intégration autour d'un point comme Navier, ni, comme Poisson, de la considération peu rigoureuse d'un espacement moyen des molécules <sup>(1)</sup> suivie d'un recours à une sorte d'intégration à laquelle il renonce en 1829 <sup>(2)</sup> sans abandonner l'opinion qui la rendait possible, savoir « que les actions entre les molécules les plus voisines peuvent être négligées » <sup>(3)</sup> M. Cauchy, disons-nous, en se passant de tous ces auxiliaires peu sûrs, arrive le premier à des formules générales et complètes des six composantes de pression développées par de petits déplacements dans un corps d'une texture moléculaire absolument quelconque.

Et ces formules, étant particularisées pour le cas de l'isotropie et d'un état primitif naturel ou qui soit un état d'équilibre sans pression, ne sont autre chose que les formules (114) avec

$$k = 2\kappa,$$

c'est-à-dire les formules ci-dessus (36) ou (113) à un seul coefficient,

<sup>(1)</sup> Mémoire du 4<sup>e</sup> avril 1828 au t. VIII de l'Institut, p. 374.

<sup>(2)</sup> Mémoire au 20<sup>e</sup> cahier du *Journal de l'École polytechnique*, p. 32.

<sup>(3)</sup> Mémoire du 4<sup>e</sup> avril 1828, p. 378.



qui s'écrivent, en exprimant les dilatations et glissements au moyen des déplacements  $u, v, w$  supposés très-petits (§ 29)

$$(115) \left\{ \begin{array}{l} p_{xx} = G \left( 3 \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} \right), \quad p_{yy} = G \left( \frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy} \right), \\ p_{yy} = G \left( \frac{du}{dx} + 3 \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} \right), \quad p_{zz} = G \left( \frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz} \right), \\ p_{zz} = G \left( \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + 3 \frac{dw}{dz} \right), \quad p_{xy} = G \left( \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} \right). \end{array} \right.$$

Mais voici, il faut le dire, une chose qui prête à confusion dans ce beau travail. L'éminent géomètre, embrassant le cas général où il y avait des pressions avant les déformations, donne des formules à 24 constantes, savoir 15 coefficients, et 6 composantes  $p'_{xx}, p'_{yy}, \dots$  de ces pressions primitives; et ces formules, qui sont celles de notre note ci-dessus du § 23, p. 572, relatives au cas où les déplacements  $u, v, w$  sont très-petits, et où les plans de pression, après comme avant les déplacements, sont perpendiculaires aux coordonnées fixes  $x, y, z$ , se réduisent, lorsque ce sont trois plans de symétrie de contexture, à la forme suivante (p. 230 des *exercices*).

$$(116) \left\{ \begin{array}{l} p_{xx} = p'_{xx} + (a + p'_{xx}) \frac{du}{dx} + (f - p'_{xx}) \frac{dv}{dy} + (e - p'_{xx}) \frac{dw}{dz}, \\ p_{yy} = p'_{yy} + (f - p'_{yy}) \frac{du}{dx} + (b + p'_{yy}) \frac{dv}{dy} + (d - p'_{yy}) \frac{dw}{dz}, \\ p_{zz} = p'_{zz} + (e - p'_{zz}) \frac{du}{dx} + (d - p'_{zz}) \frac{dv}{dy} + (c + p'_{zz}) \frac{dw}{dz}, \\ p_{yz} = (d + p'_{yz}) \frac{dv}{dz} + (d + p'_{yz}) \frac{dw}{dy}, \\ p_{zx} = (e + p'_{zx}) \frac{dw}{dx} + (e + p'_{zx}) \frac{du}{dz}, \\ p_{xy} = (f + p'_{xy}) \frac{du}{dy} + (f + p'_{xy}) \frac{dv}{dx}, \end{array} \right.$$

et, par conséquent, pour un corps isotrope, en faisant  $p'_{xx} = p'_{yy} = p'_{zz} = p'$ ,  $a = b = c = 3d = 3e = 3f = 3G$ , à

(<sup>1</sup>) Dans les formules de M. Cauchy (p. 430) les  $p'$  sont désignés par  $GA, HA, IA$ ; et ce que nous appelons  $a, b, c, d, e, f$  par  $LA, MA, NA, PA, QA, RA$ .

$$(117) \left\{ \begin{aligned} p_{xx} &= p_0 + (3G + p_0) \frac{du}{dx} + (G - p_0) \frac{dv}{dy} + (G - p_0) \frac{dr}{dz}, \\ p_{yy} &= p_0 + (G - p_0) \frac{du}{dx} + (3G + p_0) \frac{dv}{dy} + (G - p_0) \frac{dw}{dz}, \\ p_{zz} &= p_0 + (G - p_0) \frac{du}{dx} + (G - p_0) \frac{dv}{dy} + (3G + p_0) \frac{dw}{dz}, \\ p_{yz} &= (G + p_0) \left( \frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy} \right), p_{zx} = (G + p_0) \left( \frac{dr}{dx} + \frac{du}{dz} \right), p_{xy} = (G + p_0) \left( \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} \right) \end{aligned} \right. (1).$$

Or M. Cauchy, dans la pensée (on peut le présumer) de fournir une sorte de vérification de ses précédentes formules à deux coefficients  $k$  et  $K$ , basées sur une hypothèse tout autre, à lui particulière (et non encore justifiée suffisamment comme on vient de le dire), fait

$$G + p_0 = \frac{1}{2} k, \quad G - p_0 = K,$$

ce qui change les formules précédentes (102) en

$$(118) \left\{ \begin{aligned} p_{xx} &= \frac{k-2K}{4} + k \frac{du}{dx} + K \left( \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} \right), & p_{yz} &= \frac{1}{2} k \left( \frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy} \right), \\ p_{yy} &= \frac{k-2K}{4} + k \frac{dv}{dy} + K \left( \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} \right), & p_{zx} &= \frac{1}{2} k \left( \frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz} \right), \\ p_{zz} &= \frac{k-2K}{4} + k \frac{dw}{dz} + K \left( \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} \right), & p_{xy} &= \frac{1}{2} k \left( \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} \right), \end{aligned} \right.$$

toutes pareilles à (114) sauf la constante  $\frac{k-2K}{4}$  ajoutée aux trois premières.

Il est fâcheux, il faut le reconnaître, que des formules comme (114) et (118), relatives à deux cas différents, aient été, ainsi, rendues semblables par les mêmes notations  $k$ ,  $K$  qui représentent, dans les premières, de tout autres quantités que dans les secondes, puisque, dans le cas de celles-ci, il y a des pressions antérieures  $p_0$  qui étaient supposées ne pas exister dans le cas des premières (114), et qui seules causent dans (117) et (118) la dualité des coefficients.

Et ce qui augmente la confusion, c'est qu'on trouve, aux pages 204 et 205 du même tome III (1828) des *Exercices*, des formules semblables à (118), mais sans leurs termes constants, et qui par une autre similitude de notations, semblent encore représenter

(1) Exercices, t. IV, p. 156, formules (28) et (29).

les composantes normales de pressions  $p_{xx}$ ,  $p_{yy}$ ,  $p_{zz}$  après les déplacements, tandis qu'elles ne représentent que les excès

$$p_{xx} - p^{\circ}_{xx}, p_{yy} - p^{\circ}_{yy}, p_{zz} - p^{\circ}_{zz}, \text{ ou } p_{xx} - \frac{1}{h}(k - 2\kappa), p_{yy} - \text{etc.},$$

de ces pressions sur les pressions qui avaient lieu avant les déplacements, et dont on suppose que les produits par les dérivées des déplacements,  $u$ ,  $v$ ,  $w$  ne sont pas négligeables; en sorte que, malgré une sorte de rectification que fait M. Cauchy dans un article additionnel (p. 327), où il rétablit le terme constant  $\frac{k-2\kappa}{h} = \frac{\kappa(0-3)}{h} = p_0$  des formules (118), il peut paraître, à une première lecture, que les formules de pressions dans les corps isotropes dont l'état primitif était un état d'équilibre naturel peuvent encore être à deux coefficients  $k$ ,  $\kappa$  sans relation théorique entre eux, lorsqu'on dresse ces formules sans autre hypothèse que de regarder ces corps comme composés de points matériels qui agissent les uns sur les autres.

§ 52. *Formules proposées par M. Wertheim. Conséquences des formules à deux coefficients.* — C'est là ce qu'a pensé M. Wertheim. Il cite d'abord <sup>(1)</sup> les formules (116) du cas de trois plans de symétrie, mais sans les termes constants ou non affectés de  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , qui sont les quantités appelées par nous  $p^{\circ}_{xx}$ ,  $p^{\circ}_{yy}$ ,  $p^{\circ}_{zz}$  entrant aussi dans les termes affectés de ces déplacements; puis, particulierisant pour le cas d'isotropie ou d'égale élasticité, non-seulement il fait  $p^{\circ}_{xx} = p^{\circ}_{yy} = p^{\circ}_{zz}$ ,  $a = b = c$ ,  $d = e = f$ , mais, même, il admet avec M. Cauchy

$$a = 3d;$$

ou, avec nos notations,  $a = 3G$  (puisque  $d = e = f$  est le coefficient  $G$  de glissement de Navier).

Mais, d'une autre part, M. Wertheim n'admet point

$$k = 2\kappa,$$

ou  $k = 2(G + p_0)$  double de  $\kappa = G - p_0$ ;  $p_0$  pouvant, dit-il, n'être pas nul ni négligeable devant  $G$  (quoiqu'il paraisse bien supposer que l'état

---

(1) Mémoire sur l'équilibre des corps solides homogènes, présenté le 40 février 1818 (*Ann. de ch. et de ph.*, 3<sup>e</sup> série, t. XXIII). — Et, aussi, Mémoire sur la torsion, présenté le 19 février 1855 (*idem*, juin 1857, p. 244).

du corps antérieurement aux déformations est un état d'équilibre naturel où les pressions sont nulles).

Et comme diverses expériences lui paraissent représentées approximativement par les formules (114), ou par (118) sans le terme constant  $\frac{k-2\kappa}{4}$  en faisant, au lieu de  $k=2\kappa$ ,

$$k = \kappa,$$

le savant physicien propose, au lieu des formules d'isotropie (113) ou (115) admises avant lui, les formules nouvelles suivantes

$$(119) \left\{ \begin{array}{l} p_{xx} = k \left( 2 \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} \right), \quad p_{yy} = \frac{k}{2} \left( \frac{dv}{dx} + \frac{dw}{dy} \right), \\ p_{yy} = k \left( \frac{du}{dx} + 2 \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} \right), \quad p_{zz} = \frac{k}{2} \left( \frac{dv}{dx} + \frac{dw}{dz} \right), \\ p_{zz} = k \left( \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + 2 \frac{dw}{dz} \right), \quad p_{xy} = \frac{k}{2} \left( \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} \right), \\ \text{ou } p_{xx} = k(2\delta_x + \delta_y + \delta_z), \quad p_{yy} = \dots, \quad p_{zz} = \dots, \quad p_{yz} = \frac{k}{2} \delta_{yz}, \quad p_{zx} = \dots, \quad p_{xy} = \dots \end{array} \right.$$

qui donneraient ces conséquences modifiées (au lieu de celles du § 48), que nous généralisons aussi pour  $\frac{k}{K}$  quelconque :

1° Une dilatation d'un corps isotrope produit une pression normale deux fois plus forte (au lieu de trois fois) sur un plan perpendiculaire que sur un plan parallèle à sa direction. Ce serait généralement  $\frac{k+K}{K}$  fois;

2° Les contractions transversales sont le  $\frac{1}{3}$ . (au lieu du  $\frac{1}{4}$ ) de la dilatation longitudinale d'un prisme dont les faces latérales sont libres. — Car les formules (114) avec  $k$  et  $K$  quelconques, si on fait  $p_{yy} = 0, p_{zz} = 0$ , donnent  $\delta_y = \delta_z = -\frac{K}{k+2K} \delta_x$ ; c'est-à-dire ( $\eta$  représentant comme ci-dessus  $\frac{-\delta_y}{\delta_x}$ ),  $\frac{1}{\eta} = \frac{K}{k} + 2$ , ou  $\eta = \frac{1}{3}$  si  $k=K$ ;

3° On a  $E = \frac{8}{3} G$  (au lieu de  $\frac{5}{2} G$ ). Car, alors,  $p_{xx} = \delta_x (k + K - 2K \frac{K}{k+2K}) = \frac{k+3K}{k+2K} k \delta_x$ ; d'où  $E = \frac{k+3K}{k+2K} k$ , ou  $E = \frac{4}{3} k = \frac{8}{3} G$  en faisant  $k=K, \frac{1}{2} k = G$ ;

4° La dilatation cubique du même prisme soumis à une traction est le  $\frac{1}{3}$  (au lieu du  $\frac{1}{2}$ ) de sa dilatation linéaire longitudinale. —

Car  $\partial_x + \partial_y + \partial_z = \partial_x - 2 \frac{K}{k+2K} \partial_x = \frac{k}{k+2K} \partial_x$ , ou  $\frac{1}{3} \partial_x$  si  $k=K$ .

5° La contraction cubique  $c$  sous une pression appliquée à toute la surface d'un corps est égale à la contraction linéaire d'un prisme de même matière sous une pression égale appliquée à ses bases

seulement (au lieu d'être les  $\frac{3}{2}$  de celle-ci); car  $p_{xx} = -q$ ,  $\partial_x = \partial_y = \partial_z$ , donnent  $c = -(\partial_x + \partial_y + \partial_z) = \frac{3q}{k+3K} = \frac{3k}{k+2K} \frac{q}{E}$  qui se réduit à  $c = \frac{3}{4} \frac{q}{k} = \frac{q}{E}$  quand  $k=K$ .

§ 53. *Opinion sceptique à laquelle leur proposition a donné lieu. Nécessité de ne pas s'y tenir.* — Bien que personne n'ait mis en doute l'exactitude consciencieuse des expériences de l'habile et honorable physicien, ses formules de pression (419) n'ont point été adoptées.

Leur proposition, seulement, a amené une sorte de scepticisme. Et l'opinion qui tend à se former aujourd'hui est que les formules des composantes de pression dans les corps isotropes doivent être à deux coefficients tels que  $k$ ,  $K$  dont le rapport n'est ni constamment  $= 2$  conformément à la théorie moléculaire, ni constamment  $= 1$  comme le pense M. Wertheim, mais est variable suivant les substances, en sorte que ce rapport aurait une valeur pour le fer, une valeur pour le cuivre, une autre valeur pour le verre, etc., supposés jouir cependant d'une propriété mécanique commune, l'isotropie.

L'adoption d'une pareille opinion semble, au premier abord, conforme aux règles de la prudence. Elle est d'ailleurs à peu près sans inconvénient dans les applications générales et purement analytiques, parce que les équations provenant des formules à deux coefficients indépendants s'intègrent presque toujours avec autant de facilité que les formules à un seul coefficient. Ajoutons, si l'on veut, que dans quelques questions pratiques simples, celles, par exemple, de torsion pure, il n'est pas besoin de prendre un parti; car, comme il n'y entre que les coefficients désignés dans les formules (29) et (30) par  $e$  et  $f$  ( $G'$  et  $G''$  des notes ci-dessus), il importe peu qu'ils soient ou non égaux à  $e'$  et  $f'$ ,  $e''$  et  $f''$ ; et il en est de même dans

les questions de flexion pure, parce que, comme elles se résolvent par la seule considération du coefficient d'élasticité d'extension E, fonction des divers coefficients des formules (12) à (35), et mesurable directement, il n'est pas nécessaire de connaître les rapports mutuels de ceux-ci.

Mais il en est autrement dans les questions pratiques complexes, telles que celles de flexion et torsion simultanées, ou même dans celles où il y a à la fois à considérer la contraction linéaire et la contraction cubique qui dépend du coefficient de contraction latérale  $\eta = -\frac{\partial v}{\partial x}$ , etc. Le doute n'est plus possible quand on en vient aux chiffres. Il faut sortir de l'état toujours transitoire où il laisse l'esprit, et adopter forcément une valeur numérique pour le rapport en question  $\frac{k}{K}$ .

On conçoit donc l'importance de bien examiner de nouveau et à fond si cette valeur de  $\frac{k}{K}$  n'est pas toute connue à priori et théoriquement, afin de l'employer dans la pratique; et, cela, même dans des cas d'élasticités plus ou moins inégales, lorsqu'une ignorance absolue du degré et du sens des inégalités obligera à supposer l'isotropie comme état moyen donnant les résultats le plus probablement approchés.

La question de la constance de ce rapport  $k : K$  des deux coefficients des formules (114) est importante à un autre égard; car s'il est bien égal à un nombre constant 2, il est évident que toute formule satisfaisant à l'isotropie, comme (114), dans laquelle ce rapport est différent de 2 ou indéterminé ne représente *absolument rien*; elle n'est l'expression d'aucune loi physique. On peut lui refuser même une valeur empirique ou approximative; et son emploi, motivé sur ce qu'on peut la faire cadrer avec quelques faits isolés, ne fera que tromper et empêcher d'y substituer une formule vraie qui tienne compte de la non-isotropie ou de l'inégalité des élasticités en divers sens, comme font les formules (34) du cas d'un axe d'élasticité, ou (30) du cas de trois plans de symétrie, formules dont les premières sont à trois coefficients a, d, e, et les secondes à six coefficients a, b, c, d, e, f lorsqu'on efface les accents comme nous avons dit. La prudence ne nous paraît donc nullement permettre de s'arrêter à

ces formules d'isotropie à deux coefficients, si irrationnelles d'après une théorie qu'on regardera comme tout au moins plausible si on n'y acquiesce pas, et quand bien même il suffirait de disposer de ces coefficients ou d'user de la latitude que donne leur dualité pour expliquer approximativement un assez grand nombre de faits d'expérience.

§ 54. *Autre origine de l'opinion signalée. Formules à trente-six coefficients, données incidemment par M. Poisson.* — Voyons donc comment surtout s'est formée l'opinion nouvelle des deux coefficients  $K$  et  $k$  indépendants ou ayant un rapport susceptible de varier avec la substance des solides où l'on prend les pressions.

M. Poisson, qui avait considéré en 1828 le seul cas de l'isotropie, pour lequel le calcul des pressions comme résultantes d'actions fonctions des distances moléculaires lui avait donné les formules (115) à un seul coefficient lorsque l'état antérieur aux déplacements est l'état naturel (1), lut à l'Académie, l'année suivante, un nouveau mémoire où il consacra un chapitre spécial aux pressions dans les *corps cristallisés* et autres corps non isotropes (2). Il le terminait ainsi (au n° 38) :

« Quelle que soit la constitution d'un corps, cristallisé ou non, homogène ou hétérogène..... supposons-le tant soit peu écarté de son état naturel, en sorte que  $u, v, w$  sont de très-petites quantités dont on néglige les produits et les puissances supérieures à la première. Les composantes de la pression..... seront nulles dans le premier état du corps.... et comme elles ne pourront dépendre, dans son état subséquent, que des déplacements relatifs des molécules, elles s'expriment par des fonctions linéaires de

(1) Dans son mémoire du 4<sup>e</sup> avril 1828, au t. VIII de l'Institut, p. 382, il représente le coefficient unique, le même que notre coefficient d'élasticité de glissement  $G$ , ou  $\frac{1}{2} k$  de M. Cauchy, et  $K$  représente la pression antérieure aux déplacements ( $p$  ci-dessus) quand on ne la suppose pas nulle. Mais ces formules sont incomplètes quant aux termes affectés de  $K$ , et M. Poisson n'a donné qu'à son mémoire de l'année suivante (*Journ. de l'Ec. polytechn.*, 20<sup>e</sup> cahier, p. 52, form. 40), les formules complètes du cas d'isotropie, conformes à celles de M. Cauchy.

(2) Mémoire sur les équations générales de l'équilibre et du mouvement des corps solides élastiques et des fluides, lu le 42 octobre 1829 (*Journ. de l'Ec. polytechn.*, 20<sup>e</sup> cahier), § IV, n° 32 à 39, et surtout n° 38.

«  $\frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}$ , etc.; par conséquent la valeur de chacune de ces forces  
« sera composée de neuf termes, et pourra être représentée par

$$A \frac{du}{dx} + B \frac{dv}{dy} + C \frac{dw}{dz} + D \frac{dv}{dz} + E \frac{dw}{dx} + F \frac{du}{dy} \\ + D' \frac{dw}{dy} + E' \frac{du}{dz} + F' \frac{dv}{dx}; »$$

puis M. Poisson réduit facilement les neuf coefficients de chaque formule à six en prouvant, par la particularisation  $u = -\alpha y$ ,  $v = \alpha x$ ,  $w = 0$  pour laquelle les déplacements ne représentent que *de petites rotations*  $\alpha$  autour de l'axe des  $z$ , ce qui ne doit engendrer aucune pression intérieure, qu'on doit avoir  $F = F'$ ; en sorte que, comme on peut prouver de même  $D = D'$ ,  $E = E'$ , chacune des expressions des six composantes doit avoir la forme

$$(120) A \frac{du}{dx} + B \frac{dv}{dy} + C \frac{dw}{dz} + D \left( \frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy} \right) + E \left( \frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz} \right) + F \left( \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} \right),$$

qui est précisément celle des formules générales (12) ci-dessus, à 36 coefficients.

Or on a vu, aux §§ 24, 25, 26, que ces expressions linéaires étant une fois admises, on pouvait, en définissant l'égalité de texture par ses seules conséquences mécaniques, c'est-à-dire par la propriété de donner en tous sens les mêmes pressions pour les mêmes déformations, prouver facilement que les 36 coefficients se réduisent, lorsque le corps est isotrope, à deux, savoir :

$e$  et  $e'$

des formules (35), les mêmes que  $\frac{1}{2}k$  et  $K$  des formules (114).

Il semblerait ainsi, au premier aspect, qu'on peut établir toutes les formules de l'élasticité à 36, à 12 et finalement à 2 coefficients, sans parler d'actions moléculaires réciproques et sans invoquer leur loi physique, dont l'admission entraîne, comme on a vu, la nécessité de faire  $e = e'$ ,  $K = \frac{1}{2}k$ , ou de réduire les deux coefficients à un seul, les douze à six et les trente-six à quinze.

De là est née surtout l'opinion des deux coefficients indépendants, aujourd'hui embrassée par un grand nombre de savants.



§55. *Observation sur ce raisonnement de Poisson. Il se fonde tacitement sur la loi des actions entre molécules. Une fonction de quantités très-petites n'est pas nécessairement linéaire.* — Quand il y aurait réellement possibilité d'établir ainsi, sans invoquer aucune loi physique, les formules des pressions à 36 et à 2 coefficients, ce ne serait pas une raison de se dispenser d'admettre la réduction des coefficients de 36 à 15 et de 2 à 1, car la loi des actions moléculaires et de leur dépendance des distances est indiquée par un trop grand nombre de phénomènes pour qu'on puisse en repousser ou en négliger les conséquences, et tout ce qui y serait contraire devrait, à l'opposé, être écarté comme faisant naître tout au moins une grave suspicion.

Mais je dis même que l'admission de cette loi des actions entre molécules *est indispensable* pour établir les formules linéaires (120) ou (12) à trente-six coefficients.

D'abord, Poisson invoque cette loi tacitement dans le raisonnement cité, car qu'est-ce que faire dépendre les pressions intérieures des déplacements relatifs des points matériels d'un corps, si ce n'est admettre que les forces qui ont les pressions pour résultantes dépendent des distances mutuelles de ces points, ou sont fonctions de ces distances ? Et fonctions continues, ou variant peu quand les distances varient peu, car sans cela l'illustre géomètre n'aurait pas remplacé, dans son expression, les déplacements relatifs par les coefficients différentiels  $\frac{du}{dx}$ ,  $\frac{du}{dy}$ , ...,  $\frac{dv}{dx}$ , ... des déplacements absolus  $u$ ,  $v$ ,  $w$ .

Il fallait bien s'appuyer sur une pareille loi, car comment déduire une formule physique d'un raisonnement purement mathématique ? Autant vaudrait dire qu'une conclusion peut être tirée sans majeure, ou qu'on peut donner l'expression générale de tout un ordre de phénomènes matériels sans partir d'aucune observation ou d'aucune loi déduite déjà de faits observés.

Mais je dis plus : séparé de tout ce qui précède, le raisonnement cité du n° 36 du mémoire de 1829 de M. Poisson *ne prouve absolument rien* ; et il n'est même nullement acceptable, à moins d'une explication que l'illustre géomètre a cru sans doute pouvoir être suppléée par ses lecteurs au courant du reste de son travail.

En effet, une fonction d'une ou de plusieurs variables n'est pas

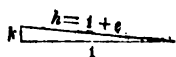
nécessairement *linéaire*, même approximativement, par cela seul que ses variables sont ou deviennent *très-petites*. On sait sans doute que si une fonction est développable en série suivant les puissances ascendantes de ses variables, tous les termes du développement deviennent négligeables devant ceux qui sont affectés de la puissance la plus basse, lorsque les variables décroissent suffisamment. Mais Poisson savait aussi que tous les développements ne s'opèrent pas suivant les puissances entières y compris la puissance 1. Les termes du premier degré peuvent y manquer et y manquent souvent, et il peut s'y trouver aussi des puissances fractionnaires au-dessus et au-dessous de l'unité.

En faut-il des exemples ?

L'attraction de deux corps est bien fonction de l'inverse  $i = \frac{1}{r}$  de leur distance mutuelle  $r$ . Mais elle n'est pas linéaire en  $i$  ou proportionnelle à  $i$  lorsque  $i$  devient très-petit ou la distance  $r$  extrêmement grande ; cette force  $\varphi$  est représentée par  $\varphi = \frac{C}{r^2} = Ci^2$ ,  $C$  étant une constante, ou est proportionnelle au carré  $i^2$  et jamais à  $i$ .

Réciproquement la distance  $r$  de ces deux corps est fonction de leur force d'attraction  $\varphi$  ; et cependant, quand  $\varphi$  devient insensible,  $r$  n'est pas proportionnel à  $\varphi$ , mais à  $\varphi^{-\frac{1}{2}}$ .

Sans sortir même de la géométrie pure, l'excès  $e = h - 1$  de l'hypoténuse  $h$  d'un triangle rectangle sur son plus grand côté supposé = 1 est bien fonction du plus petit côté  $k$ . Cependant, lorsque celui-ci devient extrêmement petit,  $h - 1$  n'est pas fonction linéaire



de  $k$ , car on a alors  $h = \sqrt{1 + k^2} = 1 + \frac{k^2}{2}$ , d'où

$h - 1 = e$  proportionnel au carré du côté  $k$ .

Réciproquement le petit côté  $k$  est fonction de l'excès  $e = h - 1$  de l'hypoténuse sur l'autre côté ; or, quand cet excès devient extrêmement petit, on a  $k = 2e^{-\frac{1}{2}}$  et non pas  $k$  linéaire en  $e$ .

Quelque chose donc manqué ou se trouve sous-entendu dans le raisonnement qui conduit Poisson aux formules (120).

§ 56. *Cas général de linéarité. Vraie raison de la forme linéaire des formules de pressions. Réduction inévitable de leurs trente-six*

coefficients à quinze, à moins de rejeter cette forme même. — En poursuivant les considérations du § précédent, remarquons bien qu'il en est autrement, ou que la *linéarité* d'une fonction d'une petite variable est incontestable si cette fonction, que nous appellerons  $\Delta$ , n'est autre chose que la différence de deux valeurs d'une autre fonction  $y$ , et si sa variable  $\delta$  est la différence correspondante des deux valeurs de la variable  $x$  de celle-ci; en sorte que  $y_0$  et  $y_1$  étant deux valeurs de  $y$  répondant aux valeurs  $x_0$  et  $x_1$  de  $x$  on ait

$$\Delta = y_1 - y_0, \quad \delta = x_1 - x_0.$$

Alors  $\Delta$  est bien certainement fonction linéaire de  $\delta$  quand  $\delta$  devient très-petit, si la fonction  $y$  de  $x$  est continue.

Ainsi, dans les exemples du § précédent, en se servant des indices 0 et 1 avec les mêmes notations qu'à ce § pour désigner la même fonction ou la même variable, la différence  $\varphi_1 - \varphi_0$  de deux attractions planétaires  $\varphi$  est bien fonction linéaire de la différence  $i_1 - i_0$  des deux inverses correspondants de la distance  $r$ ; et  $r_1 - r_0$ , différence de deux distances, est fonction linéaire de  $\varphi_1 - \varphi_0$  quand ces différences sont très-petites, car en différenciant  $\varphi = Ci^2$  on a  $\varphi_1 - \varphi_0 = 2Ci_0(i_1 - i_0)$ .

Et, dans le triangle rectangle où  $k$  est un côté et  $e$  l'excès de l'hypoténuse sur l'autre côté = 1,  $e_1 - e_0$  est bien fonction linéaire de  $k_1 - k_0$ , supposé extrêmement petit, puisque  $e = \sqrt{1 + k^2} - 1$  différencié donne  $e_1 - e_0 = \frac{k_0}{\sqrt{1 + k_0^2}}(k_1 - k_0)$ .

• Et la même chose peut être dite pour une fonction de plusieurs variables qui ne seraient que des différences de valeurs consécutives d'autres variables, lorsque la fonction donnée n'est elle-même que la différence correspondante de valeurs d'une fonction *continue* de celles-ci.

Or c'est précisément ce qui a lieu et ce que devait sous-entendre Poisson dans le cas de son mémoire de 1829, où la fonction était une des composantes de la pression intérieure *développée* par des déplacements, c'est-à-dire était l'excès de la composante de pression après les déplacements sur la composante de pression (supposée nulle) avant les déplacements, et où les variables étaient les *déplacements relatifs* des points, c'est-à-dire les excès (positifs ou

négatifs) de leurs distances mutuelles nouvelles sur leurs distances mutuelles anciennes. Comme la composante de pression n'est qu'une somme de composantes de forces moléculaires qui sont fonctions continues de ces distances  $r$ , la composante développée est fonction linéaire des changements de distance  $r_1 - r$ , si ceux-ci sont très-petits; et comme ces changements sont eux-mêmes exprimables linéairement au moyen des neuf dérivées  $\frac{du}{dx}$ , etc., de  $u, v, w$ , lorsqu'on suppose très-petits ces déplacements absolus, la composante développée est bien fonction linéaire ou du premier degré de ces neuf dérivées.

Avec cette explication ou ce développement nécessaire, la démonstration de Poisson devient admissible. Elle coïncide alors à peu près, pour le cas des déplacements très-petits, avec celle que nous avons donnée au § 20, pour des déplacements absolus quelconques, des formules générales (12) de la p. 556.

Mais on voit ainsi que la démonstration vraie ou complète de ces formules linéaires (12) ou (120) à trente-six coefficients est essentiellement et inévitablement fondée sur l'admission de la loi des actions moléculaires fonctions continues des distances mutuelles des molécules.

Et comme une conséquence nécessaire de cette loi est, ainsi qu'on a vu, la réduction des 36 coefficients à 15 pour une texture quelconque, d'où celle des 12 coefficients à 6 pour une texture symétrique par rapport à trois plans, et celle des deux coefficients à un pour une texture isotrope, il est inévitable d'admettre, pour ces trois textures, des expressions à 15, à 6 coefficients, et finalement à un seul.

Si l'on s'y refuse, il faut rejeter jusqu'à la forme des expressions des composantes, ou renoncer à toute théorie, et laisser les phénomènes de l'élasticité des solides dans le domaine de l'empirisme pur.

§ 57. *Accord de la théorie avec les expériences de M. Regnauld sur les piézomètres en cuivre et en laiton.*—Mais comment, dira-t-on, accorder les formules d'isotropie (113) ou (115) de Poisson, etc., à un coefficient, avec les faits cités par M. Wertheim dans son mé-

moire de 1848, où il les explique par ses formules modifiées (119)?

Je réponds d'abord, en ce qui concerne la double expérience piézométrique de M. Ørsted (§ 49), qui a été le point de départ des doutes élevés sur la théorie fondée par Navier, que, quel que soit le rapport adopté entre les deux coefficients  $k$  et  $K$  (§ 51), les formules prouveront toujours, comme le montre aussi M. Wertheim, et contrairement à l'opinion conçue par l'illustre physicien, qu'une pression exercée uniformément et également sur toute la surface tant intérieure qu'extérieure d'un solide isotrope creux, tel qu'un vase à parois minces, doit diminuer dans une proportion constante non-seulement son épaisseur, mais aussi ses autres dimensions, de manière à en faire un solide d'une forme semblable à sa forme primitive, en sorte que la capacité creuse diminue comme diminuerait un pareil volume massif de même matière. Et les mesurages comparatifs faits par M. Ørsted de la compressibilité apparente de l'eau dans une bouteille en verre et dans une bouteille en plomb ne sont point de nature à prouver le contraire; car M. Wertheim fait très-bien remarquer (fin de son mémoire de 1848) que la compressibilité du plomb n'est pas dix-huit fois celle du verre, mais trois fois et un tiers seulement, le coefficient d'élasticité  $E$  étant environ 1 800 000 000 pour le plomb et 6 000 000 000 pour le verre, ce qui donne respectivement pour leurs diminutions de volume sous une augmentation uniforme de pression d'une atmosphère ou de  $10333^{\text{mill}} = q$  par mètre carré de surface

$$c = \frac{3}{2} \frac{q}{E} = 0,000\ 008\ 61 \text{ pour le plomb et } 0,000\ 002\ 58 \text{ pour le verre.}$$

Ces deux nombres, qui sont à défalquer de la compressibilité réelle de l'eau pour avoir les compressibilités apparentes fournies par les piézomètres des deux substances diffèrent entre eux de 6 millionnièmes. C'est le triple des deux millionnièmes de différence trouvés par M. Ørsted, et on a encore le double avec les formules  $k = K$  qui donnent  $c = \frac{q}{E}$ . Mais M. Wertheim observe très-bien encore qu'on a moins si le verre dont M. Ørsted s'est servi se rapproche de la qualité du cristal et si le plomb contient de l'alliage, supposition très-probable; et le désaccord qui reste entre la formule et l'expérience peut s'expliquer par les défauts d'isotropie

et par une déformation permanente du plomb, substance bien peu propre à donner, en pareille matière, des résultats sur lesquels on puisse compter. Il n'y a donc pas lieu de s'arrêter aux objections de l'illustre physicien danois, dont personne n'a adopté l'opinion sur ce sujet dont il s'est incidemment occupé.

Ensuite, quant aux expériences faites par M. Regnault avec un piézomètre dans lequel une ingénieuse combinaison de robinets permettait d'exercer successivement une pression à l'extérieur seulement, puis à l'intérieur seulement, enfin à l'intérieur et à l'extérieur à la fois, je dis que leurs résultats s'accordent tout autant qu'on pouvait l'espérer avec les formules Navier-Poisson, etc. (113), (ou 114 pour  $k=2k$ ).

En effet, si, en premier lieu, le piézomètre est une sphère creuse et si on appelle

$r$  et  $r'$  le rayon intérieur et le rayon extérieur;

$V = \frac{4}{3} \pi r^3$  la capacité, et  $n = \frac{r^3}{r'^3 - r^3}$  son rapport au volume de l'enveloppe solide;

$P$  la pression exercée, ou plutôt son excès sur celle de l'atmosphère, dont on n'a pas à tenir compte (§§ 23 et 34) en n'évaluant les contractions qu'à partir de l'état où elle agissait seule; cet excès  $P$  étant évalué lui-même en atmosphères ou représentant un nombre de fois 10333<sup>a</sup> de pression par mètre carré de surface (poids de 0<sup>m</sup>. 76 de mercure à 0 degré);

$c$  la compressibilité cubique de la matière du piézomètre, ou la proportion de sa diminution de volume sous un excès de pression d'une atmosphère tant intérieurement qu'extérieurement; en sorte que (comme à la fin du § 52 en faisant  $q = 10333$ ) on a

$$(21) \quad c = 3 \frac{10333}{k+3k} = \frac{3k}{k+2k} \frac{10333}{E};$$

$\omega'$  (avec M. Regnault) la diminution de la capacité  $V$  lorsque la pression  $P$  n'agit qu'à l'extérieur; diminution qui est accusée par l'eau expulsée du piézomètre, ou par le volume de la partie du col gradué qu'elle envahit en y montant;

une expression trouvée en même temps (1828) par M. Poisson (1) et par MM. Lamé et Clapeyron, et déduite des formules (113) ou (115) donne, en la modifiant pour les formules (114) à deux coefficients K et k :

$$(122) \quad \omega' = 10333 P \cdot V \left( \frac{3}{k+3K} + \frac{3}{2k} \right) \frac{R^3}{R^3 - R^3} \quad (2).$$

d'où l'on tire, eu égard à ce que (106)  $c = \frac{3 \cdot 10333}{k+3K}$

$$(123) \quad c = \frac{\omega'}{PV} \cdot \frac{2k}{3(k+K)} \frac{R^3 - R^3}{R^3} = \frac{\omega'}{PV} \cdot \frac{2k}{3(k+K)(n+1)}$$

ou, pour  $k = 2K$

$$(124) \quad c = \frac{\omega'}{PV} \cdot \frac{4}{9} \frac{R^3 - R^3}{R^3} = \frac{\omega'}{PV} \cdot \frac{4}{9} \frac{1}{n+1},$$

expression identique avec la première de celles du tableau n° 1 de la page 440 de M. Regnault (qui appelle  $k$  la contraction ici appelée  $c$ ).

Outre le volume  $\omega'$ , M. Regnault mesure, avons-nous dit, deux autres volumes, savoir :

(1) *Ann. de ch. et de ph.*, 2<sup>e</sup> série, t. XXXVIII, p. 330.

(2) Mémoire de MM. Lamé et Clapeyron au t. IV des *Savants étrangers*, n° 58. L'expression (122) que nous donnons, étant particularisée pour  $k = 2K$ , est le produit, par le volume intérieur  $V$ , de la proportion  $-3 \frac{U}{R}$  de la contraction du volume intérieur de rayon  $a$ , déduite de l'expression  $U = \dots$  du déplacement dans le sens du rayon, page 348 ou § 46 de ce mémoire, en faisant  $r = a$ ,  $P = 0$ ,  $P' = 10333 P$  kilogrammes par unité superficielle, et remplaçant  $A$  par  $K$ .

Et on peut vérifier que  $U$  représente l'accroissement du rayon vecteur  $r$  d'un point quelconque dont les coordonnées sont  $x, y, z$ , d'où les déplacements  $u = \frac{U}{r} x$ ,  $v = \frac{U}{r} y$ ,  $w = \frac{U}{r} z$ , en différenciant ces déplacements pour substituer dans les six composantes de pression (114) à deux coefficients  $k$  et  $K$ , puis ces composantes dans les trois équations d'équilibre intérieur (38)  $\frac{dp_{xx}}{dx} + \dots = 0$ , etc. On reconnaît que ces trois équations à seconds membres nuls sont satisfaites si l'on a  $U = ar + \frac{b}{r^2}$ ,  $a$  et  $b$  étant deux constantes quelconques. Et, en déterminant ces constantes  $a, b$  par la condition que  $p_{xx}$ , pour  $x = r = a$ , soit  $-P$ , et, pour  $x = r = a'$ , soit  $-P'$ , on a, en substituant dans  $ar + \frac{b}{r^2}$ , l'expression de  $U$  citée, dont (122) est une conséquence.

$\omega$ , volume abandonné par l'eau en baissant dans le col gradué quand la pression P n'agit qu'à l'intérieur,

$\omega''$ , *idem*, quand P agit à la fois à l'intérieur et à l'extérieur.

Ce dernier lui fournit, pour la compressibilité cherchée de l'eau sous une atmosphère, compressibilité qu'il appelle  $\mu$  :

$$(125) \quad \mu = \frac{\omega''}{pV} + c, \quad (c \text{ étant fourni par l'expression 123});$$

car la contraction apparente  $\omega''$  du volume d'eau V, indiqué par la graduation, est évidemment égale à sa contraction réelle  $\mu pV$  plus la diminution  $c pV$  de la capacité du piézomètre.

Et le mesurage du volume  $\omega$  lui fournit une vérification du mesurage de  $\omega'$  et de  $\omega''$ , car il résulte du principe de simultanéité et de superposition du § 2 de la note du n° 24 (p. 15) que la diminution de capacité  $c pV = \mu pV - \omega''$  qui a lieu lorsque la pression P agit à la fois à l'extérieur et à l'intérieur doit être égale à la diminution  $\omega'$  résultant de la pression qui agit seulement à l'extérieur moins l'augmentation  $\omega - \mu pV$  de la même capacité lorsque la pression s'exerce à l'intérieur seulement, d'où

$$\omega = \omega' + \omega'',$$

ce qui s'est vérifié à quelques millièmes près dans toutes les expériences de M. Regnault.

Or ce savant a opéré, en premier lieu, avec un piézomètre sphérique en cuivre rouge, dont le mesurage donnait :

Diamètre moyen extérieur,  $2R' = 5^{\text{centimètres}},98$ ,

Épaisseur moyenne de la paroi,  $R' - R = 0^{\text{,}}0765$ ,

Capacité de la boule,  $V = 109^{\text{,}}11$  (mesurée probablement par le poids de l'eau contenue),

Volume de la paroi,  $\frac{4}{3} \pi R'^3 - \frac{4}{3} \pi R^3 = 111^{\text{,}}97 - 103^{\text{,}}59 = 8^{\text{,}}38$ .

D'où  $n = \frac{109,11}{8,38} = 13,02$ .

Et chacune des divisions du col gradué contenait 0 <sup>gramme</sup>, 010271 de mercure pesant 13<sup>sr</sup>,55 par centimètre cube, d'où,  $\alpha$  étant le volume de cette division,

$$\alpha = \frac{0,010271}{13,55} = 0^{\text{,}}000758007.$$



Les résultats de vingt-quatre expériences où la pression  $P$  a varié de 2<sup>atmosph.</sup>, 80 à 7<sup>atm.</sup>, 80, et  $\omega'$ , ou plutôt le nombre  $\frac{\omega'}{\alpha}$  des divisions envahies par l'eau, de 16 à 47, étant substitués dans la formule (124), ont fourni des valeurs de  $c$  peu différentes entre elles, dont la moyenne était

$$c = 0,000\,001\,317.$$

Or le coefficient d'élasticité d'extension  $E$  du cuivre rouge, d'après des expériences de M. Wertheim, citées par M. Regnault, sur l'allongement élastique de fils de ce métal de 3 millimètres de diamètre ont donné les moyennes suivantes (1)

Cuivre écroui et étiré,  $E = 12\,449\,000\,000$ , d'où  $c = \frac{2\,10333}{3\,E} = 0,000\,001\,245$

*Idem.* recuit,  $E = 10\,519\,000\,000$ , d'où  $c = 0,000\,001\,474$ .

Le résultat 0,000 001 317 fourni par l'expérience de compression extérieure de la boule creuse en cuivre est, comme l'observe M. Regnault, sensiblement moyen entre ces deux derniers.

Par conséquent les formules de pression avec  $k = 2K$  s'accordent assez bien avec l'expérience.

Il est vrai, observe encore M. Regnault, que le métal de la boule creuse devait se rapprocher plus de celui du fil *recuit* qui a donné 0,000 001 474; mais aussi l'appréciation du nombre  $n = \frac{R^3}{R^3 - R^3}$  offrait quelque incertitude, car la capacité, en la calculant d'après le mesurage du diamètre intérieur  $2r = 5^{\circ},98 - 2 \times 0^{\circ},0765$ , n'eût été que  $103^{\text{cc}},59$ , d'où

$$n = \frac{103,59}{8,38} = 12,36.$$

En substituant ce nombre à 13,02 qui a été trouvé au moyen de la capacité évaluée par le poids de l'eau contenue, il faut multiplier par  $\frac{13,02+1}{12,36+1} = 1,0494$  la valeur de  $c$  obtenue plus haut, d'où

$$c = 0,000\,001\,317 \times 1,0494 = 0,000\,001\,382,$$

nombre qui se rapproche bien plus du second que du premier de ceux qui résultent du mesurage du coefficient d'élasticité  $E$ .

(1) *Ann. de ch. et de ph.*, 3<sup>e</sup> série, t. XII, mémoire présenté le 18 juillet 1842.

En second lieu, M. Regnault s'est servi d'un piézomètre sphérique ou boule creuse en *laiton*, dont le mesurage lui a fourni

$$2r' = 0^{\text{m}} 0589, \quad r' - r = 0^{\text{m}} 00072.$$

Capacité mesurée par le poids de l'eau contenue,  $V = 102^{\text{cc}} 71$ ,

Volume de la paroi,  $7^{\text{cc}} 66$ ,

$$n = \frac{102,71}{7,66} = 13,408.$$

Sur cette boule en *laiton* il avait adapté le même tube de verre gradué qui avait servi avec la boule en *cuivre rouge*.

Avec ces données et celles de 46 expériences où la pression  $P$  a varié de  $1^{\text{atm}} 58$  à  $9^{\text{atm}} 17$ , et  $\omega'$ , ou plutôt le nombre  $\frac{\omega'}{\alpha}$  des divisions du tube dans lequel l'eau montait, de 10 à 59 divisions, M. Regnault a obtenu, par la formule 124, des résultats dont la moyenne est

$$c = 0,000\,001\,440.$$

Le coefficient d'élasticité, d'après une expérience de M. Wertheim sur l'allongement d'un fil cylindrique (1) serait, pour le *laiton*,

$$E = 10\,163\,000\,000 \text{ d'où } c = \frac{3}{2} \frac{10\,833}{E} = 0,000\,001\,525,$$

nombre un peu au-dessus (de  $\frac{4}{17}$ ) de  $0,000\,001\,440$  fourni par l'application de la formule (124) aux expériences sur la réduction du volume de la boule creuse. Mais le *volume de la paroi* présentait quelque incertitude; car si l'on prend, comme a fait M. Regnault pour la boule en *cuivre rouge*, celui qui résulte du mesurage du diamètre moyen extérieur  $2r' = 5^{\text{m}} 89$  et de l'épaisseur moyenne  $r' - r = 0^{\text{m}} 07$ , on obtient  $\frac{4}{3} \pi r'^3 - \frac{4}{3} \pi r^3 = 106^{\text{cc}} 99 - 98,83 = 8,16$ , d'où

$$n = \frac{102,71}{8,16} = 12,587. \text{ au lieu de } 13,408,$$

ce qui donne

$$c = \frac{13,408 + 1}{12,587 + 1} \cdot 0,000\,001\,440 = 1,0604 \cdot 0,000\,001\,440 = 0,000\,001\,527,$$

(1) *Ann. de ch. et de ph.*, 3<sup>e</sup> série, t. XII, p. 597.

ou la même chose que ce qui résulte du coefficient d'élasticité E.

Il me semble que c'est là un accord aussi satisfaisant que possible, soit pour le cuivre rouge, soit pour le laiton, entre les formules (113) relatives aux corps isotropes et les résultats d'expériences faites comparativement, d'une part, sur l'extension des fils ou tiges minces étirées, et, d'autre part, sur la diminution de capacité des sphères creuses « formées par deux hémisphères travaillés au marteau » avant de l'être sur le tour, ce qui devait, comme l'étirage, altérer l'isotropie, mais d'une manière inconnue, et ce qui n'a pu procurer non plus la forme exactement sphérique et l'épaisseur constante qu'exige la formule (124).

Un autre genre de vérification approchée de la formule (124) donnant la compressibilité de l'enveloppe solide, se trouve d'ailleurs dans la comparaison des deux valeurs moyennes qui en résultent pour la compressibilité  $\mu = \frac{\omega''}{pV} + c$  de l'eau ; car M. Regnault trouve

Au moyen du piézomètre en cuivre :  $\mu = 0,000\ 047\ 709$

*Idem* en laiton :  $\mu = 0,000\ 048\ 288$ ,

nombres très-peu différents.

Avec les formules de composantes de pression (119) de M. Wertheim résultant de la supposition  $k = K$  au lieu de  $= 2K$ , on aurait, en vertu de (124)

$$(126) \quad c = \frac{\omega'}{pV} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{N+1}; \text{ et (§ 52) } c = \frac{q}{E} = \frac{10333}{E}.$$

Il faudrait donc prendre les trois quarts des valeurs de  $c$  ci-dessus provenant des expériences piézométriques, et les deux tiers de celles qui proviennent des expériences de traction des fils, ce qui donnerait

Cuivre rouge. . . . .	{	Par le piézomètre. {	Pour $N = 43,02$ , $c = 0,000\ 000\ 988$
			Pour $N = 42,36$ , $c = 0,000\ 004\ 036$
		Par les fils. . . . . {	$c = 0,000\ 000\ 830$
			$c = 0,000\ 000\ 983$
Laiton. . . . .	{	Par le piézomètre. {	Pour $N = 43,408$ , $c = 0,000\ 004\ 080$
			Pour $N = 42,587$ , $c = 0,000\ 004\ 445$
		Par le fil	$c = 0,000\ 004\ 047$ (*)

(\*) Les nombres trouvés pour  $c$  par M. Wertheim, dans son mémoire du 40 février 1848 (*Ann. de ch. et de ph.*, 3<sup>e</sup> série, t. XXIII), sont plus forts, dans la pro-

Nous ne voyons nullement, dans ces rapprochements, de raison de substituer les formules résultant de  $k = K$  aux formules  $k = 2K$  données par la mécanique moléculaire.

§ 58. *Même accord avec les expériences sur le piézomètre en verre.* — M. Regnault a fait aussi une série de trente-six expériences avec un piézomètre en verre qui avait la forme, non plus d'une boule creuse, mais d'un tube cylindrique terminé par deux hémisphères.

La longueur entre ces hémisphères était. . .	20°,87,
Le diamètre extérieur moyen. . . . .	2°,4256,
L'épaisseur, supposée constante, et calculée par le poids et la densité du verre. . . .	0°,0700.

On a, avec un piézomètre d'une forme quelconque, pour la compressibilité cubique  $\mu$  de l'eau, toujours la formule (125)

$$\mu = \frac{\omega''}{PV} + c,$$

qui donne  $\mu$  quand on connaît  $c$ . Mais si, l'on veut mesurer sur le piézomètre lui-même cette compressibilité cubique  $c$  de sa matière, au lieu de s'en rapporter pour cela, comme les prédécesseurs de M. Regnault, à ce qu'on conclut de l'allongement des tiges d'une matière semblable, il faut savoir, comme pour la sphère, déduire  $c$  de la diminution de capacité  $\omega'$  qui résulte d'une pression 10333 P

portion de  $\frac{4}{3}$  à 3, que ceux que nous rapportons ici comme conséquences de ses formules. Cela tient à ce qu'il prend  $c = \frac{q}{k}$  (ou  $\frac{4}{k}$  en faisant la pression atmosphé-

rique  $q = 4$ ) tandis qu'on devrait avoir, pour  $k = K$ ,  $c = \frac{3}{4} \frac{q}{k}$  (§ 52), d'où résulte

qu'il calcule  $c$  par l'expression (124)  $c = \frac{\omega' \frac{4}{9} \frac{4}{n+4}}{PV}$  au lieu de (126)  $c = \frac{\omega' \frac{4}{3} \frac{4}{n+4}}{PV}$ .

Mais comme la même valeur erronée  $c = \frac{q}{k}$ , combinée avec  $E = \frac{4}{3} k$  (§ 52), donne

$c = \frac{4}{3} \frac{q}{E}$  au lieu de  $c = \frac{q}{E}$  qu'on devrait avoir quand  $k = K$ , les deux erreurs se

compensent, et M. Wertheim arrive à peu près au même rapport que nous entre la valeur de  $c$  déduite des expériences de compression du piézomètre et la valeur de  $c$  déduite du coefficient  $E$  ou de l'allongement d'un fil de même matière. Nous disons à peu près, parce que M. Wertheim arrive pour  $c$  à des chiffres un peu différents de ceux de M. Regnault, quoique se servant de la même formule (124), ce qui tient à ce qu'il adopte des valeurs un peu autres de  $n$  et de  $\alpha$ .

s'exerçant seulement à l'extérieur du tube employé comme piézomètre. Le calcul, si ce tube, d'une capacité  $V'$ , est un cylindre ayant des rayons intérieur et extérieur  $a, a'$ , et supposé terminé par des couvercles sur lesquels ses bases annulaires glissent sans frottement, en sorte que le rétrécissement puisse être supposé égal d'un bout à l'autre, donne :

$$(127) \quad \omega' = 40333PV' \frac{5k+6K}{k(k+3k)} \frac{R'^2}{R'^2-R^2} \quad (1).$$

En ajoutant cette diminution de capacité d'un pareil réservoir cylindrique à celle qui est donnée par la formule (122) pour une sphère ou pour les deux hémisphères de même diamètre ayant ensemble une capacité  $V$ , et en remplaçant

$$3. \frac{40333}{k+3K} \text{ par } c, \quad \frac{R^2}{R'^2-R^2} \text{ par } M, \quad \frac{R^2}{R'^2-R^2} \text{ par } N,$$

on a, pour la diminution de volume du cylindre terminé par deux hémisphères,

$$(128) \quad \omega' = cP \left[ V' \frac{5k+6K}{3k} (M+1) + V \frac{3k+3K}{2k} (N+1) \right],$$

(1) Cette expression (127), particularisée pour  $k = 2K$ , est le produit, par la capacité  $V'$ , de la proportion  $-c - \frac{U}{R}$  de la contraction du volume intérieur, déduite des expressions  $c = \dots$  de la proportion de l'allongement du cylindre, et  $U = \dots$  du déplacement dans le sens du rayon, de la page 548 ou du § 46 du mémoire de MM. Lamé et Clapeyron (t. IV des *Savants étrangers*) en faisant  $r = R$ ,  $P = 0$ ,  $P' = 40333P$ , et en remplaçant  $A$  par  $K$ .

Et on peut vérifier que,  $U$  représentant l'accroissement du rayon vecteur  $r$  d'un point du cylindre creux dont les coordonnées sont  $x, y, z$  d'où  $u = \frac{U}{r}x, v = \frac{U}{r}y, w = cz$ , et en différenciant ces déplacements pour substituer dans les six composantes de pression (44) à deux coefficients, puis ces composantes dans les équations d'équilibre (38)  $\frac{dp_{xx}}{dx} + \dots = 0$ , etc., ces équations à second membre nul sont satis-

faites si l'on a  $U = ar + \frac{b}{r}$ ,  $a$  et  $b$  étant deux constantes quelconques. Et en déterminant ces constantes  $a, b$  et la dilatation longitudinale inconnue  $c$  par la condition : 1° que  $p_{xx} = 0$ , pour  $x = r = R$ , soit  $= -P$ ; 2° que pour  $x = r = R'$  il soit  $= -P'$ , et 3° (pour l'équilibre des couvercles) qu'on ait  $p_{xx}(\pi R'^2 - \pi R^2) = P \cdot \pi R^2 - P' \cdot \pi R'^2$ , on a, si l'on substitue dans  $-c - \frac{U}{R} \left( aR + \frac{b}{R} \right)$ , une expression qui multipliée par  $V'$  se réduit à celle (127) de  $\omega'$  en faisant  $P = 0$ ,  $P' = 40333P$ .

d'où l'on tire, en faisant  $k=2K$ ,

$$(129) \quad c = \frac{\omega'}{P \left[ \frac{8}{3} V'(n+1) + \frac{9}{4} V(n+1) \right]}$$

valeur qui est la première du tableau de la p. 442 de M. Regnault ( $c$  étant ce qu'il appelle  $k$ ).

Avec cette formule (129) appliquée aux trente-six expériences, qu'il vérifie, comme avec la sphère, par celles qui donnent  $\omega$ , car  $\omega = \omega' + \omega''$  ( $\omega$  étant toujours le volume abandonné par l'eau dans le col gradué lorsqu'on ne fait agir la pression 10333P qu'à l'intérieur), M. Regnault trouve, en moyenne, pour le verre de son piézomètre,

$$c = 000\ 002\ 368 \text{ (}^1\text{)}$$

qui répond à un coefficient d'élasticité  $E = \frac{3k}{k+2K} \cdot \frac{10\ 333}{c}$ , ou, pour  $k=2K$

$$E = \frac{3\ 10\ 333}{2} \cdot \frac{1}{c} = 6545\ 000\ 000.$$

Mais il observe que le coefficient d'élasticité du verre, déduit de l'allongement des tiges pleines, varie dans des limites trop étendues pour qu'on puisse, de la comparaison, rien induire pour ou contre les formules. Il avait observé précédemment aussi, comme nous avons vu, que, pour même composition chimique, la contexture mécanique d'une tige pleine ne pouvait guère être comparée à celle d'une enveloppe mince; et d'ailleurs le tube n'avait ni un diamètre ni une épaisseur bien uniforme. Cependant le nombre 6545 millions est sensiblement égal à la moyenne 6560 entre les six nombres cités par M. Regnault, à la p. 434 de son mémoire, comme résultats des expériences de Savart et de MM. Chevandier et Wertheim; ces dernières, il est vrai, faites par le mesurage de la vitesse du son dans les tiges.

Au reste, avec ce piézomètre cylindrique en verre, M. Regnault a trouvé pour la compressibilité cubique de l'eau la valeur moyenne  $\mu = 0,000\ 046\ 677$ . La différence avec 0,000047709 et 0,000048288, trouvés au moyen de sphères creuses en métal, est faible, et peut très-bien s'expliquer par la remarque suivante de M. Regnault

---

(<sup>1</sup>) M. Regnault a trouvé, lorsque le liquide intérieur était du mercure,  $c = 0,000\ 002\ 374$ , qui en diffère très-peu.

p. 456) « que le calcul suppose une régularité parfaite dans les enveloppes, et que cette régularité est impossible à obtenir dans la construction des appareils. On s'en éloigne surtout dans le piézomètre en verre... dont l'épaisseur... a des parties plus faibles les unes que les autres... d'où doivent résulter des déformations qui changent la figure du piézomètre et produisent des anomalies dans le changement de capacité.. La déformation de l'enveloppe sphérique peut aussi donner facilement des erreurs notables.... car si la surface ne reste plus sphérique, il pourra y avoir diminution véritable de capacité, bien que l'enveloppe ait subi une extension.»  
 En faisant  $k = K$  comme M. Wertheim, on aurait, au lieu de (129),

$$c = \frac{\omega'}{P \left[ \frac{41}{3} V'(\mu+1) + 3V(\nu+1) \right]}$$

en sorte que (M. Regnault, p. 452), comme  $V' = 75^{\text{m}}, 499$ ,  $V = 5^{\text{m}}, 174$ ,  $\mu = 3,598$ ,  $\nu = 2,248$ , il faut, pour avoir cette valeur de la compressibilité  $c$ , multiplier la valeur précédente  $0,000\ 002\ 368$  par  $\frac{41562,3}{45879,3} = 0,72814$ , ce qui donnerait

$$c = 0,000\ 001\ 724 ;$$

répondant, pour  $k = K$ , à un coefficient d'élasticité  $E = \frac{10333}{c} = 5994\ 000\ 000$  (1). De ce que ce nombre se rapproche plus que celui de 6545 millions, de 6040 donné par une expérience d'allongement d'une tige de verre à gobeletterie fin à base de soude (le verre à gobeletterie commun aussi à base de soude avait donné 6722), je ne vois pas que ce soit une raison d'adopter  $k = K$ , qu'aucune théorie n'indique, plutôt que  $k = 2K$  que donne la théorie moléculaire.

(1) M. Wertheim trouve, pour  $c$ , une valeur  $0,000\ 001\ 2897$ , ou des  $\frac{4}{3}$  de  $0,000\ 001\ 724$  que nous venons de déduire de son hypothèse  $k = K$ . C'est, comme pour le piézomètre sphérique, parce qu'il prend  $c = \frac{40333}{k}$  tandis qu'avec  $k = K$  on a (§ 52)  $c = \frac{3}{4} \frac{40333}{k}$ . Mais il en conclut à peu près la même valeur de  $E$  par une compensation mutuelle de deux erreurs, vu qu'il prend  $E = \frac{4}{3} \frac{40333}{c}$  au lieu de  $= \frac{40333}{c}$  qui résulte de  $k = K$ .

§ 59. *Expériences de M. Wertheim et de M. Clapeyron sur le caoutchouc, etc.* — M. Wertheim a fait aussi (et c'est même ce qui paraît lui avoir suggéré l'idée de proposer  $k = K$ ) des expériences sur deux barreaux de caoutchouc, l'un de  $0^{\text{m}^{\text{t}}},36775$  de longueur entre deux repères, sur  $0^{\text{m}^{\text{t}}},04860$  de côté, l'autre d'environ  $0^{\text{m}^{\text{t}}},30$  sur  $0^{\text{m}^{\text{t}}},00945$ . Il les étendait, puis il mesurait, pendant leur retour à une longueur moindre, qui durait environ *vingt-quatre heures*, les distances successives des deux repères marqués non loin des extrémités, et, en même temps, le côté de leur base carrée. Le rapport  $\frac{k}{K}$  du changement proportionnel de la dimension longitudinale au changement proportionnel de la dimension transversale, au lieu d'être constamment 4 comme il résulterait des formules avec  $k = 2K$ , ou 3, comme il résulterait de  $k = K$ , a varié irrégulièrement de 4 1/2 à 5 1/2. Ses valeurs les moindres répondaient aux changements de longueur n'excédant pas 1 pour 100, et ses plus grandes valeurs à des changements qui allaient jusqu'à doubler la longueur. Les rapports moyens ont été 2,63 et 3,743 pour le gros barreau étendu verticalement, puis horizontalement, et 3,69 pour le barreau mince étendu horizontalement.

De ces diverses valeurs de  $\frac{k}{K}$ , et de l'expression  $\frac{k}{K} = \frac{1}{\eta} - 2$  (§ 52, 2<sup>e</sup> conséquence généralisée), il résulterait des valeurs de  $\frac{k}{K}$  variant de  $-\frac{1}{2}$  à  $3\frac{1}{2}$ , et, en tous cas, en se tenant aux petits changements de longueur, plus rapprochées de  $k = K$  que de  $k = 2K$ .

Mais d'après des expériences de M. Clapeyron, communiquées à l'Académie le 1<sup>er</sup> février 1858 (<sup>1</sup>), la comparaison de la compressibilité cubique  $c$  de la même matière (le caoutchouc) avec son coefficient d'élasticité d'extension  $E$  a donné

$$\frac{k}{K} = \frac{1}{1101};$$

---

(<sup>1</sup>) Comptes rendus t. 46, p. 212. M. Clapeyron, comme M. Lamé (*Leçons sur l'élasticité*, 1853) appelle  $\frac{1}{E}$  ou plutôt  $\frac{10000}{E}$  ce que nous appelons  $E$  avec Navier et  $2\mu$ ,  $\lambda$ , ou plutôt  $\frac{2\mu}{10000}$ ,  $\frac{\lambda}{10000}$ , ce que nous appelons  $k$ ,  $K$  avec Cauchy et M. Wertheim en prenant le mètre carré et le kilogramme pour unités.



car M. Clapeyron a trouvé 0,000 092 95 pour la compressibilité cubique du caoutchouc sous une pression de 10,000 kilogrammes par mètre carré de surface (pression à peu près égale à celle d'une atmosphère qui est 10 333), ou environ, comme il le remarque, deux fois seulement la compressibilité de l'eau ; et, pour de très-faibles allongements, il a trouvé  $E = 146590$ , environ cent mille fois moins que pour le fer ; en sorte qu'on aurait pour le caoutchouc, en y appliquant les expressions généralisées de la fin du § 52

$$\frac{3 \cdot 10000}{k+3K} = 0,000\ 092\ 95, \quad \frac{k+3K}{k+2K} k = 146590,$$

d'où, comme nous disons,  $\frac{k}{K} = \frac{1}{1101}$ .

De ce rapprochement d'expériences qui, interprétées avec les formules (114)  $p_{xx} = (k+K)\partial_x + K\partial_y + K\partial_z$ ,  $p_{yy} =$ , etc., donnent pour  $\frac{k}{K}$  deux valeurs dont l'une est onze cents fois plus petite que la moyenne des autres (en accordant que cette moyenne soit 1), nous concluons simplement que les formules (114), et même des formules linéaires quelconques, ne sont pas applicables au caoutchouc, liquide coagulé ou épaissi plutôt que solidifié, et d'une nature en quelque sorte intermédiaire entre les fluides et les solides.

Il existe bien d'autres matières à la fois élastiques et très-molles, résultant d'une coagulation sans cristallisation. Que l'on comprime, par exemple, dans un vaisseau fermé, de la gélatine tremblante, ou une gelée végétale, ou de l'empois, ou une huile siccative à demi-figée, ou du gluten, ou certaines pâtes à base de gomme, etc., il n'est guère douteux que la résistance à la diminution de volume ne soit très-considérable, et de même ordre que celle d'un liquide ; tandis que la résistance au changement de forme est presque nulle. En sorte que, le coefficient de glissement relatif ou de torsion  $G = \frac{1}{2}k$  étant très-faible, on aurait pour ces matières des valeurs extrêmement petites de  $\frac{k}{K}$  ; et il est vraisemblable que si on les soumettait à des expériences d'extension longitudinale avec mesurage des contractions latérales correspondantes on trouverait, comme pour le caoutchouc, des valeurs tout autres du même rapport.

Ces contradictions peuvent s'expliquer en considérant qu'une partie de leur substance est restée à l'état liquide et emprisonnée dans des cellules, qu'elle se comporte probablement comme un liquide dans les changements de forme, et que d'ailleurs, tout fût-il figé, une sorte de réseau ou de tissu ne saurait résister à la manière d'un corps dont la contexture est une et dont les parties sont dans une dépendance mutuelle intime. Or le caoutchouc, substance si différente d'elle-même après avoir été réchauffée et maniée, doit offrir dans sa structure quelque chose d'analogue aux composés dont on vient de parler. On ne peut donc rien inférer contre la constance du rapport  $\frac{k}{K}$  dans les vrais *solides*, réellement et totalement cristallisés, quoique à cristallisation confuse, de ce que ces agglomérations mixtes peuvent présenter.

Aussi, à la même note de 1858, M. Clapeyron observe que, pour le fer, le rapport  $\frac{E}{G}$  des coefficients d'élasticité d'extension et de torsion a été trouvé de 1,805 à 2,844 dans les expériences de Coulomb et de Duleau, ce qui ne contredit nullement la valeur théorique  $k = 2K$  donnant, pour le même rapport, le nombre 2,5 que M. Clapeyron est en effet d'avis d'adopter pour ce métal.

§ 60. *Expériences de M. Wertheim sur l'allongement des cylindres creux.* — Mais examinons maintenant les résultats de nombreuses expériences que M. Wertheim regarde comme plus importantes, et qu'il a faites avec tout le soin qu'on peut attendre de son habileté et de son esprit attentif. Elles ont consisté, conformément à un conseil de M. Regnault (<sup>1</sup>), à étendre longitudinalement de longs cylindres creux les uns en laiton les autres en cristal, fermés et pleins d'eau, et à mesurer simultanément : 1° leur allongement linéaire  $\Delta L$ , ou la petite quantité dont s'écartent deux repères à la distance  $L$  l'un de l'autre ; 2° l'augmentation  $\Delta U$  de leur capacité intérieure  $U$ , estimée au moyen du changement de niveau que l'eau éprouve dans un tube capillaire gradué qui communique, d'un côté, avec l'intérieur du cylindre, et, de l'autre, librement avec l'atmosphère.

Le tube capillaire et le cylindre creux ont été calibrés en pesant

---

(<sup>1</sup>) Mémoire de 1848, p. 457 458.

respectivement le mercure et l'eau distillée qu'ils contiennent sur une longueur déterminée.

D'après ce que nous avons vu, si la matière est bien isotrope, si les cylindres à base circulaire n'éprouvent pas, en s'allongeant, ces changements de forme dont M. Regnault pensait que ses piézomètres sphériques avaient pu ne pas être exempts, et si on appelle

$p$  la tension par unité de section transversale,

$\delta = \frac{\Delta L}{L}$  la proportion de la dilatation linéaire ou de l'augmentation de la longueur  $L$ ,

$\delta = \frac{\Delta U}{U}$  celle de la dilatation cubique, ou de l'augmentation de la capacité  $U$ ,

on doit avoir (§ 52)

$$\delta = \delta - 2\eta\delta = \left(1 - 2 \frac{K}{k + 2K}\right)\delta;$$

d'où

$$(130) \quad \frac{\delta}{\delta} = \frac{k + 2K}{k} = \begin{cases} 2 & \text{si } k = 2K \text{ conformément à la mécanique moléculaire,} \\ 3 & \text{si } k = K \text{ suivant M. Wertheim.} \end{cases}$$

Ces expériences, envisagées comme moyen de déterminer le rapport de  $k$  à  $K$ , si la valeur de ce rapport est en question, seraient favorables à l'hypothèse de M. Wertheim, car  $\frac{\delta}{\delta}$  a varié, pour le laiton, entre 2,69 et 3,41, et a offert une moyenne 3,15; et, pour le cristal, il a varié entre 2,60 et 4,02, et sa moyenne a été 3,06, ou plutôt 2,90, en écartant le résultat anormal 4,02.

Nous n'y voyons cependant pas de motif pour abandonner, à l'égard des solides isotropes, la valeur  $\frac{k}{K} = 2$ , donnée par la loi des actions à distance, et pour adopter une valeur moitié moindre de ce rapport de deux coefficients qui, comme nous avons vu, n'apparaîtraient même pas si l'on tirait toutes les conséquences de cette loi, absolument nécessaire à invoquer pour établir la linéarité des formules de composantes de pression comme nous avons vu § 54.

Il peut y avoir, en effet, dans les expériences citées, une ou plusieurs causes constantes d'augmentation du rapport  $\frac{\delta}{\delta}$  de la dilata-

tion linéaire longitudinale des cylindres creux à la dilatation cubique de leur capacité : telle est la disposition consistant à faire, aux extrémités, pour pouvoir opérer la traction, leurs parois considérablement plus épaisses que sur le reste de leur longueur, ou bien à les mastiquer dans de fortes douilles, ce qui rend la contraction transversale à peu près nulle aux extrémités des tubes et doit avoir de l'influence sur une certaine longueur en haut et en bas, en sorte que l'abaissement mesuré de la colonne d'eau dans le tube capillaire gradué, et par conséquent  $\frac{\Delta U}{U} = \delta$  doit être sensiblement au-dessous de ce qu'on aurait sans cette circonstance, ce qui tend à rendre  $\frac{\delta}{\delta}$  plus fort.

Et puis des cylindres de laiton étirés ne doivent point être *isotropes*, vu la forte compression latérale due à la filière, et de gros tubes de cristal ne doivent pas l'être non plus, vu les circonstances de leur fabrication et de leur refroidissement. Ils ne doivent pas même être *homogènes*, car, à la surface intérieure comme à la surface extérieure, la texture est très-probablement autre qu'au milieu de l'épaisseur.

§ 61. *Effets d'un défaut d'isotropie. Il explique les faits de plusieurs manières.* — Or examinons seulement les effets de la non-isotropie, en supposant d'abord, au lieu d'un tube, une tige douée, du reste, de l'homogénéité *parallèle* (§ 22), et ayant partout trois plans de symétrie de texture qui rendent applicables les formules (30) de composantes de pression, dont les trois premières

$$p_{xx} = a\partial_x + f'\partial_y + e'\partial_z, \quad p_{yy} = f''\partial_x + b\partial_y + d\partial_z, \quad p_{zz} = e''\partial_x + d'\partial_y + c\partial_z,$$

donnent, si  $p_{yy} = 0$ ,  $p_{zz} = 0$ , comme nous avons vu au § 34, et en appelant  $E_x$  le coefficient d'élasticité d'extension dans le sens  $x$  :

$$(131) \quad \left\{ \begin{array}{l} \eta = \frac{-\partial_y}{\partial_x} = \frac{cf'' - d'e'}{bc - d'd''}, \quad \eta' = \frac{-\partial_x}{\partial_z} = \frac{be' - f''d''}{bc - d'd''}, \\ E_x = \frac{p_{xx}}{\partial_x} = a - \eta f' - \eta' e''; \end{array} \right.$$

ou, en effaçant les accents d'après le principe de réductibilité du nombre des coefficients, appelant  $E_y$  le coefficient d'élasticité dans le



sens  $y$  (ou  $\frac{p_{yy}}{\delta_y}$  quand on a  $p_{xx} = 0, p_{zz} = 0$ ) et faisant attention que

$$\frac{\delta}{\delta} = \frac{\delta_x + \delta_y + \delta_z}{\delta_x} ;$$

$$(132) \quad \left\{ \begin{array}{l} \eta = \frac{\frac{c}{d} \frac{f}{d} - \frac{e}{d}}{\frac{b}{d} \frac{c}{d} - 1}, \quad \eta' = \frac{\frac{b}{d} \frac{e}{d} - \frac{f}{d}}{\frac{b}{d} \frac{c}{d} - 1}, \quad \frac{\delta}{\delta} = 1 - \eta - \eta', \\ E_x = \frac{abc - ad^2 - be^2 - cf^2 + 2def}{bc - d^2}, \quad \frac{E_x}{E_y} = \frac{ca - e^2}{bc - d^2} \end{array} \right.$$

Or, pour peu que  $\frac{b}{d}, \frac{c}{d}$  et  $\frac{a}{e}$  diffèrent de 3, et  $\frac{e}{d}, \frac{f}{d}$  diffèrent de 1 (nombres vers lesquels ils convergent quand la contexture approche d'être isotrope),  $\eta$  et  $\eta'$  pourront différer très-sensiblement de  $1/4$ , prendre, par exemple, des valeurs telles que  $1/3$  ou  $1/5$ , ce qui donnera au rapport  $\frac{\delta}{\delta} = 1 - \eta - \eta'$  de la dilatation de volume à la dilatation de longueur une valeur encore plus différente de  $1/2$ , qui est sa valeur relative au cas d'isotropie, et, aux rapports  $\frac{E_x}{e}, \frac{E_x}{f}$  des coefficients d'élasticité d'extension et de glissement, des valeurs, aussi, très-sensiblement différentes de  $5/2$ .

Même, en supposant qu'il y ait égale contexture transversale, ou que  $x$  soit un axe d'élasticité (§ 25), ce qui donne  $b=c=3d, e=f$ , ou ce qui réduit les formules à la forme (34) sans les accents, c'est-à-dire à

$$(133) \quad \left\{ \begin{array}{l} p_{xx} = a\delta_x + e\delta_y + e\delta_z, \quad p_{yz} = d\delta_y, \\ p_{yy} = e\delta_x + 3d\delta_y + d\delta_z, \quad p_{xz} = e\delta_x, \\ p_{zz} = e\delta_x + d\delta_y + 3d\delta_z, \quad p_{xy} = e\delta_y, \end{array} \right.$$

on aurait

$$(134) \quad \eta = \eta' = \frac{1}{4} \frac{e}{d}, \quad \frac{\delta}{\delta} = 1 - 2\eta = 1 - \frac{1}{2} \frac{e}{d}, \quad \frac{E_x}{e} = \frac{a}{e} - \frac{1}{2} \frac{e}{d}, \quad \frac{E_x}{E_y} = \frac{e}{d} \left( \frac{3a}{8e} - \frac{e}{8d} \right);$$

en sorte que si les deux coefficients de glissement  $d, e$  diffèrent sensiblement l'un de l'autre,  $\eta$  et  $\eta'$  différeront aussi sensiblement de  $1/4$ , et  $\frac{\delta}{\delta}$  différera deux fois plus de  $1/2$ .

Ainsi : 1° On satisfera à  $\frac{\delta}{\gamma} = \frac{1}{3}$ , valeur que semblent donner, pour le rapport de la dilatation du volume à la dilatation de la longueur, les expériences de M. Wertheim sur les tubes de laiton et sur les tubes de cristal, en prenant

$$\frac{e}{d} = \frac{4}{3}, \text{ d'où } \eta = \frac{1}{3}.$$

Et si l'on suppose en même temps  $\frac{E_x}{e} = \frac{8}{3}$ , ou le rapport de 8 à 3, que M. Wertheim a proposé d'adopter, entre les coefficients d'élasticité d'extension longitudinale et de glissement transversal ou de torsion, on tire

$$\frac{a}{e} = \frac{10}{3} = 3,333, \quad \frac{E_x}{E_y} = \frac{13}{9} = 1,444.$$

2° Si, au lieu de  $\frac{\delta}{\gamma} = \frac{1}{3} = 0,333$ , on prend, vu les causes qui ont pu, comme nous avons dit p. 681, donner un résultat trop faible,

$$\frac{\delta}{\gamma} = \frac{3}{8} = 0,375, \text{ avec } \frac{E_x}{e} = \frac{8}{3},$$

il en résulte

$$\frac{e}{d} = \frac{5}{4}, \quad \eta = \frac{5}{16}, \quad \frac{a}{e} = \frac{79}{24} = 3,293, \quad \frac{E_x}{E_y} = \frac{345}{256} = 1,3476.$$

3° Si l'on prend

$$\frac{\delta}{\gamma} = \frac{3}{8} = 0,375, \text{ avec } \frac{E_x}{e} = \frac{5}{2} = 2,5,$$

il en résulte

$$\frac{e}{d} = \frac{5}{4}, \quad \eta = \frac{5}{16}, \quad \frac{a}{e} = \frac{25}{8} = 3,125, \quad \frac{E_x}{E_y} = \frac{325}{256} = 1,2695.$$

Ces valeurs 1,27 à 1,44 du rapport  $\frac{E_x}{E_y}$  entre le coefficient d'élasticité d'extension longitudinale d'un prisme donné et le coefficient qu'on obtiendrait en en extrayant, pour le soumettre à la traction, un petit prisme dont la longueur serait prise dans un sens transversal, n'ont rien que de vraisemblable, car, pour des bois durs, MM. Wertheim et Chevandier ont trouvé jusqu'à des valeurs 9 et

12, et, pour les bois tendres, jusqu'à des valeurs 20 et 30 de ce même rapport (1). Il n'y aurait donc pas lieu de s'étonner que, pour les métaux fibreux, et même pour le verre, auquel le refroidissement donne une autre contexture dans le sens de la longueur et dans le sens de l'épaisseur, ce rapport variât entre 1 1/4 et 1 1/2.

Ces explications des faits d'expérience seront encore plus variées si l'élasticité n'est pas supposée la même dans les deux sens transversaux, ou si, en se bornant toujours aux cas de trois plans de symétrie partout, on se sert des expressions (132) à six coefficients, au lieu des expressions (134) à trois coefficients.

Observons de plus que ces expressions (132) supposent, comme les formules (30) dont elles dérivent, une tige douée de l'homogénéité *parallèle* (§ 22). S'il s'agit d'un cylindre plein ou creux qui n'a que l'homogénéité *semi-polaire* (même §), on trouve facilement que la forme même des expressions de  $E$ ,  $\gamma$ ,  $\frac{\delta}{\delta}$  se trouve changée; les coefficients  $a, b$  passent en exposants s'ils ne sont pas égaux, et le rapport même des rayons intérieur et extérieur influe sur la valeur de ces trois quantités (2).

A plus forte raison les faits s'expliqueront-ils avec une contexture sans symétrie en chaque point, et encore si, outre le défaut d'isotropie, il y a quelque défaut d'homogénéité, par exemple plus de roideur à la surface qu'au centre, et si, en raison de cette circonstance, il y a vers l'axe de la tige (ainsi qu'il a été dit au § 22), et avant tout allongement opéré dans les expériences, un état de *tension*, comme il peut arriver dans les prismes qui ont été coulés et promptement refroidis, ou un état de *pression*, comme il peut arriver dans ceux qui ont été étirés.

§ 62. *Observation sur la proposition de prendre  $\frac{k}{K} = 1$  constamment.* — Nous n'avons pas besoin de réfuter cette proposition. L'adoption, pour un rapport, d'un nombre rond et simple, tel que l'u-

(1) Mémoire sur les propriétés mécaniques des bois, présenté le 5 octobre 1846 et imprimé en 1848 aux *Ann. de ch. et de ph.* Tableau n° XVI, p. 420-424.

(2) Mémoire sur les divers genres d'homogénéité mécanique des corps élastiques, et principalement sur l'homogénéité cylindrique ou semi-polaire, etc. lu à l'Académie le 21 mai 1860 (Comptes rendus, t. L, p. 930.)

nité, a besoin d'une raison théorique. Elle manque, et on a même vu que la théorie moléculaire qui envisage les corps comme composés de points matériels exerçant les uns sur les autres, à des distances très-petites, des actions fonctions continues de ces distances, c'est-à-dire la théorie qui conduit à la linéarité des formules et à toutes les explications, donne en même temps l'égalité du coefficient  $K$  de  $\partial_x$  dans  $p_{xx}$  au coefficient  $\frac{1}{2}k$  de  $g_{xy}$  dans  $p_{xy}$  (§ 21), c'est-à-dire  $k = 2K$ . Il faudrait dire quelle autre loi, conduisant aussi à la forme linéaire de  $p_{xx} \dots p_{xy}$  en  $\partial_x \dots g_{xy}$  pourrait donner  $k = K$ , ou le premier des deux coefficients dont nous parlons double de l'autre. Jusqu'à ce qu'on le fasse, on devrait, si l'on se croit autorisé à employer toujours les formules linéaires (144) satisfaisant géométriquement à l'isotropie, et si l'on regarde  $\frac{k}{K}$  comme le même pour toutes les matières de texture isotrope, se borner à prendre pour ce rapport la moyenne fractionnaire des nombres trouvés dans les expériences; ou plutôt il conviendrait, comme nous avons dit, d'adopter des formules qui ne supposent pas l'isotropie parfaite, telles que les formules (30) ou (34) sans accents (p. 577 et 581) à six ou à trois coefficients (<sup>1</sup>).

(<sup>1</sup>) Nous n'avons pas besoin non plus de combattre longuement la manière dont le même physicien a essayé, dans son mémoire cité du 40 février 1848, p. 27, d'accorder sa proposition  $k = K$  avec la théorie de l'élasticité des corps considérés comme composés de molécules qui agissent les unes sur les autres. M. Wertheim prend les formules que cette théorie fournit à M. Cauchy pour les excès des composantes de pression  $p_{xx}$ , etc., sur leurs valeurs primitives  $p'_{xx}$ , etc., quand on suppose que l'influence des intensités de  $p'_{xx}$ , etc., sur les grandeurs de ces excès n'est pas négligeable, c'est-à-dire les formules rapportées ci-dessus sous le n° (146), p. 654. Il les particularise pour l'isotropie ce qui lui donne les formules (147)

$$p_{xx} - p_0 = (3G + p_0) \frac{du}{dx} + (G - p_0) \frac{dv}{dy} + (G - p_0) \frac{dw}{dz}, \quad p_{yy} = \text{etc.}$$

$$p_{yz} = (G + p_0) \left( \frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy} \right), \quad p_{zx} = \text{etc.},$$

qui sont, quand on fait avec M. Cauchy  $G + p_0 = \frac{1}{2}k$ ,  $G - p_0 = K$ , la même chose que (148)

$$p_{xx} = \frac{k - 2K}{4} + k \frac{du}{dx} + K \left( \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} \right), \quad \dots \quad p_{yz} = \frac{1}{2}k \left( \frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy} \right).$$

Or si l'on suppose  $k = K$  il en résulte



§ 63. *Expériences sur les vibrations tournantes.* — Nous ne discuterons pas longuement, non plus, les preuves qu'on a voulu tirer, à l'appui de  $\frac{k}{K} = 1$ , ou de  $\frac{E}{G} = \frac{8}{3}$ , des expériences comparatives

$$G = -3p_0;$$

conséquence devant laquelle M. Wertheim ne recule pas (Mémoire de 1848, p. 29; et, aussi, Mémoire sur la torsion, *Ann. de ch. et de ph.*, juin 1857, § VI, p. 245, ou 24 de l'extrait). Il admet même, d'après M. Cauchy, les expressions (49) et (96) ci-dessus (note du § 23, p. 568 et 570) des valeurs des pressions primitives et des coefficients des formules des pressions ultérieures, savoir

$$p_0 = p_{xx} = \frac{p}{2} SmrR \cos^2(r, x), \quad G = a_{xyy} = \frac{p}{2} Smr^3 \left( \frac{dR}{dr} \frac{1}{r} \right) \cos^2(r, x) \cos^2(r, y);$$

en sorte que  $G = -3p_0$  lui donne

$$Smr^3 \left( \frac{dR}{dr} \frac{1}{r} \right) \cos^2 rx \cos^2 ry = -3SmrR \cos^2 rx.$$

Or, vu l'isotropie, le second membre est la même chose que

$$-(SmrR \cos^2 rx + SmrR \cos^2 ry + SmrR \cos^2 rz) = -SmrR;$$

et on obtient une autre valeur du premier membre de la même équation en observant que si on développe la seconde des deux expressions égales

$$Smr^3 \left( \frac{dR}{dr} \frac{1}{r} \right) = Smr^3 \left( \frac{dR}{dr} \frac{1}{r} \right) (\cos^2 rx + \cos^2 ry + \cos^2 rz)^2$$

l'on a six fois la somme  $Smr^3 \left( \frac{dR}{dr} \frac{1}{r} \right) \cos^2 rx \cos^2 ry$  plus trois fois la somme

$Smr^3 \left( \frac{dR}{dr} \frac{1}{r} \right) \cos^4 rx$  qui en est le triple, comme on a vu (note du § 47 et-dessus),

dans les corps isotropes; ce qui fait 15 fois le même premier membre, en sorte que M. Wertheim change l'équation en

$$\frac{4}{15} Smr^3 \frac{dR}{dr} \frac{1}{r} = -SmrR,$$

ou, ce qui revient au même, en

$$S \frac{m}{r^{13}} \frac{d \left( \frac{R}{r} \right)}{dr} = 0$$

à laquelle il remarque qu'on satisfait en posant

$$R = r^{-14} \text{ (ou plutôt } R = Cr^{-14}, \text{ } C \text{ étant une constante).}$$

Donc, dit-il, la force moléculaire *décroit en raison inverse de la quatorzième puissance de la distance*; résultat que nous rapportons ici parce que M. Wertheim l'a reproduit dans un écrit de 1859.

S'il en était ainsi, la force serait, suivant le signe de  $C$ , ou constamment attractive ou constamment répulsive quelle que fût la distance. Les points matériels

du son rendu par les vibrations longitudinales et par les vibrations tournantes des tiges élastiques soit rondes, soit carrées ou rectangulaires. Nous avons inséré à ce sujet, le 15 janvier 1849, aux comptes rendus de l'Académie (t. xxviii, p. 69) une note à laquelle M. Wertheim a répondu le 22 du même mois (*id.* p. 126). Elle donnait les nombres suivants, calculés avec les formules du § 44 (4<sup>e</sup> Appendice, p. 640) au moyen des rapports  $\frac{N}{N'}$  antérieurement obtenus par divers expérimentateurs entre les nombres  $n, n'$  des vibrations des deux espèces :

Tiges rondes, d'après Chladni	$\frac{N}{N'} = 1,50$ (1);	d'où $\frac{E}{G} = \left(\frac{N}{N'}\right)^2 = 2,250$
— d'après Savart (2)	1,6668	2,778
— d'après M. Wertheim (3)	1,6309	2,660.

Pour les tiges carrées, M. Wertheim, bien que sachant déjà que nous pensions tout autrement que lui sur les valeurs de  $\frac{k}{K}$  et de  $\frac{E}{G}$ , a eu l'obligeance de nous communiquer alors (1849) des résultats inédits obtenus par lui. Quoiqu'il nous ait reproché (4) de nous en être servi pour continuer à combattre son opinion, nous ne pensons pas avoir rien fait alors ni rien faire encore de contraire à une loyale discussion scientifique en les rapportant avec les conséquences que nous en tirons. Voici ces résultats :

Tige carrée de fer	$\frac{N}{N'} = 1,6919$ ,	d'où $\frac{E}{G} = 0,84346 \left(\frac{N}{N'}\right)^2 = 2,414$ ,
<i>Id.</i> de verre ordinaire	1,6863	2,399,
<i>Id.</i> de cristal	1,6846	2,394.

s'attireraient jusqu'au contact, ou bien se repousseraient et s'éloigneraient indéfiniment; il n'y aurait ni état d'équilibre, ni solidité, ni élasticité.

Mais sans aller jusqu'à l'expression  $R = Cr^{-16}$ , il est évident que déjà l'égalité  $G = -3p$  était inadmissible, car le coefficient d'élasticité de glissement ne saurait être proportionnel à la pression  $-p$ , antérieure aux déplacements, pression ordinairement nulle et que M. Wertheim supposait telle dans les cas de toutes ses expériences.

(1) Acoustique, § 86.

(2) *Ann. de chimie et de physique.*

(3) *Idem*, 3<sup>e</sup> série, t. XXV, dernière page de la note sur la torsion des verges homogènes.

(4) Comptes rendus, t. XXVIII, p. 426, et *Ann. de ch. et de ph.*, juin 1857, p. 499.

Nous disions alors que la moyenne de ces six valeurs était

$$\frac{E}{G} = 2,483$$

plus rapprochées de  $\frac{5}{2} = 2,5$  donné par la théorie moléculaire ou par  $k = 2K$  que de  $\frac{8}{3} = 2,6667$  donné par la supposition  $k = K$ .

Mais, n'attachant pas à une pareille moyenne plus d'importance qu'elle n'en méritait, nous reconnaissons que si l'on rejette le résultat tiré de l'expérience ancienne de Chladni, ceux des tiges rondes sont plus favorables au rapport 2,667 de M. Wertheim, tandis que ceux des tiges carrées sont plus favorables au rapport 2,5 de la mécanique moléculaire.

M. Wertheim, dans sa réponse du 22 janvier, confirmait nos citations, et trouvait ainsi, comme nous,  $\frac{E}{G} = 2,4$  environ en appli-

quant notre formule  $\frac{E}{G} = 0,843 \left(\frac{\pi}{n'}\right)^2$  des tiges carrées. Mais il mettait en doute le coefficient 0,843. Or, en mettant un coefficient moindre, qu'il regardait comme résultant des expériences de torsion de Duleau et de Savart (§ 40), on aurait pour  $\frac{E}{G}$  des nombres encore plus petits, ou plus éloignés de la valeur 2,667 qu'il attribue à ce rapport.

On a vu d'ailleurs au 4<sup>e</sup> Appendice, § 45, que les expériences récentes et bien plus nombreuses du même savant, de vibrations de tiges carrées et rectangulaires, s'accordaient assez bien avec notre formule en y faisant  $\frac{E}{G} = 2,5$ .

Ainsi, quoique ses cinq expériences nouvelles (même mémoire publié en 1857) sur les tiges cylindriques à base de cercle et à base d'ellipse donnent une moyenne approchant de 2,67, nous pensons qu'on ne peut rien inférer, à l'appui de  $k = K$ , de ces divers résultats, surtout si l'on se reporte à ce que nous avons dit plusieurs fois, de la difficulté d'opérer sur des solides bien isotropes, difficulté qui a paru telle à Savart que, pour ses expériences les plus délicates sur l'équilibre de torsion des tiges rectangulaires, il a cru devoir rejeter les métaux et le verre, et se servir de tiges en plâtre,

malgré le peu d'étendue des déformations qu'on peut faire subir à une pareille matière sans la rompre ou sans altérer sa texture (1).

§ 64. *Considérations présentées par M. Cauchy en 1851. Elles ne s'appliquent qu'au cas d'une cristallisation régulière, qui exclut l'isotropie.*—Examinons, avec plus d'étendue, un raisonnement fait par M. Cauchy dans un rapport du 3 mars 1851, approuvé des travaux de M. Wertheim et de la recherche expérimentale du quotient de ces deux coefficients  $k$  et  $K$  que contiennent les formules d'isotropie (114) déduites par l'illustre analyste, en 1828 (comme nous avons dit au § 51) de sa deuxième hypothèse sur les relations entre les pressions et les dilatations *principales* dans les corps envisagés comme des masses continues (tome III des Exercices de mathématiques).

M. Cauchy commence par reconnaître que, d'après les formules plus générales données par lui dans le même volume pour les composantes des pressions dans un système de points matériels, ce quotient  $\frac{k}{K}$  (qu'il appelle  $\theta$ ) a nécessairement la valeur 2 lorsque les pressions étaient nulles dans l'état d'équilibre primitif ou antérieur aux déplacements opérés. Mais, ajoute-t-il, cette remarque, à laquelle il semble au premier abord qu'il n'y a rien à répondre, n'est plus applicable lorsque les molécules, au lieu d'être supposées réduites chacune à un point, sont regardées comme composées de groupes de plusieurs points élémentaires ou atomes. Car alors, dit-il, *si le corps est un cristal*, les coefficients des déplacements et de leurs dérivées dans les équations d'équilibre intérieur ne sont plus des quantités constantes, mais deviennent des fonctions périodiques des coordonnées. Or, en traitant ces équations de manière à en obtenir d'autres ne contenant que les valeurs moyennes des déplacements inconnus, c'est-à-dire, au lieu des déplacements individuels des atomes, ne contenant que les déplacements des centres de gravité des molécules ou groupes d'atomes, on arrive, quand les pressions primitives sont supposées nulles, à d'autres

---

(1) *Ann. de ch. et de ph.*, t. LXI, 1829, p. 373.

équations où les 36 coefficients n'ont pas nécessairement entre eux les rapports d'égalité qui les réduisent à 15. En sorte que, poursuit M. Cauchy, particularisées pour le cas de l'isotropie, les équations contiendraient deux coefficients  $k$  et  $K$  dont le quotient  $\frac{k}{K}$  ne serait pas nécessairement = 2.

Nous avons eu l'occasion de nous entretenir avec M. Cauchy de cette sorte de réfutation qu'il faisait, en 1851, des résultats de ses plus belles recherches de 1828, qui sont relatives à l'équilibre des corps envisagés comme des systèmes de points matériels, quand on les particularise pour l'égalité en tous sens. Nous pouvons assurer qu'il ne tenait point à son idée nouvelle, et qu'il était prêt à revenir aux formules d'isotropie à un seul coefficient, ou à  $k = 2K$ .

Son objection de 1851 tombe en effet d'elle-même lorsqu'on remarque que le raisonnement qu'on vient de rapporter, qui établirait la possibilité, pour des corps non isotropes, d'avoir plus de quinze coefficients distincts affectant les dérivées du premier ordre des déplacements moyens des groupes, ne s'applique qu'aux corps qui sont régulièrement cristallisés, ou (comme M. Cauchy l'avait expliqué dans des communications antérieures auxquelles il se réfère) aux corps à structure périodique, partageables par trois systèmes de plans parallèles et équidistants en cellules, *réticules* ou cases dans lesquelles les atomes sont homologuement de même nature et disposés de la même manière. Or l'isotropie exclut absolument cette divisibilité régulière, qui rend nécessairement la texture autre dans les sens obliques que dans les sens parallèles aux côtés des cases parallélépipèdes. L'isotropie n'est compatible qu'avec une cristallisation *confuse*, ou avec une disposition des molécules ou groupes atomiques suivant toutes sortes de directions ou d'orientations; de sorte que, quelle que soit la direction suivant laquelle on chemine dans un corps qui en est doué, on rencontre moyennement le même nombre de molécules tournées de chaque manière.

Nous pourrions nous contenter de cette réponse, et par conséquent ne tenir aucun compte de l'objection soulevée en 1851 par M. Cauchy, dans un bienveillant rapport, contre ce qu'il avait si bien établi vingt-quatre ans avant, et démontré même mieux que Navier et Poisson (§ 51 ci-dessus).

§ 65. *Comment la structure cristalline ou périodique pourrait altérer un peu les vingt et une égalités entre les coefficients. Elle ne les altère pas nécessairement.* — Mais il convient ici de faire voir comment la structure cristalline régulière, qui fait revenir périodiquement, en trois sens, à des points semblables et semblablement environnés lorsqu'on augmente ou diminue leurs coordonnées rectangulaires ou obliques de multiples des dimensions très-petites des cases moléculaires, peut être susceptible d'altérer quelquefois les 21 égalités deux à deux entre les 36 coefficients des dilatations et glissements dans les six formules de composantes de pression, et empêcher ainsi leur réduction à 15; puis, de montrer qu'une pareille altération ne peut pas avoir lieu dans les corps à cristallisation confuse, comme le verre, les métaux ordinaires, les bois, les pierres à bâtir, et comme doivent être nécessairement les solides supposés isotropes ou d'égale élasticité dans toutes les directions.

Remarquons d'abord que la cristallisation régulière, ou la contexture périodique, n'entraîne pas nécessairement cette altération des 21 égalités en question, ou cette augmentation du nombre 15 des coefficients distincts. Loin de là, cette contexture peut même rendre mathématiquement rigoureuses les six formules à 15 coefficients (12)  $p_{xx} = a_{xxx}\delta_x + \dots$ ,  $p_{yy} = a_{xyy}\delta_x + \dots$ , etc., qui, pour les corps à cristallisation confuse, ne le sont que sensiblement, en ce que dans ces corps les trois dilatations  $\delta$  et les trois glissements  $g$  ne résultent que de moyennes prises pour un nombre très-considérable de couples moléculaires.

Qu'on se figure, par exemple, un solide composé d'atomes disposés par rangées à égale distance suivant trois directions rectangulaires ou obliques (comme dans les assemblages étudiés par M. Bravais)<sup>(1)</sup>, et qu'on suppose des déplacements n'altérant ni l'équidistance ni la rectilinéarité des rangées, en sorte que les atomes voisins occupent, après comme avant les déplacements, les sommets de petits parallépipèdes tous égaux. Les dilatations  $\delta$  estimées dans trois directions rectangulaires seront partout les mêmes, quels que soient les couples d'atomes dont on se serve pour les calculer  $\phi$  il en sera de même des trois glissements  $g$ , et les démonstrations

(1) *Journal de l'École polytechnique*, 33<sup>e</sup> cahier, t. XII, 1850.

données ci-dessus (§§ 20 et 21 et note de 23) des formules (12) de composantes de pression à 15 coefficients, réductibles à 6 (form. 30) quand il y a trois plans de symétrie, subsisteront et seront même alors, comme on vient de dire, *tout à fait rigoureuses*, ou n'exigeront pas qu'on ait substitué des changements moyens  $\delta$  et  $g$  aux changements individuels de grandeurs et d'inclinaisons mutuelles des lignes de jonction atomiques.

Mais il en sera autrement si, le cristal étant un assemblage de molécules ou groupes atomiques tous semblables et semblablement orientés, le jeu des actions mutuelles y est tel que ces groupes éprouvent des déformations toutes semblables aussi, mais *autres que celles de l'ensemble des groupes*; de sorte que les atomes composants ne participent pas purement et simplement aux mouvements généraux résultant des dilatations  $\delta_x, \delta_y, \delta_z$ , et des glissements  $g_{yz}, g_{zx}, g_{xy}$  subis par les lignes de jonction des centres de gravité des groupes. Une pareille supposition se réalisera si, par exemple, une dilatation générale  $\delta$  imprimée dans un sens fait tourner tous les groupes sur eux-mêmes, ou bien amène, dans chacun d'eux, des dilatations d'une autre grandeur ou d'un autre sens; ou, encore, si les glissements relatifs  $g$  des diverses droites et des divers plans réticulaires passant par les centres des groupes développent des actions atomiques qui produisent, dans chaque groupe, ou des dilatations, ou bien des glissements d'une autre grandeur.

Dans ce cas-là, comme dans celui de la cristallisation confuse où les groupes moléculaires affectent toutes sortes d'orientations, imaginons que l'on tire, avant les déplacements, une ligne droite dans l'intérieur du corps, et qu'après les déplacements on trace *ce qu'elle est devenue*, c'est-à-dire que l'on joigne d'une manière continue la suite des points partageant les distances des atomes voisins dans les mêmes proportions que faisait la droite primitive: on aura une ligne nécessairement *ondulée* ou festonnée, dont la forme générale sera sensiblement rectiligne, en ce qu'elle oscillera autour d'une ligne droite ou très-peu courbe, si les dilatations et glissements de l'ensemble sont supposés constants ou peu variables; mais es diverses petites parties de cette ligne ondulée seront des courbes imperceptibles possédant des courbures diverses et très-prononcées.

Or l'effet de ces ondulations, quant aux coefficients des formules

de composantes de pressions, sera différent, selon qu'elles auront une marche irrégulière ou qu'elles auront une marche *régulièrement périodique*.

Voyons d'abord comment on le prouve à la manière de M. Cauchy. Nous le prouverons autrement ensuite.

L'éminent analyste se sert d'une méthode employée déjà par lui en 1828 (et auparavant, sous une autre forme, par Navier en 1821) pour poser directement les équations de l'équilibre intérieur sans passer par l'établissement des formules de pression. Pour cela il égale à zéro (comme nous avons dit à la fin du § 30) trois sommes de composantes

$$mSmR_1 \cos(r_1, x), \quad mSmR_1 \cos(r_1, y), \quad mSmR_1 \cos(r_1, z)$$

des actions R devenues  $R_1$ , qu'exercent, après les déplacements, sur un seul atome m dont les coordonnées  $x, y, z$  sont devenues  $x + u, y + v, z + w$ , les atomes environnants  $m, m, \dots$  qui en étaient à des distances très-petites  $r$  devenues  $r_1$ . En appelant

$$\Delta u, \Delta v, \Delta w$$

les augmentations qu'éprouvent les déplacements  $u, v, w$ , quand on passe du point m au point  $m$ , ou quand  $x, y, z$  augmentent de

$$\Delta x = r \cos(r, x), \quad \Delta y = r \cos(r, y), \quad \Delta z = r \cos(r, z),$$

on a

$$(135) \left\{ \begin{array}{l} \cos r_1 x = \frac{r \cos r x + \Delta u}{r_1}, \quad \cos r_1 y = \frac{r \cos r y + \Delta v}{r_1}, \quad \cos r_1 z = \frac{r \cos r z + \Delta w}{r_1}, \\ r_1 - r = \Delta u \cos r x + \Delta v \cos r y + \Delta w \cos r z; \end{array} \right.$$

et, si le rapport  $\frac{r_1 - r}{r}$  est très-petit, de manière qu'on puisse en négliger le carré, etc. :

$$(136) \quad \frac{R_1}{r_1} = \frac{R}{r} + (r_1 - r) \frac{dR}{dr}.$$

Il en résulte, en substituant, les trois équations d'équilibre suivantes :

$$(137) \left\{ \begin{array}{l} Sm \left[ R + \left( \frac{\Delta u}{r} \cos r x + \frac{\Delta v}{r} \cos r y + \frac{\Delta w}{r} \cos r z \right) \cdot r^3 \frac{dR}{dr} \right] \left( \cos r x + \frac{\Delta u}{r} \right) = 0, \\ Sm [\dots] \left( \cos r y + \frac{\Delta v}{r} \right) = 0, \quad Sm [\dots] \left( \cos r z + \frac{\Delta w}{r} \right) = 0. \end{array} \right.$$



Or la série de Taylor à trois variables donne les développements

$$(138) \left\{ \begin{aligned} \Delta u &= \frac{du}{dx} r \cos rx + \frac{du}{dy} r \cos ry + \frac{du}{dz} r \cos rz + \\ &+ \frac{r^2}{1.2} \left[ \frac{d^2u}{dx^2} \cos^2 rx + \frac{d^2u}{dy^2} \cos^2 ry + \frac{d^2u}{dz^2} \cos^2 rz + 2 \frac{d^2u}{dy dx} \cos ry \cos x \right. \\ &+ 2 \frac{d^2u}{dz dx} \cos rz \cos rx + 2 \frac{d^2u}{dx dy} \cos rx \cos ry \left. \right] \\ &+ \frac{r^3}{1.2.3} \left[ \frac{d^3u}{dx^3} \cos^3 rx + \dots \right] + \text{etc.}, \\ \Delta v &= \dots, \quad \Delta w = \dots. \end{aligned} \right.$$

En substituant dans (137) et développant, on pourra faire passer les dérivées de  $u, v, w$  hors des signes  $S$ , et négliger les produits de ces dérivées entre elles vu la petitesse de  $u, v, w$ . On effacera aussi les termes  $S m R \cos rx, S m R \cos ry, S m R \cos rz$  qui sont nuls vu que le point  $m$  était en équilibre avant les déplacements, et l'on pourra effacer aussi tous les termes affectés des dérivées du premier ordre  $\frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}, \dots, \frac{dv}{dx}, \dots$ , car ils auront, pour coefficients, des sommes  $S$  contenant un ou trois cosinus, sommes qui sont nulles comme se composant de termes égaux deux à deux au signe près, en vertu de l'homogénéité qui produit une distribution égale des atomes de part et d'autre de  $m$  sur chaque droite passant par ce point. Si, de plus, on suppose (comme nous avons presque toujours fait) nulles les pressions avant les déplacements, il faut encore supprimer six des termes du second ordre, savoir ceux qui seront affectés de sommes telles que  $S m R \cos^2 rx, S m R \cos ry \cos rz$ , contenant deux cosinus, car elles sont nulles alors, d'après ce qu'on a vu à la note du § 23. Il en résulte trois équations d'équilibre dans lesquelles les termes du second ordre, au nombre de dix-huit, ne sont affectés que de sommes à quatre cosinus, au nombre de quinze distinctes; et ces termes sont par suite précisément les mêmes que ceux des équations qu'on obtient en substituant les six formules (12)  $p_{xx} = a_{xxxx} \frac{du}{dx} + \dots + a_{xxyx} \left( \frac{dv}{dx} + \frac{dw}{dy} \right) + \dots$ ,  $p_{yy} = \dots$  etc., aussi à quinze coefficients, du cas de  $u, v, w$  très-petits, à la place de  $p_{xx}, p_{yy}$ , etc., dans les trois équations d'équilibre (38)  $\frac{dp_{xx}}{dx} + \frac{dp_{xy}}{dy} + \frac{dp_{xz}}{dz} = 0, \dots = 0, \dots = 0$  du § 27.

Mais ces équations, bornées ainsi au second ordre, qui peuvent être regardées comme exactes quand les déplacements  $u, v, w$  ont une marche simple ou quand leurs dérivées secondes varient fort peu en passant d'un point à un autre, et encore très-suffisamment approchées, comme on va voir, pour les corps homogènes à cristallisation confuse, ne suffisent plus dans le cas supposé de la texture cristalline régulière, ou de la forme périodiquement ondulée des lignes primitivement droites qui y ont été tirées; et il faut, pour ce cas, dans les développements (138) de  $\Delta u, \Delta v, \Delta w$ , prendre des termes des ordres supérieurs au second.

Alors, en effet, ce sont seulement les valeurs moyennes, appelées par M. Cauchy

$$u_0, v_0, w_0,$$

des déplacements  $u, v, w$  dans chaque groupe atomique ou dans chaque case moléculaire, qui ont une marche assez simple d'un groupe à l'autre pour qu'on puisse se contenter de considérer leurs dérivées du premier et du second ordre. Les déplacements réels des atomes individuels ont une marche compliquée; ils se composent 1° de ces déplacements moyens, ou des déplacements  $u_0, v_0, w_0$  des centres de gravité des groupes, 2° d'une partie *périodique* à très-courte période; car en appelant, pour les sens  $x, y, z$ ,

$$a, b, c$$

les dimensions des petites cases (supposées rectangulaires pour fixer les idées), les parties  $u-u_0, v-v_0, w-w_0$  redeviennent les mêmes, dans une certaine petite étendue, toutes les fois qu'on augmente ou diminue respectivement les coordonnées parallèles à  $x, y, z$  d'un nombre entier de fois  $a, b, c$ .

Alors donc on peut poser,  $A, B, \dots$  étant des constantes :

$$u = u_0 + A \cos \frac{2\pi x}{a} + B \cos \frac{2\pi y}{b} + C \cos \frac{2\pi z}{c} + A' \sin \frac{2\pi x}{a} + \dots + A_1 \cos \frac{4\pi x}{a} + \text{etc.}$$

ou, ce qui revient au même,  $A, B, \dots$  étant d'autres constantes réelles ou imaginaires :

$$(139) \left\{ \begin{array}{l} u = u_0 + A e^{\frac{2\pi x}{a} \sqrt{-1}} + B e^{\frac{2\pi y}{b} \sqrt{-1}} + C e^{\frac{2\pi z}{c} \sqrt{-1}} + A' e^{-\frac{2\pi x}{a} \sqrt{-1}} + B' e^{-\frac{2\pi y}{b} \sqrt{-1}} + \\ \quad + C' e^{-\frac{2\pi z}{c} \sqrt{-1}} + D \left( e^{\frac{2\pi x}{a} \sqrt{-1}} \right)^2 + \text{etc.} \\ v = v_0 + A_1 e^{\frac{2\pi x}{a} \sqrt{-1}} + \dots, \quad w = w_0 + A_2 e^{\frac{2\pi x}{a} \sqrt{-1}} + \dots, \end{array} \right.$$

Substituant dans les équations (137) après qu'on y aura remplacé  $\Delta u$ ,  $\Delta v$ ,  $\Delta w$  par leurs développements infinis (138) on aura, pour le corps cristallisé, trois équations d'équilibre dont les termes seront affectés de sommes de la forme

$$S m r^n \cdot \frac{d^n R}{dr^n} \cdot \cos^n r x \cdot \cos^n r y \cdot \cos^n r z,$$

qui servaient déjà de coefficients aux dérivées successives de  $u$ ,  $v$ ,  $w$  après la substitution de (138) et avant celle de (139). Or M. Cauchy observe que ces coefficients  $S$  sont périodiques eux-mêmes, car ils varient quand on promène le point  $(x, y, z)$  dans l'intérieur d'une case, et ils reprennent les mêmes valeurs quand on-en sort pour le placer en des points d'autres cases, homologues à son emplacement primitif. Chacun de ces coefficients  $S$  est donc exprimable par un développement analogue à ceux (139) de  $u$ ,  $v$ ,  $w$ .

Substituant ces développements, effectuant les multiplications et ordonnant, on pourra évaluer à zéro, dans chacune des trois équations d'équilibre, les polynômes affectés d'une même puissance ou d'un même produit de puissances des exponentielles imaginaires telles que  $e^{\pm \frac{2\pi x}{a} \sqrt{-1}}$ . Il en résultera une série d'autres équations, entre lesquelles, en les bornant à ce qui résulte d'un nombre déterminé de dérivées, ou de termes des développements (138), on pourra éliminer toutes les quantités inconnues, telles que  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $A'$ , ...,  $A_1$ , ..., de manière qu'il reste trois équations ne contenant que les dérivées des déplacements moyens  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , des groupes, et où l'on pourra ne conserver, d'après ce qu'on a dit tout à l'heure de leur marche simple, que les dérivées du second ordre.

Or, continue M. Cauchy, les coefficients de ces dérivées  $\frac{d^2 u_0}{dx^2}$ ,  $\frac{d^2 u_0}{dy^2}$ , ...,  $\frac{d^2 u_0}{dy dx}$ , ...,  $\frac{d^2 v_0}{dx^2}$ , ... ne seront pas les mêmes et n'auront pas entre eux les mêmes relations d'égalité que quand on peut réduire de prime abord  $u$ ,  $v$ ,  $w$  à leurs moyennes  $u_0$ ,  $v_0$ ,  $w_0$ . Donc, dans les formules des six composantes de pression, ces coefficients, qui sont les mêmes que dans les trois équations d'équilibre d'un élément, ne se réduisent pas nécessairement de 36 à 15, lorsque le corps est cristallisé ou à structure homogène périodique, et que les groupes atomiques, en éprouvant des rotations ou des déformations

autres que celles de l'ensemble, engendrent des déplacements atomiques individuels différents de ceux de leurs centres de gravité.

§ 66. *Autre moyen de se rendre compte de cette même altération, simplement possible, et de ses limites. Remarque générale sur les produits moyens de quantités périodiques qui ont des moyennes nulles.* — Les considérations qu'on vient de présenter sont compliquées. M. Cauchy en a indiqué l'application à la théorie de la lumière, en réduisant les termes des expressions (138) de  $\Delta u$ ,  $\Delta v$ ,  $\Delta w$  aux trois premiers ordres de dérivées, comme moyen d'expliquer certains phénomènes qu'offre la propagation des ondes lumineuses dans les cristaux (si la matière éthérée s'y trouve à l'état *cristallin*, ce qui est peu probable). Mais, pour représenter par un développement de Taylor le cours d'une ligne ondulée ou festonnée (§ précédent), engendrée par des déplacements  $u$ ,  $v$ ,  $w$  des points d'une ligne primitivement droite, ou pour obtenir les valeurs de  $\Delta u$ ,  $\Delta v$ ,  $\Delta w$  relatives à un de ses points en fonctions des dérivées de divers ordres de  $u$ ,  $v$ ,  $w$  pour un autre point qui peut en être séparé par plusieurs ondulations ou sinuosités successives, il faudrait sans doute tenir compte d'un très-grand nombre de termes ou de dérivées.

Nous pouvons arriver à la conclusion de M. Cauchy par une considération plus simple qui offrira en outre l'avantage de porter sur les composantes de pression elles-mêmes, de s'appliquer aux cas où les déplacements sont des grandeurs quelconques, pourvu que les dilatations et glissements généraux  $\delta$  et  $g$  qui en résultent soient très-petits (§ 29), et enfin de pouvoir nous donner une idée du degré de l'altération, probablement faible, et même insensible, que peuvent subir, disons-nous, les 21 égalités entre les 36 coefficients des formules pour les seuls corps régulièrement cristallisés.

Reprenons pour cela, mais avec des développements analytiques empruntés à la note du § 23 (p. 567 à 570), et en les modifiant convenablement, les raisonnements qui ont été présentés aux §§ 20 et 21 d'une manière élémentaire.

Par le point  $(x, y, z)$  où nous plaçons le centre de la petite face plane sur laquelle se prend la pression, supposons toujours menées, avant les déplacements, trois droites parallèles aux coordonnées rectangulaires  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Elles resteront droites si, le corps étant réguliè-

lièrement cristallisé, les plans qui le divisent en cases moléculaires identiques sont supposés perpendiculaires aux mêmes coordonnées, car ces droites passeront toujours par des points homologues des diverses cases. Sinon, ces lignes, comme nous avons dit, deviendront ondulées ou oscilleront régulièrement ou irrégulièrement autour de trois lignes droites

$$x_1, y_1, z_1.$$

Ce sont les trois angles des directions de ces lignes droites qui déterminent, dans les corps à cristallisation soit régulière, soit confuse, les trois glissements

$$g_{yz} = \cos(y_1, z_1), \quad g_{zx} = \cos(z_1, x_1), \quad g_{xy} = \cos(x_1, y_1);$$

et ce sont leurs longueurs moyennes, comparées aux longueurs primitives, qui déterminent les trois dilatations générales

$$\partial_x, \partial_y, \partial_z$$

de la portion de corps solide dont on s'occupe.

Or en considérant, de part et d'autre de la petite face où l'on prend la pression, les deux atomes  $m'$  et  $m''$ , dont la ligne de jonction primitive  $r$  avait pour projections orthogonales  $r\cos(r, x)$ ,  $r\cos(r, y)$ ,  $r\cos(r, z)$ , projetons *obliquement* la nouvelle ligne droite de jonction  $r_1$  sur les trois directions nouvelles  $x_1, y_1, z_1$ , au moyen des plans parallèles à  $y_1$  et  $x_1$ , à  $z_1$  et  $x_1$ , à  $x_1$  et  $y_1$ , passant par les extrémités de  $r_1$ , et appelons

$$\partial'_x, \partial'_y, \partial'_z$$

les proportions des excès respectifs de ces trois projections obliques sur les projections primitives et orthogonales

$$r\cos r_1 x, \quad r\cos r_1 y, \quad r\cos r_1 z.$$

La ligne  $r_1$  est ainsi la diagonale d'un parallépipède légèrement obliquangle, dont les trois côtés ont pour longueurs

$$(1 + \partial'_x)r\cos r_1 x, \quad (1 + \partial'_y)r\cos r_1 y, \quad (1 + \partial'_z)r\cos r_1 z,$$

et font entre eux des angles presque droits dont les cosinus sont les trois glissements

$$g_{yz}, \quad g_{zx}, \quad g_{xy}$$

Le théorème connu du carré de la diagonale d'un parallépipède le même que celui de la résultante de trois forces, § 57 de la note

du n° 156, p. 450), ou bien l'addition des carrés de trois équations comme celles (23) de la note du § 23 (3<sup>e</sup> Appendice), donne, pour  $r_1^2$ , la somme des carrés des trois côtés et des trois doubles produits de ceux-ci et des cosinus de leurs angles; d'où, en mettant le carré  $r_1^2$  sous la forme  $r^2 \left(1 + \frac{r_1 - r}{r}\right)^2$ , développant et divisant par 2 après avoir retranché 1 des deux membres :

$$(140) \quad \frac{r_1 - r}{r} = \partial'_x \cos^2 rx + \partial'_y \cos^2 ry + \partial'_z \cos^2 rz + g_{yz} \cos ry \cos rz + \\ + g_{zx} \cos rz \cos rx + g_{xy} \cos rx \cos ry.$$

Prenons la pression sur l'unité superficielle du plan  $y_1 z_1$  primitivement perpendiculaire aux  $x$ , et estimons-la (parce que c'est ce que qu'il y a de plus simple) suivant les trois directions

$$x', y', z'$$

respectivement perpendiculaires aux  $y_1 z_1$ ,  $z_1 x_1$ ,  $x_1 y_1$ , faisant par conséquent entre elles trois angles presque droits, et avec  $x_1$ ,  $y_1$ ,  $z_1$  trois angles très-petits. Nous aurons ainsi, d'après ce qui a été dit au § 23, p. 563, les mêmes coefficients des dilatations et glissements, dans les composantes de la pression, que si ces composantes étaient prises suivant trois directions rectangulaires et très-peu différentes de  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  ou de  $x_1$ ,  $y_1$ ,  $z_1$ , vu que nous ne nous occupons ici que des termes qui existent seuls lorsque les pressions primitives sont nulles (§ 23).

Désignons par  $S_n$  la somme des composantes, suivant une direction quelconque, de toutes les actions moléculaires qui s'exercent à travers la petite face primitivement perpendiculaire aux  $x$ , rapportée à l'unité de cette petite face  $y_1 z_1$ , ou divisée par sa superficie. Cette somme de termes relatifs aux diverses lignes de jonction  $r$ , de points deux à deux à travers la face, n'est pas de même nature que celles que nous avons appelées  $S$  à la note du § 22, et qui étaient relatives à des actions sur un seul point matériel, substituées, comme équivalentes, aux actions entre couples de points divers; genre de substitution dont nous nous abstenons ici, afin de ne raisonner que sur les forces réellement en jeu. Nous aurons,  $R$  et  $R_1$  désignant toujours l'action entre deux atomes  $m'$ ,  $m''$  avant et après les déplacements, par unité de masse,

$$(141) \quad p_{x_1 z_1} = S_x m' m'' R_1 \cos r_1 x', \quad p_{y_1 z_1} = S_y m' m'' R_1 \cos r_1 y', \quad p_{x_1 y_1} = S_z m' m'' R_1 \cos r_1 z'.$$

La projection droite de  $r_1$ , sur la normale  $x'$  au plan  $y_1z_1$ , est  $r_1 \cos r_1 x'$ . Comme elle s'opère par les deux mêmes plans, parallèles à  $y_1z_1$  et passant par les deux extrémités de  $r_1$ , que la projection oblique de  $r_1$  sur  $x_1$ , elle est égale à cette dernière projection, que nous avons appelée  $(1-\delta'_x) r \cos r x$ , multipliée par le cosinus de l'angle très-petit de  $x_1$  avec  $x'$ , cosinus que l'on peut regarder comme égal à l'unité. Donc on a la première des trois expressions suivantes, dont les deux autres s'obtiennent de même :

$$(142) \quad \cos r_1 x' = \frac{(1+\delta'_x) r \cos r x}{r_1}, \quad \cos r_1 y' = \frac{(1+\delta'_y) r \cos r y}{r_1}, \quad \cos r_1 z' = \frac{(1+\delta'_z) r \cos r z}{r_1}.$$

Substituant dans (141), en ayant égard à ce qu'on a (comme ci-

dessus, form. 136)  $\frac{R_1}{r_1} = \frac{R}{r} + (r_1 - r) \frac{d \frac{R}{r}}{dr}$  vu la petitesse de  $r_1 - r$ , et faisant, pour abrégér,

$$m' m'' r^2 \frac{d \frac{R}{r}}{dr} = \mathcal{R},$$

on obtient

$$(143) \quad p_{x_1 z_1} = S_x \left[ m' m'' R + \mathcal{R} \frac{r_1 - r}{r} \right] (1 + \delta'_x) \cos r x, \quad p_{y_1 y_1} = S_x [\dots] (1 + \delta'_y) \cos r y, \\ p_{z_1 z_1} + S_x [\dots] (1 + \delta'_z) \cos r z.$$

Mettons pour  $\frac{r_1 - r}{r}$  sa valeur (140) ci-dessus, et effectuons les multiplications. Nous pourrons effacer, non-seulement les termes contenant des produits de quantités très-petites  $\delta$  ou  $g$  entre elles, mais aussi tous les termes contenant  $R$ , car les uns, tels que  $S_x m' m'' R \cos r x$ , représentent les composantes des pressions primitives supposées nulles, et les autres, tels que  $S_x m' m'' R \cos r x \cdot \delta'_x$ , sont des sommes de produits, par les quantités très-petites et peu différentes entre elles  $\delta'_x$ , de diverses forces parallèles  $m' m'' R \cos r x$  dont la somme est nulle. Il restera :

$$(144) \quad \begin{cases} p_{x_1 z_1} = S_x \mathcal{R} \cos^2 r x \cdot \delta'_x + S_x \mathcal{R} \cos r x \cos^2 r y \cdot \delta'_y + S_x \mathcal{R} \cos r x \cos^2 r z \cdot \delta'_z + \\ \quad g_{yz} S_x \mathcal{R} \cos r x \cos r y \cos r z + g_{zx} S_x \mathcal{R} \cos^2 r x \cos r z + g_{xy} S_x \mathcal{R} \cos^2 r x \cos r y, \\ p_{x_1 y_1} = S_x \mathcal{R} \cos^2 r x \cos r y \cdot \delta'_x + S_x \mathcal{R} \cos^2 r y \cdot \delta'_y + S_x \mathcal{R} \cos r y \cos^2 r z \cdot \delta'_z + \\ \quad g_{yz} S_x \mathcal{R} \cos^2 r y \cos r z + g_{zx} S_x \mathcal{R} \cos r x \cos r y \cos r z + g_{xy} S_x \mathcal{R} \cos r x \cos^2 r y, \\ p_{z_1 z_1} = \dots \end{cases}$$

Les quantités  $\delta'_x, \delta'_y, \delta'_z$ , supposées légèrement variables d'un couple d'atomes à l'autre, diffèrent extrêmement peu de leurs moyennes respectives

$$\delta_x, \delta_y, \delta_z,$$

qui sont les dilatations générales de la petite partie de corps que l'on considère. Si l'on peut les remplacer par ces moyennes, elles passent hors des signes  $S_x$  comme les glissements  $g$ ; et alors on voit que le coefficient de  $\delta_y$  dans  $p_{xiz}$  est bien le même que celui de  $g_{xy}$  dans  $p_{xyi}$ ; que le coefficient de  $g_{yz}$  dans  $p_{xiz}$  est aussi le même que celui de  $g_{zx}$  dans  $p_{xy}$ , etc.; d'où les 24 égalités deux à deux entre les 36 coefficients des dilatations et glissements  $\delta, g$ , coefficients qui se réduisent bien alors à 15 distincts, comme nous avons dit au § 21.

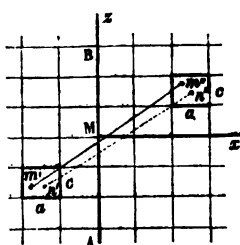
Or cette substitution, à  $\delta'_x, \delta'_y, \delta'_z$ , de leurs moyennes  $\delta_x, \delta_y, \delta_z$ , est permise lorsque le corps est à cristallisation confuse ou que ses groupes atomiques imperceptibles sont tournés indifféremment dans toutes les directions sans affecter de régularité ni de périodicité pour aucune. En effet, les termes  $S_x$  qui les contiennent sont des sommes d'un nombre extrêmement considérable de produits de quantités telles que  $\mathcal{R}\cos^3(r,x)$ ,  $\mathcal{R}\cos(r,x)\cos^3(r,y)$  susceptibles de toutes sortes de grandeurs, par ces quantités  $\delta'$  qui sont presque égales ou qui s'écartent très-peu au-dessus et au-dessous de leurs moyennes  $\delta$ . Il n'y a aucune raison, avec la contexture supposée, pour que les écarts  $\delta' - \delta$  au-dessus correspondent plutôt que les écarts  $\delta - \delta'$  au-dessous, ou ceux-ci plutôt que ceux-là, aux valeurs les plus grandes des multiplicateurs  $\mathcal{R}\cos^3(r,x)$ ,  $\mathcal{R}\cos(r,x)\cos^3(r,y)$ , etc. Il doit donc, en vertu de la loi même des grands nombres, y avoir compensation entre les effets de ces très-petits écarts en deux sens. Ainsi, pour les corps dont nous parlons, comprenant tous les matériaux employés dans les constructions, et aussi nécessairement tous les corps isotropes, les six composantes de pressions doivent être regardées, avec toute l'approximation que comportent les formules de ce genre, comme représentées par des expressions telles que (144) avec  $\delta_x, \delta_y, \delta_z$  mis pour  $\delta'_x, \delta'_y, \delta'_z$ , et en dehors des  $S_x$ , c'est-à-dire par des expressions comme celles (12) à quinze coefficients  $a_{xxxx}, a_{yyyy} = a_{xyxy}$ , etc.

Ce que nous venons de dire revient alors, simplement, avec des



développements analytiques, aux démonstrations plus élémentaires des §§ 20 et 21 du 3<sup>e</sup> Appendice.

Si, au contraire, le corps est régulièrement cristallisé ou à structure périodique, et s'il est supposé de ceux où le jeu des actions atomiques peut être tel (comme nous avons dit) qu'une dilatation de l'ensemble amène, dans les petits groupes, des mouvements d'une autre nature, par exemple des rotations toutes égales sur eux-mêmes, etc., les projections  $r \cos(r, x) \cdot (1 + \delta'_x)$  des lignes  $r_1$  de jonction d'atomes deux à deux n'auront pas les mêmes rapports avec leurs valeurs primitives  $r \cos(r, x)$ , pour deux atomes non ho-



mologues  $m'$ ,  $m''$ , que pour deux atomes homologues  $n'$ ,  $n''$  pris dans deux cases ou groupes  $ac$ ,  $ac$ ; en sorte que  $\delta'_x$  sera tantôt au-dessus, tantôt au-dessous de  $\delta_x$ .

Mais, parmi les lignes de jonction  $m'm''$  traversant la petite face  $AMB$  où se prend la pression, si l'on passe de l'une d'elles,  $r$ , à celles qui en diffèrent très-peu en direction et en grandeur, en la prome-

nant à peu près parallèlement à elle-même dans trois sens  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , cette ligne reprendra périodiquement des grandeurs et des directions exactement les mêmes quand  $m'$  aura parcouru un nombre exact de fois l'une des trois dimensions  $a$ ,  $b$ ,  $c$  des cases moléculaires; d'où il suit que  $\delta'_x$ , pour ces diverses lignes de jonction  $m'm''$  sensiblement parallèles, peut être représentée par la moyenne  $\delta_x$  plus une fonction périodique des coordonnées de l'atome  $m'$ .

Semblable chose peut être dite de chaque quantité telle que  $R \cos^2(r, x)$ ,  $R \cos(r, x) \cos^2(r, y)$ ; elle reprendra évidemment les mêmes grandeurs quand on passera, d'une case à l'autre, à des atomes  $m'$ ,  $m''$  semblablement situés; en sorte que, pour les diverses lignes  $r = m'm''$  sensiblement égales et parallèles, ou pour toutes les actions  $R$  que nous ajoutons ensemble comme égales à la note du § 23, en les remplaçant par l'action d'un point matériel unique (auquel nous attribuons la masse de toute la matière contenue dans un cylindre oblique), on voit que chacune de ces quantités  $R \cos^2(r, x)$ ,  $R \cos(r, x) \cos^2(r, y)$ , etc., est aussi égale à une certaine valeur moyenne plus une fonction périodique des coordonnées de  $m'$ .

Chaque terme tel que  $S_x R \cos^2(r, x) \cdot \delta'_x$  peut ainsi être regardé

comme une somme de produits binaires de certaines valeurs moyennes augmentées de fonctions variant et s'annulant périodiquement.

Or le produit de deux fonctions périodiques, si elles sont de même période, peut avoir une moyenne différente de zéro, quoique chacune d'elles oscille autour de zéro et ait une moyenne nulle (1). Les termes tels que  $S_x \mathcal{R} \cos^3(r, x) \cdot \mathcal{D}'_x$ ,  $S_x \mathcal{R} \cos(r, x) \cos^3(r, y) \cdot \mathcal{D}'_y$ , etc., dans les corps régulièrement cristallisés, pourront donc différer de  $\mathcal{D}_x \cdot S_x \mathcal{R} \cos^3(r, x)$ ,  $\mathcal{D}_y \cdot S_x \mathcal{R} \cos(r, x) \cos^3(r, y)$ , etc.

Les fonctions périodiques à ajouter aux moyennes  $\mathcal{D}_n$  (par exemple) pour avoir les  $\mathcal{D}'_n$  dépendront nécessairement du mode de déformation qu'a subi le corps, c'est-à-dire des trois dilatations  $\mathcal{D}_x$ ,  $\mathcal{D}_y$ ,  $\mathcal{D}_z$  et des trois glissements  $g_{yz}$ ,  $g_{zx}$ ,  $g_{xy}$  qui y ont été produits. Le terme  $S_x \mathcal{R} \cos^3(r, x) \cdot \mathcal{D}'_x$ , transformé en mettant à la place des  $\mathcal{D}'_x$  leurs valeurs, pourra donc fournir six termes affectés respectivement des trois dilatations  $\mathcal{D}$  et des trois glissements  $g$ .

Il en sera de même des autres termes contenant les  $\mathcal{D}'$  ou les

(1) C'est ce dont on peut se rendre compte géométriquement si l'on suppose, par exemple, que ce sont des fonctions d'une seule variable, en la prenant pour abscisse, et en traçant les deux courbes sinuées dont les ordonnées sont ces fonctions périodiques. La moyenne des ordonnées sera nulle pour chacune des deux courbes puisqu'elles prennent, dans chaque demi-période, des valeurs égales et de signe contraire aux valeurs qu'elles ont eues dans la demi-période précédente. Mais il n'en sera pas de même pour la troisième courbe qu'on tracerait avec des ordonnées proportionnelles aux produits de celles des deux autres pour même abscisse, car les ordonnées négatives multipliées entre elles donneront des produits positifs tout comme les ordonnées positives; en sorte que, généralement, la somme, ou la moyenne de ces produits de quantités de même période, ne sera pas zéro.

On s'en rend compte, aussi, analytiquement en remarquant que la moyenne

$$\frac{1}{c} \int_0^c \cos \frac{2\pi x}{a} \cos \frac{2\pi x}{b} dx = \frac{1}{2c\pi} \frac{ab}{a^2 - b^2} \left( a \cos \frac{2c\pi}{a} \sin \frac{2c\pi}{b} - b \sin \frac{2c\pi}{a} \cos \frac{2c\pi}{b} \right)$$

des grandeurs des produits des deux quantités périodiques  $\cos \frac{2\pi x}{a}$ ,  $\cos \frac{2\pi x}{b}$ , pour une étendue  $c$ , est nulle si les périodes  $a$ ,  $b$  sont différentes entre elles et si  $c$  est un multiple à la fois de  $a$  et de  $b$ , ou seulement de  $\frac{a}{2}$ ,  $\frac{b}{2}$  supposés commensurables; en sorte que,  $m$  et  $n$  étant deux nombres entiers, on ait  $c = \frac{ma}{2} = \frac{nb}{2}$ , et en

faisant aussi la remarque que si  $\frac{a}{2}$ ,  $\frac{b}{2}$  sont incommensurables, on peut toujours atténuer indéfiniment la grandeur absolue de cette même moyenne en prenant  $c$  suffisamment grand; puisque la parenthèse ne peut devenir plus grande que  $a + b$

allongements subis par les projections des diverses distances moléculaires individuelles  $r$ ; en sorte qu'en réunissant ensemble ce qui sera affecté de chaque dilatation  $\delta$  et de chaque glissement  $g$ , les 36 coefficients par lesquels ces dernières quantités se trouveront multipliées dans les six formules de composantes de pression n'auront pas entre eux les mêmes relations que lorsque les  $\delta'$  peuvent être remplacés par les  $\delta$  correspondants.

Il est donc bien vrai que, dans les corps régulièrement cristallisés, ou plutôt dans quelques-uns de ces corps, savoir ceux où les groupes atomiques ne participent pas purement et simplement aux déformations générales imprimées à leur ensemble, ces trente-six coefficients pourront n'avoir pas entre eux les vingt et une égalités qui les réduisent à quinze distincts dans les autres corps.

§ 67. *L'altération des vingt et une égalités entre les coefficients, si elle a lieu, doit être insensible.* — Mais maintenant, je le demande, ces égalités entre les coefficients pourront-elles être jamais considérablement altérées, de manière, par exemple, que le coefficient de  $\delta_y$  dans  $p_{xx}$  devienne double de celui de  $g_{xy}$  dans  $p_{xy}$ , au lieu de lui être égal?

Bien que tout soit inconnu dans le jeu des forces atomiques, nous sommes persuadé que personne ne le croira.

ni plus petite que  $a - b$ ; mais que si  $a = b$  ou si les périodes sont les mêmes; on a, pour la moyenne, la valeur finie

$$\frac{1}{c} \int_0^c \cos^2 \frac{2\pi x}{a} dx = \frac{1}{c} \cdot \frac{c}{2} = \frac{1}{2}$$

ce qui vient de ce que l'intégrale  $\int dx \cos^2 ax = \frac{x}{2} + \frac{\sin ax \cos ax}{2} + \text{Constante}$  contient une partie non périodique  $\frac{x}{2}$ .

Si les deux quantités dont les moyennes sont nulles oscillent autour de zéro irrégulièrement et non pas régulièrement ou périodiquement, leur produit aura aussi zéro pour moyenne, en la prenant sur une étendue suffisamment grande, car les oscillations de ces quantités ne sont point concordantes; et l'on suppose que leurs grandeurs, répondant aux mêmes valeurs de la variable dont elles dépendent, ne sont ni plus ni moins souvent de même signe que de signe contraire, en sorte qu'il doit arriver ici, à fortiori, ce qui arrive lorsqu'il y a oscillation par périodes régulières inégales. C'est le cas des corps à cristallisation confuse, où l'on peut, comme nous avons dit, remplacer les  $\delta'$  par leurs valeurs moyennes  $\delta$  avec toute l'approximation que comporte le genre de calcul qui nous occupe.

Si l'on fait subir à une portion de corps cristallisé une certaine déformation, c'est-à-dire si l'on imprime à son ensemble certaines dilatations et certains glissements, peut-on imaginer que les groupes atomiques, qui sont unis les uns aux autres latéralement, prennent jamais des déformations particulières très-sensiblement différentes de celle de l'ensemble? Nous ne pouvons le penser.

Et si les petites différences entre les déformations particulières et la déformation générale font osciller périodiquement les valeurs de certaines quantités autour de leurs moyennes, est-il supposable que les concordances possibles des signes de leurs écarts (note du § précédent) suffisent jamais pour rendre les valeurs moyennes de leurs produits très-sensiblement plus grandes ou plus petites que les produits de leurs valeurs moyennes? Nous ne le croyons pas non plus, et, pour peu qu'on y réfléchisse, il nous semble que tout le monde verra de même, quoiqu'on n'ait aucune donnée sur l'intensité des causes qui peuvent influencer à cet égard.

Aussi M. Poisson, qui le premier, en 1828, avait présenté (comme on a dit au § 54) des formules à 36 coefficients sans se livrer alors à aucune recherche des expressions de ceux-ci, a réduit, depuis, le nombre de ces coefficients à 15 distincts, même pour les corps cristallisés, dans son dernier mémoire relatif spécialement à ces sortes de corps (<sup>1</sup>), et il a admis ainsi, pour tous, les 21 égalités de ces coefficients deux à deux.

Si ces 21 égalités peuvent être altérées par les raisons tirées de la périodicité et signalées par M. Cauchy, nous pensons donc que cela doit être de peu de chose, et dans des proportions ordinairement négligeables.

§ 68. Cette altération ne regarde pas, en tous cas, les corps à cristallisation confuse. — Et, si elle existe, cette altération ne peut regarder que certains cristaux réguliers. Elle n'est jamais relative aux corps à cristallisation confuse, comme sont tous les matériaux de construction, et comme sont aussi tous les corps isotropes (§§ 64, 66). Il n'y a donc aucune raison de changer les for-

---

(<sup>1</sup>) Mémoires de l'Institut, t. XVIII (1839), art. 36; 37.

mules trouvées depuis un tiers de siècle pour les pressions dans ces sortes de corps.

§ 69. *Opinion, sur ce sujet, de divers Savants de l'Angleterre et de l'Allemagne.*—L'Appendice complémentaire ci-après sera consacré en partie à analyser les travaux récemment venus à notre connaissance, de plusieurs célèbres géomètres-physiciens de ces deux pays, sur la théorie qui nous occupe. Nous devons, en attendant, examiner et discuter ici ce que nous y avons trouvé de relatif au sujet du présent appendice, c'est-à-dire au nombre des coefficients réellement distincts et inégaux  $a_{xx}, \dots, a_{yz}, \dots$ , etc., des formules (12), etc., des pressions produites dans un corps par des déformations  $\delta x, \dots, \delta y, \dots$  subies à partir de l'état dit *naturel* (§§ 20, 22, 80), où il n'y avait aucune pression. Nous le ferons dans ce § et dans les quatre suivants avec l'attention que méritent leurs importants travaux où ils traitent les questions d'une manière large en y appliquant avec avantage les méthodes de la Mécanique analytique de Lagrange, dont on ne s'était point servi en France depuis que Navier les a employées avec succès à sa brillante et si utile découverte de la théorie de l'élasticité.

Le dernier qui ait écrit, le savant M. Neumann, de Halle (1), se prononce, comme nous, pour la réduction des coefficients au moindre nombre: Son analyse, bien que différente de celles de Cauchy et de Poisson, se base en effet de même sur la loi physique des actions réciproques entre molécules suivant leurs lignes de jonction, d'où les quinze coefficients seulement, de la forme (26)

$$\frac{p}{2} \sum m r^3 \frac{d^2 f}{dr^2} \cos^4(r, x), \text{ etc., ci-dessus (p. 570), si on la développe}$$

pour le cas général d'une texture quelconque (Voyez app. suppl., §§ 84, 85), et un seul coefficient pour le cas d'isotropie considéré par M. Neumann, outre la pression ( $p$ , ci-dessus, § 26, p. 583), qu'il suppose exister antérieurement aux déplacements relatifs des points (2).

C'est à la même conclusion qu'était arrivé M. Haughton, de Du-

(1) *Zur Theorie der Elasticität*, au Journal de Crelle, t. 57, 4<sup>e</sup> livraison, 1860.

(2) Dans les formules d'isotropie auxquelles arrive M. Neumann au § 7 ou à la fin de l'art. 4<sup>o</sup> de son Mémoire, et qu'il dit très-bien être identiques à celles de

Bin, dans son premier et plus beau mémoire, du 25 mai 1846 (7), où il fonde l'établissement des équations d'équilibre et de mouvement intérieur et par suite les lois de la propagation de la lumière sur le calcul des attractions et répulsions mutuelles des points matériels suivant leurs lignes de jonction, bien qu'il ait dans un autre travail, du 5 janvier 1849, cru pouvoir concéder à deux illustres compatriotes qu'on peut établir les équations « sans faire aucune restriction sur la nature de l'action moléculaire », et divisé ensuite les milieux en trois groupes, dont les deux premiers sont purement idéaux, et le troisième, seul réel, est précisément celui qu'il avait considéré à son précédent mémoire (7).

C'est aussi sur le calcul des actions entre molécules suivant leurs lignes de jonction, que M. Clebsch a fondé sa belle théorie des milieux qui polarisent circulairement (8), bien qu'il ait cru devoir ensuite, dans son traité classique de l'élasticité des corps solides,

Poisson » (de 1829, p. 52 du 26<sup>e</sup> cahier de l'Éc. pol., et non de 1828) le coefficient proprement dit est appelé  $\mu k$ ; et  $\mu k$  désigne la pression antérieure aux déplacements; constantes que Poisson désigne par  $k$  et  $K$ , et Cauchy par  $RA = \frac{k + 2K}{4}$  et  $GA = \frac{k - 2K}{4}$ . La 2<sup>e</sup> partie de ce beau travail n'est relative qu'à l'établissement de formules applicables à des systèmes quelconques de données.

(1) *On the Equilibrium and Motion of solid and fluid Bodies*; au vol. XXI des Transactions of the Royal Irish Academy, p. 454.

(2) *On a classification of Elastic Media*, idem, vol. XXII. Le premier des trois groupes se compose de ces fluides dits parfaits, à pressions exclusivement normales et égales en tout sens, ou sans aucun frottement, qui ont fait, on peut le dire, le désespoir de d'Alembert et d'Euler quand ils ont voulu expliquer la résistance des fluides (voy. Comptes rendus, 4<sup>e</sup> février 1847, t. XXIV, p. 243), le second, encore plus imaginaire s'il est possible, se composerait de milieux « où les actions moléculaires produiraient des forces exclusivement tangentes  $s$ ; les représentations que M. Haughton fait à M. Mac-Cullagh vers la fin de ce mémoire montreraient qu'il ne croit guère à leur possibilité. Reste donc le groupe des corps ou des milieux « dont les molécules s'attirent et se repoussent. »

(3) *Theorie der circularpolarisirenden Medien* (Journal de Crelle, 57<sup>e</sup> vol., 4<sup>e</sup> livraison).

On peut encore citer au nombre des travaux traités au même point de vue plusieurs mémoires de M. Briot sur la lumière, qui ne sont encore connus que par de courts extraits (Comptes rendus, 1859, 1860, 1864, t. XLIX, p. 888; L, p. 444; LII, p. 393). Le savant Maître de conférences particularise, même, la forme de la fonction qui représente l'action moléculaire, en la supposant proportionnelle à une puissance négative des distances; mais on peut arriver aux mêmes résultats sans cette dernière hypothèse, qu'il lui sera difficile de faire accepter.

laisser arbitraire le rapport des deux élasticités d'extension et de glissement de manière à s'accommoder à toutes les opinions, ainsi que nous faisons nous-mêmes quand il n'y a pas nécessité de nous prononcer <sup>(1)</sup>.

On peut également citer M. Clausius, l'éminent professeur de l'école polytechnique de Zurich <sup>(2)</sup>, au nombre de ceux qui trouvent parfaitement exactes les formules à un seul coefficient du cas d'isotropie, pour représenter les relations entre les actions et les déplacements ou déformations qu'elles produisent *immédiatement*, bien qu'il ait adopté l'avis de les modifier si on veut les rendre applicables aux effets de cette *action élastique ultérieure* (elastische nachwirkung), observée par M. Weber sur les fils de soie pendant une durée de vingt-quatre heures, et que M. Clausius croit entrer en jeu pour les métaux, etc., pendant des temps bien plus courts (Voyez § 74).

Tous les savants étrangers que nous avons encore à citer reconnaissent, comme ceux-ci, et sans exception, qu'il ne doit y avoir que quinze coefficients pour le cas général et qu'un seul pour la contexture isotrope *dès qu'on réduit les forces intérieures à des actions réciproques s'exerçant entre points matériels suivant leurs lignes de jonction deux à deux.....* Et, néanmoins, la plupart se rangent à l'avis exprimé pour la première fois par George Green, qui porte ces coefficients à *vingt* et un dans le cas général, d'où encore *deux* dans le cas de l'isotropie.

Cette vue de Green constitue une *troisième* origine (§§ 50 et 54) de l'opinion qui domine aujourd'hui et que nous combattons.

C'est en 1837 <sup>(3)</sup> et en 1839 <sup>(4)</sup> que l'illustre physicien anglais a énoncé cette opinion alors nouvelle, dans ses deux célèbres mémoires sur la lumière, où il la considère, ainsi qu'avait fait Cauchy, comme propagée par les petits mouvements du milieu éthéré supposé vibrer à la manière d'un solide élastique de contexture iso-

<sup>(1)</sup> Theorie der Elasticität fester Körper, Carlruhe, 1862.

<sup>(2)</sup> Ueber die Veränderungen... Sur les changements qui sont devenus nécessaires, etc. Ann. de Poggendorff, vol. LXXVI, p. 46.

<sup>(3)</sup> On the Laws of the Reflexion and Refraction of Light (Transactions of the Cambridge philosophical Society, vol. VII, part. I, 1839).

<sup>(4)</sup> On the Propagation of Light in crystallised Media, id., part II, 1844.

trope dans l'air ou le verre non comprimé, et hétérotrope dans les corps transparents qui produisent la double réfraction. L'analyse avait montré à Cauchy <sup>(1)</sup> que tout ébranlement se décompose en trois systèmes d'ondes se propageant parallèlement avec des vitesses différentes, et où les mouvements moléculaires vibratoires sont généralement, à l'intérieur de ces derniers corps, un peu obliques à la direction de propagation, ce qui n'empêche point, moyennant certaines relations nullement improbables entre les coefficients, les rayons de pouvoir y suivre exactement les directions indiquées par la surface courbe d'onde du quatrième degré dont la découverte est due au génie de Fresnel. C'est, d'après la même analyse, seulement à l'émergence dans l'air que, par suite de nouvelles décompositions, les vibrations deviennent les unes exactement transversales, les autres exactement longitudinales; et Cauchy explique l'invisibilité du troisième rayon (auquel les mouvements étaient, avant, *presque* parallèles, tandis qu'ils étaient *presque* perpendiculaires aux deux autres) par la trop faible proportion qu'il donne alors de vibrations *transversales* de l'éther, les seules qui soient perceptibles à l'organe de la vue, de même que l'organe de l'ouïe ne perçoit que les vibrations *longitudinales* de l'air.

Green ne se trouvant point satisfait apparemment par ces résultats que fournissent les formules à un seul coefficient pour les milieux isotropes et à quinze au plus pour les autres, mais attribuant néanmoins toujours la propagation de la lumière aux attractions et répulsions mutuelles des particules de l'éther, avança que l'hypothèse « *des actions* entre leurs points *suivant les directions des lignes de jonction de ceux-ci* », faite par Cauchy, était trop restrictive; et, vu notre ignorance complète de la véritable loi, il « choisit, pour base de son raisonnement », un principe plus général ainsi énoncé: « De quelque manière que les parties d'un système matériel agissent les unes sur les autres, si l'on multiplie toutes les forces s'exerçant ainsi à son intérieur par les éléments de leurs *directions* respectives, la somme totale des produits, pour une portion déterminée quelconque de la masse, est toujours une

---

<sup>(1)</sup> Exercices de mathématiques, 5<sup>e</sup> année (1830), p. 49-72. Et Bulletin-Férussac, t. XIII, n<sup>o</sup> 217, p. 444.



différentielle exacte de quelque fonction (1). » Si cette condition n'était pas remplie, dit-il plus loin (2), le mouvement perpétuel serait possible (Voyez ci-après, § 70); or nous avons, continue-t-il, toute raison de penser que les forces de la nature sont disposées de manière à le rendre impossible.

Mais Green ne se borne point à cette hypothèse, ou à ce principe qui en effet est insuffisant; on ne voit même point qu'il l'exprime analytiquement conformément à son énoncé, car il n'est question, dans son mémoire, ni des actions individuelles des particules, ni de leurs directions, qu'il a déclaré, de prime-abord, ignorer complètement. Faisant donc succéder, comme il arrive toujours, le dogmatisme au doute systématiquement embrassé, il admet que la fonction inconnue dont il a parlé, ou plutôt son intégrale entre les limites des petites déformations éprouvées par un élément quelconque du milieu, dépend des trois allongements subis par les côtés de cet élément supposé de forme parallépipède primitivement rectangle, et des trois cosinus des angles légèrement aigus ou obtus qu'ils forment maintenant entre eux, c'est-à-dire précisément des six quantités que nous avons appelées

$$\delta_x, \delta_y, \delta_z, \varepsilon_{yz}, \varepsilon_{xz}, \varepsilon_{xy},$$

parce qu'il est évident que cette fonction restera la même (3) si les côtés et les angles du parallépipède ne changent plus. En outre, et ce qui est bien moins évident, il suppose que cette quantité  $\varphi$  (appelée par lui *potentielle* dans d'autres mémoires, comme on dira au § 68), est développable en une suite convergente de fonctions homogènes des degrés entiers 1, 2, 3, etc., des six variables dont elle dépend et que nous venons de dénommer. Il supprime les puissances et produits du 3<sup>e</sup> degré à cause de la petitesse de ces variables, mais il conserve ceux du 2<sup>e</sup> parce qu'il trouve que la somme des valeurs, pour tout le corps, de la partie affectée des premières puissances, doit être nulle dans le cas où l'on part d'un état d'équilibre naturel ou sans pressions. La quantité  $\varphi$  se trouve ainsi réduite, dans ce

(1) 1<sup>er</sup> mémoire, p. 4.

(2) Idem, p. 6, au bas.

(3) 1<sup>er</sup> mémoire, p. 5, et 2<sup>e</sup>, p. 124.

dernier cas, à une fonction homogène du second degré de six variables  $\delta_x, \dots, \delta_y$ .

Cette fonction a 21 termes (6 affectés des carrés, 15 des produits deux à deux), et par conséquent vingt et un coefficients; et ces coefficients sont précisément ceux qui doivent entrer dans les six formules des composantes de pression ainsi que dans les équations différentielles de l'équilibre, car on les tire de cette fonction  $\varphi$  traitée de certaines manières (comme on verra §§ 70, 84).

Or, lorsqu'on dispose ainsi de vingt et un coefficients réputés indépendants, on se trouve à l'aise et l'on peut obtenir (on le conçoit), bien des résultats et bien des explications où l'on ne pouvait arriver avec quinze. Le premier usage qu'il fait de cette latitude, pour les milieux isotropes, où les 21 se réduisent à deux, proportionnels respectivement aux carrés des vitesses de propagation des vibrations longitudinales et des vibrations transversales, est de supposer extrêmement considérable et comme infini le rapport du premier au second <sup>(1)</sup>, afin de réduire presque à rien (faute de pouvoir l'annuler), la proportion de lumière ou de vibrations transversales fournie par le rayon à vibrations longitudinales ou non éclairantes après qu'une nouvelle réfraction l'a modifié. Quant aux milieux hétérotropes de l'intérieur des cristaux, Green, tout en reconnaissant très-bien que les vibrations *peuvent y être obliques*, non-seulement aux rayons mais même aux ondes planes qui les engendrent par la suite des intersections de leurs plans, mais ayant l'intention de tenir compte aussi de diverses autres données, telles que les pressions antérieures qui donnent six constantes de plus, etc., se restreint, dit-il <sup>(2)</sup>, pour ne pas s'engager dans des calculs trop compliqués et sans chances d'être applicables, à la seule considération de ces milieux dans lesquelles les vibrations satisferaient au principe fondamental avancé par Fresnel, c'est-à-dire s'exécuteraient exactement (accurately, rigorously), dans le plan même des ondes.

Cette condition, analytiquement exprimée, exige, entre les vingt

<sup>(1)</sup> 4<sup>o</sup> mémoire, p. 2.

<sup>(2)</sup> 2<sup>o</sup> mémoire, Propagation in crystallised Media, p. 4.

et un coefficients, quatorze relations <sup>(1)</sup>, comme nous verrons plus loin.

Les vues de Green devaient plaire généralement aux analystes, car non-seulement elles paraissent, au premier abord, réduire letablissement de la théorie de l'élasticité à une affaire de pure analyse sans l'invocation d'aucune loi physique, mais encore, on remarque que la plupart des conséquences qu'on tire des formules à 21 coefficients n'ont pas plus de complication que celles qu'on tire des formules à 15, en sorte que, dans l'intérêt de la branche d'analyse qui se trouve liée à la théorie en question et qui pourra trouver d'autres usages, il pouvait paraître convenable de conserver ordinairement, jusqu'aux applications, ces 21 coefficients de Green.

Aussi ces vues ont été adoptées par beaucoup de savants, et des plus éminents, dont plusieurs ont cherché à les étayer de diverses raisons puisées dans les faits.

Avant de les discuter (ce que nous ferons aux §§ 71, 72), nous allons exposer un point qui, dans les considérations de Green, paraît définitivement acquis à la science, et de nature à être admis par tout le monde sans contestation, savoir cette réduction nécessaire, à 21 au plus, du nombre des coefficients, ne s'opposant nullement à la réduction plus considérable (à 15), basée sur les autres motifs exposés § 21 et note du § 23.

§ 70. *Preuve donnée par MM. Green, Thomson, Kirchoff, de la nécessité de réduire, à vingt et un au plus, les trente-six coefficients  $a_{xx}$ , etc., des formules de pressions et des équations d'équilibre. — Les composantes  $p_{xx}$ , ...  $p_{xy}$  sont les dérivées partielles d'une même fonction par rapport aux dilatations et glissements  $\delta_x$ , ...  $\epsilon_{xy}$ . — Soit un petit élément parallélépipède primitivement rectangle et ayant ses côtés parallèles aux  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Les pressions agissant sur ses six faces ont produit, en changeant légèrement sa forme, un travail mécanique qui doit nécessairement être fonction*

(1) Cette analyse est analogue à celle qui a été donnée par M. Lamé en 1852 (Leçons sur l'élasticité, §§ 92 et 93); seulement, le Géomètre français exige 24 relations comme condition de biréfringence avec vibrations exactement transversales dans le cristal comme dans l'air parce qu'il suppose 36 coefficients indépendants au lieu de 24.

des changements de grandeur et d'inclinaison des côtés, c'est-à-dire des dilatations et glissements éprouvés. On peut donc, en appelant  $\Phi$  ce travail par unité du volume de l'élément, et  $\varphi$  la caractéristique d'une fonction (qui n'est autre que celle que Green désigne par la même lettre)

$$(145) \quad \Phi = \varphi(\partial_x, \partial_y, \partial_z, g_{yz}, g_{zx}, g_{xy}).$$

Si l'on n'accordait pas cela, ou si l'on regardait le travail comme dépendant encore d'autre chose, par exemple de l'ordre dans lequel les six déformations partielles  $\partial, g$ , ont été imprimées, ce serait admettre qu'en ramenant l'élément d'une autre manière (ou dans un ordre non exactement inverse) à sa forme et à ses dimensions primitives, il en résulterait un travail non égal et contraire, et qu'on pourrait par conséquent, à l'aide d'un corps compressible et extensible, créer de toutes pièces du travail sans consommation de moteur ou de chaleur; ce qui serait bien, suivant la remarque de Green, *la possibilité du mouvement perpétuel*, ou la négation du principe de transmission du travail et des puissances vives (1).

Or soient

$$x, y, z$$

les longueurs primitives des côtés très-petits de l'élément dans les sens  $x, y, z$ . Supposons que la dilatation  $\partial_x$ , déjà subie par le côté  $z$ , par exemple, vienne à prendre un accroissement infiniment petit

$$d\partial_x;$$

les deux faces opposées et égales  $xy$  s'éloignent de

$$z \cdot d\partial_x,$$

et les composantes normales de pression  $p_{xx}$  exercées par la matière environnante sur l'unité de ces faces  $xy$  produisent un travail

$$xyp_{xx} \cdot zd\partial_x,$$

ce qui, par unité du volume  $xyz$ , fait

$$p_{xx}d\partial_x.$$

(1) Ce n'est pas le lieu d'examiner si ce grand principe lui-même, ou celui des vitesses virtuelles, peut se démontrer autrement, pour un corps ou un système, qu'en invoquant la loi des actions mutuelles entre points matériels suivant leurs lignes de jonction deux à deux.

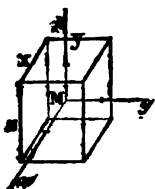
Si, l'une des deux mêmes faces  $xy$  restant immobile, le glissement  $g_{xy}$  vient à augmenter de

$$dg_{xy},$$

la composante tangentielle  $p_{xy}$  sur l'unité de l'autre face  $xy$  produit un travail

$$xyp_{xy} \cdot zdg_{xy},$$

car  $zdg_{xy}$  est ce dont s'accroît le cheminement de cette deuxième



face ou son glissement devant l'autre dans un sens parallèle aux  $y$  ou à la composante  $p_{xy}$ .

Quant à la composante  $xyp_{xy}$  sur la première face  $xy$ , elle n'a produit aucun travail puisque cette face ne s'est pas déplacée; et il en est de même des composantes  $xzp_{yz}$  qui s'exercent dans le sens  $z$  sur les deux faces adjacentes  $yz$ , car

ces faces, qui ont légèrement tourné autour de leurs arêtes  $x$  d'intersection avec les faces  $xy$ , n'ont pris aucun mouvement dans le sens  $z$  qui est celui de ces deux composantes; en sorte que le travail total des composantes ayant l'intensité  $p_{xy} = p_{yz}$  par unité superficielle des quatre faces, est pour l'unité du volume  $xyz$  de l'élément:

$$p_{xy}dg_{yz}.$$

Et l'on aurait la même chose si la première face  $xy$ , au lieu de rester fixe, avait tourné autour d'une arête  $x$  d'un petit angle  $dg'$  portion de  $dg_{yz}$ , car la face adjacente n'aurait tourné que de l'autre portion  $dg'' = dg_{yz} - dg'$ , ce qui aurait donné, de la part des composantes de pression s'exerçant dans le sens  $y$  sur les faces  $yz$  perpendiculaires aux  $z$ , et dans le sens  $z$  sur les faces  $xz$  perpendiculaires aux  $y$ , un travail total

$$xyp_{xy} \cdot zdg'' + xzp_{yz} \cdot ydg' = xyz \cdot p_{xy}dg_{yz}$$

qui, divisé par le volume, donne toujours  $p_{xy}dg_{yz}$ .

En évaluant de même le travail des autres composantes, puis ajoutant, l'on obtient pour l'accroissement infiniment petit total du travail  $\Phi$ , dû aux accroissements des trois dilatations et des trois glissements, l'expression

$$(146) \quad d\Phi = p_{xx}d\alpha_x + p_{yy}d\alpha_y + p_{zz}d\alpha_z + p_{xy}dg_{yz} + p_{yz}dg_{xz} + p_{xy}dg_{xy} \quad (1).$$

(1) On arrive encore à cette expression en opérant à peu près comme le fait

Or nous venons de voir que  $\Phi$  est, comme les composantes  $p_{xx}, \dots, p_{xy}$ , une fonction  $\varphi$  des six variables  $\delta_x, \dots, \delta_{xy}$ . Les six composantes de pression sont donc les dérivées partielles, par rapport aux dilatations et glissements de mêmes directions, d'une

M. Lamé, au § 38, p. 80, de ses *Leçons* (1852) pour démontrer un théorème de M. Clapeyron. Ajoutons ensemble, en effet, les trois équations d'équilibre indéfinies (38)  $\frac{dp_{xx}}{dx} + \frac{dp_{yx}}{dy} + \frac{dp_{zx}}{dz} = \rho, \dots = 0, \dots = 0$ , multipliées respectivement par  $\delta u, \delta v, \delta w$  représentant des portions infiniment petites des déplacements supposés très-petits  $u, v, w$  d'un point quelconque, puis multiplions par  $dx dy dz$  et intégrons pour tout le corps élastique ou pour une portion déterminée de ce corps. Le terme  $\iiint \frac{dp_{xx}}{dx} \delta u dx dy dz$  devient, en faisant l'intégration par parties et désignant par les accentuations ' et '' les valeurs de  $p$  et de  $u$  aux extrémités d'une parallèle aux  $x$  traversant toute cette portion :

$$\iint \delta y \delta z (p'_{xx} \delta u' - p''_{xx} \delta u'') - \iiint p_{xx} \frac{d\delta u}{dx} dx dy dz.$$

Or le premier terme revient, comme on sait, et comme d'ailleurs on le démontrera au § 84, à  $\int d\Omega \cos(n, x) p_{xx} \delta u$ , si  $d\Omega$  est un élément de la surface-enveloppe  $\Omega$  du corps, à laquelle l'intégrale  $\int$  est entièrement étendue, et si  $n$  est la direction de la normale à cet élément, menée constamment du côté du dehors; il n'est autre chose que le travail des composantes  $p_{xx}$  des pressions extérieures sur cette surface enveloppe, pour les petites portions,  $\delta u$  des déplacements  $u$ . Et le second terme revient, en transposant les caractéristiques  $\delta$  et  $\delta$ , à

$$- \iiint dx dy dz p_{xx} \delta \delta_x.$$

Les intégrations par parties des autres termes de l'équation totale donneront d'autres portions du travail des forces extérieures sur la surface, et des termes, ou de même forme que celui que nous venons d'obtenir, ou de cette autre forme

$$- \iiint dx dy dz p_{yz} \left( \frac{d\delta v}{dx} + \frac{d\delta w}{dy} \right) = - \iiint dx dy dz p_{yz} \delta \delta_{yz}.$$

Le tout étant égal à zéro, on a, pour l'équilibre, l'égalité du travail total des pressions extérieures sur la surface-enveloppe, à l'intégrale

$$\iiint dx dy dz (p_{xx} \delta \delta_x + p_{yy} \delta \delta_y + p_{zz} \delta \delta_z + p_{yz} \delta \delta_{yz} + p_{xz} \delta \delta_{xz} + p_{xy} \delta \delta_{xy}).$$

La quantité entre parenthèses, semblable au second membre de (146) (sauf la caractéristique  $\delta$  que nous avons employée ici au lieu de  $d$  pour éviter la confusion avec les différentielles des déplacements par rapport aux coordonnées), représente donc bien le travail des forces intérieures pour l'unité de volume de chaque élément  $dx dy dz$ .

même fonction, qui est celle dont nous venons d'écrire la différentielle complète (146), et l'on a

$$(147) \quad p_{xx} = \frac{d\Phi}{d\lambda_x}, \quad p_{yy} = \frac{d\Phi}{d\lambda_y}, \quad p_{zz} = \frac{d\Phi}{d\lambda_z}, \quad p_{yz} = \frac{d\Phi}{d\lambda_{yz}}, \quad p_{zx} = \frac{d\Phi}{d\lambda_{zx}}, \quad p_{xy} = \frac{d\Phi}{d\lambda_{xy}}$$

Or, il en résulte, en prenant les dérivées du second ordre,

$$\frac{dp_{xx}}{d\lambda_y} = \frac{dp_{yy}}{d\lambda_x}, \quad \frac{dp_{xz}}{d\lambda_y} = \frac{dp_{yz}}{d\lambda_x}, \quad \frac{dp_{zx}}{d\lambda_y} = \frac{dp_{zy}}{d\lambda_x}, \quad \dots, \quad \frac{dp_{yz}}{d\lambda_x} = \frac{dp_{xz}}{d\lambda_y}, \quad \text{etc.}$$

c'est-à-dire, en admettant comme déjà prouvée (§ 20), la *linéarité* des expressions de  $p_{xx}, \dots, p_{yz}, \dots$  ou en égard aux valeurs (12)  $p_{xx} = a_{xxxx}\lambda_x + a_{xyxy}\lambda_y + \dots$ , etc. de ces six composantes de pression, les quinze égalités suivantes, en même nombre que les combinaisons deux à deux des six variables  $\lambda, g$  :

$$(149) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_{yyzz} = a_{zzyy}, \quad a_{zzxx} = a_{xzzx}, \quad a_{zxyy} = a_{yyxz}, \\ a_{xxyy} = a_{yyxx}, \quad a_{yyzz} = a_{zzyy}, \quad a_{zxyy} = a_{xyzz}, \\ a_{zxyy} = a_{zyyz}, \quad a_{xyyz} = a_{yzxz}, \quad a_{yzxz} = a_{zyyz}, \\ a_{xyyy} = a_{yyyz}, \quad a_{zzxx} = a_{xzzx}, \quad a_{zxyy} = a_{xyzz}, \\ a_{yyzz} = a_{zzyy}, \quad a_{zzxx} = a_{xzzx}, \quad a_{zxyy} = a_{xyzz}. \end{array} \right.$$

On aurait trouvé, comme M. Lamé, la même égalité avec  $u, v, w$  et  $\partial_x, \partial_y, \dots, g_{xy}$  au lieu de  $\delta u, \delta v, \delta w$  et de  $\delta\lambda_x, \delta\lambda_y, \dots, \delta g_{xy}$  si l'on avait multiplié les équations d'équilibre (38) par  $u, v, w$  au lieu de  $\delta u, \delta v, \delta w$  avant de les ajouter et d'intégrer. Mais observons qu'on n'aurait pas eu ainsi le travail de déformation dû aux déplacements très-petits mais finis  $u, v, w$ ; car les forces intérieures  $p_{xx} \dots p_{xy}$  ne sont point constantes pendant que ces déplacements s'effectuent; elles commencent par zéro et n'acquièrent que lorsqu'ils sont opérés les valeurs pour lesquelles elles figurent dans les équations, en sorte que si leur accroissement jusque-là est supposé s'opérer uniformément, le travail total n'est que la moitié de  $p_{xx}\lambda_x + p_{yy}\lambda_y + \dots + p_{xy}g_{xy}$ ; et si des pressions extérieures agissaient dès le premier instant avec ces intensités, il y aurait puissance vive acquise et l'état d'équilibre serait outrepassé.

Au reste cette expression moitié

$$(148) \quad \Phi = \frac{1}{2} p_{xx}\lambda_x + \frac{1}{2} p_{yy}\lambda_y + \frac{1}{2} p_{zz}\lambda_z + \frac{1}{2} p_{yz}g_{yz} + \frac{1}{2} p_{zx}g_{zx} + \frac{1}{2} p_{xy}g_{xy},$$

se vérifie facilement, car si on la différentie par exemple par rapport à  $\lambda_x$  elle donne  $\frac{d\Phi}{d\lambda_x} = \frac{1}{2} p_{xx} + \frac{1}{2} \left( \lambda_x \frac{dp_{xx}}{d\lambda_x} + \lambda_y \frac{dp_{yy}}{d\lambda_x} + \dots + g_{xy} \frac{dp_{xy}}{d\lambda_x} \right) = \frac{1}{2} p_{xx} + \frac{1}{2} (a_{xxxx}\lambda_x + a_{yyxx}\lambda_y + \dots + a_{xyxz}g_{xy})$ ; ou d'après (12) et (149),  $\frac{d\Phi}{d\lambda_x} = \frac{1}{2} p_{xx} + \frac{1}{2} p_{xx} = p_{xx}$ . Et on trouverait de même  $\frac{d\Phi}{d\lambda_y} = p_{yy}, \dots, \frac{d\Phi}{d\lambda_{xy}} = p_{xy}$ , ou les égalités (147).

En sorte que les coefficients où les sous-lettres forment les deux mêmes combinaisons binaires sont égaux, et qu'on peut intervertir les deux premières sous-lettres avec les deux dernières à la fois sans en changer la valeur.

Ce raisonnement des illustres savants que nous citons <sup>(1)</sup>, et qui paraît péremptoire, réduit bien à *vingt et un au plus*, les trente-six coefficients  $\alpha$  des formules (12).

Il exige évidemment que le corps auquel on fait subir les déformations  $\lambda$ ,  $g$  soit pris dans l'état *naturel*, ou que les pressions  $p_{xx}$ , ...  $p_{yy}$  soient dues entièrement à ces déformations, et non pas aussi à des pressions antérieures  $p^{\prime}_{xx}$ , ...  $p^{\prime}_{yy}$  (§ 23), en sorte que les 15 égalités deux à deux ne portent que sur les 36 coefficients  $\alpha$  qui affectent, dans les formules les plus générales (14) de  $p_{xx}$ , ... ou celles qu'on en déduit pour  $p_{xx}$ , ... (p. 572, note), les termes (de  $p^{\prime}_{xx}$ , ...) indépendants de ces pressions antérieures  $p^{\prime}$  s'il y en avait <sup>(2)</sup>.

Les égalités complémentaires des mêmes coefficients  $\alpha$ , qui

(1) M. Thomson, principalement dans son mémoire *On the thermo-elastic and thermo-magnetic Properties of Matter*, lu en avril 1855 (et imprimé la même année au Quarterly Journal of pure and applied Mathematics, p. 65), et M. Kirchhoff (Ueber das Gleichgewicht... sur l'équilibre et le mouvement d'une tige infiniment mince, au 56<sup>e</sup> volume de Crelle, p. 290) lui ont donné cette forme à peu de chose près.

(2) Les compressions, dilations ou déformations des corps sont généralement accompagnées, il est vrai, d'une élévation ou d'un abaissement de température. Mais la prise en considération de cette circonstance ne change rien à la conclusion qui vient d'être tirée; car on peut supposer que l'élément soit contenu dans une enveloppe imperméable, ne permettant la perte ni l'admission d'aucune quantité de chaleur, ou bien, que ses rayonnements inévitables aient été justement compensés par ceux d'éléments ou de corps environnants, de sorte que, ramené à son premier volume et à sa première forme, il le soit également à sa première température et possiede la même quantité de chaleur qu'avant; ou, si l'on veut, que ses molécules possèdent la même quantité de cette *puissance vive vibratoire* dans laquelle la chaleur paraît consister. Aucun travail n'a pu être créé ou détruit au total, et la conséquence subsiste.

M. Kirchhoff invoque même à ce sujet, en citant M. Thomson comme premier auteur du raisonnement qu'il emploie, le *principe de l'équivalence du travail et de la chaleur*, de Sadi Carnot (Réflexions sur la puissance motrice du feu, 1824, ou Mémoire de M. Clapeyron au 23<sup>e</sup> cahier du Journal de l'École polytechnique), parce qu'il suppose que pendant la déformation de l'élément on lui enlève de la chaleur de manière que sa température ne varie pas. Il me semble qu'on peut se dispenser de ces considérations en supposant, comme nous venons de faire, que le corps conserve, au lieu de sa température, sa quantité de chaleur sans déperdition ni acquisition.



sont à ajouter aux quinze égalités (149) pour réduire ces coefficients à quinze inégaux, conformément aux §§ précédents et à ce qui a été prouvé surtout au § 21 par d'autres considérations, sont les six suivantes :

$$(150) \quad \begin{cases} \alpha_{yyzz} = \alpha_{yyz}, & \alpha_{zzzz} = \alpha_{zzz}, & \alpha_{zzyy} = \alpha_{yyz}, \\ \alpha_{zzyz} = \alpha_{zzy}, & \alpha_{yyzz} = \alpha_{yyz}, & \alpha_{zzyy} = \alpha_{yyz} \end{cases}$$

permettant, comme on voit, la permutation même d'une des deux premières sous-lettres avec une des deux dernières de chaque coefficient  $\alpha$ , ce dont résulte la réduction, à un seul, des deux coefficients de l'isotropie, qui subsistent indépendants si l'on n'admet que les quinze égalités (149) de Green.

§ 71. *Examen des raisonnements par lesquels divers Géomètres étrangers établissent les formules, en apparence sans s'appuyer sur la loi des actions entre points matériels suivant leurs lignes de jonction.* — Plusieurs d'entre eux se contentent de dire que par cela seul que les six variables appelées par nous  $\lambda, \dots, \xi, \eta$ , sont très-petites, les pressions ne peuvent en être que fonctions linéaires. C'est le raisonnement qu'a paru faire Poisson, à la p. 32 n° 38 de son mémoire cité de 1829. Nous avons montré suffisamment, au § 55, p. 662, qu'il pêche par sa base, à moins qu'on ne l'appuie tacitement, comme vraisemblablement le faisait Poisson, sur cette loi des actions à distance qui est ce dont les auteurs dont nous parlons veulent précisément éluder l'emploi afin de ne pas en admettre les conséquences.

Pareille chose peut être dite du raisonnement fait par Green (§ 69), lorsqu'il pose pour sa fonction potentielle  $\Phi$  ou  $\varphi$  une somme de fonctions homogènes entières des degrés 1, 2, 3, .... Un géomètre tel que lui savait cependant que tout développement d'une fonction en série ordonnée suivant les puissances ascendantes de ses variables, ne commence pas nécessairement par des termes des degrés 1 et 2. Il avait donc égard apparemment, sans s'en rendre compte, à la nature particulière de la fonction et de ses six variables très-petites  $\lambda, g$ , qui ne sont, comme nous l'avons remarqué (même § 55), que des projections moyennes d'accroissements d'autres variables, les distances moléculaires. C'est uniquement parce que les forces en jeu, dont  $\varphi$  exprime le travail, sont dirigées suivant les

droites qui mesurent des distances et sont fonctions continues de leurs grandeurs, que Green a pu être autorisé, dans son développement qui revient à celui de Taylor à six variables, à affecter des puissances 1 et 2 les premiers termes.

Et si l'on prétendait que les forces réciproques dépendent bien des grandeurs des lignes de jonction des points mais ne s'exercent peut-être pas suivant leurs directions, ne serait-ce pas bouleverser, pour le besoin d'une cause, les plus simples notions, s'engager dans le vague et même dans le non-sens, et nier d'ailleurs le principe de réaction contraire à l'action, duquel il résulte que la direction d'une force, puisqu'elle ne peut tendre qu'*au* point qu'elle meut; ne peut partir que *du* point dont elle émane.

Semblable observation peut être faite, à fortiori, sur le double axiome que M. Maxwell <sup>(1)</sup> propose comme extension de la loi expérimentale de Hooke : 1° Si des pressions s'exercent en un point d'un corps (il le suppose isotrope) suivant trois directions rectangulaires, leur somme est égale à celle des trois compressions qu'elles produisent, multipliées par un premier coefficient; 2° la différence de deux quelconques de ces trois pressions est égale à la différence des compressions correspondantes multipliées par un deuxième coefficient, dont M. Maxwell regarde le rapport avec le premier comme variable suivant la nature du corps. Rien, évidemment, ne peut justifier l'adoption *a priori* de ces principes, et leur substitution à la loi des actions à distance entre points élémentaires suivant les lignes de jonction de ceux-ci deux à deux.

Un savant éminent du même pays, M. Stokes, au lieu de se borner à des raisonnements purement mathématiques, ou bien à des assertions, invoque judicieusement un fait d'expérience :

« La capacité, » dit-il, « que les solides possèdent d'être mis dans un état de vibrations isochrones montre que les pressions qui y sont appelées en action par de petits déplacements dépendent de fonctions homogènes du premier degré de ces déplacements <sup>(2)</sup>. »

(1) *On Equilibrium of elastic Bodies*, lu le 48 février 1850 et inséré au t. XX (1853) des *Transactions of the Royal Society of Edinburgh*, p. 87.

(2) *On the Theories of the internal Friction of Fluids in Motion, and of the Equilibrium and Motion of elastic Solids*, lu le 14 avril 1845 et imprimé au volume VIII, part. III (1847) des *Trans. Cambridge*, p. 344.

« En supposant de plus, » continue-t-il, « conformément au principe de superposition des petites quantités, que les pressions dues à divers déplacements s'ajoutent, les pressions sont linéaires. »

Nous reconnaissons, dans ce fait de « l'isochronisme des vibrations, » attesté par les phénomènes du son, etc., une excellente preuve que les forces développées par les déplacements relatifs, c'est-à-dire par les changements très-petits de distances mutuelles des points, sont proportionnelles à ces changements. Mais quelles sont ces forces qui se trouvent réellement en jeu une fois que le corps, légèrement déformé par une application momentanée de quelque force extérieure, est abandonné à lui-même? Nous ne voyons pas que ce soient les *pressions*, qui ne sont après tout que des forces fictives comme toutes les résultantes ou les sommes de composantes. Ce qui agit pour produire ou pour continuer le mouvement vibratoire, ce sont les actions moléculaires individuelles, dont la considération, loin de pouvoir être éludée, a paru nécessaire, même pour définir les *pressions*, aux savants qui ont voulu en donner la définition d'une manière rationnelle (1); et le fait des petites vibrations isochrones des solides nous semble la plus forte preuve de l'existence de ces actions mutuelles à distance, reconnues dès l'antiquité (2), et dont la loi, indiquée par Newton (3),

(1) On a quelquefois défini la pression, dans un corps solide ou fluide, l'action qui y serait exercée sur une petite surface plane qu'on imagine à son intérieur si cette face devenait *rigide*; ou bien, ce qui revient au même, la force qu'il faudrait y appliquer sur chaque élément de son plan pour maintenir en équilibre la partie du corps située d'un de ses deux côtés si l'on venait à supprimer toute la partie située de l'autre côté du même plan (Exercices de M. Cauchy, 2<sup>e</sup> année, 1827, p. 42, et 4<sup>me</sup> Leçon sur l'élasticité de M. Lamé).

Mais M. Lamé a très-bien montré (idem, § 5) que cette définition, en apparence plus simple que celle qui fait consister la pression en une résultante d'actions moléculaires, ne donne aucune idée exacte, et que sa simplicité n'est même qu'une pure illusion. Elle pouvait se faire accepter du temps que l'on croyait (et on ne l'a jamais cru généralement) à la continuité de la matière et à l'action au *contact* seulement; mais l'action sur une surface n'a plus aucune signification depuis qu'on sait que les forces s'exercent à distance, et que par conséquent (continue M. Lamé) les actions répulsives et attractives émanent non-seulement de la première couche infiniment mince mais aussi des couches postérieures jusqu'à la distance où elles cessent d'avoir une grandeur sensible.

(2) Bacon. De la Sagesse des anciens, XV.

(3) Surtout à la fin du *Traité d'optique*, question XXXI.

a été admise et appliquée avec succès par Laplace, Fresnel, Ampère, Gauss, etc., avant d'être l'objet des calculs plus développés de Navier, Cauchy, Poisson, MM. Lamé et Clapeyron, etc., relatifs aux corps élastiques, et est aujourd'hui mise en tête des traités de Mécanique ou de Physique les plus suivis.

Aucun des raisonnements apportés pour établir les formules linéaires de l'élasticité sans invoquer cette loi des actions à de petites distances, ne paraît donc acceptable, et il faut l'admettre avec ses conséquences (150) comme (149) limitant le nombre des coefficients inégaux qui entrent dans les formules.

§ 72. *Examen des motifs, censés tirés des faits, sur lesquels plusieurs d'entre eux appuient la conservation de vingt et un coefficients pour le cas général de contexture, et de deux pour celui de l'isotropie. — 1° George Green.* — Le motif de cet illustre physicien a été évidemment, avons-nous dit (§ 69), la faculté que donnent les coefficients, portés à ce nombre, de se rapprocher davantage de la théorie de Fresnel, c'est-à-dire, en premier lieu, non pas de supprimer le rayon invisible, ou troisième rayon de Cauchy à vibrations longitudinales non éclairantes (car Green reconnaît que sans son intervention il est impossible de satisfaire aux conditions à la surface de séparation de deux milieux), mais d'atténuer considérablement la petite proportion de vibrations transversales ou éclairantes qu'il fournit à l'émergence; et, en second lieu, de rendre possible l'existence de quelques corps transparents biréfringents dans l'intérieur desquels ces vibrations puissent être, comme dans l'air, les unes exactement transversales ou parallèles aux plans des ondes comme le pensait Fresnel, les autres, par suite, exactement longitudinales ou perpendiculaires aux mêmes plans. Green reconnaît bien, comme nous avons dit au même paragraphe, qu'un cristal peut être transparent et biréfringent sans que les choses se passent rigoureusement de cette manière; mais, ajoute-t-il, vu le grand nombre des éléments du calcul, « la nécessité absolue pour tirer « des conséquences qui aient quelques chances d'application pratique, d'introduire des restrictions arbitraires, nous conduit à « examiner jusqu'à quel point la fonction ( $\varphi$ ) due aux forces intérieures peut être limitée en se bornant à la considération de ces

« milieux où les vibrations transversales peuvent toujours être exactement parallèles aux plans des ondes. »

Green trouve que pour donner cet exact parallélisme, les vingt et un coefficients doivent être assujettis à quatorze conditions ou relations qui, avec nos notations, sont les suivantes :

$$(151) \ a_{xxxx} = a_{yyyy} = a_{zzzz} = 2a_{yyyz} + a_{yyzz} = 2a_{zzzz} + a_{zzzz} = 2a_{xyxy} + a_{xyyz}$$

$$(152) \ a_{xyyz} + 2a_{xxyy} = 0, \ a_{yyyz} + 2a_{xyyz} = 0, \ a_{zzzy} + 2a_{zyzz} = 0,$$

$$(153) \ a_{yyyz} = 0, \ a_{zzzz} = 0, \ a_{zzzz} = 0, \ a_{zzzz} = 0, \ a_{xxyy} = 0, \ a_{yyyz} = 0.$$

Commençant par le cas particulier de trois plans de symétrie, Green prouve que ces conditions (réduites alors aux cinq premières (151) puisque les coefficients compris aux neuf autres sont déjà nuls dans ce cas) sont les mêmes s'il y a des pressions extérieures se transmettant à l'intérieur et y produisant déjà des pressions  $p^{\circ}_{xx}$ ,  $p^{\circ}_{yy}$ ,  $p^{\circ}_{zz}$  avant les mouvements, car celles-ci disparaissent dans le calcul. Nous avons reconnu, en généralisant l'analyse de Green, que la même disparition a lieu pour le cas de contexture le plus général ; les pressions primitives  $p^{\circ}_{xx}$ ,  $p^{\circ}_{yy}$ ,  $p^{\circ}_{zz}$ ,  $p^{\circ}_{yz}$ ,  $p^{\circ}_{zx}$ ,  $p^{\circ}_{xy}$  peuvent donc avoir toutes les grandeurs qu'on veut sans rien changer aux conditions (151), (152), (153) d'exacte *transversalité*, qui régissent ainsi les seuls coefficients  $a$  (1).

Si l'on admet entre les coefficients  $a$ , outre les quinze égalités (149) de Green, les six égalités complémentaires (150) de Cauchy et de Poisson  $a_{yyyz} = a_{yyzy}$ ,  $a_{xyyz} = a_{xzyy}$  etc., conséquence de la loi des actions moléculaires, les quatorze relations Green (151), (152), (153) se réduisent à

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{xxxx} = a_{yyyy} = a_{zzzz} = 3a_{yyyz} = 3a_{zzzz} = 3a_{xyxy} = 3a_{yyyz} = 3a_{zzzz} = 3a_{xxyy} \\ \text{et tous les autres coefficients } a = 0 ; \end{array} \right.$$

(1) Voici, succinctement, cette analyse généralisée.

Si,  $\rho$  représentant la densité du milieu étheré, et  $t$  le temps, l'on met, dans les équations d'équilibre (38)  $\frac{dp_{xx}}{dx} + \frac{dp_{yz}}{dy} + \frac{dp_{zx}}{dz} = \rho \frac{d^2u}{dt^2}$ , ...  $= \rho \frac{d^2v}{dt^2}$ , ...  $= \rho \frac{d^2w}{dt^2}$  entre les pressions et les *inerties*, pour  $p_{xx}$ , ...  $p_{xy}$  leurs valeurs les plus générales relatives au cas où il y a des pressions antérieures  $p^{\circ}_{xx}$  ...  $p^{\circ}_{xy}$  et qui, comme nous avons dit à la note du § 23, p. 572, s'obtiennent en mettant dans les formules (14) de la p. 564, pour les six cosinus  $c_{y1z}$ ,  $c_{z1y}$ , etc., les valeurs (27)  $c_{y1z} = \frac{dw}{dy}$ , ...  $c_{y1z} = \frac{dw}{dy}$  de la p. 571, et pour  $\partial_x, \partial_y$  ...  $\partial_{xy}$  leurs

c'est-à-dire (§ 69) que la vraie condition du parallélisme des vibrations à toutes les ondes est l'*isotropie* du milieu; ou que, confor-

valeurs (43)  $\frac{du}{dx}, \frac{dv}{dy}, \dots \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}$  du § 29 relatives aux déplacements très-petits (voyez d'ailleurs ces formules (212) au § 84), l'on reconnaît que les termes négatifs en  $p^o$  sont détruits par d'autres, et l'on obtient

$$(134) \left\{ \begin{aligned} \rho \frac{d^2u}{dt^2} &= p^{ox} \frac{d^2u}{dx^2} + p^{oy} \frac{d^2u}{dy^2} + p^{oz} \frac{d^2u}{dz^2} + 2p^{yx} \frac{d^2u}{dydx} + 2p^{zx} \frac{d^2u}{dzdx} + 2p^{xy} \frac{d^2u}{dxdy} + \\ &\quad + \frac{dp^1_{xx}}{dx} + \frac{dp^1_{yy}}{dy} + \frac{dp^1_{zz}}{dz}, \\ \rho \frac{d^2v}{dt^2} &= p^{ox} \frac{d^2v}{dx^2} + p^{oy} \frac{d^2v}{dy^2} + \dots + 2p^{oy} \frac{d^2v}{dxdy} + \frac{dp^1_{xy}}{dx} + \frac{dp^1_{yy}}{dy} + \frac{dp^1_{zy}}{dz}, \\ \rho \frac{d^2w}{dt^2} &= p^{ox} \frac{d^2w}{dx^2} + p^{oy} \frac{d^2w}{dy^2} + \dots + 2p^{oz} \frac{d^2w}{dxdy} + \frac{dp^1_{xz}}{dx} + \frac{dp^1_{yz}}{dy} + \frac{dp^1_{zz}}{dz}; \end{aligned} \right.$$

équations dont les parties en  $p^o$  peuvent aussi s'obtenir, comme on verra à l'Appendice complémentaire (fin du § 84), sans se servir des formules (44) ni invoquer explicitement la loi des actions moléculaires qui a servi à établir ces formules; et où  $p^1_{xx}, p^1_{yy}, \dots p^1_{xy}$  représentent, comme au § 23 et à sa note, les expressions suivantes (42)

$$(155) \left\{ \begin{aligned} p^1_{xx} &= s_{xx} \frac{du}{dx} + s_{xx} \frac{dv}{dy} + \dots + s_{xx} \left( \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} \right), \\ p^1_{yy} &= s_{yy} \frac{du}{dx} + s_{yy} \frac{dv}{dy} + \dots + s_{yy} \left( \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} \right), \\ &\dots \dots \dots \\ p^1_{xy} &= s_{xy} \frac{du}{dx} + s_{xy} \frac{dv}{dy} + \dots + s_{xy} \left( \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} \right). \end{aligned} \right.$$

Or, en remarquant, avec M. Lamé (41<sup>e</sup> leçon, p. 138) qu'à une grande distance du lieu d'un ébranlement quelconque on peut considérer comme plans des portions d'une certaine étendue des ondes produites, et calculer la suite du mouvement comme si l'ébranlement s'était opéré suivant un plan où toutes les molécules auraient des déplacements égaux et parallèles, faisons, comme Green

$$(156) \quad u = x f(lx + my + nz - Vt), \quad v = \delta f(lx + my + nz - Vt), \quad w = \gamma f(lx + my + nz - Vt);$$

expressions qui représentent bien les trois projections, sur les  $x, y, z$ , de déplacements moléculaires (périodiques ou non) tous parallèles et égaux sur un même plan, et se propageant par ondes planes avec une vitesse  $V$ , si  $f$  désigne une fonction quelconque,  $\alpha, \delta, \gamma$  les cosinus des angles constants que sont supposés faire avec les  $x, y, z$  les déplacements résultants  $\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$ , et  $l, m, n$  les cosinus des angles que fait avec les mêmes coordonnées la direction  $n$  de la normale commune aux plans de toutes les ondes; car  $lx + my + nz = n$ , projection, sur cette normale, du rayon vecteur mené de l'origine au point quelconque  $(x, y, z)$ , représente aussi la distance de l'origine au plan d'onde contenant ce point; et comme, après un temps écoulé  $t = T$ , les déplacements des points matériels du même plan d'onde ont tous pour grandeur  $f(n - VT)$ , ils sont les mêmes

nement à ce qu'a reconnu Cauchy, ce parallélisme est incompatible avec la double réfraction.

qu'étaient, *avant ce temps*, ou pour  $t = 0$ , les déplacements de tous les points du plan à une distance  $n - Vt$  de l'origine, ce qui donne bien  $V$  pour la vitesse de propagation, dans un sens perpendiculaire aux ondes, de ces mouvements ou déplacements supposés tous parallèles entre eux, égaux pour tous les points de chaque plan perpendiculaire à la ligne  $n$ , et dont la variation d'un plan à l'autre est exprimée par la fonction  $f$  à chaque instant.

En substituant dans les équations différentielles (454) les valeurs (456) ainsi composées, pour reconnaître à quelles conditions elles peuvent bien être prises par les déplacements moléculaires  $u, v, w$ , l'on peut ensuite diviser tout par  $2f''(lx + my + nz - Vt)$ ; et en faisant, pour abrégér

$$(457) \begin{cases} P = p^{\circ}xx'^2 + p^{\circ}yy'm^2 + p^{\circ}zz'n^2 + 2p^{\circ}yymn + 2p^{\circ}zxn'l + 2p^{\circ}xy'l'm, \\ A = a_{xxxx}l^3 + a_{xyxy}m^2 + a_{zzzz}n^3 + 2a_{zxyy}mn + 2a_{xxzz}nl + 2a_{mxy'l}m, \\ B = a_{xyxy}l^2 + a_{yyyy}m^2 + a_{yzyz}n^2 + 2a_{yyyz}mn + 2a_{zyyz}nl + 2a_{yyx'l}m, \\ C = a_{zzzz}l^2 + a_{yzyz}m^2 + a_{zzzz}n^2 + 2a_{zyyz}mn + 2a_{zzzz}nl + 2a_{yzz'l}m, \\ D = a_{zxyz}l^2 + a_{yyyy}m^2 + a_{zzyz}n^2 + (a_{yyyz} + a_{yzyz})mn + (a_{zzyy} + a_{yzzz})nl + (a_{yyzx} + a_{zyyz})l'm, \\ E = a_{xxxx}l^2 + a_{xyxy}m^2 + a_{zzzz}n^2 + (a_{zzyz} + a_{yzzz})mn + (a_{zzxz} + a_{zzxz})nl + (a_{zxyx} + a_{zxyy})l'm, \\ F = a_{zxyx}l^2 + a_{yyxy}m^2 + a_{yzz}n^2 + (a_{yyzx} + a_{zyyz})mn + (a_{zxyz} + a_{zzyy})nl + (a_{zxyy} + a_{zxy})l'm, \end{cases}$$

on trouve pour ces conditions, entre la vitesse de propagation  $V$ , la direction  $(l, m, n)$  de la normale aux plans des ondes, et la direction  $(\alpha, \beta, \gamma)$  des mouvements moléculaires, trois équations contenues dans

$$(458) \quad \frac{A\alpha + F\beta + E\gamma}{\alpha} = \frac{F\alpha + B\beta + D\gamma}{\beta} = \frac{E\alpha + D\beta + C\gamma}{\gamma} = \rho V^2 - P.$$

L'élimination des  $\frac{\beta}{\alpha}, \frac{\gamma}{\alpha}$  entre elles donne, en  $V^2$ , cette équation du troisième degré (en opérant comme on verra au § 84)

(459)

$$A + P - \rho V^2)(B + P - \rho V^2)(C + P - \rho V^2) - D^2(A + P - \rho V^2) - E^2(B + P - \rho V^2) - F^2(C + P - \rho V^2) + 2DEF = 0,$$

prouvant que les conditions (458) du mouvement par ondes planes sont satisfaites par trois systèmes de valeurs de  $\pm V$  et par suite de  $(\alpha, \beta, \gamma)$ , c'est-à-dire par trois grandeurs de la vitesse de propagation et trois directions correspondantes des déplacements moléculaires  $\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$  dans l'espace, pour chaque direction arbitrairement choisie  $(l, m, n)$  de la normale  $n$  aux ondes.

De plus, comme on obtient une quatrième fraction égale à celles des trois premiers membres de (458) en prenant pour numérateur la somme de leurs numérateurs et pour dénominateur la somme de leurs dénominateurs après les avoir multipliés haut et bas par  $\alpha, \beta, \gamma$  respectivement, ce qui donne

$$(460) \quad A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 + 2D\beta\gamma + 2E\gamma\alpha + 2F\alpha\beta = \rho V^2 - P,$$

équation, en coordonnées polaires, d'un ellipsoïde dont le rayon vecteur  $\frac{1}{\sqrt{\rho V^2 - P}}$

fait avec les  $x, y, z$  des angles dont les cosinus sont  $\alpha, \beta, \gamma$ ; d'où, de nouveau, les équations (458) comme condition de maximum et de minimum du rayon vecteur en combinant, avec  $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$  d'où  $\alpha da + \beta d\beta + \gamma d\gamma = 0$ , la diffé-

Mais voyons ce que peuvent signifier les quatorze relations (151), (152), (153) de Green quand on n'admet point les six égalités com-

rentielle du 4<sup>or</sup> membre de (160) égale à zéro, on voit, et la forme connue des équations (158) et (159) montre d'ailleurs :

1<sup>o</sup> Que les trois demi-axes de cet ellipsoïde dont l'équation en coordonnées ordinaires est

$$(161) \quad Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dyz + 2Exx + 2Fxy = 1$$

donneront, en grandeur, les inverses des trois valeurs de  $\sqrt{\rho v^2 - P}$ .

2<sup>o</sup> Que leurs directions, rectangulaires entre elles, donneront celles des mouvements moléculaires correspondants.

Et comme, lorsque le milieu est isotrope, ou que les 24 coefficients  $a_{xxxx}$ , etc., se réduisent aux deux  $e$ ,  $e'$  du § 26, et les composantes  $p^{\alpha\alpha}$ , etc., à une seule  $p_0$ , les équations (159), (160) prennent la forme

$$(162) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left( v^2 - \frac{p_0 + e}{\rho} \right)^2 \left( v^2 - \frac{p_0 + 2e + e'}{\rho} \right) = 0, \\ e(x^2 + y^2 + z^2) + (e + e')(lx + my + nz)^2 = 1, \end{array} \right.$$

l'ellipsoïde, coupé alors suivant des cercles par tous les plans d'onde  $lx + my + nz = \text{constante}$ , devient de révolution, et les mouvements moléculaires de deux des trois

systèmes, se propageant avec une vitesse  $\sqrt{\frac{p_0 + e}{\rho}} = \sqrt{\frac{p_0 + 2e + e'}{\rho}}$ , sont *transversaux*, c'est-à-dire parallèles aux plans des ondes, tandis que les mouvements du

troisième se propageant avec une vitesse  $\sqrt{\frac{p_0 + 2e + e'}{\rho}} = \sqrt{\frac{p_0 + a_{xxxx}}{\rho}}$ ,

sont *longitudinaux* ou dans le sens de propagation, perpendiculaire aux ondes. On voit bien que dans les milieux isotropes les deux premières ondes se confondent, et il n'y en a ainsi qu'une à vibrations transversales ou visibles.

Green, qui arrive aux résultats précédents, reconnaît comme on voit, avec Cauchy, qu'une onde plane excitée dans un milieu se décompose généralement en trois autres ondes parallèles, se transmettant avec des vitesses différentes et où les molécules vibrent dans trois directions aussi différentes, rectangulaires entre elles; ou que lorsqu'un rayon, dont les points successifs sont la suite continue des intersections de plans d'onde peu inclinés les uns sur les autres, pénètre dans un cristal où l'éther est à l'état hétérotrope, il engendre trois autres rayons, qu'on peut dire polarisés parallèlement aux trois axes d'un certain ellipsoïde dépendant, et de la direction du rayon, et des élasticités en divers sens. Pour exprimer que, dans deux des ondes, les mouvements moléculaires soient ce que suppose Fresnel, c'est-à-dire exactement parallèles à leurs plans, il remarque (p. 437 de son 2<sup>e</sup> mémoire) que le mouvement moléculaire dans la troisième onde doit être perpendiculaire à son plan, ou que les équations (158) doivent être satisfaites en mettant  $l$ ,  $m$ ,  $n$  à la place de  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , ce qui donne

$$(163) \quad \left\{ \begin{array}{l} (A - C)nl + E(n^2 - l^2) + Fmn - Dlm = 0. \\ (B - C)mn + D(n^2 - m^2) + Fnl - Elm = 0. \end{array} \right.$$

On voit bien, ainsi que nous avons annoncé, vu que ces équations ne contiennent point  $P$ , qu'elles sont indépendantes des composantes  $p^{\alpha\alpha}$ ,  $p^{\alpha\beta}$ , ...  $p^{\alpha\gamma}$ ,



plémentaires (150) ou la réduction des coefficients à quinze distincts.

Nous avons trouvé, en nous servant de formules de changements d'axes facilement déduites de celles (4) et (11), des §§ 17 et 19 :

1° Qu'il suffit que ces 14 conditions soient remplies relativement à un système d'axes  $x, y, z$  pour qu'elles le soient relativement à tout autre système rectangulaire  $x', y', z'$ , et pour que le coefficient  $a_{x'z'z'z'z'}$  ait la même valeur en tous sens ou quelle que soit la direction de  $x'$ ; en sorte qu'il est égal à la somme  $2a_{y'z'y'z'y'} + a_{y'y'z'z'y'}$  quelles que soient les directions de  $y'$  et de  $z'$  rectangulaires entre eux et à  $x'$ ; que  $a_{x'z'z'z'y'y'}$  est nul quelles que soient les directions rectangulaires de  $x'$  et  $y'$ ; enfin que toutes les sommes telles que  $a_{x'z'z'y'y'z'} + 2a_{z'z'y'y'z'y'}$ , sont nulles aussi.

2° Que, réciproquement, une de ces conditions, si elle est remplie en tous sens ou quelles que soient les directions de  $x', y', z'$ , entraîne les autres (151), (152), (153), et pour toutes les directions rectangulaires possibles (4).

en sorte qu'on ne peut pas chercher dans l'existence possible de pressions antérieures la réponse aux difficultés auxquelles nous allons voir que conduit l'hypothèse que Green et Fresnel se sont imposée.

En y mettant pour A, B, ... F leurs valeurs (157) en  $l, m, n$ , on déduit de ces deux équations (163) que, dans tout milieu hétérotrope, l'exact parallélisme des vibrations a lieu seulement pour certaines valeurs de  $l, m, n$ , ou pour certaines directions des plans des ondes (voy. Appendice complémentaire, § 87).

Mais Green cherche quelles conditions doivent remplir les 21 coefficients  $a_{xxxx}$ , etc., pour que ce parallélisme ait lieu *quelles que soient les directions des ondes*. Il faut, pour les obtenir, évaluer à zéro les coefficients, dans (163), de chaque puissance ou produit du quatrième degré des rapports  $\frac{m}{l}, \frac{n}{l}$  des cosinus. On trouve 28 équations dont 14 rentrent dans les autres et qui se réduisent ainsi aux 14 conditions (151), (152), (153) du texte. ●

(1) En effet nous trouverons, dans l'Appendice complém<sup>re</sup>, § 86, qu'en général si  $n, s, p, q$  sont quatre directions prises parmi celles des axes nouveaux  $x', y', z'$ , et si, comme au § 23,  $c_{ij}$  désigne le cosinus de l'angle de deux directions  $i, j$ , l'on a l'expression générale suivante, où

$$a_x, \quad a_y, \quad a_z$$

sont de purs symboles qui par leur multiplication algébrique engendrent les coefficients  $a_{xxxx}$ , etc., en mettant leurs sous-lettres à la suite les unes des autres dans l'ordre où les multiplications sont indiquées :

$$(166) \quad a_{nspq} = (a_x c_{nx} + a_y c_{ny} + a_z c_{nz}) (a_x c_{sx} + a_y c_{sy} + a_z c_{sz}) \times \\ \times (a_x c_{px} + a_y c_{py} + a_z c_{pz}) (a_x c_{qx} + a_y c_{qy} + a_z c_{qz}).$$

On voit que l'exacte *transversalité* des mouvements moléculaires dans deux des ondes pour toutes les directions des plans de celles-ci exige l'accomplissement d'une foule de conditions qui sont généralement caractéristiques des corps ou des milieux isotropes; surtout celle que non-seulement une dilatation  $\delta_n'$  ne produise dans un corps qu'une *pression normale*  $p_n'$  sans aucune composante tangentielle sur une face quelconque perpendiculaire à sa direction ( $a_{x'iy'iz'iz'} = 0$ ,  $a_{x'iz'iz'iz'} = 0$ ), et, aussi, qu'un glissement sur une face n'y engendre jamais que des composantes tangentielles ( $a_{x'iz'iz'iy'} = 0$ ), mais encore, qu'en tous sens, ou quelle que soit la direction de  $x'$  dans ce corps, une *égale dilatation*  $\delta_n'$  engendre dans ce corps une *pression d'égale intensité*  $p_{x'iz'}$  ( $a_{x'iz'iz'iz'}$  constant).

Or on en déduit, par exemple,

$$a_{x'iz'iz'iz'} = a_{xxxx}c^4_{xxi} + a_{yyyy}c^4_{yzi} + a_{zzzz}c^4_{zxi} + 2(2a_{yyzz} + a_{yyzz})c^2_{yzi}c^2_{zxi} + 2(2a_{zzxx} + a_{zzxx})c^2_{zxi}c^2_{xxi} + 2(2a_{xyxy} + a_{xyxy})c^2_{xxi}c^2_{yzi} + 9 \text{ autres termes,}$$

et ceux-ci sont nuls si les conditions (452), (453) sont remplies, ce qui fait, si (454) sont remplies également,

$$a_{x'iz'iz'iz'} = a_{xxxx}(c^2_{xxi} + c^2_{yzi} + c^2_{zxi})^2 = a_{xxxx}.$$

Donc  $a_{x'iz'iz'iz'}$  est le même quelle que soit la direction de  $x'$ .

On trouvera la même expression  $a_{xxxx}$  pour  $2a_{x'iy'iz'iy'} + a_{x'iz'iy'iy'}$  quelles que soient les directions de  $x'$  et de  $y'$ .

On trouverait de la même manière que

$$a_{x'iz'iz'iy'} = a_{xxxx}(c^2_{xxi} + c^2_{yzi} + c^2_{zxi})(c_{xxi}c_{yzi} + c_{yzi}c_{yzi} + c_{zxi}c_{yzi}),$$

Et  $a_{x'iz'iy'iy'} + 2a_{x'iz'iz'iy'}$  = la même chose +

$$+ 2a_{xxxx}(c_{xxi}c_{yzi} + c_{yzi}c_{yzi} + c_{zxi}c_{yzi})(c_{xxi}c_{xxi} + c_{yzi}c_{yzi} + c_{zxi}c_{zxi}),$$

et sont par conséquent = 0 tous deux pour toutes les directions de  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$ .

Réciproquement si  $a_{x'iz'iz'iz'} = a_{xxxx}$  ou si l'on peut poser, quelle que soit la direction de  $x'$

$$0 = a_{x'iz'iz'iz'} - a_{xxxx}(c^2_{xxi} + c^2_{yzi} + c^2_{zxi})^2,$$

on trouve, en substituant l'expression trouvée tout à l'heure pour  $a_{x'iz'iz'iz'}$  et plaçant d'abord  $x'$  dans le plan  $xy$ , une équation qui réduite et divisée par  $c_{xxi}c_{yzi}$  donne  $a_{xyxy} = 0$  quand on y fait  $c_{xxi} = 1$ , et  $a_{yyzz} = 0$  quand on y fait  $c_{zxi} = 0$ . La même équation donne, par suite,  $a_{xyxy} + 2a_{xyxy} - a_{xxxx} = 0$ , ce qui permet d'effacer, dans l'équation non particularisée, tout excepté des termes susceptibles d'être divisés par  $c_{xxi}c_{yzi}c_{zxi}$ , et l'on obtient alors  $a_{yyzz} + 2a_{xyxy} = 0$  en faisant  $c_{xxi} = 1$ . D'où toutes les conditions (454), (452), (453).

Le même procédé prouve que ces quatorze conditions sont également entraînées soit par  $a_{x'iz'iy'iy'} = 0$ , soit par  $a_{x'iz'iy'iy'} + 2a_{x'iz'iz'iy'} = 0$ , soit par  $a_{x'iz'iz'iz'} = 2a_{x'iy'iy'iy'} + 2a_{x'iz'iy'iy'}$ , si l'une de ces trois égalités a lieu pour toutes les directions de  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$ ; ce qui démontre toutes les réciproques.

Or une pareille égalité est contraire à toutes les idées qu'on peut se former, d'après les faits, des corps doués de la double réfraction. Ils sont cristallisés sous des formes polyédriques non régulières et variées, ils offrent des clivages dans des directions particulières, etc., ils sont en un mot d'une contexture essentiellement inégale et qui doit, tout porte à le présumer, rendre inégaux en divers sens  $x'$ , dans l'éther dont ils sont imprégnés, les

rappports  $\frac{p_{x'x'}}{\delta_{x'}} = a_{x'x'x'x'}$  des pressions  $p$  aux petites dilatactions  $\delta$  qui les engendrent, et, aussi, rendre les pressions obliques aux dilatactions, excepté pour un petit nombre de sens principaux.

Cette présomption se change en certitude si l'on se rappelle le fait de la biréfringence artificiellement produite *par une compression* donnée dans un seul sens, ou inégalement dans plusieurs, à un corps amorphe primitivement isotrope et uniréfringent, tel que le verre. On tire facilement (voy. Appendice complémentaire § 90), des formules telles que (26)  $a_{xxxx} =$

$$\frac{\rho}{2} \int m r^3 \frac{r}{dr} \cos^4(r, x), \quad a_{yyyy} = \frac{\rho}{2} \int m r^3 \frac{r}{dr} \cos^4(r, y) \text{ du § 23, p. 570,}$$

que quand les molécules sont inégalement espacées dans les sens  $x$  et  $y$ , les coefficients  $a_{xxxx}$ ,  $a_{yyyy}$  sont inégaux. Si l'on rejette ces formules parce que l'on refuse d'admettre la loi d'actions moléculaires qui a servi à les établir (et qui ne préjuge pourtant rien quant à la forme de la fonction  $fr$  des distances moléculaires), il est impossible, quelque chose qu'on puisse concevoir à la place de cette loi, ou quelque inexpugnable que soit le scepticisme derrière lequel on se retranche, de ne pas convenir que l'inégal rapprochement moléculaire en divers sens doit influer sur la grandeur des élasticités *directes*  $a_{xxxx}$  et ne pas se borner à influer sur celle des élasticités *tangentielles*  $a_{xyxy}$ ,  $a_{yyxy}$  ou bien des élasticités *latérales*  $a_{xxyy}$ ,  $a_{yyxx}$ , qui certainement sont inégales dans les milieux biréfringents. Un corps ou un milieu ne peut être élastique et vibrant si ses parties n'agissent pas les unes sur les autres à distance; et, quel que soit le mode de leurs actions, il n'est pas possible d'imaginer qu'elles rendent celles-là parfaitement égales en tous sens et inégales celles-ci.

Concluons que les quatorze égalités ou relations (151), (152), (153) trouvées par Groen comme condition pour qu'un milieu élastique propage en tous sens des vibrations exactement parallèles aux plans des ondes, n'expriment que l'isotropie du milieu ou la complète symétrie de sa contexture en tous sens; ce qui, comme on a vu, exclut la double réfraction en réunissant en un seul les deux rayons capables d'affecter le sens de la vue par le mode des vibrations qu'ils propagent.

Les tentatives de conciliation de la biréfringence avec l'exacte transversalité des vibrations se propageant sans décomposition dans l'intérieur des corps transparents qui en jouissent, n'aboutissent donc qu'à une illusion et ne fournissent aucun motif d'admettre 21 coefficients  $a$  inégaux ou de rejeter les 6 égalités complémentaires (150) que fournit l'analyse et même le simple examen (§ 21) des actions entre molécules, et qui réduisent ces coefficients à quinze.

Il faut en revenir, pour les phénomènes de double réfraction, à l'explication de Cauchy, d'après laquelle, dans ces corps, la transversabilité des vibrations pour les deux rayons perceptibles n'est qu'approchée; ce qui n'empêche point les rayons réfractés de pouvoir suivre très-approximativement ou même (rien ne l'empêche) tout à fait exactement la marche indiquée par la surface d'onde de Fresnel qui résume en quelque sorte la partie la mieux confirmée de ses immortelles découvertes, et dont les particularités étudiées depuis avec sagacité par M. Hamilton, ont donné des résultats curieux si admirablement vérifiés par l'expérience<sup>(1)</sup>.

(1) Les conditions Green ne sont en effet nullement nécessaires pour obtenir, même exactement, la surface de Fresnel; car si nous rapportons le milieu étheré aux intersections  $x, y, z$  des trois plans de symétrie qu'il possède toujours dans l'intérieur d'un cristal biréfringent de forme même irrégulière (voy. app. complém.), et si nous faisons pour abrégér, comme au § 24 et eu égard aux égalités (149)  $a_{yyyy} = a_{zzzz}$  etc.

$$(165) \left\{ \begin{array}{l} a_{xxxx} = a, \quad a_{yyyy} = b, \quad a_{zzzz} = c, \quad a_{yyyz} = d, \quad a_{zzxz} = e, \quad a_{xyzy} = f, \\ a_{yyxz} = d', \quad a_{zzxz} = e', \quad a_{zxyy} = f', \end{array} \right.$$

l'équation du 3<sup>e</sup> degré (159) en  $V^2$  se réduit à

$$(166) \begin{aligned} & (aV^2 + fm^2 + en^2 + P - \rho V^2)(fV^2 + bm^2 + dn^2 + P - \rho V^2)(eV^2 + dm^2 + cn^2 + P - \rho V^2) \\ & - (d + d')^2(aV^2 + fm^2 + en^2 + P - \rho V^2)m^2n^2 - (e + e')^2(fV^2 + bm^2 + dn^2 + P - \rho V^2)n^2 \\ & - (f + f')^2(eV^2 + dm^2 + cn^2 + P - \rho V^2)m^2 + 2(d + d')(e + e')(f + f')f^2m^2n^2 = 0. \end{aligned}$$

Ce n'est qu'à l'émergence des rayons, ou à leur passage dans l'air ou tout autre milieu isotrope ou *isophane* que les vibrations deviennent partie exactement transversales partie exactement longitudinales. Celles-ci sont insensibles à l'œil et forment presque

Et si, au lieu des relations Green qui se réduisent alors à

$$(167) \quad a = b = c = 2d + d' = 2e + e' = 2f + f',$$

l'on a seulement ces quatre relations, moins nombreuses et plus générales

$$(168) \quad (b-d)(c-d) - (d+d')^2 = 0, \quad (c-e)(a-e) - (e+e')^2 = 0, \quad (a-f)(b-f) - (f+f')^2 = 0, \\ (a-e)(b-f)(c-d) + (a-f)(b-d)(c-e) - 2(d+d')(e+e')(f+f') = 0,$$

cette équation (166) devient décomposable et peut être mise sous la forme

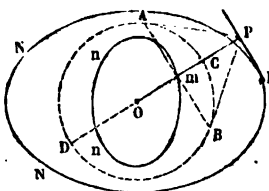
$$(169) \quad (pv^2 - P - a^2 - bm^2 - cn^2) \left\{ (pv^2 - P)^2 - [(e+f)^2 + (f+d)m^2 + (d+e)n^2](pv^2 - P) + (ef^2 + fdm^2 + den^2)(l^2 + m^2 + n^2) \right\} = 0.$$

En effet, si, pour un moment, on désigne par L, M, N, Q, R les premiers membres respectifs des équations (168) et (169), on peut vérifier par des développements comparatifs que l'équation (166) revient à  $-R + L(a^2 + fm^2 + en^2 + P - pv^2)m^2n^2 + M(f^2 + bm^2 + dm^2 + P - pv^2)n^2l^2 + N(e^2 + dm^2 + cn^2 + P - pv^2)l^2m^2 - Ql^2m^2n^2 = 0$ , se réduisant, vu (168), à  $R = 0$  ou à (169).

Or, en mettant pour P sa valeur (157)  $p^2_{xx}l^2 + p^2_{yy}m^2 + p^2_{zz}n^2$ , l'équation (169), ou même plus généralement l'équation (166) ou (159), peut être regardée comme représentant en coordonnées polaires une surface dont les rayons vecteurs, faisant avec les  $x, y, z$  des angles dont les cosinus sont  $l, m, n$ , ont pour longueurs les inverses  $\frac{1}{V}$  des vitesses de propagation des ondes planes per-

pendiculaires aux directions de ces rayons; surface dont l'équation du 6<sup>e</sup> degré en coordonnées ordinaires serait obtenue en divisant simplement par  $V^6$  et écrivant  $x, y, z$  à la place de  $\frac{l}{V}, \frac{m}{V}, \frac{n}{V}$ . Cette surface à trois nappes, qui a son centre à

l'origine, n'est autre chose, comme l'a remarqué M. Haughton (Irish Academy, vol. XXI, p. 472), que la *polaire réciproque*, par rapport à une sphère  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ , de la *surface d'onde courbe*, enveloppée et touchée à l'instant  $t = 4$  par toutes les ondes planes qui se croisaient à son centre à l'instant antérieur  $t = 0$ . En



effet si  $OP = V$  est la perpendiculaire abaissée du centre O sur un plan  $PM$  tangent en M à la surface d'onde courbe, et si  $NNM, n n m, D A C B$  figurent les coupes diamétrales, par le plan  $OPM$ , 4<sup>e</sup> d'une nappe de cette surface, 2<sup>e</sup> de la nappe de la surface (169) répondant aux mêmes valeurs de  $V$ , et 3<sup>e</sup> de la sphère de rayon 4, le plan tangent  $PM$  a pour pôle le point  $m$ , intersection de  $OP$  par la droite qui unit les points de contact A, B des tangentes menées par P au cercle  $D A C B$ ; et comme le triangle rectangle  $OAP$  donne  $OA^2 = 4 = Om \times OP$ , l'on a  $Om = \frac{4}{V}$  et par conséquent le pôle  $m$  appartient bien à la surface (169) dont

tout ce qui vient du 3<sup>me</sup> rayon, en conséquence invisible, sans qu'on ait besoin, pour l'expliquer, d'introduire dans les formules d'isotropie deux coefficients ayant entre eux un rapport très-grand; tandis que les vibrations longitudinales ne forment qu'une très-

les rayons vecteurs sont les inverses des vitesses de propagation des ondes planes dans leurs directions. Et on sait que réciproquement la surface d'onde NNM est la polaire réciproque de la surface (469) n n m par rapport à la même sphère concentrique D A C B.

Or la forme de l'équation (469) prouve que la polaire réciproque de l'onde se compose :

1<sup>o</sup> D'un ellipsoïde  $ax^2 + by^2 + cz^2 + P = \rho v^2$ , ou, en divisant par  $\rho v^2$  et en faisant  $\frac{l}{v} = x, \frac{m}{v} = y, \frac{n}{v} = z$  :

$$(170) \quad \frac{a + p''_{xx}}{\rho} x^2 + \frac{b + p''_{yy}}{\rho} y^2 + \frac{c + p''_{zz}}{\rho} z^2 = 1$$

dont la réciproque est un autre ellipsoïde ayant des coefficients ou des demi-axes inverses; celle-ci est l'onde des vibrations presque longitudinales et invisibles.

2<sup>o</sup> De la surface du 4<sup>e</sup> degré en  $l, m, n$  résultant de l'accollade ou du 2<sup>e</sup> facteur de (469) égalé à zéro quand on a mis de même pour P sa valeur  $p''_{xx} l^2 + p''_{yy} m^2 + p''_{zz} n^2$ , et qui donne la propagation des vibrations presque transversales. Si cette pression primitive P exercée sur les plans d'onde dans les directions de leurs normales antérieurement aux mouvements est supposée constante ou indépendante de  $l, m, n$ , ce qui a lieu quand  $p''_{xx} = p''_{yy} = p''_{zz}$ , et si l'on fait

$$(171) \quad \frac{d + P}{\rho} = a^2, \quad \frac{e + P}{\rho} = b^2, \quad \frac{f + P}{\rho} = c^2$$

cette équation du 4<sup>e</sup> degré peut être écrite sous la forme suivante, comme on peut le vérifier par un développement comparatif

$$(172) \quad v^4 - [(b^2 + c^2)l^2 + (c^2 + a^2)m^2 + (a^2 + b^2)n^2] v^2 + (b^2c^2l^2 + c^2a^2m^2 + a^2b^2n^2)(l^2 + m^2 + n^2) = 0,$$

équation semblable à celle (26) de la 17<sup>e</sup> leçon de M. Lamé, et d'où l'on déduit celle de la surface de Fresnel en remplaçant les paramètres  $a, b, c$  par leurs inverses  $\frac{4}{a}, \frac{4}{b}, \frac{4}{c}$  après avoir divisé par  $v^4$  et écrit  $x, y, z$  pour  $\frac{l}{v}, \frac{m}{v}, \frac{n}{v}$ .

Les quatre relations ou conditions (468) sous lesquelles on arrive à ce résultat, et qui ont été données par Cauchy en 4330 dans un mémoire (Exerc. de math. 5<sup>e</sup> année) souvent cité mais trop peu étudié, n'ont rien d'arbitraire ni de bizarre, bien qu'elles soient d'une forme moins simple à coup sûr que les cinq conditions Green (467) qui n'en sont qu'un cas particulier (revenant à celui de l'isotropie comme on a vu). En effet lorsque les trois coefficients d'élasticité directs  $a, b, c$ , entre lesquels elles permettent telle inégalité qu'on veut, ont des rapports mutuels n'excédant pas  $4 \frac{1}{2}$  ou 2, il est facile de s'assurer par des calculs qu'elles sont, numériquement, presque identiques aux relations  $2d + d' = \sqrt{bc}, 2e + e' = \sqrt{ca}, 2f + f' = \sqrt{ab}$  que nous verrons (à l'appendice complémentaire) être celles qui donnent

faible proportion de ce qui vient des deux premiers rayons, d'où il suit que les mesurages photométriques peuvent donner une égalité approximative entre la quantité de lumière reçue sur un cristal et la somme des quantités qu'il réfléchit et qu'il réfracte, surtout si l'on considère que le rayon émané du soleil pouvait contenir une certaine proportion de vibrations longitudinales ou invisibles qui, en se transformant partiellement en vibrations transversales ou visibles à la rencontre du cristal, ont pu faire compensation aux pertes ou aux transformations contraires (1).

La raison tirée des recherches de Green sur les vibrations de l'éther lumineux se trouvant écartée, examinons celles par lesquelles d'autres illustres savants ont cherché à appuyer son opinion en se basant sur des faits relatifs aux corps élastiques terrestres et pondérables.

§ 73. *Suite.* 2° MM. Stokes et Maxwell. — Bien que MM. W. Thomson (2) et G. Kirchhoff (3) aient adopté l'opinion de G. Green qui porte les coefficients au nombre de 24, on ne voit dans leurs écrits aucun raisonnement qui tende à repousser pas plus qu'à adopter

la distribution la plus simple des élasticités autour de chaque point dans les corps hétérotropes, et appartenir, au moins avec une grande approximation, aux corps dont l'isotropie primitive a été altérée par de simples compressions ou dilatations inégales, c'est-à-dire généralement aux corps amorphes ou à cristallisation confuse. Or tous les physiciens admettent que c'est seulement à cet état d'inégal rapprochement moléculaire en divers sens que se trouve l'éther dans les cristaux dont la forme n'est pas un polyèdre régulier. Il y a donc tout sujet de penser que les relations Cauchy (468) ont toujours lieu ou exactement ou à très-peu près, ce qui explique l'accord des faits avec l'analyse de Fresnel, sans recourir aux relations Green et sans rejeter les six égalités complémentaires (450)  $a_{xx}yy = a_{xy}xy$  etc. que fournit le calcul des actions moléculaires.

On ne parle pas d'une autre manière d'arriver à l'équation (472) de Fresnel, que Cauchy a présentée dans un seul de ses écrits, en 1839 (t. XVIII des Mém. de l'Acad.), par esprit de concession à une opinion qu'il avait combattue (celle de la perpendicularité des vibrations aux plans de polarisation); car cette manière est sujette à une grave difficulté que n'offre point celle de 1830, bien préférable à notre avis (Voy. *Comptes rendus*, 17 août 1863, t. LVII, p. 387).

(1) Société philom. 22 décembre 1855, ou l'*Institut* 23 janvier 1856 n° 1154.

(2) On the thermo-elastic and thermo-magnetic Properties of Matter, April 1855 (The Quarterly Journal of pure and applied Mathematics, vol. I, 1857).

(3) Ueber das Gleichgewicht und etc. Sur l'équilibre et le mouvement d'une tige élastique infiniment mince. Journal de Crelle, 56° vol. 4° liv. p. 290 (note) et p. 298.

les six égalités complémentaires (150) réduisant ce nombre à 15 dans le cas général, et, par suite, le coefficient unique pour l'isotropie.

Il en est autrement de M. Stokes, dont le mémoire remonte à 1845 (1), et de M. Maxwell qui a reproduit en 1850 une partie de ses arguments en les développant (2).

Ils tirent surtout leurs ingénieux et spécieux arguments de la comparaison de ce qui doit se passer dans les deux états de solidité et de fluidité parfaite, regardés comme extrêmes. Examinons d'abord le mémoire de M. Stokes avec toute l'attention que mérite un si important travail.

L'éminent professeur de Cambridge s'occupe d'abord des fluides, qu'il considère dans l'état de mouvement. Après avoir réduit, par une analyse nouvelle et remarquable, les vitesses des molécules d'un élément fluide quelconque à une vitesse de translation et à une vitesse de rotation communes à toutes, et à trois vitesses relatives principales dirigées parallèlement à trois droites rectangulaires, et à leur tour celles-ci à une *vitesse de dilatation moyenne* égale en tous sens et à des vitesses de *déformation* (shifting) qui sont deux à deux égales, de signe contraire et perpendiculaires l'une à l'autre, il observe que ces dernières doivent avoir des grandeurs proportionnelles au nombre des *sauts* moléculaires (start) ou des passages d'un état à un autre état d'équilibre stable, qui ont lieu dans l'unité des temps, et qui font, dit-il, l'effet de chocs intérieurs successifs. Il en conclut que les *inégalités* des pressions des fluides dans l'état de mouvement, ou les *différences* qu'offrent entre elles celles qui s'exercent normalement aux trois faces rectangulaires déterminées par les directions des vitesses de déformation, *doivent être à chaque instant proportionnelles aux grandeurs de ces vitesses de déformation.*

En partant de là, l'analyse montre que le frottement des fluides,

(1) On the Theories of the Internal Friction of Fluids in Motion and the Equilibrium and Motion of elastic Solids; lu le 4 avril 1845 (Transactions of the Cambridge Society, vol. VIII, part. III).

(2) On Equilibrium of elastic Bodies; lu le 48 février 1850 (Tome XX, 4853, des Trans. of the Royal Society of Edinburgh, p. 87).



conformément à l'hypothèse de Newton <sup>(1)</sup> et au raisonnement de Coulomb <sup>(2)</sup> (avec lequel celui de M. Stokes a quelque analogie) est proportionnel aux très-petites vitesses de *glissement relatif* que prennent leurs couches contiguës; ce qui fournit des équations différentielles analogues à celles où d'autres hypothèses ont conduit Navier en 1822 <sup>(3)</sup> et Poisson en 1829 <sup>(4)</sup>; équations qui ont été données aussi par M. Cauchy en 1828 <sup>(5)</sup> comme pouvant représenter le mouvement intérieur des corps plastiques dénués d'élasticité <sup>(6)</sup>.

Appliquant ensuite aux corps solides des considérations toutes semblables, M. Stokes décompose, pour un point quelconque, les trois dilatations principales rectangulaires  $\delta', \delta'', \delta'''$  (les mêmes que celles qui ont été découvertes par M. Cauchy, § 51 ci-dessus) en une dilatation moyenne  $\frac{\delta' + \delta'' + \delta'''}{3}$  égale en tous sens, et en deux, ou plutôt (pour la symétrie) en trois déformations (shifting) consistant, chacune, en une dilatation et en une contraction égale dans deux directions rectangulaires; décomposition qui est toujours possible puisque si l'on fait

$$\frac{\delta' + \delta'' + \delta'''}{3} = \delta$$

l'on a identiquement

$$\delta' = \delta + \frac{\delta' - \delta''}{3} - \frac{\delta''' - \delta'}{3}, \quad \delta'' = \delta + \frac{\delta'' - \delta'''}{3} - \frac{\delta' - \delta''}{3}, \quad \delta''' = \delta + \frac{\delta''' - \delta'}{3} - \frac{\delta'' - \delta'''}{3};$$

en sorte que celle des trois déformations qui est, par exemple,

(1) Principes. Livre 2<sup>e</sup>, section 9<sup>e</sup> et dernière. Hypothèse et Proposition LI.

(2) Expériences destinées à déterminer la cohésion des fluides et les lois de leur résistance dans les mouvements très-lents. Tome 3<sup>e</sup> des Mém. de la classe des Sc. ph. et math. de l'Institut.

(3) Tome VI des Mém. de l'Ac. des sc. de l'Institut.

(4) Journal de l'École polytechnique 20<sup>e</sup> cahier p. 452.

(5) Exercices de Math. 3<sup>e</sup> année (1828), p. 485.

(6) Nous les avons aussi démontrées, dans une Note relative à la Dynamique des fluides (Comptes rendus 27 novembre 1843, t. XVII p. 4240), en partant de cette simple supposition que, sur chaque face, le frottement est nul dans le seul sens où le glissement est nul, et est, par suite, à son maximum dans le sens où la vitesse de glissement relatif est la plus grande. M. Stokes a bien voulu citer cette Note dans un travail subséquent.

perpendiculaire au sens de  $\delta'$  consiste dans les dilatations égales et de signe contraire  $\frac{\delta'' + \delta'''}{3}$  et  $-\frac{\delta'' - \delta'''}{3}$  suivant les sens respectifs de  $\delta''$  et de  $\delta'''$ , ne changeant absolument rien au volume nouveau d'un élément, qui n'a ainsi été altéré que dans la proportion  $3\delta = \delta' + \delta'' + \delta'''$ .

Invoquant alors le principe de *linéarité* qu'il croit pouvoir déduire, avons-nous dit (§ 71, p. 719), du fait de l'isochronisme des oscillations, M. Stokes conclut que pour obtenir, dans un corps supposé isotrope, la pression sur l'un quelconque des plans principaux, celui par exemple qui est perpendiculaire à la direction de  $\delta'$ , il faut ajouter la dilatation générale  $\delta = \frac{\delta' + \delta'' + \delta'''}{3}$  multipliée par un certain coefficient d'élasticité A, avec les déformations  $\frac{\delta' - \delta''}{3} - \frac{\delta'' - \delta'''}{3}$  multipliées par un autre coefficient 2B, ce qui donne pour cette pression

$$A\delta + 2B \frac{2\delta' - \delta'' - \delta'''}{3} = A\delta + 2B(\delta' - \delta).$$

D'où, en se servant de formules de changement de plans de pression comme (4) et (11) (§§ 17 et 19), l'on tire analytiquement les expressions suivantes des composantes sur trois plans rectangulaires situés d'une manière quelconque dans le corps, et dont les intersections sont prises pour axes coordonnés des  $x, y, z$  :

$$(173) \begin{cases} p_{xx} = A\delta + 2B\left(\frac{du}{dx} - \delta\right) = \frac{A+4B}{3} \frac{du}{dx} + \frac{A-2B}{3} \frac{dv}{dy} + \frac{A-2B}{3} \frac{dw}{dz} \\ p_{yy} = \dots\dots; & p_{zz} = \dots\dots \\ p_{yz} = B\left(\frac{dv}{dx} + \frac{dw}{dy}\right), & p_{zx} = \dots\dots, & p_{xy} = \dots\dots(1) \end{cases}$$

(1) Développons ici cette déduction analytique, qui revient à celle par laquelle Cauchy a obtenu les formules (44), comme nous l'avons dit sans développement page 652, en partant de celles qu'il avait posées pour les trois pressions dans les directions principales.

En appelant  $x', y', z'$  ces trois directions qui sont telles qu'on a (§§ 81 et 82 ci-après)

$$p_{y'z'} = 0, p_{z'x'} = 0, p_{x'y'} = 0, g_{y'z'} = 0, \varepsilon_{x'z'} = 0, g_{x'y'} = 0,$$

formules qui sont identiques à (114) en faisant  $B = \frac{1}{2}k$ ,  $A = k + 3K$  et à (35) en faisant  $B = e$ ,  $A = 2e + 3e'$  (ou avec celles des Leçons de M. Lamé en faisant  $B = \mu$ ,  $A = 2\mu + 3\lambda$ ).

M. Stokes, en les appliquant, montre :

1° Que A est bien le coefficient d'élasticité de dilatation ou contraction générale, c'est-à-dire le quotient d'une pression uniforme  $-p_{xx} = -p_{yy} = -p_{zz}$  exercée sur toute la surface d'un corps, par la compression linéaire  $-\partial_x = -\partial_y = -\partial_z$ , qu'elle produit en tous sens. Et c'est ce qui résulte de la fin de notre § 52, p. 658,

où nous avons trouvé  $\frac{q}{\frac{1}{3}c} = k + 3K = A$ .

2° Que B, coefficient d'élasticité de déformation, est aussi celui de glissement ou de torsion, que nous avons désigné par G.

On aurait, continue M. Stokes,  $\frac{A}{B} = 5$  d'après les formules de M. Poisson et des autres auteurs qui ont fondé leur analyse sur le calcul des actions entre molécules suivant leurs lignes de jonction deux à deux.

Mais, objecte-t-il (p. 317-318 de son mémoire), ce rapport  $\frac{A}{B}$  des deux espèces d'élasticité (de contraction générale et de déformation) « n'est pas le même pour tous les corps (même les corps « isotropes dont il s'occupe exclusivement). Infini en quelque sorte « dans les fluides en repos, et toujours très-considérable dans les « liquides en mouvement,  $\frac{A}{B}$  excède probablement 5 dans les so- « lides, même les plus roides et les plus cassants, et doit être très- « sensiblement plus grand dans les métaux qui tous, sans en « excepter le fer et le cuivre, jouissent d'un certain degré de

on obtient (4<sup>re</sup> form. (4))

$$p_{xx} = p_{x'x'}c_{xx'}^2 + p_{y'y'}c_{xy'}^2 + p_{z'z'}c_{xz'}^2 = (A - 2B)\delta + 2B(\partial'c_{xx'}^2 + \partial''c_{xy'}^2 + \partial''''c_{xz'}^2) = A\delta + 2B(\partial_x - \delta)$$

puisque la première formule (11) donne  $\partial_x = \partial'c_{xx'}^2 + \partial''c_{xy'}^2 + \partial''''c_{xz'}^2$ .

Et on a aussi (4<sup>e</sup> formule (4))

$$p_{yz} = p_{x'x'}c_{yz}c_{xz'} + p_{y'y'}c_{yy'}c_{zy'} + p_{z'z'}c_{yz}c_{xz'} = 2B(\partial'c_{yz}c_{xz'} + \partial''c_{yy'}c_{zy'} + \partial''''c_{yz}c_{xz'}) = Bg_{yz}$$

puisque la 4<sup>e</sup> formule (11) donne  $g_{yz} =$  le double de la parenthèse.

« ductilité et de plasticité. » Il lui semble donc qu'il n'existe aucune ligne de démarcation entre les solides plastiques et les liquides visqueux, la distinction pratique de ces deux sortes de corps ne résidant au fait, dit-il, que dans un certain rapport entre les forces de pesanteur et de cohésion. Tel corps, continue-t-il, qui se comporte sur la terre comme un solide ductile, s'affaisserait sur lui-même s'il était transporté sur la surface du soleil, et se nivellerait alors comme un liquide visqueux sous l'action d'une pesanteur qu'on sait être vingt-huit fois plus considérable, et, cela, indépendamment de tout accroissement de sa température; et tel liquide visqueux terrestre se comporterait comme un solide plus ou moins mou s'il était placé à la surface d'une petite planète comme Pallas, où la force de pesanteur est réduite au vingtième de ce qu'elle est sur la terre.

M. Stokes pousse cette doctrine de la continuité jusqu'à effacer (break down) la distinction entre les liquides et les gaz, en se fondant sur quelques faits de changement d'état en vase clos.

Il pense même que le rapport A : B des deux sortes d'élasticité est en core extrêmement grand dans les solides à la fois mous et élastiques ou revenant tout à fait à leur forme première après des déformations considérables, comme le caoutchouc (Indian Rubber) et les gelées.

Il dit enfin que lorsqu'un corps est comprimé ou dilaté uniformément en tous sens, ses molécules « ne peuvent pas utilement » prendre de nouveaux arrangements mutuels pour s'affranchir « de cet état forcé (relieve from constraint) mais qu'elles le peuvent » efficacement lorsqu'on a fait éprouver au corps une simple déformation » diminuant une de ses dimensions pour en augmenter une autre dans la même proportion; d'où il suit que dans ce second cas la résistance est bien moindre; et que, même, s'il n'y a pas encore re-arrangement moléculaire, il se développe toujours une tendance à l'amener, qui n'existe pas dans le premier cas (celui de compression égale en tous sens); et cette tendance explique, suivant lui, la petitesse du coefficient B d'élasticité de déformation par rapport à A, coefficient d'élasticité de compression ou dilatation générale.

A ces considérations de M. Stokes, M. Maxwell ajoute que comme la nature offre des corps « à tout état intermédiaire entre la parfaite liquidité et la parfaite solidité », et comme les liquides ré-

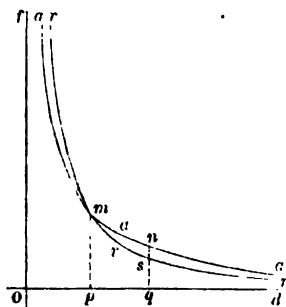
sistent énergiquement au *changement de volume* mais nullement au *changement de forme*, ces deux sortes de résistance ou d'élasticité qu'il appelle l'une *cubique* l'autre *linéaire* ne peuvent être pour tous deux dans la même proportion, « d'où la nécessité « de deux coefficients. » A l'opposé des *gelées* dont la résistance à la compression est comparable à celle de l'eau, le savant écossais cite le *liège* qui se laisse facilement comprimer mais dont la résistance au glissement relatif des parties est bien plus forte que celle des gelées; cette citation prouverait que M. Maxwell regarde le rapport  $\frac{A}{B}$  comme pouvant descendre au-dessous de 5, limite inférieure que lui assigne M. Stokes.

Ces objections, que nous n'avons pas cherché à affaiblir, pourraient être sérieusement opposées à l'unité du coefficient, si les formules de la théorie de l'élasticité devaient s'appliquer aux corps et aux déplacements du genre de ceux qui viennent d'être considérés. Mais les inventeurs de ces formules n'ont pas eu l'intention de leur attribuer un tel degré de généralité; jamais nous ne les appliquerons jusqu'à un pareil point, et l'on se garde bien d'en approcher pour les matériaux dans la pratique; une fois produit cet *écrouissage* préalable dont nous avons plusieurs fois parlé (§§ 6 de la note du n° 1, et 9 et 10 de celle du n° 21), et qui amène le système moléculaire à l'état stable auquel les calculs s'appliquent. Les formules n'ont point été dressées pour régir les déplacements moléculaires produisant des forgeages, pétrissages, laminages, estampages ou *emboutissages* des corps ductiles, même lentement et sans percussion. Dès qu'un solide, en se déformant, se comporte le moins du monde à la manière d'un fluide dont les parties se meuvent sensiblement les unes par rapport aux autres, c'est-à-dire dès qu'il y a, dans ce solide, passage successif de certains arrangements moléculaires à d'autres; dès que la limite d'un état d'équilibre stable est franchie pour *sauter* (to start) à un autre état où l'équilibre peut subsister ou s'établir sans forces extérieures, alors les pressions ou résistances intérieures, bien que dues toujours aux actions entre molécules, *changent tout à fait de nature et de marche*, en supposant même qu'elles puissent se trouver représentées par des formules ayant à peu près le même aspect où les *vitesse*s remplaçant les *déplacements* (comme celles

de Navier, Poisson, etc., et M. Stokes pour les fluides). Les pressions développées dépendent dès lors, en effet, d'un travail dynamique où l'inertie joue un rôle capital, parce que ce travail se trouve transformé, pour la plus grande partie, en force vive, ou consommé à produire les ébranlements imperceptibles qu'amènent les *Start* ou sauts successifs d'un arrangement à celui qui suit, effet que M. Stokes compare à ce qui résulterait d'une série de chocs.

Et non-seulement, tout au contraire, les formules de la théorie de l'élasticité des solides demandent, pour être vraies, que les déplacements restent dans les limites de la stabilité de l'arrangement moléculaire primitif, mais elles exigent encore absolument qu'ils soient peu considérables par rapport à l'étendue que ces limites comprennent, et elles cessent d'être applicables si les déplacements vont seulement jusqu'à approcher de cette *tendancy at a re-arrangement* que M. Stokes a si bien signalée et caractérisée. En effet dès que cette tendance se manifeste et annonce l'arrivée ou seulement l'approche d'une de ces situations instables où il y a indifférence entre le retour à l'état primitif et le progrès vers un état nouveau, les résistances cessent d'augmenter proportionnellement aux changements dans les distances moléculaires (1). Alors les *dérivées secondes*  $f''(r)$  des actions exprimées en fonction  $f$  de ces distances  $r$  commencent à influencer notablement et à donner des termes sensibles, négatifs si l'on dilate et positifs si l'on comprime; et les formules, dont la forme linéaire est fondée précisément sur ce qu'on néglige ces termes du second ordre dans les développements des actions nouvelles mises en jeu, cessent d'être suffisamment approchées. L'argument tiré de la plasticité des métaux ou de diverses manières de se comporter intermédiaires entre

celles des solides parfaits et celles des liquides parfaits ne prouve donc rien contre les formules à un seul coeffi



(1) Cet état d'indifférence, quand il est question de deux molécules seulement, répond, comme l'a remarqué M. Poncelet (Introduction à la mécanique industrielle n° 229) à l'abscisse  $Oq$  de la figure ci-contre, qui est celle de la note du § 16, p. 543.

cient, qui n'ont jamais été proposées que pour des solides se comportant *comme des solides* élastiques et extrêmement peu déformés, et nullement pour des corps intermédiaires entre les solides et les liquides, ou bien pour des ressorts *forcés* ou sur le point de l'être.

L'ingénieuse considération de ce que deviendraient divers corps en les transportant, sans changement de température, de la surface de la terre sur celle d'autres astres, ne prouve pas davantage la nécessité des *deux coefficients* dont le rapport varie avec la substance; car si, à la surface du soleil, l'on soumet du cuivre, du fer doux, etc., à des forces qui soient à celles auxquelles ils sont habituellement soumis sur la terre dans le rapport 28 : 1 des pesanteurs, ces métaux, en supposant même qu'ils ne prennent pas l'aspect fluide ou qu'ils ne se brisent pas, se trouveront forgés ou emboutis, et leurs modifications ne seront plus régies par les formules de l'élasticité, qui, disons-nous, ne s'appliquent point jusque-là à beaucoup près.

Mais il y a plus. Ces formules ne sont mathématiquement données pour vraies que quand les déplacements sont *infinitement petits*; cas extrême et unique où elles conviendraient même aux masses liquides; et elles ne sont données pour *approximativement* exactes et applicables, pour des solides quelconques, que lorsque les déplacements relatifs dans chaque portion très-petite, c'est-à-dire les dilatations et glissements, sont *extrêmement faibles*, ou restent dans des limites fort resserrées qui peuvent varier, au reste, d'un corps à l'autre. Il suffit donc que les changements de volume et de forme y soient quelque peu considérables, comme ceux qu'on peut faire subir au caoutchouc et aux gelées, sans qu'il y ait encore *tendance à un arrangement nouveau* et persistant, pour que les formules linéaires des pressions cessent de s'y appliquer. Alors, en effet, les termes d'ordre supérieur au premier sont encore influents et ne peuvent être négligés.

Il ne faut pas oublier d'ailleurs que ces deux sortes de substances, comme nous avons dit (§ 59), et sans doute aussi la plupart de celles que M. Graham désigne sous le nom de *colloïdes* par opposition aux corps cristalloïdes <sup>(1)</sup>, ne sont probablement que des

---

(1) De la Diffusion liquide appliquée à l'analyse (Comptes rendus de l'Académie, 42 août 1864 t. 53, p. 275).

espèces de réseaux ou d'éponges dont les mailles ou cellules se trouvent remplies de quelque liquide se comportant comme tel dans les déformations et compressions. Ce liquide se manifeste même dans le caoutchouc fortement frotté ou pétri, qui devient collant et glutineux parce que ses cellules apparemment se trouvent brisées. On ne peut donc toujours rien inférer, contre les formules à un seul coefficient, de l'énorme rapport que quelques expériences ont montré entre la résistance à une *diminution* du volume et la résistance aux changements de la forme de pareilles substances.

Et puis, je le demande, les mêmes substances ou gommeuses ou demi-fluides opposeraient-elles une résistance aussi énergique à une *augmentation égale* du volume si l'on pouvait les y soumettre par l'application d'une traction uniforme sur toute leur surface? Je ne le pense pas, et personne probablement ne le croit davantage. La compression effectuée sur le caoutchouc dans les expériences, bien que petite, excédait donc déjà très-probablement cette proportion pour laquelle les efforts restent proportionnels aux effets, *et sont égaux pour des effets égaux et opposés*. Les formules linéaires cessaient ainsi de s'y appliquer puisque de pareilles formules donnent nécessairement cette *égalité dans les deux sens*, et cela quel que soit le nombre des coefficients qu'on y mette.

Tout prouve qu'en général si l'on dépasse les très-petites proportions de changement de distance pour lesquelles les dérivées du second ordre sont sans influence sensible, il y a bien plus de résistance aux rapprochements qu'aux écartements (!).

Quant au liége, dont parle M. Maxwell, et aux moelles végétales qui pourraient être citées au même sujet, rien ne prouve que leur résistance à une très-petite compression cubique ne soit pas avec leur résistance à une très-petite déformation dans le rapport qu'indiquent les formules à un seul coefficient. Et quand ce rapport serait autre, on ne pourrait toujours en rien conclure contre elles, car ce n'est pas non plus pour des systèmes spongieux dont les

---

(<sup>1</sup>) Ce n'est même qu'à cette condition (ou qu'autant que la courbe représentative des répulsions mutuelles, prises pour ordonnées, tourne sa *convexité* vers l'axe des distances prises pour abscisses) qu'on peut expliquer les *dilatations par la chaleur*, supposée résider dans les vibrations atomiques (Société philomathique 20 octobre 1855, au Journal *l'Institut*, 49 décembre, n° 4146 p. 440)



ellules à paroi mince doivent avoir des diamètres bien plus grands que le rayon d'activité moléculaire, que ces formules ont été rationnellement établies, et qu'on a jamais proposé de les employer.

On ne voit donc toujours pas là de motif pour faire usage, dans le calcul de la résistance des *solides*, de formules à plus d'un coefficient s'ils sont supposés isotropes, et à plus de quinze s'ils ne le sont pas.

§ 74. *Suite.* 3° *M. Clausius.* — Nous avons déjà dit (§ 69) que l'éminent professeur de Zurich regardait, nonobstant les objections élevées, comme parfaitement fondé l'emploi fait par Cauchy, Poisson, etc., du principe physique des actions à distance entre points matériels pour établir les formules donnant les relations entre les pressions appliquées et les déplacements moléculaires qui résultent *immédiatement* de leur application. M. Clausius montre très-bien que l'hypothèse justement reprochée à Poisson (1) « que le rayon d'activité est très-grand par rapport à l'intervalle moléculaire » n'avait nul besoin d'être faite pour cet établissement des formules de pression, formules qui subsistent même quand l'action entre les molécules les plus voisines est supposée avoir une influence dominante au lieu d'être négligeable, comme Poisson croyait devoir le supposer, devant les actions moins intenses mais plus nombreuses des molécules les moins proches; car ces formules, observe-t-il, doivent être envisagées comme s'appliquant non pas à chacun des arrangements moléculaires particuliers qui ont lieu dans une portion du corps, mais à ce qui résulte de l'ensemble d'un nombre toujours très-grand de ces arrangements, c'est-à-dire à un arrangement *moyen*, qu'il appelle *normal* parce qu'il est le seul qu'il faille considérer dans les applications. Ce n'est de même qu'en *moyenne*, ou en ensemble, et malgré de nombreuses inégalités des actions moléculaires individuelles, qu'un corps est supposé ou reconnu d'égale élasticité en tous sens. M. Clausius admet donc les formules de Poisson et de Cauchy, même quand chaque molécule serait douée de polarité ou exercerait en divers sens des actions inégales, et quand même aussi les

---

(1) Voyez § 23 ci-dessus, fin de la note.

actions mutuelles des divers points de deux quelconques d'entre elles n'auraient pas toujours une résultante passant par leurs centres de gravité, mais engendreraient des *couples* capables de faire tourner les molécules sur ces centres; pourvu, ajoute-t-il très-bien, qu'il y en ait dont les faces soient orientées dans toutes les directions, comme on doit le supposer pour les corps isotropes, qui sont nécessairement à cristallisation confuse (1).

M. Clausius justifie donc de tout point, et avec une lucidité ne laissant pas de place à la réplique, les formules de Poisson et de Cauchy qui sont à un seul coefficient pour la contexture isotrope et à 15 pour la contexture la plus générale; mais il ajoute: « En tant que le changement opéré dans le corps ne consiste qu'en un simple déplacement (blossen verschiebung) moléculaire. » Or le savant professeur, regardant les expériences de M. Wertheim, nouvellement publiées alors, et que nous avons discutées ci-dessus (§§. 60, 61, 63) comme mettant en contradiction ces formules avec les faits, et sans songer à élever un doute sur la parfaite isotropie des matières sur lesquelles elles ont été exécutées, se demande si les corps, sous l'action des forces extérieures, n'éprouvent pas un *changement interne consistant en quelque autre chose que le déplacement des molécules* les unes par rapport aux autres.

Il pense le trouver dans le résultat des recherches expérimentales faites en 1835 par M. W. Weber sur l'élasticité des *fil*s de soie (2); recherches dans lesquelles un poids suspendu aux fils a

(1) M. Clausius montre même que moyennant cette substitution, en chaque petite partie du corps, de l'arrangement normal ou d'ensemble aux divers arrangements particuliers qui y ont lieu, les sommes telles que (19)  $\frac{\rho}{2} \sum mr \cdot fr \cdot \cos^2(r, x)$

et (26)  $\frac{\rho}{2} \sum mr^3 \frac{d^2 fr}{dr^2} \cos^2(r, x)$ , etc. donnant les constantes des formules, peuvent être converties en intégrales par coordonnées polaires sphériques, comme ont fait dans le principe Navier, etc. sans entraîner les fausses conséquences qui ont fait rejeter par Poisson ces sortes d'intégration (du reste inutiles); car, en admettant toujours la discontinuité de la matière, ou l'isolement des molécules, elles ne se feront jamais depuis  $r = 0$  ce qui la supposerait continue, mais depuis  $r =$  un intervalle moléculaire minimum imperceptible mais fini.

(2) Recueil scientifique de Göttingue, p. 8; ou extrait inséré aux Annales de Poggendorff, tome 34.

produit, après l'action immédiate et presque instantanée, une *action élastique ultérieure* ou subséquente (elastische nachwirkung) manifestée par un allongement qui se continue pendant vingt-quatre heures et qui s'élève jusqu'à un tiers de celui qui a été immédiatement subi; allongements qui disparaissent l'un et l'autre au bout d'un temps à peu près égal lorsqu'on enlève le poids; en sorte qu'on ne doit point confondre le *nachwirkung* de M. Weber avec ces allongements permanents ou persistants qui résultent d'altérations de l'élasticité ou plutôt de la contexture des corps soumis à des efforts d'une certaine grandeur.

Une expérience plus ancienne de M. Weber <sup>(1)</sup> paraissait avoir manifesté aussi une action élastique ultérieure *dans un fil métallique*, mais avec des circonstances telles qu'il fallait supposer cette action consommée, pour la plus grande partie, pendant le premier *quart de seconde* après l'application du poids. Malgré cette particularité, M. Clausius pense que dans les métaux comme dans les substances organiques, on doit admettre l'existence de cette deuxième action; il lui attribue même les excès notables de grandeur qu'on obtient pour le coefficient d'élasticité  $E$  de Navier lorsqu'on l'évalue par la hauteur du son produit par des vibrations longitudinales des tiges quand on le compare à celui qui se mesure par l'allongement statique dû à des poids en repos. Il explique cette singulière action (*nachwirkung*) en supposant qu'au premier moment soit de l'application d'un poids ou d'une pression extérieure soit de l'excitation d'un ébranlement, les molécules ne font que s'écarter ou se rapprocher ou n'éprouvent que des translations, mais qu'il leur faut plus de temps pour *tourner sur elles-mêmes* si les actions combinées des atomes ou des points matériels qui les composent sont de nature à engendrer des *couples* ou à produire aussi des rotations. Il conclut que dans le calcul des mouvements vibratoires, dont la durée est toujours trop faible pour permettre l'*action subséquente*, il convient d'employer les formules à un seul coefficient, légitimement déduites de l'analyse des actions moléculaires développées entre les points matériels par leurs déplacements relatifs, mais que, dans le calcul des déformations

---

(1) Ann. de Poggendorff, t. 20.

produites jusqu'à un état d'équilibre qui s'établit après un temps devant être plus long, il faut, pour tenir compte de cette deuxième sorte d'action (*nachwirkung*) recourir aux formules à deux coefficients.

Nous ne saurions être, sur ce dernier point, de l'avis du savant professeur avec lequel nous avons eu le bonheur de nous rencontrer sur tant d'autres. L'action prolongée ou subséquente (*nachwirkung*) si manifeste pour la soie et que M. Wertheim a reconnu exister aussi d'une manière non douteuse pour d'autres substances organiques non ligneuses ni osseuses (<sup>1</sup>), ne nous paraît nullement démontrée pour les métaux et les autres matières employées dans les constructions. Et quand même elle aurait lieu pour tous les solides, nous ne voyons pas pourquoi on leur appliquerait, dans les calculs d'équilibre, ces formules linéaires à deux coefficients dont la forme n'est justifiable que par la loi même des actions moléculaires dont une conséquence est, comme on a vu, de réduire les deux coefficients à un seul si la contexture est isotrope. Que les changements intérieurs subis sous l'action des forces ne demandent qu'un temps inappréciable ou qu'ils exigent un quart de seconde, ils dépendent toujours des déplacements des points; ce sont mêmes ces déplacements *u, v, w* ou leurs dérivées qui entrent dans les formules soit à un soit à plusieurs coefficients; il suffit que ces déplacements soient au total *extrêmement petits*, avec ou sans rotations des groupes atomiques composant les diverses molécules orientées confusément dans toutes sortes de directions, pour que les actions moléculaires qu'ils développent doivent recevoir (au moins en moyenne comme dit très-bien M. Clausius) les valeurs qui leur sont attribuées par le calcul de Cauchy et Poisson, et pour

---

(<sup>1</sup>) Mémoire sur l'élasticité des principaux tissus du corps humain (28 décembre 1846, ann. de ch. et de ph. t. XXI). C'est surtout lorsque ces tissus conservaient leur humidité que l'action subséquente était considérable. M. Wertheim remarqua aussi que les allongements totaux et comprenant une partie persistante *croissaient dans un rapport moindre que la charge*, à l'opposé de ce qui a lieu pour le fer doux et les autres métaux ductiles, et comme il nous semble qu'il arrive aussi pour les lanières de caoutchouc; ce qui y offrirait peut-être une preuve de plus de l'existence, à l'état liquide, de cette sorte d'huile qu'un long pétrissage manifeste, en sorte qu'on ne doit pas appliquer à cette matière les formules relatives aux vrais solides.

que les formules basées sur ce calcul doivent être acceptées. Il y a donc lieu de conserver ces formules, en interprétant comme nous avons fait ci-dessus les résultats de M. Werthelm qui ne les contredisent qu'en apparence.

§ 75. *Résumé de la discussion du cinquième Appendice.* — Nous allons récapituler cette discussion à laquelle nous avons donné beaucoup de développement au risque de nuire à la force des preuves par leur multiplicité, parce qu'à nos yeux les convictions tardives sont les meilleures si elles sont les mieux assises et les plus durables. On concevra à peine, un jour, la nécessité où nous avons été de nous y livrer si longuement, lorsqu'on apercevra bien qu'elle ne tend en définitive qu'à faire prévaloir les plus simples conséquences du principe de physique générale le mieux avéré et le plus universellement accepté, ou tout au moins à repousser comme infiniment improbable ce qui y est manifestement contraire.

Tous les phénomènes montrent que les particules des corps agissent à distance les unes sur les autres. Cette action *réci-proque* c'est-à-dire constamment accompagnée de réaction égale et directement contraire est, aujourd'hui, prise d'une manière explicite pour base de la Mécanique envisagée et enseignée au point de vue des réalités physiques substituées aux suppositions abstraites de corps parfaitement durs, de matière continue, de forces agissant instantanément et au seul contact, etc., qu'on a abandonnées non-seulement comme contraires aux faits mais encore comme ne fournissant, pour les théorèmes relatifs aux corps fins, que des démonstrations illusoire. La loi qui régit cette action est même implicitement renfermée dans les principes mathématiques de la Mécanique, et on ne saurait la nier sans supprimer cette science en tant que géométrie ou essentiellement liée à celle de l'étendue. Toute force qu'on y considère a en effet un *point* d'application; et si les particules sont étendues ou composées, c'est sur chacun de leurs points élémentaires que les forces s'exercent, et c'est sur les points d'autres particules que s'exercent les réactions contraires. Or, pour qui admet cela, il n'est pas douteux, et tous les faits le montrent d'ailleurs, que l'action entre les deux mêmes points ne soit la même pour même distance, qu'elle ne change quand la distance change, et fort peu si celle-ci ne

change que dans une faible proportion ; ce qui est bien admettre que l'action est fonction de la distance, et fonction continue. Enfin puisque l'action de  $m$  sur  $n$ , dirigée vers le point de l'espace occupé par  $n$ , doit être directement opposée à la réaction de  $n$  vers le point occupé par  $m$ , cette action mutuelle ne peut avoir d'autre direction que celle de leur ligne de jonction  $mn$ . C'étaient même déjà des actions réciproques de ce genre (sauf le changement des distances qui étaient abstractivement traitées comme invariables), qu'on substituait toujours aux liaisons lorsqu'il s'agissait de démontrer, à l'ancien point de vue, la mécanique des systèmes.

Si la prudence scientifique prescrit de ne pas se fier à toute hypothèse elle n'ordonne pas moins de tenir pour fortement suspect ce qui est manifestement contraire à une grande synthèse reliant admirablement la généralité des faits, en sorte qu'on ne puisse lui refuser la plus immense probabilité (à défaut d'une certitude qui n'est pas de ce monde en pareille matière), et sur laquelle ceux même qui en révoquent en doute la légitimité ne peuvent s'empêcher de s'appuyer implicitement comme sur une base mathématique indispensable. Aussi repoussons-nous toute formule théorique en contradiction formelle avec la loi des actions fonctions continues des distances des points matériels et dirigées suivant leurs lignes de jonction deux à deux. Si, en recourant à une telle formule, on explique plus facilement certains faits, nous la regarderons toujours comme un *expédient* trop commode pour répondre à quelque chose de vrai, et ne produisant qu'une illusion et un faux repos, propres à arrêter les recherches et à ajourner indéfiniment la découverte des explications véritables (telles que la mise en compte d'une hétérotropie non d'abord aperçue).

L'opinion de deux coefficients pour l'isotropie, et de plus de quinze pour le cas général de contexture, que nous combattons dans cet Appendice, a eu, dans deux pays, des origines différentes en apparence, mais se rapportant également à l'adoption d'un expédient de ce genre, explicatif de faits superficiellement examinés et interprétés, qu'on croyait incompatibles avec la théorie déjà établie.

En France, les formules des composantes de pression (113) et (115) à un seul coefficient, qui longtemps avaient été reçues sans contestation en tant qu'applicables aux corps isotropes ou d'égalé

contexture en tous sens, avaient reçu une confirmation expérimentale du mesurage, par M. Cagniard de Latour (§ 48), de l'allongement et de l'amincissement simultané d'un gros fil de fer, c'est-à-dire d'un cylindre *plein*. Cependant, à la suite d'expériences sur la compression de l'eau dans des vases ou *piézomètres* eux-mêmes comprimés, une objection de M. OERSTED, que personne n'a admise (§ 48), et qui tendrait à exclure toute formule, a été l'occasion d'un doute élevé par M. REGNAULT, non pas sur l'exactitude analytique des formules dressées par Navier, Poisson, Cauchy et MM. Lamé et Clapeyron dans les mêmes termes par des marches différentes, en supposant la matière isotrope, mais sur l'existence supposée fréquente de cette qualité physique (l'isotropie) qu'il regarde au contraire, avec Savart, comme n'ayant lieu jamais exactement, même dans les solides coulés tels que le verre, la fonte, etc.

Or cette hétérotropie ou cette inégale élasticité avait déjà été prise en considération par M. Cauchy lorsqu'il donnait, en 1828, pour le cas de contexture le plus général, ses formules à *quinze* coefficients, qui se réduisent à *six* lorsqu'il y a trois plans de symétrie, et à *trois* lorsqu'il y a un axe de symétrie de contexture, et ne se réduisent à un seul que lorsqu'on revient à la contexture isotrope; les pressions étant supposées nulles dans l'état primitif ou antérieur aux déformations opérées, car, lorsque le contraire a lieu, l'illustre analyste trouvait qu'il fallait ajouter aux coefficients *six* autres paramètres ou constantes, réductibles à *trois*, à *deux* et à *un* dans les mêmes cas particuliers.

Mais M. Wertheim crut devoir (§ 50) interpréter les faits autrement que ne l'avait indiqué M. Regnault (!) ; et, en partant du ré-

(!) Au moment où s'imprimait (1860-1864) la première partie de la discussion qui précède, nous ne connaissions pas encore la fin prématurée (19 janvier 1864) de cet estimable physicien, qui eût pu longtemps encore enrichir la science des résultats de ses laborieuses et consciencieuses recherches expérimentales, et sur les travaux duquel notre confrère à la Société philomatique, M. Verdet, a publié une intéressante notice insérée au journal *l'Institut* (nos 4432, 4433, 4434) et au Bulletin de cette société en date des 42, 49 et 26 juin 1864. L'appréciation qui y est faite du résultat de ses recherches ne peut, au reste, modifier en rien notre avis sur le point litigieux que nous avons traité.

Au reste Wertheim, dans son dernier écrit (*Comptes rendus*, 17 décembre 1860, t. LI, p. 974 et 974), reconnaissait que le rapport des coefficients  $k$  et  $K$  des formules pourrait n'avoir pas, pour tous les solides, la valeur = 4 qu'il lui avait assignée d'après ses expériences de 1848.

sultat d'un essai, par M. Cauchy, de l'établissement de formules de l'élasticité des corps envisagés comme des masses continues, au moyen d'une certaine hypothèse (§ 51) proposée en 1822 et essentiellement modifiée en 1828 sans en faire cesser l'arbitraire, M. Wertheim avança que l'analyse ne pouvait fournir, pour le cas d'isotropie, que des formules à deux coefficients distincts  $k$  et  $K$ , dont le rapport mutuel ne serait déterminable qu'expérimentalement; opinion à laquelle a pu prêter la similitude des notations dont M. Cauchy a fait usage dans deux cas essentiellement différents (§ 51, p.654-655), où il y a et où il n'y a pas de pressions antérieures aux déformations. En conséquence, M. Wertheim, croyant, sur de légers indices, à la parfaite isotropie des matières employées dans ses expériences, a proposé (§ 52) des formules nouvelles (419), où l'on a  $\frac{k}{K} = 1$  au lieu de 2 comme on l'admettait, et comme le donne la théorie fondée sur la considération des actions moléculaires à distance. Les formules de M. Wertheim n'ont pas été adoptées, car on n'a pas trouvé qu'il y eût lieu de prendre, sans raison théorique, un nombre rond et constant tel que 1 pour le rapport regardé comme inconnu de  $k$  à  $K$ ; mais il est résulté de leur proposition que beaucoup de physiciens et même de géomètres ont pensé (§ 53) que la grandeur de ce rapport  $\frac{k}{K}$  ne pouvait pas être fournie par la théorie et qu'il variait, pour les diverses substances de contexture mécanique isotrope, avec leur nature chimique, bien que les actions chimiques n'entrent point en jeu dans les phénomènes de l'élasticité.

Cette opinion semble, au premier abord, devoir être une conséquence de la manière dont Poisson (§ 54) a proposé incidemment d'établir les formules de composantes de pression relatives au cas général d'une distribution quelconque de l'élasticité autour de chaque point; car il fonde sa démonstration de la *linéarité* de ces formules sur ce qu'on peut négliger les carrés et les puissances supérieures des dérivées des petits déplacements devant leurs premières puissances, en sorte que, sans invoquer en apparence le principe des actions fonctions continues des distances moléculaires, il obtient des expressions à 36 coefficients paraissant indépendants, qui resteraient au nombre de 2 sans aucun rapport



mutuel nécessaire lorsqu'on introduit analytiquement la condition d'isotropie.

Mais (§ 55), ce raisonnement de Poisson suppose tacitement admis par ses lecteurs ce qu'il invoque précédemment dans tout le reste de son mémoire, à savoir *la loi des actions fonctions continues des distances moléculaires*; car c'est seulement en se basant sur cette loi que les pressions, résultantes des actions entre molécules, peuvent être regardées comme dépendant nécessairement des petits déplacements relatifs ou des dérivées de leurs déplacements absolus, et, surtout, *qu'on peut regarder leurs développements suivant les puissances ascendantes de ces derniers comme commençant certainement par les puissances 1*. Or, cette loi des actions moléculaires étant admise, on démontre, ou à la manière de M. Cauchy (note du § 23), ou même par le raisonnement très-élémentaire (§ 21) prouvant l'égalité nécessaire des coefficients de  $\delta_y$ ,  $g_y$ , dans  $p_{xx}$  à ceux de  $g_{xy}$ ,  $g_{zx}$  dans  $p_{xy}$  <sup>(1)</sup>, que les 36 coefficients se réduisent à 15 dans les corps d'une texture quelconque, et, par suite, que les deux coefficients  $k$  et  $K$  des corps dont la texture est isotrope se réduisent à un seul à cause de l'égalité  $k = 2K$  qui se déduit mathématiquement de cette loi. Si l'on se refuse à cette conséquence, il faut rejeter jusqu'à la forme des expressions des composantes de la force élastique ou pression, et laisser dans le domaine de l'empirisme pur ce qui regarde l'élasticité des solides.

Nous avons vu aussi (§§ 57, 58, 59) que les expériences ne prouvaient rien contre les formules d'isotropie avec  $k = 2K$ . Elles expliquent aussi bien que les formules avec  $k = K$ , de M. Wertheim, les faits observés par M. Regnault, dans les limites d'exactitude sur lesquelles la nature des matières employées permet de compter d'après cet illustre physicien. On ne peut rien inférer des expériences sur le caoutchouc (§ 59), car celles de M. Clapeyron don-

---

(1) Un raisonnement de ce genre avait déjà été fait par M. Macquorn Rankine au § III théorème IV de son mémoire *Laws of Elasticity of solid Bodies*, lu le 4<sup>er</sup> avril 1850 (Cambridge and Dublin mathematical Journal, vol. V) pour prouver que dans l'hypothèse des actions entre points matériels qu'il appelle le système de Boscovich, les deux coefficients d'élasticité latérale  $a_{xy}$  et  $a_{yx}$  et le coefficient de rigidité  $a_{xy}$  sont nécessairement égaux entre eux.

nent un rapport  $\frac{k}{K}$  onze cents fois moindre que celui qui est conclu par M. Wertheim de celles qui lui sont propres, et il y a lieu de penser que cette sorte de matière, provenant plutôt d'une coagulation que d'une solidification d'une substance fluide, et qui affecte tant d'états divers selon qu'elle a été plus ou moins malaxée, frottée ou réchauffée, n'est, dans son état ordinaire, comme les gelées, etc., qu'un réseau ou une éponge dont les cellules peuvent contenir un liquide se comportant comme tel dans les déformations et les compressions; et les anomalies qui lui sont propres peuvent d'ailleurs s'expliquer encore (§ 73) en remarquant que les modifications de ce genre qu'on lui fait subir, sont toujours, bien que réputées petites, beaucoup plus fortes que celles auxquelles on soumet les solides proprement dits, et qui peuvent seules être représentées par les formules linéaires; formule dont une conséquence, au reste, il ne faut pas l'oublier, est l'égalité des forces opposées capables de produire deux effets contraires et égaux, ce qui n'aurait vraisemblablement pas lieu pour ces sortes de substances et pour la grandeur des modifications subies.

Et, quant aux expériences de M. Wertheim soit (§ 60) sur l'augmentation de capacité répondant à l'augmentation de longueur des *cylindres creux*, soit (§ 63) sur les vibrations tournantes des tiges rondes (qui semblent donner  $\frac{E}{G} = 2,67$ , tandis que les tiges carrées ou rectangulaires donnent 2,5 au plus), leurs résultats, dus peut-être à certaines circonstances de l'opération (§ 60) peuvent s'expliquer autrement, d'une foule de manières (§ 61 et § 93 ci-après), par un léger défaut d'isotropie, qui doit avoir une influence bien plus marquée sur les tiges creuses que sur les tiges pleines, et qui est rendu extrêmement probable par un grand nombre d'autres faits observés, tels que ceux qui avaient déterminé Savart à n'opérer que sur des tiges *de plâtre* en rejetant les métaux et le verre, dans ses expériences les plus délicates (1).

---

(1) M. Kirchhoff (Mémoire sur le rapport de l'allongement à la contraction transversale dans les barreaux d'acier trempé; Annales de Poggendorff, novembre 1859, t. CVIII, p. 369, ou Annales de ch. et de ph., août 1860, t. LIX, p. 498), en mesurant par un moyen ingénieux la torsion et la flexion, prises si-

On a aussi mentionné et développé de deux manières (§§ 64, 66) le raisonnement par lequel M. Cauchy, en 1851, dans un rapport approuvé de l'usage fait par M. Wertheim de certaines de ses formules de 1828, montre que les coefficients affectant les dérivées des déplacements moléculaires, qui ne sont que les valeurs moyennes des déplacements des atomes ou points matériels composant chaque *molécule*, peuvent bien avoir des grandeurs différentes de celles qu'on trouve quand on dresse les formules en attribuant les mêmes déplacements à tous les atomes d'une même molécule, comme il le faisait implicitement dans ses principales recherches de 1828 ; d'où il suivrait que ces 36 coefficients peuvent n'avoir pas toujours entre eux les 21 égalités trouvées en 1828 et les réduisant à 15 distincts.

Mais on a vu (§§ 64, 65), et M. Cauchy le dit lui-même, que ces différences simplement *possibles* (et, nous le croyons, toujours insensibles si elles existent) (§ 67) dans les grandeurs relatives des coefficients des formules de pressions, ne regardent que certains solides à *crystallisation régulière*, ou à structure périodique (§§ 64 à 68) : elles viennent des concordances de périodicité qui peuvent donner une valeur finie à la moyenne des produits de quantités dont chacune a zéro pour moyenne particulière. Ces différences de grandeur des coefficients n'ont donc pas lieu pour les corps à *crystallisation confuse*, comme sont tous les matériaux de construction, *et comme sont aussi, nécessairement, tous les corps isotropes*, ce à quoi paraît n'avoir pas pensé l'éminent analyste dans la conclusion du raisonnement qu'il a présenté en quelques lignes.

multanément par des barreaux cylindriques horizontaux de trois millimètres environ de diamètre sur deux fois quinze centimètres de longueur fixés à leur milieu, trouve moyennement  $\frac{E}{G} = 2(1 + 0,294) = 2,588$  pour le rapport des

deux coefficients d'allongement  $E$  et de torsion ou glissement  $G$ . La différence entre ce nombre et 2,5 que donnent les formules à un coefficient est assez petite pour qu'on puisse l'attribuer à un défaut d'isotropie et d'homogénéité des barreaux. M. Wertheim dit à ce sujet (Comptes rendus, 47 décembre 1860, t. LI, p. 973) : « C'est « bien gratuitement qu'on doterait d'isotropie un corps trempé : l'action que le « verre trempé exerce sur la lumière polarisée le prouve surabondamment, et si « l'on avait à rechercher le moins homogène parmi les corps non cristallisés, c'est « sur une substance trempée que devrait tomber le choix. »

En Angleterre, c'est à l'occasion (§§ 69, 72) de recherches sur la propagation des ondes lumineuses qu'a pris naissance l'opinion ici discutée et combattue. Green admet bien avec Cauchy que les lois de l'équilibre et du mouvement d'un milieu élastique doivent être déduites de la considération d'actions intérieures variables avec les situations relatives ou les distances mutuelles des particules qui les composent; et il reconnaît que les coefficients des formules se réduisent incontestablement aux 15 de Cauchy si l'on regarde ces particules comme des points dont les actions sont dirigées *suivant leurs lignes de jonction*. Mais comme il désire sinon annuler, ce qu'il reconnaît impossible, au moins rendre incomparablement plus petite que ne fait l'analyse Cauchy, la proportion de lumière engendrée par le *troisième rayon* quand une réfraction le modifie, et obtenir pour les ondes se propageant dans les cristaux cette *exacte transversalité* des vibrations qu'il croit, ainsi que Fresnel, conciliable avec la biréfringence, l'illustre physicien anglais rejette comme « trop restrictive » la supposition de Cauchy relative aux *directions* des actions (comme si les actions des particules, supposées étendues, pouvaient se composer d'autre chose que des actions de leurs points). De là l'hypothèse, plus générale, « que le travail virtuel des actions intérieures est une différentielle exacte d'une certaine fonction »; à laquelle il est obligé de joindre immédiatement une autre hypothèse, consistant à regarder cette *fonction potentielle* comme somme de deux fonctions homogènes l'une du premier l'autre du second degré des six quantités que nous avons appelées dilatations et glissements. Avec les 21 coefficients fournis par les termes du second degré, l'exacte transversalité devient possible, en apparence, moyennant que l'on astreigne à 14 équations de condition les grandeurs numériques de ces coefficients.

Mais, tout en nous empressant de reproduire le raisonnement, à nos yeux péremptoire (§ 70) par lequel ce savant et ceux qui ont développé son idée réduisent à 21 au plus les 36 coefficients des formules des composantes  $p_{xx}, \dots p_{xy}$ , qu'ils ont reconnues être les six dérivées partielles d'une même fonction par rapport aux six quantités  $\delta_x, \dots g_{xy}$ , nous n'avons rien trouvé dans l'ingénieuse analyse de Green qui dispense d'invoquer la loi des actions moléculaires, et de reconnaître une réduction plus grande encore du

nombre des coefficients constants qui y entrent. D'abord (§§ 69, 71) les deux hypothèses dont il parle sont fort arbitraires, et ne peuvent être justifiées qu'à l'aide de cette loi qui est précisément ce qu'il veut éluder. Ensuite (§ 72) Cauchy a reconnu que l'onde courbe du 4<sup>e</sup> degré qui résume en quelque sorte la partie la plus fondamentale et la mieux confirmée des découvertes de Fresnel est parfaitement compatible avec l'obliquité des vibrations sur les plans des ondes planes (ou sur les plans tangents à cette onde courbe), moyennant qu'il y ait, entre les coefficients, certaines relations moins nombreuses et moins restrictives que celles de Green, et qui doivent s'observer, ou exactement ou à très-peu près, à l'état où se trouve l'éther dans l'intérieur des corps transparents (comme nous le ferons voir à l'appendice complémentaire); enfin qu'il suffit que cette obliquité, reconnue possible par Green lui-même, soit peu considérable pour réduire à rien les difficultés élevées au sujet du troisième rayon, et des quantités de lumière réfléchies et transmises, comparées à la quantité incidente. Quant aux 14 conditions auxquelles Green assujettit les 21 coefficients  $a_{xx\ xx}, \dots, a_{yy\ yy}$  dans la vue que toute obliquité disparaisse, six d'entre elles expriment la nullité des coefficients tels que  $a_{xx\ yy}$  qui sont toujours nuls dans les milieux isotropes puisqu'une dilatation  $\partial_x$  n'y produit jamais qu'une composante normale  $p_{xx}$  de pression sur une face perpendiculaire à sa direction  $x$ ; trois autres, établies entre six coefficients qui sont également nuls quand il y a isotropie, expriment la nullité de leurs sommes deux à deux telle que  $a_{xx\ yy} + 2a_{xy\ xy}$ ; enfin les cinq autres conditions expriment non-seulement les relations telles que  $a_{xx\ xx} = 2a_{yy\ yy} + a_{zz\ zz}$  qui ont aussi lieu pour l'isotropie, mais même, en y appliquant les formules de changements d'axes, l'égalité en tous sens des élasticités directes  $a_{xx\ xx}$ , et par conséquent l'égalité comme la constante normalité des pressions produites par d'égales dilatations  $\partial_x$  dans toutes les directions  $x$  possibles.

La contexture singulière que constituent ces quatorze conditions n'est dans le fond, que l'isotropie. Une pareille égalité ne saurait exister, en effet, dans un cristal de forme polyédrique non régulière, ni se concilier avec la double réfraction d'après les expériences d'inégale compression qui rendent le verre biréfringent, tandis qu'elles devraient le rendre opaque si  $a_{xx\ xx}$  égal en tous sens était une condition nécessaire pour la transparence; car de quelque

manière que s'exerce, sur les molécules de l'éther, l'action des molécules tant du même fluide que des corps solides qui en sont imprégnés, il est impossible que l'inégal rapprochement de celles-ci en divers sens rende inégaux les coefficients d'élasticité tangentielle  $a_{yz\ yz}$ ,  $a_{zx\ zx}$ ,  $a_{xy\ xy}$  ou ceux d'élasticité latérale  $a_{yy\ zx}$ ,  $a_{zz\ xy}$ ,  $a_{zz\ yy}$  et laisse égaux les coefficients d'élasticité directe  $a_{xx\ xx}$ ,  $a_{yy\ yy}$ ,  $a_{zz\ zz}$  (voyez l'appendice complémentaire).

Nous concluons que l'exacte transversalité des vibrations est incompatible avec la biréfringence, et que les considérations tirées des phénomènes lumineux ne commandent nullement de porter à vingt-un le nombre des coefficients  $a$  des formules les plus générales de l'élasticité.

En examinant aussi les raisons données dans un beau travail d'un autre éminent professeur de Cambridge, nous n'avons pas trouvé (§ 71) que le fait cité de l'isochronisme des petites vibrations des corps élastiques suffit pour permettre de poser à priori des formules linéaires pour les pressions, en se dispensant d'invoquer la loi des actions moléculaires à distance, dont ce fait général offre une des meilleures preuves. Sans doute, et nous l'avons reconnu, le rapport A : B de la résistance aux *diminutions du volume* et de la résistance aux *changements de la forme*, rapport que les formules d'isotropie à un seul coefficient font = 5, a une valeur comme infinie pour les liquides; mais, aussi, ces derniers changements, ou les glissements relatifs des parties, ne sont jamais considérés, dans les liquides, qu'autant qu'ils font franchir une ou plusieurs fois des limites de stabilité d'arrangements moléculaires et qu'ils conduisent à des arrangements nouveaux par des sortes de chutes pendant lesquelles se développe un travail moteur compensant le travail résistant antérieur, sauf la petite partie qui vient des *inerties* mises en jeu comme nous avons dit. Et s'il est vrai que les corps *plastiques* ou malléables offrent une manière de se comporter intermédiaire entre celle des liquides et celle des corps roides ou vitreux, ce n'est de même que pour des changements de forme conduisant à des arrangements nouveaux après une suite de *sauts* moléculaires, comme dit M. Stokes. Or les formules de l'élasticité des solides n'ont jamais été données comme allant jusqu'à s'appliquer à de pareils changements; elles ne conviennent même qu'à des déplacements qui restent petits par rapport à l'étendue que

comprennent entre elles les limites de stabilité de chacun des arrangements. Dès qu'on approche seulement de *cette tendance à arrangement nouveau* que signale très-bien M. Stokes et dans laquelle il reconnaît une cause suffisante de l'infériorité relative du coefficient B de résistance à la *déformation* ou au glissement, les dérivées secondes des forces moléculaires cessent d'être négligeables, et les formules ne peuvent plus représenter les pressions, même en multipliant le plus possible le nombre de leurs coefficients, si on leur conserve la forme linéaire.

Sans aller même jusqu'à la tendance en question, il suffit que les déplacements cessent d'être très-petits pour que les dérivées du second ordre influent sensiblement, en augmentant beaucoup, par exemple, la résistance de certaines substances à la compression cubique, et en diminuant considérablement au contraire leur résistance à la dilatation ; tandis que les formules linéaires, quel que soit le nombre des coefficients indépendants qu'on y mette, font toujours parfaitement égales ces deux résistances opposées. Cette raison doit contribuer pour beaucoup aux résultats anormaux, que nous avons d'ailleurs autrement expliqués tout à l'heure, des diverses expériences sur le caoutchouc.

Enfin nous avons examiné les raisons tirées d'une *action élastique subséquente* (nachwirkung) observée surtout dans les fils de soie et dans d'autres matières animales, pour changer le rapport = 2 des coefficients  $k$  et  $K$  dans les calculs de l'équilibre mais non dans les calculs du mouvement vibratoire ; et, en admettant même que ce prolongement d'action, jugé pouvoir aller jusqu'à un quart de seconde dans les métaux, fût réel et bien dû à des rotations moléculaires crues plus lentes que les translations, nous n'avons pas trouvé que pour les corps à cristallisation confuse où les molécules composées affectent toutes sortes d'orientations, il pût y avoir, dans ces petites rotations, dont les effets doivent se compenser, un motif d'évaluer autrement les développements d'action entre les molécules, ni de changer les formules basées sur cette évaluation.

Au reste l'adoption des formules à deux coefficients pour l'isotropie, et à plus de quinze pour une contexture quelconque, n'est point unanime à l'étranger non plus qu'en France, comme on a pu voir par nos citations.

§ 75. *Conclusion de cet appendice.* — Si donc l'expérience vient à montrer que la proportionnalité des effets aux efforts (*ut tensio sic vis*), trouvée par Hooke pour les ressorts d'acier, s'observe encore pour des corps tenant à la fois des solides et des liquides, comme les corps coagulés, ou bien pour des réseaux cellulaires tels que le liège, ou pour des corps malléables dont les déformations approchent de celles où ils offrent une partie persistante très-sensible, tels que l'étain, etc., ou bien que cette loi continue de s'observer pour des déplacements relatifs considérables comme ceux qu'on peut imprimer au caoutchouc vulcanisé, etc., et, ce qui est tout aussi essentiel mais bien peu probable, si l'on reconnaît que les corps dont nous parlons offrent réellement *la même résistance à une augmentation du volume qu'à une diminution égale*, ainsi que le veulent toutes les formules linéaires, enfin si l'on juge qu'il est de quelque utilité (malgré de fortes raisons de le mettre en doute) de poser, pour ces sortes de corps et pour ces sortes de cas, des formules de composantes de pression en fonction des dilatations et glissements, nous accordons volontiers qu'on y mette *deux coefficients* lorsque la texture est isotrope et jusqu'à *vingt et un* si elle ne l'est pas. Mais nous soutenons que de pareilles formules, si jamais on les emploie, ne doivent être considérées que comme *purement empiriques*, ou représentatives de faits qu'une théorie saine prouve n'être point généraux et qui ne peuvent s'observer que dans certaines limites avec une approximation plus ou moins grossière, si jamais ils s'observent, ce qui est bien douteux vu la dernière condition (celle de l'égalité de résistance aux augmentations et aux diminutions de volume de l'ordre de grandeur des dilatations et glissements sensibles qu'on veut faire entrer dans les formules).

Et, encore, il ne faut pas se dissimuler que faire une pareille concession c'est accorder que les rapports mutuels des coefficients des formules linéaires sont autres pour les déplacements simplement *petits* qu'on veut y mettre que pour des déplacements *encore plus petits*, puisque, s'ils étaient infiniment petits, les coefficients devraient avoir entre eux les rapports fournis par les formules déduites du calcul des actions moléculaires. Ces coefficients ne seraient donc plus constants, ils changeraient avec les grandeurs de ce qu'ils affectent. Or ce serait la condamnation de la forme linéaire donnée aux expressions. On ne pourrait espérer représenter



suffisamment les faits qu'en renonçant à cette forme, comme a fait M. Eaton Hogdkinson qui a proposé, pour les forces capables de donner aux barres de fer ou de fonte des allongements déterminés, des expressions empiriques *du second degré*. Il y aura toujours lieu de se délier de formules linéaires en contradiction avec la loi des actions entre points matériels, dépendant de leurs distances et dirigées suivant leurs lignes de jonction, même quand elles paraîtraient satisfaire très-approximativement à tout un ordre de faits observés dans des limites plus ou moins étendues.

On peut bien cependant, *pour les recherches analytiques*, quand ce ne serait qu'afin de rendre les conclusions générales indépendantes de points controversés, conserver *deux* coefficients dans les formules du cas d'isotropie, comme a fait M. Lamé et comme nous avons fait nous-même et ferons volontiers encore, et, d'après le même principe, *vingt et un* coefficients (mais pas plus, outre les six composantes de pression antérieure  $p$  si elles ne sont pas nulles) dans le cas général de distribution quelconque de la contexture au tour de chaque point. On sait que l'on se sert même quelquefois avec avantage, en analyse pure, de cette désignation, par deux lettres différentes, de deux quantités qu'on sait être égales, et qui entrent à un double titre dans des formules, pour mieux faire comprendre et ressortir la raison et la loi des résultats obtenus. Et puis on reconnaît que le plus souvent les calculs, les intégrations même, ont autant de simplicité, et que les mêmes résultats généraux sont aussi facilement obtenus avec 21 coefficients qu'avec 15; et la conservation de 21 ne peut, on le conçoit encore, que faire avancer davantage la branche d'analyse à laquelle est liée la théorie de l'élasticité, et qui pourra avoir par la suite, des applications à d'autres sujets pour lesquels les six égalités complémentaires (150), entre les coefficients, n'auraient pas lieu.

Nous effacerons donc à l'avenir, des formules théoriques servant de base à ces recherches générales, une partie seulement des accents dont nous avons affecté, dans les formules des §§ 14 à 26, appendice III, les lettres représentant les coefficients qui doivent être égaux selon nous, ce qui donnera :

Pour le cas où le plan  $yz$  est un plan de symétrie de contexture

$$(174) \left\{ \begin{array}{l} p_{xx} = a\partial_x + f\partial_y + e\partial_z + hg_{yz}, \\ p_{yy} = f\partial_x + b\partial_y + d\partial_z + kg_{yz}, \\ p_{zz} = e\partial_x + d\partial_y + c\partial_z + lg_{yz}, \\ p_{yz} = h\partial_x + k\partial_y + l\partial_z + dg_{yz}, \\ p_{zx} = eg_{zx} + h'g_{xy}, \\ p_{xy} = h'g_{zx} + fg_{xy}, \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} \text{à 13 coefficients au lieu de} \\ \text{19 (réductibles à 9 en ôtant} \\ \text{les accents qui restent).} \end{array} \right.$$

Pour le cas où il y a trois plans de symétrie de contexture

$$(175) \left\{ \begin{array}{l} p_{xx} = a\partial_x + f\partial_y + e\partial_z \quad p_{yz} = dg_{yz} \\ p_{yy} = f\partial_x + b\partial_y + d\partial_z \quad \text{et } p_{zx} = eg_{zx} \\ p_{zz} = e\partial_x + d\partial_y + c\partial_z \quad p_{xy} = fg_{xy} \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \text{à 9 coefficients au lieu} \\ \text{de 12 (réductibles à} \\ \text{6 en ôtant les accents).} \end{array} \right.$$

Pour le cas où il y a un axe de symétrie parallèle aux  $x$

$$(176) \left\{ \begin{array}{l} p_{xx} = a\partial_x + e\partial_y + e\partial_z \quad p_{yz} = dg_{yz} \\ p_{yy} = e\partial_x + (2d + d')\partial_y + d\partial_z \quad \text{et } p_{zx} = eg_{zx} \\ p_{zz} = e\partial_x + d\partial_y + (2d + d')\partial_z \quad p_{xy} = eg_{xy} \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \text{à 5 coefficients} \\ \text{au lieu de 6} \\ \text{(réductibles à} \\ \text{3 en ôtant les} \\ \text{accents).} \end{array} \right.$$

Enfin, pour l'isotropie :

Les formules (35) à 2 coefficients  $e, e'$  (réductibles à un seul en ôtant les accents).

Observons aussi qu'on peut se dispenser de prendre un parti lorsqu'il n'y a à calculer qu'une flexion *simple* (en négligeant les effets de glissement qui l'accompagnent ordinairement), ou bien une torsion simple; car le calcul se fait, pour la flexion, au moyen du module  $E$ , fonction des coefficients  $a$  des formules, mais donné directement par des expériences; et, pour la torsion, par d'autres coefficients déterminables aussi expérimentalement, savoir  $G$  quand il y a un axe de symétrie parallèle aux arêtes;  $G'$  et  $G''$  quand il y a trois plans de symétrie (§ 39 de la note du n° 156); enfin  $G'$ ,  $G''$  et  $H$  (vu l'égalité, prouvée au § 70 des appendices, de  $\Pi''$  et  $H''$  du § 35, form. 65, 75 etc., p. 605, 609) quand il n'y a qu'un plan de symétrie, perpendiculaire aux arêtes.

Mais dans les autres cas où l'on passe à la pratique et où il faut, pour en venir à des résultats particuliers, attribuer forcément des valeurs déterminées aux coefficients; c'est-à-dire dans les cas où il y

a lieu de calculer des effets simultanés de flexion, torsion, extension, glissement, ou d'évaluer des contractions latérales, des compressions cubiques, etc., et où il s'agit bien de corps réellement solides et élastiques, excessivement peu comprimés ou déformés, comme le sont les matériaux dans les limites des charges auxquelles on les soumet d'une manière permanente dans les constructions, et en supposant même que, jusqu'à *écrouissage* dans le sens des déformations il y ait quelques parties persistantes très-petites, il faut réduire les coefficients au moindre nombre, ou effacer tous les accents des formules qu'on vient d'écrire. Aucune considération, même de prudente abstention, ou de conformité plus grande aux résultats de quelques expériences, ne doit déterminer à faire numériquement, dans le cas d'isotropie par exemple,  $e'$  différent de  $e$ , ou  $k$  différent de  $2K$ . Les formules ne représenteraient absolument rien, et, loin d'offrir de la sécurité, elles n'offriraient qu'un expédient fâcheux et trompeur, propre à ajourner indéfiniment la découverte de la vraie explication d'un fait, ou bien elles donneraient le change en empêchant de recourir à l'emploi des vraies formules relatives au cas qui serait à traiter; car lorsque les résultats des expériences diffèrent trop sensiblement de ceux, par exemple, des formules d'isotropie à un seul coefficient  $e = e'$  ou  $\frac{1}{2} k = K$ , ou lorsque le corps est fibreux comme les bois, les fers laminés ou étirés, etc., c'est des formules de non-isotropie (176), (175), (174) sans accents à 3, 6, 9 coefficients, ou autres pouvant en avoir jusqu'à 15, qu'il faut se servir, ainsi qu'il a été fait déjà aux notes des n<sup>os</sup> 154 et 156 (§ 62) lorsque nous avons donné et appliqué à divers exemples numériques des formules relatives à des cas complexes.

Ces coefficients des formules d'*hétérotropie* ou d'élasticité inégale en divers sens devront, au reste, être pris dans des rapports mutuels tels que, pour les diverses directions autour d'un même point, la suite des valeurs des modules d'élasticité  $E$  et même des valeurs que prendraient les coefficients  $\mu$  eux-mêmes avec de nouveaux axes  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$ , n'offre pas une loi de variation compliquée et improbable, et qu'ils n'aient, ainsi, qu'un petit nombre de directions de maximum et de minimum; que, par exemple, lorsqu'il y a trois plans de symétrie de contexture, il n'y ait de maxima et minima

soit de E soit de  $a_x'x'x'$  que dans les trois directions principales  $x, y, z$ , rectangulaires entre elles, déterminées par les intersections de ces plans, sans qu'il s'en trouve d'autres intermédiairement. Cela exige, comme on verra à l'Appendice complémentaire, § 88, en ce qui regarde la variation de  $a_x'x'x'$  dans les plans  $yx, zx, xy$

que  $3d$  reste compris entre  $b$  et  $c$ ,

$3e$  entre  $c$  et  $a$ ,

$3f$  entre  $a$  et  $b$ .

et, pour qu'il n'y ait pas non plus de maximum ou de minimum de  $a_x'x'x'$  dans l'intérieur des huit angles trièdres, que les trois quantités :

$$(b-3f)(c-3e) + 9(f-d)(d-e),$$

$$(c-3d)(a-3f) + 9(d-e)(e-f),$$

$$(a-3e)(b-3d) + 9(e-f)(f-d),$$

n'aient jamais trois valeurs de même signe; et que cependant, pour que les variations soient régulières, on ait

$$d < e < f \text{ si } a > b > c;$$

enfin qu'on ait des relations analogues en ce qui regarde les variations de E en divers sens.

Toutes ces conditions sont remplies lorsque l'on a

$$(177) \quad 3d = \sqrt{bc}, \quad 3e = \sqrt{ca}, \quad 3f = \sqrt{ab};$$

et nous verrons, au même Appendice, que pour les corps *amorphes* ou à cristallisation confuse, comme sont les matériaux de construction, surtout lorsqu'ils offrent, dans les divers sens, ainsi que les métaux, les pierres etc. des élasticités ne variant pas dans un rapport de plus de  $1\frac{1}{2}$  ou  $2$  à  $1$ , les trois conditions (177) que nous venons d'écrire et que nous appellerons conditions de *distribution ellipsoïdale* des élasticités, doivent, pour d'autres raisons encore, être remplies à très-peu près; ce qui réduit à *trois* les coefficients indépendants du cas des formules (175) et à *deux* ceux des formules (176).

C'est avec les formules ainsi réduites à trois coefficients indépen-

dants quand il y a trois plans de symétrie de contexture et à deux quand il y a un axe de symétrie, qu'on essayera généralement de représenter les résultats des expériences, et qu'il conviendra de calculer les résistances des corps non isotropes.

Et si l'on n'a aucune donnée sur les différences des élasticités ou des résistances, en divers sens, d'un corps dont on s'occupe, on risquera toujours moins de se tromper en lui appliquant les formules d'isotropie à un seul coefficient, ou avec  $e' = e$ ,  $\frac{1}{2} k = K$ , ainsi que le conseille M. Clapeyron pour le fer (fin du § 59), qu'avec toute autre supposition et toute autre formule.

---

## APPENDICE COMPLÉMENTAIRE.

---

**Expériences confirmatrices. — Considérations sur des points précédemment traités. — Ellipsoïdes des pressions et des dilatations. — Usage du potentiel des actions moléculaires. — Distribution des élasticités en divers sens. — Leur distribution ellipsoïdale dans les corps amorphes. — Travaux de M. Clebsch. — Démonstration nouvelle, par M. Kirchhoff, des formules de la torsion et de la flexion.**

---

§ 77. *Objet de cet appendice.* — Nous nous proposons, surtout, d'y rendre compte des travaux récents et remarquables d'illustres géomètres allemands et anglais déjà cités à la dernière partie du 5<sup>e</sup> appendice.

Mais nous y rapporterons d'abord (§ 78) quelques faits nouvellement observés en France, et tous confirmatifs de ce qui précède; quelques développements (79, 80) sur des points susceptibles d'être éclaircis ou traités un peu autrement que ci-dessus; puis (81, 82), deux théorèmes importants et depuis longtemps connus, mais dont nous nous étions passés jusqu'au 5<sup>e</sup> appendice, sur la distribution des pressions et sur celle des dilatations en divers sens autour d'un même point, ainsi que sur leurs trois sens dits *principaux*. Nous nous livrerons ensuite (§§ 83, 84, 85), à une considération, plus particulière qu'au 5<sup>e</sup> appendice, de ce *potentiel* des actions moléculaires, mis en usage par Navier dès 1821, dont les différences donnent leur *travail* intérieur, et des moyens qu'offre son expression d'établir d'un seul coup les diverses équations d'équilibre etc., en se servant des méthodes de la Mécanique analytique de Lagrange, qui, comme l'ont remarqué Green et M. Kirchhoff, conduisent comme par la main à poser les conditions justement nécessaires et suffisantes dans chaque question. Nous y démontrerons (§ 86) une

formule symbolique, invoquée au § 72 ci-dessus, qui fournit les valeurs des divers coefficients des formules de l'élasticité pour des axes coordonnés nouveaux en fonction de ces mêmes coefficients pour des axes pris précédemment.

Nous y examinerons (§§ 87 à 93) la distribution des élasticités autour de chaque point en divers sens, et nous concluons de cet examen, ainsi que du calcul des effets des compressions permanentes et inégales opérées dans un corps primitivement isotrope, quel est (comme nous avons déjà dit au § 76) le genre de distribution le plus probable dans les corps solides amorphes ou à cristallisation confuse comme ceux qu'on emploie dans les constructions.

Enfin, après une courte mention (§ 94) des beaux travaux de M. Clebsch, qui présente et démontre d'une manière très-analytique et très-générale, en y ajoutant de précieuses observations, nos formules sur la torsion, la flexion en deux sens, etc., de prismes de dimensions finies, sollicités d'une manière particulière sur leurs bases, nous reproduirons succinctement (§§ 95, 96) une analyse bien remarquable de M. Kirchhoff, basée sur de tout autres considérations, aussi délicates que fécondes, confirmant pleinement, en les généralisant, nos mêmes formules des notes des n<sup>os</sup> 154 et 156, ainsi que du 2<sup>e</sup> appendice, et qui, en supposant *infinitement petites* les dimensions transversales des solides considérés, justifie l'emploi approximatif (§ 6 de la note du n<sup>o</sup> 83) de ces formules pour des pièces prismatiques ou non prismatiques, et même courbes, tordues non uniformément et sollicitées d'une autre manière, c'est-à-dire par des forces autrement distribuées et appliquées, vers leurs extrémités, que ne l'exige (§§ 6 des notes des n<sup>os</sup> 21 et 80, et 9 de celle du n<sup>o</sup> 156) l'exactitude rigoureuse des formules quand ces dimensions transversales sont finies et dans un rapport quelconque avec la longueur.

§ 78. *Expériences récentes confirmant la loi de proportionnalité des petites extensions aux efforts qui les produisent, et de retour complet à l'état primitif après que les efforts ont cessé de s'exercer* etc. — Nous avons dit, au § 10 de la note du n<sup>o</sup> 21, p. 23, que cette loi fondamentale de la théorie de l'élasticité et de la résistance des solides avait été contestée, et que plusieurs expérimentateurs d'un haut mérite, entre autres M. Hodgkinson et M. Wertheim, avaient pensé que toute extension ou contraction d'un fil ou d'une

barre métallique ou même d'un prisme de verre, avait une partie persistante.

A cette assertion nous avons répondu (§ 10 de la note n° 21) par une observation bien simple de M. le général Poncelet, relative à la stabilité et à la permanence de la forme d'une foule d'œuvres de l'art ou de la nature qui s'affaîsseraient sur elles-mêmes comme du bitume ou de la poix, indépendamment de toute décomposition chimique de leur superficie, si les charges considérables qu'elles supportent depuis des siècles ne cessaient jamais d'y produire des compressions ou des extensions; d'où il suit, qu'en supposant même (ce qui est improbable d'après le jeu des actions moléculaires) que tout corps solide éprouve une petite déformation permanente lorsqu'il est sollicité pour la première fois dans un certain sens, il cesse nécessairement de se déformer dès que les efforts l'ont *écroui* dans ce sens.

M. le général d'artillerie Morin, de l'Institut, dans la 3<sup>e</sup> édition (1862) de ses utiles *Leçons sur la résistance des matériaux*, rapporte, ainsi qu'aux *Comptes rendus de l'Académie* <sup>(1)</sup> des expériences très-précises, faites sous sa direction, en 1861, au Conservatoire des arts et métiers, et qui ont confirmé pleinement le principe énoncé. Les unes ont été exécutées sur deux fils de cuivre de deux millimètres et demi de diamètre, et sur un fil de fer fin, ayant jusqu'à 21 mètres de longueur <sup>(2)</sup>. Les allongements *élastiques* ou non persistants ont été proportionnels aux charges, et les allongements persistants observés ont été extrêmement minimes, et comparables aux dilatations que produit une augmentation de température d'un ou deux degrés, et, d'ailleurs, rapidement décroissants à mesure que les fils, primitivement roulés en paquets, étaient mieux redressés par les expériences successives. D'où l'on peut déduire que les petits allongements permanents que les expériences de 1861 semblent donner, ne sont que l'effet de ce redressement, et que ceux qui ont été observés en 1848, par M. Hodgkinson, sur des barres de fer assemblées bout à bout au moyen de parties filetées, étaient attribuables <sup>(3)</sup> à des tassements

(1) 40 février 1862, t. 54, p. 235.

(2) *Résistance des matériaux*, n° 37 et 43, t. 4, p. 46 et 52.

(3) *Idem* n° 42, p. 11, et 72, p. 82.



de points d'appui ou d'assemblages, comme M. Morin l'avait déjà présumé, et peut-être aussi à un écrouissage qui n'était pas encore complet. De cette même série d'expériences il résulte bien, tout au moins pour les solides déjà écrouis dans le sens des efforts auxquels on les soumet ultérieurement, que la loi de proportionnalité de Hooke doit être considérée comme s'observant exactement pour tous les allongements et accourcissements très-petits, conformément aux déductions théoriques de la loi des actions moléculaires.

Les autres expériences ont été faites sur des poutres en fonte, à double T <sup>(1)</sup>; elles n'ont pas moins confirmé cette loi de proportionnalité, ainsi que celle de l'égalité des contractions et des extensions pour même effort, dans des limites étendues, dépassant celles des charges permanentes qu'on peut faire supporter aux pièces avec sécurité.

Elle a été également confirmée par les expériences <sup>(2)</sup> sur le fer forgé.

Et d'autres expériences <sup>(3)</sup> ont confirmé l'avantage des semelles égales quant à la petitesse des flexions des poutres à double T.

D'autres expériences ou observations de M. Morin ont eu pour objet la qualité des fers et ses modifications. Il a remarqué <sup>(4)</sup> de grandes différences soit dans les élasticités soit dans les cohésions de fontes de fer de la même provenance et de la même coulée; même parmi celles de deuxième fusion, différences que n'offre pas le fer forgé et qui prouveraient, ainsi que nous l'avons dit plusieurs fois, que les circonstances de la solidification n'ont pas moins d'influence que le forgeage pour rendre inégale la texture mécanique. Il rapporte un fait prouvant qu'un recuit modéré, mais prolongé, suffit pour détruire l'état fibreux ou nerveux produit par le forgeage, et finit par redonner au fer l'état cristallin à larges facettes, ce qui lui fait perdre de sa force, comme nous avons dit de l'effet des actions intermittentes répétées (§ 12 de la note ci-dessus du n° 21). Mais, d'un autre côté, les fers bien travaillés

(1) Résistance des matériaux, n° 346 à 354, t. 4, p. 398-408.

(2) *Idem* n° 356 à 361, t. 4 p. 422 à 432, et n° 422 à 434 t. 2 p. 58 à 75.

(3) *Idem* n° 425, 435, t. 2 p. 62 à 75.

(4) *Idem* n° 72 à 77, t. 4 p. 82 à 87.

peuvent supporter sans altération de leur contexture des charges bien plus considérables qu'on ne pensait.

Enfin, diverses expériences sur des essieux <sup>(1)</sup> ont prouvé, ainsi que nous avons dit (§ 8 de la note du n° 21) que des déformations permanentes, même considérables, non seulement ne font pas perdre l'élasticité, mais n'altèrent son coefficient que dans une proportion peu considérable, malgré une énerivation non douteuse <sup>(2)</sup>.

§ 79. *Observations diverses sur ce qui précède.* — 1° *Inclinaison des diverses fibres sur la fibre centrale dans la flexion inégale ou non circulaire.* Nous disions, § 5 de la note du n° 80, p. 37, que les différences qui existent dans les contractions latérales successives  $\eta \frac{v}{\rho}$  d'une même fibre quelconque en raison de la variabilité du rayon de courbure  $\rho$  d'un bout à l'autre de la pièce, n'exercent sur les inclinaisons dont nous parlons qu'une influence négligeable. Des considérations plus exactes, présentées au 2° appendice, théo-

(1) Résistance des matériaux, n° 465-467, t. 2 p. 430-433.

(2) On voit dans le même ouvrage (au n° 344, t. 4, p. 389) rapportée une formule pratique

$$Q = m \frac{\omega h}{l}$$

mise en usage par les ingénieurs anglais pour déterminer les relations entre la longueur ou portée  $l$  d'une pièce posée sur deux appuis, sa section  $\omega$  et sa hauteur  $h$  au milieu, et le poids  $Q$  qu'on peut lui faire porter aussi au milieu. Elle n'est qu'une forme de l'expression générale  $M = R_0 \frac{I}{v'}$  de la note du n° 443, car (n° 422 ci-dessus) on a  $M = Pa = \frac{1}{2} Q \cdot \frac{1}{2} l$ , et  $\frac{I}{v'} = \frac{\omega h}{6}$  quand la section est un rectangle, et généralement  $= \frac{\omega h}{n}$   $n$  étant un diviseur variable avec sa forme, et dont les n° 443 à 426, et surtout leurs notes, apprennent à calculer les diverses valeurs. D'où

$$Q = m \frac{\omega h}{l} \quad \text{si} \quad m = \frac{4R_0}{n} = 4R_0 \frac{I}{\omega h v'}$$

Cette formule suppose que le point dangereux est au milieu, qu'on peut négliger les effets du glissement, que la matière est homogène, et que la section  $\omega$  a un des deux axes principaux d'inertie dirigé verticalement. •

rème IV, p. 537, prouvent que cette influence, bien que petite, produit des quantités de l'ordre de celles dont on tient compte dans le reste du raisonnement. Mais cette légère rectification ne change rien à la conclusion.

2° *Approximation un peu plus grande de la flèche de courbure, etc., d'une pièce quand il y a un poids  $2pa$  réparti sur sa longueur, outre le poids  $2P$  suspendu au milieu.* — Au § 3 de la note du n° 90, p. 82, pour obtenir une formule qui dispense de longs tâtonnements numériques, tout en tenant compte des quantités du second ordre, nous avons admis qu'on pouvait combiner par voie de simple addition ou soustraction deux formules précédemment obtenues pour des cas où les efforts supposés simultanés se trouvaient isolés. — Nous ne prétendons pas pour cela que cette sorte de combinaison soit toujours légitime : car ce n'est que lorsqu'on s'en tient aux quantités très-petites du premier ordre que l'analyse la justifie.

3° *Un glissement équivaut à une dilatation et à une contraction simultanées moitié moindres, etc.* — La démonstration que nous en avons donnée, p. 194, au § 6 de la note du n° 152, et qui est déjà plus simple que celle que nous avons communiquée en 1857 à M. Morin (*Resist. des mat.* 2° édit., p. 447, et 3°, t. 2, p. 305) peut être rendue plus simple encore, en la rapprochant de celle que M. Poncelet a trouvée pour un cas plus composé (p. 375 ci-dessus, sous-note du § 43 de la note du n° 156). En effet,  $n_1q_1$  étant toujours la situation que le glissement

$$g = \frac{qq_1}{pq}$$

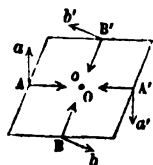
a donnée à  $nq$ , et  $ml = mq_1$  étant encore la nouvelle grandeur prise en conséquence par la diagonale  $mq$  du petit rectangle  $mnqp$ , si, de l'angle droit  $l$  du petit triangle sensiblement rectangle  $qlq_1$ , on abaisse une perpendiculaire  $ls$  sur son hypoténuse  $qq_1$ , l'on a pour la dilatation  $i$  de cette diagonale  $mq$ , en vertu de la similitude des triangles  $mpq$ ,  $qsl$  :

$$i = \frac{ql}{mq} = \frac{ls}{pq} = g \frac{ls}{qq_1},$$

Or le maximum du rapport  $\frac{ls}{qq_1}$  a lieu quand l'angle  $lqq_1 = qmp$  est demi-droit, et sa valeur est  $1/2$ . Donc la plus grande dilatation de  $mq$ , et, par suite, la plus grande contraction de  $pn$ , a lieu lorsque les diagonales sont à 45 degrés, et la proportion en est  $\frac{5}{2}$ .

4° *Les arêtes rentrantes des prismes sont, tout comme les arêtes saillantes, coupées normalement par les surfaces courbes dans lesquelles se changent leurs sections transversales.* En effet (§ 1 de la note du n° 153, 3°, p. 207) ces surfaces sont toujours normales aux deux faces latérales contigües se coupant suivant les arêtes.

5° *Généralisation et démonstration plus simple du théorème de réciprocité des composantes de pression sur deux faces.* — Nous avons démontré p. 346 (§ 39, note n° 156) et p. 546 (§ 16 du 3° appendice) que si deux petites faces d'égale superficie se croisent rectangulairement en un point d'un corps solide ou fluide en repos ou en mouvement, « la pression sur la première estimée dans un sens « perpendiculaire à la seconde est égale à la pression sur la seconde « estimée dans un sens perpendiculaire à la première. » M. Cauchy à qui l'on doit ce théorème, en a déduit analytiquement un théorème identiquement semblable pour le cas où les deux faces ne sont pas rectangulaires l'une à l'autre. On peut démontrer géométriquement et directement ce théorème général, sous une forme plus simple même que nous n'avons fait pour le cas particulier des paragraphes cités. Considérons un élément prismatique dont la base soit un losange, ayant ses faces latérales A, A', B, B' et l'axe O perpendiculaires au plan de la figure. On peut regarder comme appliquées



aux centres de ses six faces les pressions qui s'y exercent, et qui sont supposées d'abord les seules forces en jeu. L'équilibre de translation exige que les pressions sur les faces opposées deux à deux soient égales et parallèles. Quant à l'équilibre de rotation, exprimons-le autour de l'axe O, et, pour cela, décomposons les pressions qui s'exercent sur les faces latérales :

1° Suivant des parallèles à cet axe ; 2° suivant les médianes ou lignes de jonction AA', BB' des centres A et A', B et B' de ces faces ; 3° suivant les perpendi-

culaires  $Aa, A'a', Bb, B'b'$  menées à ces mêmes médianes parallèlement aux plans des bases. Les premières composantes ne donnent aucun moment puisqu'elles sont parallèles à l'axe ; les secondes n'en donnent pas non plus puisqu'elles le coupent ; et il en est de même des pressions sur les deux bases  $O$ . Restent les quatre composantes  $Aa, A'a', Bb, B'b'$  dont chacune est perpendiculaire à la face adjacente à celle où elle s'exerce. Celles  $Aa, A'a'$  sont égales et tendent à faire tourner dans le même sens, en sorte que leur moment total est double de celui de  $Aa$  ; le moment total des deux autres est double de celui de  $Bb$  ; leurs bras de levier  $OA, OB$  sont égaux. Donc, pour l'équilibre, il faut que la composante  $Aa$ , perpendiculaire à la face  $B$ , de la pression sur la face  $A$ , soit égale à la composante  $Bb$ , perpendiculaire à  $A$ , de la pression sur  $B$ , ce qu'il fallait démontrer. — Et ce théorème est encore vrai lorsque la matière de l'élément est soumise à des forces affectant toutes ses molécules, comme la pesanteur, ou comme l'inertie, ce qui comprend le cas du mouvement varié ; car ces diverses forces, dont la somme totale est très-petite du troisième ordre comme le volume de l'élément, et dont deux parties sensiblement égales tendent à faire tourner l'élément autour de  $O$  dans deux sens opposés, ne donnent, multipliées par des bras de levier sensiblement égaux et du premier ordre, qu'un moment total du cinquième ordre, négligeable devant celui des pressions, qui est du troisième. Il se trouve ainsi démontré, comme nous avons fait p. 545 à une note du § 16 du 3<sup>e</sup> appendice pour le théorème de *projection de plans de pression*, jusqu'à des quantités d'un ordre de petitesse supérieur de deux unités à celui des quantités dont il établit l'égalité.

6<sup>o</sup> Ce n'est pas seulement quand le contour des sections d'un prisme tordu est elliptique, qu'il est utile de faire le changement de coordonnées transversales indiqué au § 35 (p. 611) ; c'est aussi pour des contours de toutes autres formes, si seulement la contexture de la matière est symétrique par rapport aux plans des sections. Comme il y a égalité, ainsi que Green l'a mis hors de doute (§ 70) entre les coefficients  $h''$  et  $h'''$  (ou  $a_{xxxy}$  et  $a_{xyxx}$ ), on pourra réduire toujours les formules citées de composantes tangentielles qui peuvent être écrites (comme les deux dernières (174))

$$p_{xy} = fg_{xy} + h'g_{xz}, \quad p_{xz} = eg_{xz} + h'g_{xy},$$

à la forme monôme

$$p_{xy'} = G' g_{xy'}, \quad p_{xz'} = G'' g_{xz'}$$

en faisant faire aux nouvelles coordonnées  $y', z'$ , sur les anciennes  $y, z$ , un angle  $\epsilon = (y, y') = (z, z')$  déterminé par

$$\text{tang } 2\epsilon = \frac{2h'}{f - e},$$

$$\text{et prenant } \left\{ \begin{array}{l} G' \\ \text{et } G'' \end{array} \right\} = \frac{f + e}{2} \pm \frac{f - e}{2} \cos 2\epsilon \pm h' \sin 2\epsilon;$$

comme on voit facilement si l'on exprime  $p_{xy'}$  et  $p_{xz'}$  en  $p_{xy}$  et  $p_{xz}$  au moyen des formules (4), puis  $g_{xy}$  et  $g_{xz}$  en  $g_{xy'}$  et  $g_{xz'}$  au moyen des formules (14); ou bien encore si l'on se sert de la formule générale symbolique ci-après (225), pour avoir  $a_{xy'xz'}$  à évaluer à zéro, puis  $a_{xy'xy'}$ , et  $a_{xz'xz'}$  à évaluer à  $G'$  et à  $G''$ .

Le calcul de la torsion, ramené ainsi à la solution d'équations différentielles indéfinie et définie de même forme en  $u$  que quand il y a *trois plans de symétrie*, sera ordinairement plus simple qu'en se servant des expressions binômes de  $p_{xy}$  et  $p_{xz}$  et des équations non transformées (73) et (74) des p. 607, 608; et il se prêtera, surtout, bien mieux à l'établissement des conditions de *résistance*, ou de l'*équation de cohésion*, comme on a vu § 35 (p. 611).

Le résultat sera le même, car en mettant à la place de  $y', z', G', G''$ , dans les équations suivantes relatives aux nouveaux axes

$$G' \frac{d^2 u}{dy'^2} + G'' \frac{d^2 u}{dz'^2} = 0 \text{ partout, et } G' \left( \frac{du}{dy'} - \theta z' \right) dz' - G'' \left( \frac{du}{dz'} + \theta y' \right) dy' = 0 \text{ au contour,}$$

leurs valeurs en  $y, z, f, e$ , on retrouve les équations, aussi résolubles, mais plus composées, (73) et (74) avec  $h'$  pour  $h'' = h''$ .

§ 80. *Sur l'état dit naturel ou primitif et sur sa condition.* — Quelques auteurs l'ont défini l'état où se trouve un corps avant tout déplacement relatif de ses parties; mais c'est supposer connu l'état à partir duquel les déplacements se comptent, c'est-à-dire précisément celui qu'on veut définir. Aussi nous avons préféré dire, au commencement du § 20, p. 554, que c'est « l'état où aucune pression ne s'exerce encore sur les faces extérieures ni intérieures d'un corps, » c'est-à-dire où, à travers chacune (d'après la définition des pressions, § 46), les attractions et les répulsions moléculaires agissant d'un côté à l'autre se détruisent ou se

font équilibre comme fournissant deux résultantes égales et opposées quand on compose ces actions après les avoir transportées parallèlement à elles-mêmes sur un point.

Il reste à prouver que cet état *est toujours possible* quelles que soient les intensités des actions exercées à des distances insensibles, et que, lorsqu'on abstrait la pesanteur comme toute autre force émanant de points à des distances sensibles, il a lieu, comme nous l'avons avancé au § 22, p. 561, *lorsque seulement les pressions extérieures ou sur la surface-enveloppe sont toutes nulles*; au moins pour les corps *homogènes*, car les exemples des vessies gonflées où la pression peut être considérable à l'intérieur quoique nulle à la surface, et des larmes bataviques où il peut y avoir à l'intérieur une *tension* qui à la surface n'existe pas, nous ont montré qu'il n'en était pas toujours de même dans les corps hétérogènes.

Il s'agit, disons-nous, de justifier ici cette assertion de possibilité de l'état *naturel*, qui a servi de base à l'établissement élémentaire des formules générales (12)  $p_{xx} = a_{xxx} \partial_x + \text{etc.}$ , et, par suite, des formules particulières (29) à (35), car elles supposent nulles les pressions antérieures aux déplacements  $u, v, w$ , ou aux déformations  $\partial_x, \dots, \xi_{y,z} \dots$  affectant leurs termes.

On ne peut pas le faire au moyen de l'analyse du § 33, p. 600, en disant que si la pression  $-q$  qu'on y supposait agir uniformément sur la surface-enveloppe, est nulle, les résultats  $p_{xx} = p_{yy} = p_{zz} = -q$ ,  $p_{yz} = p_{zx} = p_{xy} = 0$  satisfaisant aux équations différentielles ainsi qu'aux conditions de compatibilité, prouvent que les pressions intérieures sont nulles aussi; car cette analyse repose sur les formules (12) des pressions en fonction des dilatations et des glissements comptés à partir de cet état dit naturel dont il faut d'abord établir la possibilité dans les corps homogènes.

Mais nous pouvons prouver comme il suit cette possibilité, en nous bornant au genre d'homogénéité que nous avons appelé *parallèle* (même § 22), où chaque élément de matière, d'élasticités généralement inégales en divers sens, est identique à tout élément de même volume et de même forme pris dans une autre partie quelconque du même corps s'il est orienté de la même manière, ou si l'un des deux peut être amené à remplacer exactement l'autre en le transportant parallèlement à lui-même.

Solent, dans l'intérieur d'un corps sans pesanteur, jouissant de cette homogénéité, des pressions quelconques ayant, parallèlement aux  $x, y, z$ , et sur des faces perpendiculaires à ces coordonnées, les six composantes  $p_{xx}, p_{yy}, p_{zz}, p_{yz}, p_{zx}, p_{xy}$ , supposées les mêmes en tous les points.

Que l'on fasse éprouver partout, à ce corps, trois dilatations  $\delta_x, \delta_y, \delta_z$ , et trois glissements  $g_{yz}, g_{zx}, g_{xy}$ . Il est évident, avant l'établissement de toute formule, que les six composantes  $p$  changeront, et que leurs grandeurs nouvelles seront fonctions de leurs grandeurs primitives et de ces six déformations, puisque celles-ci produisent dans les divers sens des changements (§ 19, form. (9)) dans les distances moléculaires dont l'augmentation ou la diminution fait varier l'intensité des actions entre molécules; et ces grandeurs pourront devenir de positives négatives ou de négatives positives, puisque les changements de distance peuvent convertir les répulsions en attractions, ou les attractions en répulsions. Vu donc que l'on dispose d'autant de déformations élémentaires  $\delta_x, \dots, g_{xy}$  qu'il y a de composantes  $p_{xx}, \dots, p_{xy}$ , on peut toujours rendre celles-là telles que celles-ci soient toutes nulles. Il en résultera, en vertu des formules de transformation (h)  $p_{x'x'} = p_{xx}c_{xx}^2 + \dots$ , etc..  $p_{x'y'} = p_{xx}c_{xx}'c_{xy}' + \dots$  que, sur tous les autres plans  $y'z', z'x', x'y'$  susceptibles d'être imaginés dans l'intérieur, les pressions  $p$  seront nulles aussi.

Mais il faut pour cela qu'aucune force à centre d'action éloigné, telle que la pesanteur, n'agisse sur les molécules, ou que les effets de pareilles forces puissent être négligés; car on peut voir que les termes des premiers membres des trois équations d'équilibre (38)

$$\frac{dp_{xx}}{dx} + \frac{dp_{yy}}{dy} + \frac{dp_{zz}}{dz} = X, \dots = Y, \dots = Z$$

ne peuvent pas être tous nuls si les seconds membres ne le sont point. Cette remarque s'applique même à la gravitation mutuelle des parties d'un même corps de grandes dimensions tel qu'une planète; l'état que nous appelons naturel ou primitif suppose abstraite cette gravitation, et conservées seulement les actions mutuelles qui s'exercent à des distances insensibles.

Sous cette condition on peut donc, pour tout corps *parallèlement homogène*, quelle que soit d'ailleurs la variabilité de sa texture dans les diverses directions, et en conservant l'homogénéité, rendre



les écartements moléculaires tels, en divers sens, que les pressions intérieures soient toutes nulles; ce qui exige évidemment, pour subsister, que les pressions extérieures soient nulles aussi, car, autrement, les éléments auprès de la surface-enveloppe ne pourraient se tenir en équilibre.

Or, l'état d'équilibre d'un corps élastique est parfaitement déterminé quand on donne les forces à centre d'action éloigné, s'il y en a, qui sollicitent ses divers points, et les pressions qui peuvent agir sur sa surface; et cela s'étend au cas où ces forces extérieures sont toutes nulles.

Donc, réciproquement, lorsqu'un corps homogène n'éprouve sur sa surface-enveloppe aucune pression, et que sa pesanteur est abstraite, il n'y a aucune pression à son intérieur, et il se trouve dans l'état appelé *naturel*, dont la possibilité et la condition se trouvent ainsi établies.

D'où résulte aussi la concordance entre notre définition ci-dessus et ce qu'ont dit Cauchy (1) et Poisson (2), qui appellent état naturel, l'état d'un corps qui est placé dans le vide et qui n'est soumis à aucune force extérieure.

En restituant la pesanteur, les formules donnent une première série ou un premier système de déplacements ou de déformations à partir de l'état naturel, provenant de cette force, ainsi que les pressions intérieures qui en résultent; puis, les pressions extérieures appliquées en produisent d'autres, qu'on peut le plus souvent calculer directement, si l'on ne part que de l'état où la pesanteur agissant seule avait mis préalablement le corps élastique.

§ 81. *Pressions principales, et Ellipsoïdes des pressions.* — Nous avons parlé des trois pressions principales, dans la discussion du 5<sup>e</sup> appendice, aux §§ 51 p. 651 et 73 p. 734, à propos de certaines manières d'établir les formules de l'élasticité. Bien que nous ayons pu précédemment, dans l'établissement de toutes les formules de résistance, nous passer de leur considération, il est bon d'en démontrer ici l'existence et les propriétés, découvertes en 1822 par Cauchy, et ensuite en 1828 sous une autre forme par MM. Lamé et Clapeyron.

(1) Exerc. de math., 3<sup>e</sup> année, 1828, p. 467.

(2) Mém. de l'Institut, t. VIII, p. 365.

Elles résultent presque immédiatement du théorème (§ 16) de projection de plans de pression et de la formule (3) du § 17,  $p_{n_x} = p_{xx} \cos(n, x) \cos(s, x) + \dots$  qu'on en déduit pour une composante de pression, dans une direction quelconque  $s$ , sur une face plane dont la normale à une direction  $n$ . En effet, en prenant pour  $s$  la direction  $n$  elle-même on a, pour la *composante normale* de pression sur ce plan, en désignant pour abrégier comme nous avons déjà fait, par  $c_{nx}$ ,  $c_{ny}$ ,  $c_{nz}$  les cosinus des angles de  $n$  avec les coordonnées

$$(177) \quad p_{nn} = p_{xx}c_{nx}^2 + p_{yy}c_{ny}^2 + p_{zz}c_{nz}^2 + 2p_{yz}c_{ny}c_{nz} + 2p_{zx}c_{nx}c_{nz} + 2p_{xy}c_{nx}c_{ny}.$$

Si, sur la normale  $Mn$ , de direction  $n$ , élevée au centre  $M$  de la petite face, on porte à partir de ce centre une longueur

$$(178) \quad Mm = r = \sqrt{\pm \frac{4}{p_{nn}}} \text{ selon que } p_{nn} \text{ est } \begin{cases} \text{positif} \\ \text{négatif,} \end{cases}$$

et si l'on transporte l'origine en  $M$ , on aura,  $x$ ,  $y$ ,  $z$  étant les coordonnées nouvelles de  $m$ ,

$$c_{nx}, c_{ny}, c_{nz} = \frac{x, y, z}{r} = (x, y, z) \sqrt{\pm p_{nn}}.$$

Substituant dans (177) et divisant par  $\pm p_{nn}$  il vient

$$(179) \quad p_{xx}x^2 + p_{yy}y^2 + p_{zz}z^2 + 2p_{yz}yz + 2p_{zx}zx + 2p_{xy}xy = \pm 4.$$

Donc : On a un ellipsoïde pour la surface formée par les extrémités des normales à toutes les petites faces d'égale superficie se croisant en un même point d'un corps quelconque, en leur donnant à partir de ce point des longueurs égales ou proportionnelles aux racines carrées des valeurs numériques des composantes  $p_{nh}$ , suivant ces normales  $n$ , des pressions s'exerçant sur les faces, lorsque les  $p_{nn}$  sont ou toutes positives ou toutes négatives (1). Et l'ellip-

(1) L'équation (179) ne représente en effet qu'une seule surface du second degré si, pour tous les systèmes de valeurs des coordonnées  $x$ ,  $y$ ,  $z$  du point  $m$ , le premier membre reste ou constamment positif ou constamment négatif, et c'est alors nécessairement un ellipsoïde, parce que le double signe sous le radical de (178)

$\sqrt{\pm \frac{4}{p_{nn}}} = r$  assure la réalité de tous les rayons vecteurs  $r$ .

soïde se change en deux hyperboloïdes conjugués lorsque la pression normale  $p_{nn}$  est positive pour certaines faces et négative pour d'autres (1). Elle est nulle pour les faces qui sont perpendiculaires aux génératrices du cône asymptotique commun, que M. Lamé appelle cône de glissement (5<sup>e</sup> leçon, § 23), et l'on n'a sur ces faces que des pressions tangentielles.

Or, si l'on prend de nouveaux axes coordonnés, des  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$ , se confondant avec les trois axes orthogonaux de figure de cette surface du second degré simple ou double, l'équation (179) manquera, comme on sait, des termes en  $y'z'$ ,  $z'x'$ ,  $x'y'$ , en sorte qu'on devra avoir

$$p_{y'z'} = 0, \quad p_{z'x'} = 0, \quad p_{x'y'} = 0;$$

et les pressions sur trois petites faces perpendiculaires à  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  se réduiront à leurs composantes normales,

$$p_{x'x'}, \quad p_{y'y'}, \quad p_{z'z'}.$$

Donc : *En tout point d'un corps quelconque il y a trois faces perpendiculaires l'une à l'autre, sur lesquelles les pressions n'agissent que normalement.* Deux d'entre celles-ci sont la plus grande et la plus petite des pressions qui s'exercent autour de ce point donné, et la troisième offre (comme l'axe moyen d'un ellipsoïde) un maximum parmi celles dont les directions sont dans le plan qu'elle forme avec l'une des deux autres et un minimum parmi celles qui sont dans le plan qu'elle fait avec la troisième. Toutes les autres pressions ou tensions sont distribuées symétriquement autour de ces trois pressions ou tensions, appelées *principales* (2).

(1) On a en effet deux surfaces si, pour certains systèmes de valeurs de  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , le premier membre a la valeur  $+4$ , et, pour d'autres, la valeur  $-4$ ; ce ne peut être deux ellipsoïdes, ou un ellipsoïde et un hyperboloïde, puisque, dans chaque direction, le rayon vecteur  $r$  a une valeur unique; ce sont donc deux hyperboloïdes. Et ils sont conjugués, car, en faisant  $z=0$  par exemple, on obtient

$$p_{yy} \left(\frac{y}{x}\right)^2 + 2p_{xy} \frac{y}{x} + p_{xx} = \frac{\pm 4}{x^2},$$

équation de deux hyperboles suivant lesquelles ces deux surfaces sont coupées par le plan  $xy$ ; or, en faisant  $x$  infini, ce qui annule le second membre, on a pour ces deux courbes les mêmes valeurs de  $\frac{y}{x}$  ou les mêmes asymptotes.

(2) Si l'on demande quelles sont, de même, la plus grande et la plus petite des

On obtient leurs directions et leurs grandeurs en égalant à zéro la différentielle complète de (177)  $p_{nn}$  par rapport aux trois cosinus et en éliminant un des trois au moyen de

$$c_{nx}dc_{nx} + c_{ny}dc_{ny} + c_{nz}dc_{nz} = 0 \text{ déduit de } c_{nx}^2 + c_{ny}^2 + c_{nz}^2 = 1 ;$$

ce qui donne, en égalant à zéro les coefficients des deux autres, l'équation multiple suivante, dont le 4<sup>e</sup> membre  $p_{nn}$  s'obtient si l'on compose une quatrième fraction égale à celles des trois premiers en prenant pour numérateur la somme des numérateurs et pour dénominateur la somme des dénominateurs après avoir multiplié haut et bas la première par  $c_{nx}$ , la deuxième par  $c_{ny}$ , la troisième par  $c_{nz}$  :

$$(180) \quad \frac{p_{xx}c_{nx} + p_{xy}c_{ny} + p_{xz}c_{nz}}{c_{nx}} = \frac{p_{xy}c_{nx} + p_{yy}c_{ny} + p_{yz}c_{nz}}{c_{ny}} = \\ = \frac{p_{xz}c_{nx} + p_{yz}c_{ny} + p_{zz}c_{nz}}{c_{nz}} = p_{nn}.$$

En multipliant entre elles ces équations, écrites

$$(p_{nn} - p_{xx}) c_{nx} = p_{xy}c_{ny} + p_{xz}c_{nz},$$

$$(p_{nn} - p_{yy}) c_{ny} = p_{yz}c_{nz} + p_{xy}c_{nx},$$

$$(p_{nn} - p_{zz}) c_{nz} = p_{xz}c_{nx} + p_{yz}c_{ny},$$

et remplaçant ensuite, dans les termes du second membre tels que  $p_{yz}c_{ny}c_{nz}$  ( $p_{xy}c_{ny} + p_{xz}c_{nz}$ ) où une composante tangentielle entre au carré, la parenthèse, qui n'est autre chose qu'un des trois seconds membres facteurs, par le premier membre correspondant, les cosinus s'éliminent, et on a pour déterminer les grandeurs des trois pressions principales l'équation du troisième degré en  $p_{nn}$  :

$$(181) \quad (p_{nn} - p_{xx})(p_{nn} - p_{yy})(p_{nn} - p_{zz}) - \\ - p_{yz}^2(p_{nn} - p_{xx}) - p_{zx}^2(p_{nn} - p_{yy}) - p_{xy}^2(p_{nn} - p_{zz}) - 2p_{yz}p_{zx}p_{xy} = 0.$$

*composantes tangentielles de pression*, l'expression telle que  $p_{yz}/2 = \frac{1}{2}(p_{zzy} - p_{yyz})$

trouvée au § 25 montre qu'elles ont lieu pour des directions  $\pm y''$ ,  $\pm z''$  bissectrices des deux angles droits formés par la pression principale maximum et la pression principale minimum. La plus grande de ces composantes tangentielles est celle qui est positive : la plus petite lui est opposée et égale au signe près.

(1) M. Clebsch, dans un livre que nous citerons au § 94, a déduit aussi de (180) qu'en faisant

$$(182) \quad (p_{yy} - p_{nn})(p_{zz} - p_{nn}) + (p_{zz} - p_{nn})(p_{xx} - p_{nn}) + (p_{xx} - p_{nn})(p_{yy} - p_{nn}) - \\ - p_{yz}^2 - p_{zx}^2 - p_{xy}^2 = 3n,$$

La même conclusion peut se tirer de la considération, aussi présentée par M. Cauchy, d'une deuxième surface qui est toujours un ellipsoïde et qui se construit en portant, sur les normales  $n$  aux petites faces, des longueurs

$$Mm = r = \frac{1}{p},$$

égales (ou proportionnelles) aux inverses des intensités des pressions effectives ou non décomposées

$$p = \sqrt{p_{nx}^2 + p_{ny}^2 + p_{nz}^2};$$

car en composant  $p_{nx}$ ,  $p_{ny}$ ,  $p_{nz}$  d'après la formule générale (3)  $p_{na} = \dots$ , ajoutant les carrés et appelant encore  $x$ ,  $y$ ,  $z$  les coordonnées des extrémités  $m$  des rayons  $r$ , d'où  $c_{nx} = p \cdot x$ ,  $c_{ny} = p \cdot y$ ,  $c_{nz} = p \cdot z$ , on a

$$(185) \quad (p_{xx}x + p_{xy}y + p_{xz}z)^2 + (p_{xy}x + p_{yy}y + p_{yz}z)^2 + (p_{xz}x + p_{yz}y + p_{zz}z)^2 = 1.$$

Les axes de la surface que cette équation représente ont nécessairement les mêmes directions que ceux de la surface (179), car le plus grand et le plus petit répondent comme ceux-ci à la pression maximum et à la pression minimum (1).

c'est-à-dire en appelant  $m$  la dérivée, par rapport à  $p_{na}$ , du premier membre de (184), on a pour obtenir les grandeurs des trois cosinus, après avoir déterminé chacune de celles de  $p_{na}$ ,

$$(183) \quad \begin{cases} mc^2_{nx} = (p_{nn} - p_{yy})(p_{nn} - p_{zz}) - p^2_{yz}, \\ mc^2_{ny} = (p_{nn} - p_{zz})(p_{nn} - p_{xx}) - p^2_{zx}, \\ mc^2_{nz} = (p_{nn} - p_{xx})(p_{nn} - p_{yy}) - p^2_{xy}; \end{cases}$$

et, pour déterminer sans équivoque leurs signes,

$$(184) \quad \begin{cases} mc_{ny}c_{nz} = p_{xz}p_{xy} + p_{yz}(p_{nn} - p_{xx}), \\ mc_{nx}c_{nz} = p_{xy}p_{yz} + p_{xz}(p_{nn} - p_{yy}), \\ mc_{nx}c_{ny} = p_{yz}p_{xx} + p_{xy}(p_{nn} - p_{zz}). \end{cases}$$

(1) M. Lamé obtient (Leçons de 4857, § 21) un troisième ellipsoïde ayant pour ses rayons vecteurs  $Mm$  les pressions  $p$  elles-mêmes, portées à partir du point central  $M$  sur leurs propres directions. Comme la face = 1 sur laquelle  $p$  agit a pour projections orthogonales  $c_{nx}$ ,  $c_{ny}$ ,  $c_{nz}$  sur les trois plans perpendiculaires aux  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , si

$$p_x, p_y, p_z$$

sont les pressions sur l'unité de ces trois derniers plans,  $p$  est résultante, d'après le théorème des projections de plan de pression (4<sup>or</sup> du § 16), des trois forces  $p_x c_{nx}$ ,  $p_y c_{ny}$ ,  $p_z c_{nz}$  qui sont généralement obliques l'une à l'autre. D'où il suit que si l'on appelle  $x_1$ ,  $y_1$ ,  $z_1$  les trois coordonnées obliques de  $m$  par rapport à des axes

§ 52. Dilatations principales, et Ellipsoïdes des dilatations. —

Reprenons la formule (9) du § 19, p. 553, donnant les dilatations dans une direction  $r$  quelconque en fonction des dilatations et glissements dans les directions des coordonnées rectangles  $x, y, z$  :

$$(187) \quad \partial_r = \partial_x c^2_{rx} + \partial_y c^2_{ry} + \partial_z c^2_{rz} + g_{yx} c_{ry} c_{rx} + g_{zx} c_{rx} c_{rz} + g_{zy} c_{rx} c_{ry} \quad (1).$$

tirés de  $\mathbf{M}$  parallèlement aux directions des trois forces  $p_x, p_y, p_z$ , on a  $x_1 = p_x c_{ax}, y_1 = p_y c_{ay}, z_1 = p_z c_{az}$ .

Donc comme  $c^2_{ax} + c^2_{ay} + c^2_{az} = 1$ , l'équation de la surface est

$$(186) \quad \left(\frac{x_1}{p_x}\right)^2 + \left(\frac{y_1}{p_y}\right)^2 + \left(\frac{z_1}{p_z}\right)^2 = 1.$$

C'est un ellipsoïde ayant pour demi-diamètres conjugués ces pressions  $p_x, p_y, p_z$  dont les grandeurs et les directions sont faciles à obtenir, car elles sont résultantes, la première de  $p_{xz}, p_{xy}, p_{xz}$ , la seconde de  $p_{yx}, p_{yy}, p_{yz}$ , la troisième de  $p_{zx}, p_{zy}, p_{zz}$ , dirigées suivant les  $x, y, z$ .

(1) Cette expression (9) de la dilatation en un sens quelconque, et l'expression (10)  $g_{rs} = 2\partial_x c_{rx} c_{sx} + \dots$  de la p. 553, qui donne les glissements, peuvent être démontrées plus simplement qu'on n'a fait au § 48, en se servant de ce théorème, dont on fait souvent usage en mécanique (travail d'une résultante pour un espace résultant) : *Que si l'on a deux lignes dont chacune est résultante ou somme géométrique de plusieurs autres (ou deux chemins directs dont chacun joint ensemble deux points unis aussi par un chemin polygonal), le produit d'une de ces deux résultantes par la projection de l'autre sur sa direction est égale à la somme algébrique de tous les produits des composantes de l'une par les projections, sur leurs directions, des composantes de l'autre, ou que si R est résultante de X, Y, Z, etc.... et R' de X', Y', Z', etc., on a*

$$(188) \quad RR' \cos(R, R') = XX' \cos(X, X') + YY' \cos(Y, Y') + \dots + X'Y \cos(X', Y) + X'Y' \cos(X', Y') + \dots$$

Ce théorème connu se prouve géométriquement en remarquant que puisque R' est un chemin direct unissant les deux mêmes points que le chemin polygonal X' + Y' + Z' + ... la projection de R' sur R est égale à la somme de celles de X', Y', Z' sur R, d'où  $R' \cos(R, R') = X' \cos(R, X') + Y' \cos(R, Y') + \dots$ ; mais, de même, la projection de R sur X' est égale à la somme de celles de X, Y, Z, ... aussi sur X', d'où  $R \cos(R, X') = X \cos(X, X') + Y \cos(Y, X') + \dots$ ; ce qui donne bien (188), en substituant dans l'équation  $R' \cos(R, R') = \dots$  multipliée par R, et faisant des substitutions semblables pour  $R \cos(R, Y'), R \cos(R, Z'), \dots$

Or deux lignes  $r, s$ , diagonales, avant les déformations, de deux parallépipèdes rectangles ayant pour côtés adjacents parallèles aux  $x, y, z$

$$rc_{rx}, rc_{ry}, rc_{rz} \quad \text{et} \quad sc_{sx}, sc_{sy}, sc_{sz},$$

le sont, après, de deux parallépipèdes obliques ayant pour côtés adjacents

$$rc_{rx}(1 + \partial_x), rc_{ry}(1 + \partial_y), rc_{rz}(1 + \partial_z), \quad \text{et} \quad sc_{sx}(1 + \partial_x), sc_{sy}(1 + \partial_y), sc_{sz}(1 + \partial_z).$$

Si l'on porte sur toutes les droites dont nous appelons  $r$  les directions, tirées en tous sens autour d'un même point M d'un corps, des longueurs

$$(191) \quad Mm = r = \sqrt{\pm \frac{1}{\delta_r}} \text{ selon que } \delta_r \begin{cases} \text{est positif} \\ \text{est négatif,} \end{cases}$$

ou qu'il y a dans le sens  $r$   $\begin{cases} \text{dilatation} \\ \text{contraction,} \end{cases}$

et si l'on place en M l'origine des coordonnées  $x, y, z$  des extrémités  $m$ , on a

$$(192) \quad c_{rx} = \frac{x}{r} = x \sqrt{\pm \delta_r}, \quad c_{ry} = y \sqrt{\pm \delta_r}, \quad c_{rz} = z \sqrt{\pm \delta_r},$$

d'où, substituant dans (187),

$$(193) \quad \delta_x x^2 + \delta_y y^2 + \delta_z z^2 + g_{yz} yz + g_{zx} zx + g_{xy} xy = \pm 1.$$

Les extrémités  $m$  des longueurs ainsi portées forment donc (comme au § 84) 1° Un ellipsoïde s'il y a en tous sens ou dilatation ou contraction autour du point M, 2° Deux hyperboloïdes conjugués s'il y a dilatation dans certaines directions et condensation dans d'autres. Alors il n'y a ni condensation ni dilatation dans les directions des droites formant par leur ensemble le cône asymptotique.

Les diverses dilatations se distribuent symétriquement autour des axes de figure de cette surface du second degré simple ou

Comme une diagonale est résultante des trois côtés on peut, en appelant

$$r_1 = r(1 + \delta_r), \quad s_1 = s(1 + \delta_s)$$

ce que sont devenues  $r, s$ , les substituer dans (188) à  $R, R'$ , et les côtés  $rc_{rx}(1 + \delta_x)$ , etc., à  $X$ , etc.; d'où, en divisant tout par  $rs$ , et en remarquant que les cosinus des trois angles formés par les côtés deux à deux sont pour l'un comme pour l'autre parallépipède ce que nous avons appelé  $g_{yz}, g_{zx}, g_{xy}$ ,

$$(189) \quad (1 + \delta_r)(1 + \delta_s) \cos(r_1, s_1) = (1 + \delta_x)^2 c_{rx} c_{sx} + \dots + (c_{ry} c_{sx} + c_{rx} c_{sy})(1 + \delta_y)(1 + \delta_z) g_{yz} + \dots$$

ou, en développant et négligeant les carrés et les produits de quantités très-petites,

$$(190) \quad (1 + \delta_r + \delta_s) \cos(r_1, s_1) - \cos(r, s) = 2\delta_x c_{rx} c_{sx} + 2\delta_y c_{ry} c_{sy} + 2\delta_z c_{rz} c_{sz} + (c_{ry} c_{sx} + c_{rx} c_{sy}) g_{yz} + (c_{rx} c_{sz} + c_{rz} c_{sx}) g_{zx} + (c_{rx} c_{sy} + c_{ry} c_{sx}) g_{xy};$$

ce qui donne successivement (9)  $\delta_r = \dots$  et (10)  $g_{rs} = \dots$  en faisant : 1°  $r$  et  $s$  de même direction et divisant par 2; 2°  $r$  et  $s$  perpendiculaires l'un à l'autre, d'où  $\cos(r, s) = 0$ ,  $\cos(r_1, s_1) = g_{rs}$ .

double. Et comme, en les prenant pour axes coordonnés, l'équation manquera des termes en  $yz$ ,  $zx$ ,  $xy$  de sorte que les glissements  $g$  parallèles à ces axes nouveaux seront nuls, on voit que :

*En tout point d'un corps qui a subi de petites déformations à partir d'un état antérieur quelconque, on peut toujours tirer trois droites rectangulaires dans les directions desquelles il n'y a pas eu de glissements lorsqu'on les considère deux à deux, ou dont les trois angles étaient droits et sont restés droits.*

On appelle dilatations (ou condensations) *principales* celles qui ont lieu suivant leurs directions. Deux d'entre elles sont la plus grande et la plus petite de toutes les dilatations autour du point considéré  $M$ .

Elles se déterminent en grandeur et en direction comme on a fait pour les pressions principales au § précédent, en égalant à zéro la différentielle complète de (187)  $\lambda_r = \dots$  par rapport aux cosinus, en sorte qu'elles satisfont à

$$(194) \quad \frac{2\lambda_x C_{rx} + g_{xy} C_{ry} + g_{xz} C_{rz}}{2C_{rx}} = \frac{g_{xy} C_{rx} + 2\lambda_y C_{ry} + g_{yz} C_{rz}}{2C_{ry}} = \frac{g_{xz} C_{rx} + g_{yz} C_{ry} + 2\lambda_z C_{rz}}{2C_{rz}} = \lambda_r ;$$

d'où, en  $\lambda_r$  seul

$$(195) \quad 4(\lambda_r - \lambda_x)(\lambda_r - \lambda_y)(\lambda_r - \lambda_z) - g^2_{yx}(\lambda_r - \lambda_x) - g^2_{xz}(\lambda_r - \lambda_y) - g^2_{xy}(\lambda_r - \lambda_z) - g_{yz}g_{xz}g_{xy} = 0 ;$$

et d'où on déduirait, *mais pour le seul cas particulier d'une contexture égale en tous sens*, les conditions de limitation des dilatations, ou de résistance permanente, établies aux §§ 1 de la note du n° 154 p. 219, et 43 de celle du n° 156 p. 374 à 383 (\*).

(\*) Au *Mémoire sur la torsion* (1854), art. 24, nous avons démontré, pour le cas d'une contexture à trois plans de symétrie, cette équation plus générale, où  $\delta_x, \delta_y, \delta_z$ , et  $\delta_r = \delta_x c^2_{rx} + \delta_y c^2_{ry} + \delta_z c^2_{rz}$  représentent les limites à imposer aux dilatations positives dans les sens  $x, y, z$  et  $r$  :

$$(195 \text{ bis}). \quad \left(\frac{\lambda_r}{\delta_r} - \frac{\lambda_x}{\delta_x}\right) \left(\frac{\lambda_r}{\delta_r} - \frac{\lambda_y}{\delta_y}\right) \left(\frac{\lambda_r}{\delta_r} - \frac{\lambda_z}{\delta_z}\right) - \frac{g^2_{yx}}{4\delta_y\delta_x} \left(\frac{\lambda_r}{\delta_r} - \frac{\lambda_x}{\delta_x}\right) - \frac{g^2_{xz}}{4\delta_z\delta_x} \left(\frac{\lambda_r}{\delta_r} - \frac{\lambda_y}{\delta_y}\right) - \frac{g^2_{xy}}{4\delta_x\delta_y} \left(\frac{\lambda_r}{\delta_r} - \frac{\lambda_z}{\delta_z}\right) - \frac{g_{yz}g_{xz}g_{xy}}{4\delta_x\delta_y\delta_z} = 0,$$

dont la plus grande racine donne le rapport le plus grand, et par conséquent le plus dangereux de  $\lambda_r$  à  $\lambda_r$ .



Une autre surface du second degré intéressante à considérer aussi et qui sera toujours un ellipsoïde est celle dans laquelle les déformations du corps changent un élément sphérique ayant son centre en M.

Soit  $l$  la longueur primitive des rayons de cet élément. Si, l'origine étant placée en M,  $x, y, z$  sont les coordonnées de l'extrémité de celui de ces rayons dont la direction est  $r$  et dont  $l + \delta_r$  désigne ainsi la longueur actuelle, le rayon primitif  $= l$  était la diagonale du parallélépipède obliquangle dont les côtés, devenus rectangulaires et égaux à  $x, y, z$ , avaient, auparavant, des longueurs

$$\frac{x}{1 + \delta_x}, \quad \frac{y}{1 + \delta_y}, \quad \frac{z}{1 + \delta_z},$$

et dont les trois angles adjacents qui sont devenus droits en se rétrécissant de  $g_{yz}, g_{zx}, g_{xy}$  avaient pour cosinus

$$-g_{yz}, \quad -g_{zx}, \quad -g_{xy}.$$

On a donc, d'après l'expression connue du carré de la diagonale d'un parallélépipède, qui a été prouvée p. 450 et qui est d'ailleurs un cas particulier de la formule générale (188) de projection de deux résultantes l'une sur l'autre,

$$(196) \quad \frac{x^2}{(1 + \delta_x)^2} + \frac{y^2}{(1 + \delta_y)^2} + \frac{z^2}{(1 + \delta_z)^2} - \frac{2g_{yz}yz}{(1 + \delta_y)(1 + \delta_z)} - \frac{2g_{zx}zx}{(1 + \delta_z)(1 + \delta_x)} - \frac{2g_{xy}xy}{(1 + \delta_x)(1 + \delta_y)} = 1.$$

La sphère se change ainsi en un ellipsoïde, dont les axes de figure ont nécessairement les mêmes directions que ceux de la surface du second degré (193), car ces trois directions doivent être toujours celles des maxima et minima absolus et relatifs des dilatactions, pour lesquelles les trois glissements  $g_{yz}, g_{zx}, g_{xy}$  sont nuls quand on les prend pour axes des  $x, y, z$ .

Au reste l'équation (196), qui peut s'écrire ainsi en négligeant les produits de quantités très-petites

$$(197) \quad (1 - 2\delta_x)x^2 + (1 - 2\delta_y)y^2 + (1 - 2\delta_z)z^2 - 2g_{yz}yz - 2g_{zx}zx - 2g_{xy}xy = 1,$$

aurait pu être déduite, comme (193), de l'expression (187)  $\delta_r =$

$\partial_x c^2_{rx} + \dots$ , écrite  $c^2_{rx} + c^2_{ry} + c^2_{rz} -$  (deux fois le 2<sup>e</sup> membre)  
 $= 1 - 2\partial_r$ , en y faisant  $c_{rx}, c_{ry}, c_{rz} = \frac{x, y, z}{1 + \partial_r}$  et chassant les dénominateurs, car  $(1 - 2\partial_r)(1 + \partial_r)^2 = 1$ .

§ 83. *Potential des forces moléculaires ou intérieures, et son usage.* — Dès 1821, Navier, en fondant la branche importante de la mécanique dont nous nous occupons (1), y avait appliqué la méthode de Lagrange consistant à poser une seule équation d'équilibre pour tous les points d'un système, par le principe des travaux virtuels, en représentant les petits espaces hypothétiquement ou *virtuellement* parcourus, par des variations ou différentielles par  $\delta$  des coordonnées actuelles ( $x + u, y + v, z + w$ ) de ces points, et à en déduire, au moyen des plus simples règles du calcul des variations, les équations indéfinies qui conviennent à tout l'intérieur du corps ou du système, et du même coup les équations définies qui sont relatives seulement à ses limites ou à sa surface-enveloppe.

A cet effet Navier composait tout d'abord, pour les actions intérieures ou moléculaires d'un corps élastique, une expression de cette quantité ou de cette fonction de toutes les forces en jeu et des situations relatives de leurs points d'application, désignée dans la *Mécanique analytique* par  $\Pi = \int (Pdp + Qdq + \dots)$  (2), qui doit être un minimum dans l'état d'équilibre stable, et dont la différentielle par  $\delta$  donne le *travail virtuel total* de ces forces diverses.

Pendant que la méthode de Lagrange devenait, chez nous, l'objet d'un abandon à peu près général (3) et d'objections non suffisamment réfléchies (4), provoquées en partie sans doute par l'abus qui avait

(1) *Lois de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques*, lu le 4 mai 1821. Tome VII de l'Institut.

(2) 1<sup>re</sup> partie, section III, de 24 à 27.

(3) Poisson (*Théorie nouvelle de la rotation des corps*. 1834, p. 33, ou *Statique*, 3<sup>e</sup> édition, p. 509) semble n'apprécier, dans l'œuvre de Lagrange, que les courts passages où il rapproche les méthodes, et « les admirables préfaces historiques placées à la tête des différents livres. »

(4) Poisson avançait, en 1827-1828, dans une *Note sur les vibrations*, insérée au t. XXXVI des *Ann. de ch. et de ph.*, p. 86, ainsi qu'au Mémoire du tome VIII de l'Institut, art. 44, p. 400, que le calcul des variations n'était pas propre aux recherches sur les corps tels qu'ils sont dans la nature, c'est-à-dire formés de molécules disjointes. C'était une conséquence exagérée de sa juste remarque que les résultantes ou les sommes de composantes d'actions de ces molécules ne sont

pu être fait des suppositions de *liaisons* abstraites ou purement mathématiques, qui ne sont nullement essentielles à son emploi <sup>(1)</sup>, Green et Gauss l'appliquaient avec un grand succès, l'un en 1828 aux lois de l'électricité statique <sup>(2)</sup>, l'autre en 1829 à celles des phénomènes capillaires <sup>(3)</sup> en posant dès l'abord, comme Navier, l'expression de cette même quantité  $\Pi$  que Green appelait fonction potentielle <sup>(4)</sup>, et que Gauss a simplement, plus tard, nommée le *Potentiel* <sup>(5)</sup>; méthode que Green, en l'employant ensuite pour la détermination des lois de l'élasticité de l'éther lumineux et de ses vibrations, regarde comme spécialement applicable à ce qui regarde les systèmes d'un nombre immense de particules agissant les unes sur les autres (sans autres *liaisons* que ces actions mu-

*pas des intégrales*; car, outre que leur conversion en intégrales définies n'a pas les inconvénients qu'il signale quand on ne prend pas zéro pour limite inférieure d'intégration comme l'a observé M. Clausius (note du § 74 ci-dessus, p. 743), on va voir que ce calcul peut très-bien être appliqué en conservant les sommes  $S$  ou  $\Sigma$  d'un nombre très-grand, mais fini de termes, sans avoir besoin de les convertir en intégrales triples  $\iiint$ , ou sans opérer pour tout le corps des intégrations sextuples; en sorte que les intégrations triples conservées pour embrasser tout son volume ne sont nullement celles qui portent sur les actions, et que Poisson signale comme prêtant à de fausses conséquences; aussi il est permis de croire que son opinion s'était modifiée lorsqu'il lisait, en novembre 1831, un beau Mémoire dans lequel il perfectionne le calcul des variations (Institut, t. XII) en disant que ce calcul comprend dans ses applications la mécanique entière, et où il s'en sert pour la plaque élastique.

Quelques incertitudes peuvent cependant rester encore au sujet des conditions aux limites des corps, dans certains problèmes où la rapide variation de leur coextensibilité à ces limites peut exercer une influence capitale. Ces incertitudes, qui se présentent également quand on ne fait pas usage de la méthode des variations, ne cesseront que quand on aura complètement résolu les questions délicates soulevées à cet égard par Poisson pour la théorie de la capillarité, et par Cauchy pour la théorie de la réfraction et de la réflexion de la lumière. (C<sup>m</sup> rendus, t. XV, p. 550, etc.)

<sup>(1)</sup> Poisson (*Mém. sur les corps élastiques*, 1828, au t. VIII de l'Institut, p. 364) opposait en quelque sorte la *Mécanique physique* à la *Mécanique analytique*, qu'il regardait apparemment alors comme liée à la substitution d'équations de condition aux forces réciproques unissant entre eux les points d'un même système.

<sup>(2)</sup> G. Green. *An Essay of the Application of mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism*. Nottingham, 1828. Réimprimé aux tomes XXXIX (1850), XLIV (1852), XLVII (1854) du *Journal de Crellé*.

<sup>(3)</sup> Gauss. *Principia generalia theoria figurarum fluidorum in statu æquilibrii*; tradita 28 septembre 1829, Göttingue, 1830, in-4°. — Ou *Mémoire sur la théorie des phénomènes capillaires*, par M. Bertrand, t. XIII (1848) du *Journal Liéouville*.

<sup>(4)</sup> Green. Préface et Observations introductrices.

<sup>(5)</sup> Gauss et Weber. *Resultate aus den..... Resultate des expériences de l'Union magnétique pour l'année 1839*, p. 4.

tuelles) parce que, dit-il, un de ses avantages, d'une grande importance, est de conduire nécessairement et presque sans soin (with little care on our part) à toutes les équations de condition *justement nécessaires et suffisantes* pour la complète solution des problèmes <sup>(1)</sup>; ce qui se trouve remarquablement justifié par les recherches de M. Kirchhoff sur les plaques élastiques <sup>(2)</sup>.

La considération du potentiel <sup>(3)</sup> des forces moléculaires a été employée, depuis Green, par la plupart des Savants de l'Angleterre et de l'Allemagne qui ont écrit comme lui sur la théorie de l'élasticité <sup>(4)</sup>. Si elle semble compliquer quelques solutions ou démonstrations particulières, elle simplifie l'ensemble de celles qui se rapportent à un même sujet. On a vu d'ailleurs avec quelle facilité l'on tire, de cette seule considération, 15 égalités entre les 36 coefficients des formules des corps élastiques, car  $\Phi$  était, au § 70, précisément la quantité ou fonction dont il s'agit.

On peut, en effet, regarder le Potentiel d'une ou plusieurs forces, comme *leur pouvoir moteur total*, ou le travail qu'elles sont ca-

(1) *On the Laws of Reflection and Refraction*, 1837. Trans. Cambridge, vol. VII, (1839), p. 2.

(2) *Ueber das Gleichgewicht... eines Scheibe. Sur l'équilibre et le mouvement d'un disque ou d'une plaque* (*Journal de Crelle*, 40<sup>e</sup> volume, 1<sup>re</sup> livr., 1850, p. 69). Et *Comptes rendus*, 16 octobre 1848, t. 27, p. 396 (où il faut lire  $G + (G) = 0$ ).

$F + \frac{dN}{ds} + (F) + \frac{d(N)}{ds} = 0$  pour les deux dernières équations). M. Kirchhoff arrive, par cette méthode, à d'autres équations au contour que M. Poisson, qui en avait donné trois, tandis que deux suffisent.

(3) On sait, au reste, que cette dénomination est de Daniel Bernoulli, qui, en 1738, dans son immortelle *hydrodynamique*, où le principe d'Huygens, appelé depuis *des forces vives* par son frère Jean Bernoulli, se trouve pour la première fois largement appliqué, revient, dit-il, à l'énoncé de son premier auteur (art. 48), et appelle constamment *Descente actuelle* et *Ascension potentielle* ce qu'on nomme aujourd'hui *travail* et *acquisition de demi-force vive*; et qui, peu de temps après, indiqua à Euler que la courbe élastique devait, comme toutes les autres courbes qui résolvent des problèmes de physique, rendre un minimum une certaine FORCE POTENTIELLE. (Euler, *Methodus inveniendi*, etc., *Additamentum de curvis elasticis*, n<sup>os</sup> 1 et 2.)

(4) M. Kirchhoff, même Mémoire sur la plaque; et, aussi, *Gleichgewicht... eines Stabes; Équilibre et mouvement d'une tige élastique infiniment mince* (*Journal de Crelle*, 56<sup>e</sup> volume). — MM. Haughton et Neumann, Mémoires cités ci-dessus. — M. Gehring, *Dissertatio inauguralis de aequilibrio et motu laminae crystallinae*. Ce jeune savant a même soutenu, dans son argumentation, que la théorie des corps élastiques ne pouvait être convenablement présentée que par le calcul des variations.

pables de fournir depuis la situation actuelle des mobiles sur lesquels elles agissent jusqu'à la situation pour laquelle elles s'annulent ou se contre-balaient; travail qui dépend non-seulement de leurs intensités moyennes respectives, mais encore de l'étendue plus ou moins limitée de leurs *champs d'action* ou des espaces que leurs points d'application peuvent parcourir jusqu'à ce que ces forces variables avec les distances cessent de s'exercer sensiblement.

C'est la même quantité que Jean Bernoulli appelait la *faculté d'agir* <sup>(1)</sup>, Ampère la *force vive implicite* <sup>(2)</sup>, et M. William Thomson l'*énergie potentielle* qui, ajoutée à l'*énergie actuelle* ou puissance vive (demi-force vive) forme ce qu'il nomme l'*énergie mécanique totale* d'un système de corps <sup>(3)</sup>; énergie dont les réservoirs sont, d'une part, un poids élevé, un ressort tendu (Bernoulli), une quantité de combustible (Lagrange) <sup>(4)</sup>, de fourrage, etc., et, de l'autre, une masse en mouvement (le même Bernoulli), animée d'une vitesse plus ou moins grande <sup>(5)</sup>.

Cette signification philosophique du potentiel explique son rôle important, et l'on conçoit que sa considération puisse avoir, dans des questions compliquées, le même avantage qu'offre celle du simple travail dans les questions élémentaires. Et comme les résultats obtenus sont généralement les mêmes quand on l'augmente ou diminue d'une constante, on peut le mesurer par le travail entre la situation actuelle et une situation fixe arbitraire, antérieure ou postérieure, des points exerçant des actions les uns sur les autres. On l'appelle aussi, dans beaucoup de mémoires récents de mécanique rationnelle, *fonction de forces*, parce que les dérivées, par rapport à  $x, y, z$ , de sa valeur  $\int (Xdx + Ydy + Zdz)$  relative à une

(1) Acta eruditorum Lipsiæ, mai 1735, ou Œuvres, t. III, n° CXLV, p. 239, 240.

(2) Annales de chimie et de physique, avril 1835.

(3) Sur les antécédents mécaniques du mouvement, de la chaleur et de la lumière. Comptes rendus, 28 mai 1855, t. XL, p. 4497.

(4) Dernier article du *Traité des fonctions analytiques*.

(5) Nous l'avons nommée, dans un Mémoire présenté le 14 avril 1834, *capital dynamique latent*, en appelant *capital patent* la demi-force vive, et en remarquant que c'est de la somme totale de ces deux quantités, s'échangeant continuellement l'une dans l'autre, qu'on peut dire avec Descartes que la quantité du mouvement reste constamment la même dans l'univers.

seule force, sont les composantes respectives X, Y, Z de cette force suivant ces coordonnées; et si, comme M. Hamilton,  $\Sigma$  désignant une somme relative à un nombre indéfini de points matériels, on prend la dérivée de sa valeur  $\Sigma \int (Xdx + Ydy + Zdz)$  pour toutes les forces qui les sollicitent, par rapport à une des coordonnées d'un seul de ces points, en regardant toutes les autres coordonnées comme constantes, on a la composante de la force sollicitant ce point particulier suivant la coordonnée choisie. Il est même facile de voir <sup>(1)</sup> que la dérivée par rapport à la ligne de jonction d'un des points mobiles avec un point fixe est la composante, suivant cette ligne, de la force particulière à ce point <sup>(2)</sup>.

On conçoit aussi que l'usage du potentiel n'exige pas toujours et inévitablement l'emploi du calcul des variations, car, quand on est parvenu à en construire l'expression, son minimum peut quelquefois être déterminé sans recourir à cette sorte de calcul <sup>(3)</sup>.

Pour les forces intérieures ou moléculaires d'un corps élastique, le potentiel sera ainsi, par unité de volume, en un point  $(x, y, z)$ ,

$$\Phi,$$

si, pour l'élément parallélépipède dont il occupe le centre et dont  $x, y, z$  sont les dimensions parallèles aux coordonnées, le produit

$$\Phi \cdot xyz$$

est le travail que ces forces ou actions mutuelles produiraient jusqu'au retour à l'état naturel où il n'y avait encore (§§ 20, 22, 80) aucune pression à l'intérieur ni sur les faces de l'élément.

Comme le travail total des forces intérieures est égal à la somme des travaux des pressions  $p_{xx} \dots p_{yy}$  qui leur font équilibre sur les

(1) Die Potenzialfunction und das Potenzial. Leipzig, 1859, in-8°, § 2, p. 4, par M. Clausius, qui conserve le nom de fonction potentielle au potentiel par unité de quantité ou de masse (Id., § 41, p. 103).

(2) Aussi se confond-il, lorsque les forces sont en raison inverse des carrés des distances  $r$  des points, avec ce potentiel analytique  $V$  que l'on considère dans la théorie des attractions soit planétaires soit électriques, et qui, se composant d'une somme de masses divisées par les premières puissances des distances  $r$ , satisfait à une équation différentielle  $\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = 0$ . (Laplace, Méc. céleste, I, liv. II, n° 44, et III, n° 8; et Lamé, 6° leçon, p. 70.)

(3) C'est ce qu'a fait M. Bertrand dans le Mémoire cité, relatif aux phénomènes capillaires.

six faces de l'élément  $xyz$ , on aura, comme au § 70, pour l'accroissement du potentiel dû aux accroissements  $d\lambda_x, \dots, dg_{xy}$  des six déformations  $\lambda, g$  :

$$(198) \quad d\Phi = p_{xx}d\lambda_x + p_{yy}d\lambda_y + p_{zz}d\lambda_z + p_{yz}dg_{yz} + p_{xz}dg_{xz} + p_{xy}dg_{xy}$$

Si nous le distinguons par l'indice 1 quand les six déformations se comptent à partir de l'état naturel (comme nous avons fait pour les composantes de pression), ou si nous l'appelons alors

$$\Phi^1,$$

$\Phi^1$  devra être nul pour  $\lambda_x = 0, \lambda_y = 0, \dots, g_{xy} = 0$  et donner pour dérivées partielles, par rapport à ces six déformations, chacune des six expressions (12) des composantes  $p^1_{xx}, \dots, p^1_{xy}$ . On aura donc la formule

$$(199) \quad \Phi^1 = \frac{1}{2} a_{xxxx} \lambda_x^2 + \frac{1}{2} a_{yyyy} \lambda_y^2 + \frac{1}{2} a_{zzzz} \lambda_z^2 + \\ + \frac{1}{2} a_{yzyz} g_{yz}^2 + \frac{1}{2} a_{zxxz} g_{xz}^2 + \frac{1}{2} a_{xyxy} g_{xy}^2 + a_{yyzz} \lambda_y \lambda_z + a_{zzxx} \lambda_z \lambda_x + a_{xxyy} \lambda_x \lambda_y + \\ + a_{xxyy} \lambda_x g_{yz} + a_{yyzz} \lambda_y g_{xz} + a_{zzxx} \lambda_z g_{xy} + a_{zzxy} g_{xz} g_{xy} + a_{xyyz} g_{xy} g_{yz} + a_{yyzz} g_{yz} g_{xz} + \\ + a_{yyzz} \lambda_y g_{yz} + a_{zzxx} \lambda_z g_{xz} + a_{zzxx} \lambda_z g_{xz} + a_{xxyy} \lambda_x g_{xy} + a_{xyyz} \lambda_y g_{xy};$$

expression homogène du second degré, et par conséquent à 21 termes, que Green s'est cru autorisé, comme nous avons dit au § 69, à poser *a priori*. Elle peut aussi être écrite, d'après les mêmes formules (12)  $p^1_{xx} = a_{xxxx} \lambda_x + \text{etc.}$

$$(200) \quad \Phi^1 = \frac{1}{2} p^1_{xx} \lambda_x + \frac{1}{2} p^1_{yy} \lambda_y + \frac{1}{2} p^1_{zz} \lambda_z + \frac{1}{2} p^1_{yz} g_{yz} + \frac{1}{2} p^1_{xz} g_{xz} + \frac{1}{2} p^1_{xy} g_{xy}$$

Sous cette forme elle donne toujours  $p^1_{xx}, p^1_{yy}, \dots, p^1_{xy}$  quand on la différentie par rapport à  $\lambda_x, \lambda_y, \dots, g_{xy}$ , car on trouve, par exemple, comme pour l'expression (148) de la note du § 70 (p. 716),

$$\frac{d\Phi^1}{d\lambda_x} = \frac{1}{2} p^1_{xx} + \frac{1}{2} \left( \frac{dp^1_{xx}}{d\lambda_x} \lambda_x + \dots + \frac{dp^1_{xy}}{d\lambda_x} g_{xy} \right) = \frac{1}{2} p^1_{xx} + \frac{1}{2} p^1_{xx}$$

Si les déformations  $\lambda, g$  se comptent à partir d'un état où il y avait déjà des pressions

$$\text{et si,} \quad p^*_{xx}, \quad p^*_{yy}, \quad p^*_{zz}, \quad p^*_{yz}, \quad p^*_{xz}, \quad p^*_{xy}$$

$$\Phi^0$$

désigne, par unité de volume, le potentiel, quel qu'il fût, dans cet état initial qui n'est pas l'état naturel, celui qu'on aura après les

déformations  $\lambda$ ,  $g$  sera exprimé,  $\Phi^1$  étant (199) ou (200), par (201)  $\Phi = \Phi^0 + p^0_{xx}\lambda_x + p^0_{yy}\lambda_y + p^0_{zz}\lambda_z + p^0_{yz}g_{yz} + p^0_{xz}g_{xz} + p^0_{xy}g_{xy} + \Phi^1$ .

La partie en  $p^0_{xx}, \dots, p^0_{xy}$  de cette expression est double de ce que celle (200) de  $\Phi^1$  est en  $p^1_{xx}, \dots, p^1_{xy}$ ; cela vient de ce que les pressions  $p^0$  antérieures aux  $\lambda, g$  avaient déjà acquis toute leur valeur au commencement de ces déformations, et restent constantes pendant qu'elles s'opèrent, au lieu de commencer par zéro comme les  $p^1$  (note du § 70, p. 716).

§ 84. *L'expression du potentiel des forces intérieures conduit aux équations d'équilibre indéfinies et définies, et aux expressions complètes des composantes de pression. — En effet nommons, comme aux §§ 27 et 28 :*

$X, Y, Z$  les composantes parallèles aux  $x, y, z$  des forces extérieures telles que la pesanteur, qui agissent sur l'unité de volume du corps au point dont les coordonnées  $x, y, z$  sont devenues

$$x_1 = x + u, \quad y_1 = y + v, \quad z_1 = z + w;$$

$\omega$  les pressions extérieures agissant sur l'unité superficielle de l'élément

$$d\Omega$$

de la surface-enveloppe que nous appelons  $\Omega$ ;

$n$  la direction de la normale à cet élément, tirée extérieurement.

Comme les projections

$$\delta x_1, \quad \delta y_1, \quad \delta z_1,$$

sur les axes, de l'espace infiniment petit quelconque que l'on fait parcourir virtuellement au point ayant les coordonnées actuelles  $x_1, y_1, z_1$  se réduisent, vu que les coordonnées primitives  $x, y, z$  n'ont pas de variations, à

$$\delta u, \quad \delta v, \quad \delta w,$$

l'on a, pour l'équation d'équilibre, ou de nullité de la somme totale des travaux virtuels pour tout le corps

$$\begin{aligned} (203) \quad & \iiint dx dy dz (X\delta u + Y\delta v + Z\delta w) + \\ & + \int d\Omega [\omega \cos(\omega, x)\delta u + \omega \cos(\omega, y)\delta v + \omega \cos(\omega, z)\delta w] = \\ & = \iiint dx dy dz \delta\Phi. \end{aligned}$$



En prenant pour  $\Phi$  sa valeur complète (201)  $\Phi^0 + p^0 \delta x + \dots + p^0_{xy} g_{xy} + \Phi^1$ , le terme  $\Phi^0$  différentié par  $\delta$  donnera zéro. Le dernier terme  $\Phi^1$  donnera l'expression (198)  $p_{xx} \delta x + \dots$  de  $d\Phi$  avec des  $\delta$  pour les  $d$  et les  $p^1_{xx}, \dots$  pour les  $p_{xx}, \dots$  en sorte qu'on aura

$$(204) \begin{cases} \delta\Phi = p^0_{xx} \delta x + p^0_{yy} \delta y + p^0_{zz} \delta z + p^0_{yz} \delta g_{yz} + p^0_{zx} \delta g_{zx} + p^0_{xy} \delta g_{xy} + \\ + p^1_{xx} \delta x + p^1_{yy} \delta y + p^1_{zz} \delta z + p^1_{yz} \delta g_{yz} + p^1_{zx} \delta g_{zx} + p^1_{xy} \delta g_{xy} \end{cases}$$

Mettons  $y$  à la place des  $\delta$ ,  $g$  leurs valeurs en  $u, v, w$  en supposant ces déplacements très-petits; cas auquel on ramène, comme nous avons dit, celui de déplacements quelconques ne produisant toutefois que de très-petites déformations. Il suffira pour les six derniers termes, affectés des  $p^1$ , de prendre les expressions (42)

$$\delta x = \frac{du}{dx}, \delta y = \dots, g_{yz} = \frac{dv}{dx} + \frac{dw}{dy}, \text{ etc.}$$

Mais comme ces termes seront du second degré en  $u, v, w$ , puisque les  $p^1$  contiennent aussi les dérivées de ces déplacements, il conviendra, pour que ceux de la première ligne de (204), affectés des constantes  $p^0$ , offrent la même approximation, d'y mettre pour les  $\delta, g$ , comme l'a remarqué Green pour un cas particulier, leurs valeurs plus exactes (40), (41), savoir

$$\begin{aligned} \delta x &= \frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left( \frac{du}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{dv}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{dw}{dx} \right)^2, \delta y = \dots, \\ g_{yz} &= \frac{dv}{dx} + \frac{dw}{dy} + \frac{du}{dy} \frac{du}{dz} + \frac{dv}{dy} \frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy} \frac{dw}{dz}, g_{zx} = \dots \end{aligned}$$

Substituant, différentiant par  $\delta$  et changeant les  $\delta d$  en  $d\delta$  suivant le principe du calcul des variations, les termes en  $u$ , qu'il suffit d'écrire seuls parce qu'il sera facile d'en déduire par analogie les termes en  $v, w$ , fourniront dans le second membre  $\iiint dxdydz$  de (203),

$$(205) \begin{aligned} & \iiint \left\{ p^0_{xx} \left( 1 + \frac{du}{dx} \right) + p^0_{xy} \frac{du}{dy} + p^0_{xz} \frac{du}{dz} + p^1_{xx} \right\} \frac{d\delta u}{dx} dxdydz + \\ & + \iiint \left\{ p^0_{xy} \left( 1 + \frac{du}{dx} \right) + p^0_{yy} \frac{du}{dy} + p^0_{yz} \frac{du}{dz} + p^1_{xy} \right\} \frac{d\delta u}{dy} dxdydz + \\ & + \iiint \left\{ p^0_{xz} \left( 1 + \frac{du}{dx} \right) + p^0_{yz} \frac{du}{dy} + p^0_{zz} \frac{du}{dz} + p^1_{xz} \right\} \frac{d\delta u}{dz} dxdydz. \end{aligned}$$

Avant d'intégrer par parties de manière à détacher trois inté-

grales doubles et à ne conserver sous les signes  $f$  que  $2u$  non différencié, il faut remarquer avec M. Ch. Neumann (qui a donné une analyse de ce genre pour le cas particulier de l'isotropie où on a  $p''_{xx} = p''_{yy} = p''_{zz}$  et les autres  $p''$  nuls) (\*) qu'il convient de changer, hors des accolades, les variables indépendantes  $x, y, z$  en  $x_1, y_1, z_1$ , coordonnées actuelles des points. Cela exige qu'on remplace

$$1^\circ \frac{\delta \delta u}{dx} \text{ par } \frac{\delta \delta u}{dx_1} \frac{dx_1}{dx} + \frac{\delta \delta u}{dy_1} \frac{dy_1}{dx} + \frac{\delta \delta u}{dz_1} \frac{dz_1}{dx} = \frac{\delta \delta u}{dx_1} \left(1 + \frac{du}{dx}\right) + \frac{\delta \delta u}{dy_1} \frac{dv}{dx} + \frac{\delta \delta u}{dz_1} \frac{dw}{dx},$$

$$2^\circ \text{ De même } \frac{\delta \delta u}{dy} \text{ par } \frac{\delta \delta u}{dx_1} \frac{du}{dy} + \frac{\delta \delta u}{dy_1} \left(1 + \frac{dv}{dy}\right) + \frac{\delta \delta u}{dz_1} \frac{dw}{dy},$$

$$3^\circ \text{ De même } \frac{\delta \delta u}{dz} \text{ par } \frac{\delta \delta u}{dx_1} \frac{du}{dz} + \frac{\delta \delta u}{dy_1} \frac{dv}{dz} + \frac{\delta \delta u}{dz_1} \left(1 + \frac{dw}{dz}\right).$$

4° Dans  $dx dy dz$ ,  $dx$  par  $\frac{dx}{dx_1} dx_1 + \frac{dx}{dy_1} dy_1 + \frac{dx}{dz_1} dz_1$ , en tirant  $dy_1$  et  $dz_1$  de la supposition de  $y$  et  $z$  constants ou de  $dy = 0$ ,  $dz = 0$ , c'est-à-dire en les tirant de

$$0 = \frac{dy}{dx_1} dx_1 + \frac{dy}{dy_1} dy_1 + \frac{dy}{dz_1} dz_1, \quad 0 = \frac{dz}{dx_1} dx_1 + \frac{dz}{dy_1} dy_1 + \frac{dz}{dz_1} dz_1,$$

(puisque, dans toute intégrale triple, l'intégration par rapport à une première variable se fait en supposant constantes les deux autres); et, ensuite,  $dy$  par  $\frac{dy}{dx_1} dx_1 + \frac{dy}{dy_1} dy_1 + \frac{dy}{dz_1} dz_1$  en faisant  $dx_1 = 0$ , et  $dz_1 = 0$ , c'est-à-dire par  $\frac{dy}{dy_1} dy_1 + \frac{dy}{dz_1} dz_1$ , en tirant,

$dz_1$  de  $0 = \frac{dz}{dy_1} dy_1 + \frac{dz}{dz_1} dz_1$ ; enfin,  $dz$  par  $\frac{dz}{dx_1} dx_1 + \frac{dz}{dy_1} dy_1 + \frac{dz}{dz_1} dz_1$  en faisant  $dx_1 = 0$ ,  $dy_1 = 0$ , c'est-à-dire par  $\frac{dz}{dz_1} dz_1$  (\*\*); ce qui revient à remplacer  $dx dy dz$  par  $dx_1 dy_1 dz_1$ , multipliée par le déterminant sextinôme  $\frac{dx}{dx_1} \frac{dy}{dy_1} \frac{dz}{dz_1}$  — etc., composé avec les neuf dérivées

$\frac{dx}{dx_1}, \frac{dx}{dy_1}, \frac{dx}{dz_1}, \frac{dy}{dx_1},$  etc., ou par le dénominateur commun des valeurs

(\*) Zur Theorie der Elasticität, § 2, p. 286-287, du 57<sup>e</sup> volume de Crelle.

(\*\*) Lecroix, Calc. diff. et int., t. 2, p. 207, n<sup>o</sup> 534.

de trois inconnues tirées de trois équations du premier degré dont les coefficients sont ces neuf dérivées; déterminant ou dénominateur qui n'est autre chose que le rapport du volume ancien au volume nouveau d'un même élément, et qu'on peut réduire à son premier terme  $\frac{dx}{dx_1} \frac{dy}{dy_1} \frac{dz}{dz_1}$ , en sorte qu'il faut remplacer

$$dxdydz \quad \text{par} \quad dx_1 dy_1 dz_1 \left(1 - \frac{du}{dx_1}\right) \left(1 - \frac{dv}{dy_1}\right) \left(1 - \frac{dw}{dz_1}\right)$$

qui revient, en négligeant les produits de  $du$ ,  $dv$ ,  $dw$ , à

$$dx_1 dy_1 dz_1 \left(1 - \frac{du}{dx} - \frac{dv}{dy} - \frac{dw}{dz}\right).$$

En faisant ces quatre substitutions, effectuant les multiplications des polynômes entre accolades par les dix facteurs

$$\left(1 - \frac{du}{dx} - \frac{dv}{dy} - \frac{dw}{dz}\right), \quad 1 + \frac{du}{dx}, \quad \frac{dv}{dz}, \quad \text{etc.},$$

et négligeant encore les produits de  $du$ ,  $dv$ ,  $dw$  entre eux, la partie

(205) du second membre  $\iiint dxdydz \delta\Phi$  de (203) devient

$$(206) \left\{ \begin{array}{l} \iiint A \frac{d\delta u}{dx_1} dx_1 dy_1 dz_1 + \iiint B \frac{d\delta u}{dy_1} dx_1 dy_1 dz_1 + \iiint C \frac{d\delta u}{dz_1} dx_1 dy_1 dz_1 \\ \text{en faisant} \\ A = p'_{xx} \left(1 + \frac{du}{dx} - \frac{dv}{dy} - \frac{dw}{dz}\right) + 2p'_{xy} \frac{du}{dy} + 2p'_{xz} \frac{du}{dz} + p'_{yy} \\ B = p'_{xy} \left(1 - \frac{dw}{dz}\right) + p'_{xx} \frac{dv}{dx} + p'_{yy} \frac{du}{dy} + p'_{yz} \frac{du}{dz} + p'_{zz} \frac{dv}{dz} + p'_{xy} \\ C = p'_{xz} \left(1 - \frac{dv}{dy}\right) + p'_{xx} \frac{dw}{dz} + p'_{yy} \frac{dv}{dy} + p'_{yz} \frac{dv}{dy} + p'_{zz} \frac{dw}{dz} + p'_{xz} \end{array} \right.$$

Intégrant par parties de manière à ne conserver les  $du$  que non différenciés, et désignant par les accents ' et '' les valeurs de  $du$  et de  $A$ , ou  $B$ , ou  $C$  relatives aux points où l'enveloppe du corps est traversée par des droites respectivement parallèles aux  $x$ , aux  $y$ , aux  $z$ , cette partie en  $u$  du travail virtuel intérieur se change en

$$(207) \iint dy_1 dz_1 (A' \delta u'' - A \delta u') + \iint dz_1 dx_1 (B'' \delta u'' - B' \delta u') + \iint dx_1 dy_1 (C'' \delta u'' - C' \delta u') -$$

$$- \iint dx_1 dy_1 dz_1 \left\{ \begin{aligned} & p''_{xx} \frac{d^2 u}{dx dx_1} + p''_{yy} \frac{d^2 u}{dy dy_1} + p''_{zz} \frac{d^2 u}{dz dz_1} + \\ & + p''_{yz} \left( \frac{d^2 u}{dy dz_1} + \frac{d^2 u}{dz dy_1} \right) + p''_{zx} \left( \frac{d^2 u}{dz dx_1} + \frac{d^2 u}{dx dz_1} \right) + \\ & + p''_{xy} \left( \frac{d^2 u}{dx dy_1} + \frac{d^2 u}{dy dx_1} \right) + \frac{dp'_{xx}}{dx_1} + \frac{dp'_{xy}}{dy_1} + \frac{dp'_{xz}}{dz_1} \end{aligned} \right\} \delta u.$$

Comme l'équation d'équilibre (203) doit être vérifiée pour tous les mouvements virtuels possibles, ou quelles que soient les valeurs de  $\delta u$ ,  $\delta v$ ,  $\delta w$ , on peut déjà évaluer, dans les deux membres, ce qui sous les signes  $\iiint$  d'intégration triple est affecté de  $\delta u$ . Il en résulte, en remplaçant les dérivées par rapport à  $x_1, y_1, z_1$ , par les dérivées par rapport à  $x, y, z$  (ce qui peut se faire vu qu'on ne néglige ainsi que des produits d'ordre supérieur), la première des trois équations suivantes dont les deux autres s'obtiennent de même par les  $\delta v$  et par les  $\delta w$  :

$$(208) \left\{ \begin{aligned} X &= p''_{xx} \frac{d^2 u}{dx^2} + p''_{yy} \frac{d^2 u}{dy^2} + p''_{zz} \frac{d^2 u}{dz^2} + 2p''_{yz} \frac{d^2 u}{dy dz} + 2p''_{zx} \frac{d^2 u}{dz dx} + 2p''_{xy} \frac{d^2 u}{dx dy} \\ &+ \frac{dp'_{xx}}{dx} + \frac{dp'_{xy}}{dy} + \frac{dp'_{xz}}{dz}, \\ Y &= p''_{xx} \frac{d^2 v}{dx^2} + p''_{yy} \frac{d^2 v}{dy^2} + \dots + 2p''_{xy} \frac{d^2 v}{dx dy} + \frac{dp'_{xy}}{dx} + \frac{dp'_{yy}}{dy} + \frac{dp'_{yz}}{dz}, \\ Z &= p''_{xx} \frac{d^2 w}{dx^2} + p''_{yy} \frac{d^2 w}{dy^2} + \dots + 2p''_{xy} \frac{d^2 w}{dx dy} + \frac{dp'_{xz}}{dx} + \frac{dp'_{yz}}{dy} + \frac{dp'_{zz}}{dz}; \end{aligned} \right.$$

c'est-à-dire, si les  $p''$  sont nuls, les trois équations (38) indéfinies d'équilibre, et, si les  $p''$  ne sont pas nuls, les trois équations plus complètes (154) de la note du § 72, p. 723 avec X, Y, Z au lieu des inerties.

Quant aux trois intégrales doubles de (207), si pour la première, par exemple,  $n'$  et  $n''$  sont les directions de la normale extérieure  $n$  à l'enveloppe  $\Omega$  en deux des points correspondants dont on a parlé, situés sur une même parallèle aux  $x$ , et  $d\Omega'$ ,  $d\Omega''$  les éléments correspondants de  $\Omega$ , ayant pour projections  $dy, dz_1$  sur un plan perpendiculaire aux  $x$ , on aura

$$dy_1 dz_1 = d\Omega'' \cos(n'', x) = -d\Omega' \cos(n', x).$$



D'où il résulte que  $\iint dy, dz, (A''\delta u'' - A'\delta u')$  est la même chose que  $\int d\Omega'' \cos(n'', x) A'' \delta u'' + \int d\Omega' \cos(n', x) A' \delta u'$ , ou que

$$\int d\Omega \cos(n, x) A \delta u,$$

l'intégrale  $\int$  s'étendant maintenant à toute l'enveloppe  $\Omega$  (1).

La première ligne de (207) est ainsi la même chose que

$$(209) \quad \int d\Omega [A \cos(n, x) + B \cos(n, y) + C \cos(n, z)] \delta u.$$

Comparant à la partie du 1<sup>er</sup> membre de l'équation d'équilibre (203) qui est affecté de  $d\Omega \delta u$ , l'on obtient

$$(210) \quad \omega \cos(\omega, x) = A \cos(n, x) + B \cos(n, y) + C \cos(n, z).$$

Or, en faisant coïncider successivement l'axe des  $x$ , l'axe des  $y$ , l'axe des  $z$  avec la normale  $n$ , le second membre se réduit

$$\text{à } A, \quad \text{à } B, \quad \text{à } C;$$

et le premier membre est

$$p_{xx}, \quad p_{yy}, \quad p_{zz}.$$

On a donc la première des trois équations suivantes, dont les deux autres se démontrent de même par les termes affectés de  $\delta v$  et de  $\delta w$ :

$$(211) \quad \begin{cases} \omega \cos(\omega, x) = p_{xx} \cos(n, x) + p_{xy} \cos(n, y) + p_{xz} \cos(n, z) \\ \omega \cos(\omega, y) = p_{xy} \cos(n, x) + p_{yy} \cos(n, y) + p_{yz} \cos(n, z) \\ \omega \cos(\omega, z) = p_{xz} \cos(n, x) + p_{yz} \cos(n, y) + p_{zz} \cos(n, z) \end{cases}$$

c'est-à-dire les équations définies (39) du § 27; et par cela seul se trouve démontré le théorème de projections de plans de pressions du § 16.

Et on a aussi, vu les significations (206) de  $A, B, C$ , la première, la sixième et la cinquième des formules suivantes, dont les autres se prouvent de même:

(1) Cette transformation connue, à laquelle nous avons déjà eu recours à la note du § 70, est employée à la *Mécanique analytique*, I, VII, 29 et 30, et à la deuxième Leçon de M. Lamé, § 40, p. 22.

$$(212) \left\{ \begin{array}{l} p_{xx} = p^{\circ}_{xx} \left( 1 + \frac{du}{dx} - \frac{dv}{dy} - \frac{dw}{dz} \right) + 2p^{\circ}_{xy} \frac{du}{dy} + 2p^{\circ}_{xz} \frac{du}{dz} + p^1_{xy}, \\ p_{yy} = p^{\circ}_{yy} \left( 1 - \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} - \frac{dw}{dz} \right) + 2p^{\circ}_{yz} \frac{dv}{dz} + 2p^{\circ}_{xy} \frac{dv}{dx} + p^1_{yy}, \\ p_{zz} = p^{\circ}_{zz} \left( 1 - \frac{du}{dx} - \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} \right) + 2p^{\circ}_{xz} \frac{dw}{dz} + 2p^{\circ}_{yz} \frac{dw}{dy} + p^1_{zz}, \\ p_{yz} = p^{\circ}_{yz} \left( 1 - \frac{du}{dx} \right) + p^{\circ}_{vy} \frac{dw}{dy} + p^{\circ}_{xz} \frac{dv}{dz} + p^{\circ}_{zx} \frac{dv}{dx} + p^{\circ}_{zy} \frac{dw}{dx} + p^1_{yz}, \\ p_{zx} = p^{\circ}_{zx} \left( 1 - \frac{dv}{dy} \right) + p^{\circ}_{xz} \frac{du}{dz} + p^{\circ}_{zz} \frac{dw}{dx} + p^{\circ}_{zy} \frac{dw}{dy} + p^{\circ}_{yz} \frac{du}{dy} + p^1_{zx}, \\ p_{xy} = p^{\circ}_{xy} \left( 1 - \frac{dw}{dz} \right) + p^{\circ}_{xz} \frac{dv}{dx} + p^{\circ}_{vy} \frac{du}{dy} + p^{\circ}_{yz} \frac{du}{dz} + p^{\circ}_{zz} \frac{dv}{dz} + p^1_{xy}. \end{array} \right.$$

Ce sont les expressions complètes des six composantes de pression, dues à M. Cauchy (1), que nous avons indiquées comme déduites (note du § 23, p. 572) du calcul des actions moléculaires fonctions des distances. On voit qu'elles peuvent être déduites aussi, et identiquement, de l'expression du potentiel, au moyen du calcul des variations, sans poser la valeur de ces actions ni invoquer *explicitement* leur loi. Cela n'empêche pas que la forme linéaire (12) des parties  $p^1_{xy}$ ,  $p^1_{yz}$ , ...,  $p^1_{xy}$  de ces composantes  $p$ , admises à priori par un si grand nombre d'auteurs, ne nous paraisse dépendre toujours de cette loi invoquée au moins implicitement et tacitement, comme on a vu au § 20 et dans tout l'Appendice V.

Il est remarquable, aussi, que les trois quadrimômes entre accolades de l'expression non encore transformée (205) donnent les composantes, suivant les  $x$ , des pressions sur les trois faces légèrement obliques et de superficies

$$\left( 1 + \frac{dv}{dy} \right) \left( 1 + \frac{dw}{dz} \right), \quad \left( 1 + \frac{dw}{dz} \right) \left( 1 + \frac{du}{dx} \right), \quad \left( 1 + \frac{du}{dx} \right) \left( 1 + \frac{dv}{dy} \right),$$

dans lesquelles les déplacements ont changé trois petites faces primitivement rectangulaires et = 1, et qui ont été données par Poisson à la page 47 (n° 22) du 20<sup>e</sup> cahier du *Journal de l'École polytechnique*, pour le cas particulier de l'isotropie. On peut en déduire, comme il a fait, au moyen du théorème de projections de plans de

(1) Page 438 de la 4<sup>e</sup> année (1828) des Exercices.

pression ou des formules de changement de plan (4), et des expressions (27), p. 571, de six des neuf cosinus des angles des intersections mutuelles de ces trois faces avec les  $x$ ,  $y$ ,  $z$  (les trois autres cosinus étant = 1 sensiblement), les expressions (212) que nous venons d'écrire, donnant les pressions sur les trois faces qui sont rectangulaires et = 1 après les déplacements. Il est encore remarquable que les neuf expressions des composantes obliques, substituées dans les équations indéfinies générales (38), donneraient, tout comme les expressions (212), les équations indéfinies développées (207)  $X = p''_{xx} \frac{d^2u}{dx^2} + \text{etc.}$ ; et qu'on aurait aussi ces équations (207) en intégrant par parties (205) sans le transformer en (206) par un changement des variables indépendantes  $x$ ,  $y$ ,  $z$  en  $x_1$ ,  $y_1$ ,  $z_1$ . Cela vient de ce que les équations (38)  $\frac{dp_{xx}}{dx} + \frac{dp_{yy}}{dy} + \frac{dp_{zz}}{dz} = X$ , etc., expriment aussi bien l'équilibre d'un élément parallélépipède oblique que de l'élément parallélépipède rectangle considéré § 27.

§ 85. *Expression du potentiel des actions intérieures, composé en les regardant comme fonctions des distances moléculaires.* — Navier, qui prenait pour l'action de deux molécules  $m$  et  $m$ , à une distance  $r$  devenue  $r_1$ , le produit

$$(213) \quad mm (r_1 - r) f' r$$

de leurs masses par une fonction  $f'$  de leur distance et par la petite augmentation  $r_1 - r$  de celle-ci, posait pour le travail du moment virtuel de cette action

$$mm(r_1 - r) f' r \delta r_1 = mm(r_1 - r) f' r \delta(r_1 - r) = mm f' r \delta \frac{(r_1 - r)^2}{2};$$

en sorte que le potentiel de celles qui sont exercées sur  $m$  par toutes les molécules  $m$  environnantes était  $m \sum m f' r \frac{(r_1 - r)^2}{2}$ , d'où pour celui de toute la masse,  $\rho$  désignant la densité

$$(214) \quad \iiint \rho dx dy dz \sum m r^2 \frac{f' r}{2} \left( \frac{r_1 - r}{r} \right)^2;$$

expression où il remplaçait  $\frac{r_1 - r}{r}$  par sa valeur (9)  $\frac{du}{dx} \cos^2(r, x) + \dots + \left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}\right) \cos(r, x) \cos(r, y)$ , et qu'il développait en faisant passer les carrés et produits des dérivées  $\frac{du}{du}$ , etc., hors des signes **S** des sommes qu'il convertissait ensuite en intégrales autour d'un point par coordonnées sphériques.

Puis, en différentiant par  $\delta$  et faisant varier  $u, v, w$  (sans  $x, y, z$ ), intégrant par parties etc. il obtenait, de l'équation générale d'équilibre posée par le principe des travaux virtuels, les trois équations indéfinies, et aussi les trois équations définies donnant implicitement les formules des pressions pour les corps d'égale élasticité en tous sens.

On arrive à des formules s'étendant aux contextures non-isotropes en conservant, sans les convertir en intégrales (ce qui n'est nécessaire dans aucun cas), les coefficients **S** qui affectent, au nombre de quinze distincts, les carrés et les produits des dérivées  $\frac{du}{dx}$  etc.; et l'on tient compte de l'état qui précède les déformations  $\lambda, g$  ou les déplacements  $u, v, w$  en prenant, avec Cauchy et Poisson, au lieu de (213), et comme nous avons fait à la note du § 23 (sauf  $R$  que nous écrivions au lieu de  $fr$ ):

$$(215) \quad mmf(r_1)$$

pour l'action des molécules  $m$  et  $m$  quand leur distance est  $r_1$ , et en opérant ainsi qu'il suit, comme ont fait à peu près MM. Haughton <sup>(1)</sup> et Neumann <sup>(2)</sup> d'une manière moins générale.

Si nous faisons pour un instant

$$(216) \quad \int_r^{r_1} fr_1 dr_1 = \varphi(r_1),$$

nous avons, **S** désignant une somme relative à toutes les molé-

(1) On the Equilibrium and Motion, etc. Irish Academy, vol. XXI, p. 455-458.

(2) Zur Theorie der Elasticität, § 4<sup>or</sup>, p. 263-265 du 57<sup>e</sup> volume de Crelle.



cules  $m$  dans la sphère d'activité sensible de  $m$  et à leurs distances  $r$  ou  $r_1$ ,

$$m \sum m \varphi(r_1) = m \sum m \left\{ \varphi(r) + (r_1 - r) \varphi'(r) + \frac{(r_1 - r)^2}{2} \varphi''(r) + \dots \right\}$$

ou, ce qui est la même chose vu que  $\varphi(r) = 0$ ,  $\varphi'(r) = f(r)$ , etc.

$$(217) \quad m \sum m \int_r^{r_1} f r_1 dr_1 = m \sum m \left\{ (r_1 - r) f r + \frac{(r_1 - r)^2}{2} \frac{df}{dr} + \dots \right\}.$$

Appelons comme au § 65 (p. 695) et déjà en partie à la note du § 23 (p. 569), avant et après les déplacements

$x, y, z$ , et  $x + u, y + v, z + w$  les coordonnées de  $m$ ,

$x + r c_{rx}, y + r c_{ry}, z + r c_{rz}$  et  $x + r c_{rx} + u + \Delta u, y + r c_{ry} + v + \Delta v,$   
 $z + r c_{rz} + w + \Delta w$  les coordonnées de  $m$ ,

nous avons, en nous tenant aux deux premiers ordres,

$$\begin{aligned} r_1 - r &= -r + [(r c_{rx} + \Delta u)^2 + (r c_{ry} + \Delta v)^2 + (r c_{rz} + \Delta w)^2]^{\frac{1}{2}} = \\ &= \frac{1}{2} r \frac{2r c_{rx} \Delta u + 2r c_{ry} \Delta v + 2r c_{rz} \Delta w + (\Delta u)^2 + (\Delta v)^2 + (\Delta w)^2}{r^2} \\ &\quad + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} - 1 \right) \cdot \frac{1}{2} \cdot r \frac{(2r c_{rx} \Delta u + 2r c_{ry} \Delta v + 2r c_{rz} \Delta w)^2}{r^2}. \end{aligned}$$

Substituons cette valeur de  $r_1 - r$  dans (217) en ayant égard à ce que

$$-\frac{fr}{2r} + \frac{1}{2} \frac{df}{dr} = \frac{r}{2} \frac{d}{dr} \frac{fr}{r}$$

et remarquons que l'on déduit de cette expression (217) le potentiel  $\Phi - \Phi^0$  (§ 83) des actions moléculaires mutuelles de l'unité de volume au point  $(x, y, z)$  entre l'état primitif où les distances sont  $r$  et l'état ultérieur où elles sont  $r_1$  en la multipliant par la densité  $\rho$  après avoir divisé par deux fois la masse de la molécule  $m$ , parce que la même force  $fr$  est relative à deux molécules qui l'exercent l'une sur l'autre; nous avons ainsi

$$(218) \quad \Phi = \Phi^0 + \frac{\rho}{2} \sum_m \int_r^{r_1} f r_1 dr_1 =$$

$$= \Phi^0 + \frac{\rho}{2} \sum_m \left\{ f r \left[ c_{rx} \Delta u + c_{ry} \Delta v + c_{rz} \Delta w + \frac{(\Delta u)^2 + (\Delta v)^2 + (\Delta w)^2}{2r} \right] + \frac{r}{2} \frac{d f r}{d r} (c_{rx} \Delta u + c_{ry} \Delta v + c_{rz} \Delta w)^2 \right\}.$$

Mettant maintenant pour

$$\Delta u, \Delta v, \Delta w$$

leurs valeurs (138) p. 694, bornées au premier et au second ordre, savoir

$$(219) \quad \frac{du}{dx} r c_{rx} + \frac{du}{dy} r c_{ry} + \frac{du}{dz} r c_{rz} + \frac{r^2}{1.2} \left( \frac{d^2 u}{dx^2} c_{rx}^2 + \dots + 2 \frac{d^2 u}{dx dy} c_{rx} c_{ry} \right),$$

$$\frac{dv}{dx} r c_{rx} + \frac{dv}{dy} r c_{ry} + \frac{dv}{dz} r c_{rz} + \theta(c_r), \frac{dw}{dx} r c_{rx} + \frac{dw}{dy} r c_{ry} + \frac{dw}{dz} r c_{rz} + \text{etc.},$$

effectuant les multiplications et faisant passer hors des signes  $\sum$  les dérivées de  $u, v, w$  et leurs produits du second degré seulement, les termes affectés des dérivées du second ordre doivent être effacés comme affectés de ces coefficients, de la forme  $\frac{\rho}{2} \sum_m r f r c_{rx}^2$ ,  $\frac{\rho}{2} \sum_m r f r c_{ry}^2$ , etc. qui offrent une réunion de termes égaux deux à deux et de signe contraire comme nous avons dit au § 65 p. 694, et l'on a, avec les notations (19) et (26) de la note du § 23, p. 568 et 570, c'est-à-dire avec

$$\frac{\rho}{2} \sum_m r f r c_{rx}^2 = p^0_{xx}, \dots + \frac{\rho}{2} \sum_m r f r c_{ry} c_{rz} = p^0_{yz}, \dots$$

$$\text{et } \frac{\rho}{2} \sum_m r^3 \frac{d f r}{d r} c_{rx}^2 = a_{xxxx}, \dots, \frac{\rho}{2} \sum_m r^3 \frac{d f r}{d r} c_{ry}^2 c_{rz}^2 = a_{yyyy}, \text{ etc.}$$

on a, dis-je, précisément l'expression générale (201) du potentiel  $\Phi$ , avec (199)  $\frac{1}{2} a_{xxxx} \Delta^2 x + \text{etc.}$  au lieu de  $\Phi^1$ , et substitution, à la place de  $\Delta x, \dots, \Delta y, \dots,$

1° de  $\frac{du}{dx}, \dots, \frac{dv}{dx} + \frac{dw}{dy}, \dots$  dans les termes de  $\Phi^1$  affectés des coefficients  $a_{xxxx}, \dots, a_{yyyy}$  ;

2° de  $\frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left( \frac{du}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{dv}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{dw}{dx} \right)^2, \dots, \frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy} + \frac{du}{dy} \frac{du}{dz} + \text{etc.}$

dans les termes affectés des  $p^\circ$ .

Il est remarquable qu'on arrive ainsi, par des considérations si différentes, précisément aux mêmes expressions (40), (41), des dilatations et glissements poussés jusqu'aux quantités du second ordre, qu'au § 29 du 3<sup>e</sup> app<sup>ce</sup> (p. 589), expressions dont nous avons reconnu que l'emploi était nécessaire (§ précédent) pour obtenir, en appliquant celle du potentiel, les termes en  $p^\circ$  complets dans les équations définies (207) ou dans les formules (212) des composantes de pression pour le cas général où il y a des pressions  $p^\circ_{xx}$  etc. antérieurement aux déplacements  $u, v, w$  des points.

Ainsi, en laissant de côté la question du choix du moyen le plus prompt et le plus direct à mettre en œuvre pour établir facilement les équations et formules de l'élasticité, et celle de savoir si l'emploi du potentiel ne pourrait pas être dégagé un jour de ce qu'il a jusqu'ici de trop analytique et être amené, dans ces sortes de question, à une forme à peu près aussi élémentaire que celle à laquelle on a amené de notre temps l'emploi des puissances vives et du travail dans d'autres parties de la mécanique, nous voyons que ces considérations donnent d'une manière large, comme corollaires d'un même principe et sans ambiguïté, tout ce dont on a besoin, en sorte qu'elles doivent être tout à fait dans la nature de la question.

§ 86. *Formule générale symbolique donnant les coefficients des équations de l'élasticité pour un système quelconque d'axes coordonnés  $x', y', z'$ , connaissant ces coefficients pour un premier système  $x, y, z$ .* — Les six constantes  $p^\circ_{xxxx}, p^\circ_{yyyy}, \dots$ , qui affectent comme coefficients un certain nombre de termes de ces équations quand il y a des pressions antérieurement aux déformations considérées, s'obtiennent pour les nouveaux axes  $x', y', z'$ , en fonction des six constantes analogues  $p^\circ_{xxx}, p^\circ_{yyy} \dots$  pour les axes anciens  $x, y, z$ , par les formules déjà trouvées (h) du § 17, p. 548.

Pour obtenir aussi les 21 coefficients nouveaux

$$a_{x'x'x'x'z'z'}, a_{x'x'x'y'y'y'}, \dots, a_{y'y'y'y'z'z'z'}$$

en fonction des 21 anciens  $a_{xxxx}, a_{yyyy} \dots$  et des 9 cosinus

$$c_{x'z'z'}, c_{y'z'z'}, c_{z'z'z'}, c_{x'y'y'}, \dots, c_{z'z'z'}$$

et même, plus généralement, ceux qui doivent affecter les dilata-  
tions et glissements  $\partial_{x'}$ ,  $\partial_{y'}$ , ...  $\xi_{xy}$ , parallèles aux nouveaux axes,  
dans l'expression d'une composante

$$P_{ns},$$

parallèlement à une ligne quelconque  $s$ , de la pression sur une face  
oblique à  $s$ , dont la normale  $n$  a aussi une direction quelconque,  
généralement oblique elle-même à  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$ , convenons que

$$a_{xx}, a_{yy}, \dots a_{xy}, \text{ et } a_x, a_y, a_z, a_{x'}, \dots a_n, a_s,$$

sont de purs symboles qui ne représentent aucune quantité, mais  
dont les produits, algébriquement formés avec des symboles de  
même espèce lorsqu'on développe les produits de polynômes où  
ils entrent, représentent les coefficients  $a_{xxxx}$ ,  $a_{xyyy}$ , ...  $a_{x'iy'jz'}$ , etc.,  
en mettant à la suite les quatre sous-lettres des facteurs, dans  
l'ordre où les produits sont indiqués, en sorte que

$$(220) \quad a_{xxxx} = a_x a_x a_x a_x; \quad a_{x'iy'jz'} = a_{x'iz'} a_y a_{y'j}, \text{ etc. } (1).$$

Il en résulte que les formules (12) des composantes de pression  
quand il n'y en avait pas d'antérieures aux déformations  $\partial$ ,  $g$ ,  
peuvent être écrites

$$(221) \quad \left\{ \begin{array}{l} p_{xx} = a_{xx} (a_{xx}\partial_x + a_{yy}\partial_y + a_{zz}\partial_z + a_{yz}\xi_{yz} + a_{zx}\xi_{zx} + a_{xy}\xi_{xy}) \\ p_{yy}, p_{zz}, p_{yz}, p_{zx}, p_{xy} = a_{yy}, a_{zz}, a_{yz}, a_{zx}, a_{xy} \text{ multipliés par le} \\ \text{même sextinôme symbolique entre parenthèses.} \end{array} \right.$$

Substituant dans la formule de changement de plan de pres-  
sion (3) p. 548 qui est

$$(222) \quad P_{ns} = p_{xx} C_{nx} C_{sx} + p_{yy} C_{ny} C_{sy} + p_{zz} C_{nz} C_{sz} + p_{yz} (C_{ny} C_{sz} + C_{nz} C_{sy}) + \\ + p_{zx} (C_{nz} C_{sx} + C_{nx} C_{sz}) + p_{xy} (C_{nz} C_{sy} + C_{ny} C_{sz}),$$

(1) Les symboles à deux sous-lettres sont analogues à ceux que M. Rankine  
(On Axes of Elasticity and crystalline Forms, read 24 June 1855, to the Royal Society  
of London) nomme *ombres sylvestriennes*, ou quantités *ombrales*, parce que M. Syl-  
vester, qui les a employés avec succès, dit que ce sont des *ombres* (shadows) de  
*quantités* (On the Principles of Calculus of Forms in Cambridge and Dublin mathe-  
matical Journal., vol. VII; ou XI of Cambridge Journal, 1852, p. 76).

M. Cauchy et d'autres analystes s'étaient déjà servis de symboles de ce genre,  
auxquels on pourrait rattacher même les imaginaires.

on a le même sextinôme contenu entre parenthèses dans (221), multiplié par celui dans lequel se change (222) quand on met des  $a$  pour des  $p$ ; c'est-à-dire qu'on a l'expression suivante parce que celui-ci est décomposable en deux trinômes :

$$(223) \quad p_{ns} = (a_x c_{nx} + a_y c_{ny} + a_z c_{nz}) (a_x c_{sx} + a_y c_{sy} + a_z c_{sz}) \times \\ \times (a_{xx} \delta_x + a_{yy} \delta_y + a_{zz} \delta_z + a_{yz} \xi_{yz} + a_{xz} \xi_{xz} + a_{xy} \xi_{xy}).$$

Remplaçons, dans le dernier facteur,  $\delta_x, \delta_y, \dots, \xi_{xy}$  par leurs expressions en  $\lambda_x, \lambda_y, \dots, \xi_{xy}$ , qu'on obtient des formules de transformation (14), p. 554, en mettant  $x, y, z$  pour  $x', y', z'$  et réciproquement; il est facile de voir, en réunissant les termes en  $\lambda_x$ , que cette dilatation sera affectée d'un sextinôme revenant à

$$(a_x c_{x/x} + a_y c_{x/y} + a_z c_{x/z})^2;$$

et, en réunissant les termes en  $\xi_{y/x}$ , que ce glissement sera affecté d'un polynôme revenant à

$$(a_x c_{y/x} + a_y c_{y/y} + a_z c_{y/z}) (a_x c_{x/x} + a_y c_{x/y} + a_z c_{x/z});$$

en sorte que si l'on pose, par analogie avec les formules (12)  $p_{sx} = a_{xx} \lambda_x \delta_x + \text{etc.}$  de la p. 556,

$$(224) \quad p_{ns} = a_{nsx/x'} \lambda_x + \dots + a_{nsy/y'} \xi_{y/x'} + \dots + a_{nsz/z'} \xi_{z/y'},$$

ou si l'on appelle  $a_{nsx/x'}, \dots, a_{nsz/z'}$  les coefficients de  $\lambda_x, \dots, \xi_{z/y'}$  dans l'expression de  $p_{ns}$  en fonction de ces six dilatations et glissements, et si l'on désigne par

$$a_n, \quad a_s, \quad a_{x'}, \quad a_{y'}, \quad a_{z'},$$

les cinq trinômes contenus respectivement dans (223) et dans les deux expressions qui suivent, on a

$$a_{nsx/x'} = a_n a_x a_{x'} a_{x'}, \quad a_{nsy/y'} = a_n a_y a_{y'} a_{y'}$$

D'où cette formule générale

$$(225) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_{nspq} = a_n a_p a_q \text{ si } a_i = a_x \cos(i, x) + a_y \cos(i, y) + a_z \cos(i, z); \\ p, q \text{ étant des directions prises parmi celles de coordonnées rectangles} \\ \text{nouvelles } x', y', z', \\ \text{si et } s \text{ étant, ou des directions prises parmi celles de } x', y', z', \text{ ou deux} \\ \text{autres directions absolument quelconques,} \\ i \text{ étant l'une quelconque de ces quatre directions.} \end{array} \right.$$

Le produit  $a_n a_s a_p a_q$  des quatre trinômes symboliques doit être effectué dans l'ordre indiqué, sans pouvoir faire d'autre interversion que celle des deux premiers facteurs entre eux et celle des deux derniers facteurs entre eux, si les directions  $n, s$  ne sont pas prises comme  $p, q$  parmi celles de trois axes rectangulaires.

Mais l'interversion des deux premiers à la fois avec les deux derniers à la fois est possible si  $n$  et  $s$  sont prises parmi celles-ci.

Et alors l'interversion d'un des premiers facteurs avec un des derniers, et par conséquent de tous entre eux, sera permise si l'on admet le principe des actions moléculaires conduisant aux six égalités complémentaires (150)  $a_{xyxz} = a_{yyxz}$ , etc.

On peut aussi démontrer la formule de transformation (225) (au moins quand  $n, s$  sont pris comme  $p, q$  parmi les nouveaux axes  $x', y', z'$ ) par la considération du potentiel  $\Phi^1$ , exprimable toujours par la formule (199) quand on change d'axes, en mettant  $x', y', z'$  à la place des sous-lettres  $x, y, z$ .

§ 87. Surface qui donne la distribution des élasticités directes autour d'un même point. Cas de trois plans de symétrie. Condition pour que ces élasticités n'aient que trois maxima ou minima. — On a, comme application de (225), en y remplaçant  $n, s, p, q$  par  $x'$

$$(226) \quad a_{x'nizizi} = [(a_x C_{xxz} + a_y C_{yxi} + a_z C_{zzz})^2]^{\frac{1}{2}}$$

ou, en développant, et mettant pour simplifier

$$C_x, C_y, C_z \text{ au lieu de } C_{x'z}, C_{y'z}, C_{z'z}$$

$$(227) \quad a_{x'nizizi} = a_{xxxx} C_x^4 + a_{yyyy} C_y^4 + a_{zzzz} C_z^4 + 2(2a_{xyyz} + a_{yyzi}) C_x^2 C_y^2 + 2(2a_{xzzz} + a_{zzzx}) C_x^2 C_z^2 + 2(2a_{zyzy} + a_{zxzy}) C_x^2 C_y^2 + 4(a_{xxyx} + 2a_{xzyz}) C_x^2 C_y C_z + 4(a_{yyzz} + 2a_{zyyz}) C_y^2 C_x C_z + 4(a_{xzzx} + 2a_{yzzz}) C_x^2 C_z C_y + 4a_{yyyz} C_y^2 C_z + 4a_{zzzy} C_z^2 C_y + 4a_{zzzz} C_x^2 C_z + 4a_{zzzx} C_x^2 C_y + 4a_{yyyz} C_y^2 C_z$$

Telle est l'expression, pour une direction  $x'$  quelconque, de l'élasticité directe ou longitudinale, car les coefficients tels que  $a_{xxxx}$ ,  $a_{yyyy}$ , etc., sont ainsi appelés par M. Rankine et d'autres auteurs, qui nomment  $a_{xyyz}$ ,  $a_{yyzi}$ ,  $a_{xzyz}$  les élasticités latérales, et  $a_{yzyz}$ ,  $a_{zxxz}$ ,  $a_{zyzy}$  les élasticités tangentielles, qu'ils appellent aussi de rigidité,

en les regardant comme distinctives des corps solides. Les douze autres coefficients sont appelés *élasticités asymétriques*.

Si, dans l'équation (227), on fait

$$C_x = x \sqrt[4]{a_{x'x'x'x'}}, \quad C_y = y \sqrt[4]{a_{y'y'y'y'}}, \quad C_z = z \sqrt[4]{a_{z'z'z'z'}}$$

on a l'équation suivante, appelée *tasinomique* par M. Rankine

$$(228) \quad 1 = \text{le second nombre de (227) avec } x, y, z \text{ au lieu de } C_x, C_y, C_z$$

Elle représente une surface du quatrième degré ayant son centre à l'origine, et qui fournit la loi de distribution des *élasticités directes*  $a_{x'x'x'x'}$  autour d'un point quelconque, car ses rayons vecteurs dans les diverses directions  $x'$  mesurent les inverses

$$\frac{1}{\sqrt[4]{a_{x'x'x'x'}}$$

des racines quatrièmes de ces élasticités.

MM. Haughton, Rankine, etc., ont remarqué depuis longtemps l'analogie de l'expression (227) de  $a_{x'x'x'x'}$  avec celle (199) du potentiel  $\Phi^1$ , et la propriété que possède la surface (228) de donner, par sa forme, toutes les circonstances de l'élasticité, car ses quinze coefficients, les uns tels qu'ils y entrent, les autres divisés par 6, par 12, par 4, sont ceux  $a_{xxxx}$ ,  $a_{yyyy}$ , etc., des diverses élasticités, *mais pourvu qu'on admette les six égalités complémentaires*

$$(150) \quad a_{yxyz} = a_{yyxz}, \quad a_{xyyz} = a_{xxyy}, \text{ etc.}$$

Quand les  $yz$ ,  $zx$ ,  $xy$  sont trois plans de symétrie de contexture, tous les coefficients des deux dernières lignes de l'expression (227) disparaissent, comme on a vu au § 24 (1), et elle se réduit, en fai-

(1) La formule générale de transformation (225)<sup>6</sup> ou l'expression symbolique  $a_i = a_x c_{ix} + a_y c_{iy} + a_z c_{iz}$  le montre d'une manière fort simple, car si l'on prend  $x'$  directement opposé à  $x$ , en laissant  $y'$ ,  $z'$  dans les directions de  $y$  et de  $z$ , comme on a alors  $c_{xx'} = -1$ ,  $c_{yy'} = 1$ ,  $c_{zz'} = 1$  et les six autres cosinus nuls, cette expression donne

$$a_{x'} = -a_x, \quad a_{y'} = a_y, \quad a_{z'} = a_z;$$

donc, d'après  $a_{nspq} = a_n a_s a_p a_q$ , tous les  $a$  qui ont  $x$  comme sous-lettre une ou trois fois doivent s'annuler, ce qui donne les formules (29)  $p_{xx} = a_x + r^2 y$  + etc. et par suite celles (30), de la page 577.

sant comme à ce §

$$(229) \begin{cases} a_{xxxx} = a, & a_{yyyy} = b, & a_{zzzz} = c, \\ a_{yyyz} = d, & a_{zzzz} = e, & a_{xyzy} = f, & a_{yyzz} = d', & a_{zzzz} = e', & a_{zxyy} = f', \end{cases}$$

à (230)

$$a_{x^2y^2z^2} = ac^2x + bc^2y + cc^2z + 2(2d + d')c^2y^2z^2 + 2(2e + e')c^2z^2x^2 + 2(2f + f')c^2x^2y^2 \quad (1)$$

en sorte que l'équation de la surface (228) se réduit à

$$(231) \quad 1 = ax^4 + by^4 + cz^4 + 2(2d + d')y^2z^2 + 2(2e + e')z^2x^2 + 2(2f + f')x^2y^2.$$

Les maxima et minima du rayon vecteur s'obtiennent en égalant à zéro la différentielle de (230) par rapport aux trois cosinus et éliminant l'un d'entre eux au moyen de  $c_x dc_x + c_y dc_y + c_z dc_z = 0$  (tiré de  $c_x^2 + c_y^2 + c_z^2 = 1$ ), d'où, en égalant séparément à zéro ce qui affecte les différentielles des deux autres, deux équations contenues dans les trois premiers membres de l'égalité multiple suivante, dont le dernier membre s'obtient en composant une quatrième fraction avec un numérateur égal à la somme des numérateurs et un dénomina-

(1) Si  $x$  est un axe de symétrie, on a d'abord  $b = c$ ,  $2e + e' = 2f + f'$ , ce qui, vu  $c_y^2 + c_z^2 = 1 - c_x^2$  d'où  $c_y^4 + c_z^4 = (1 - c_x^2)^2 - 2c_y^2c_z^2$ , réduit cette expression à

$$a_{x^2y^2z^2} = ac^2x + b(1 - c_x^2)^2 + 2(2d + d' - b)c_y^2c_z^2 + 2(2e + e')c_x^2(1 - c_x^2).$$

Comme elle doit être indépendante de  $c_y$ , on doit avoir

$$b = 2d + d',$$

relation que nous avons démontrée au § 25, p. 580, d'une manière moins simple.

Green (Reflection and Refraction, p. 7) la démontre aussi en remplaçant dans l'expression (199) du potentiel  $\Phi^1$ , réduite à ses deux premières lignes,  $\partial_x, \partial_y$  et  $\xi_{xy}$  par les valeurs qu'ils prennent lorsqu'on fait tourner d'un angle infiniment petit  $\varepsilon$  les axes  $y, z$  autour de l'axe  $x$  resté immobile, c'est-à-dire par (expression 44 particularisée pour  $c_{xy} = -c_{yz} = \varepsilon$ , etc.)

$$\begin{aligned} \partial_{y'} &= \partial_y + \varepsilon \xi_{yz}, & \partial_{z'} &= \partial_z - \varepsilon \xi_{yz}, & \xi_{y'z'} &= \xi_{yz} + \varepsilon(\partial_x - \partial_y), \\ \xi_{z'x} &= \xi_{zx} - \varepsilon \xi_{zy}, & \xi_{xy'} &= \xi_{xy} + \varepsilon \xi_{zy}; \end{aligned}$$

car pour que cette expression reste la même, il faut

$$e = f, \quad e' = f', \quad b = c = 2d + d',$$

ce qui donne d'un seul coup toutes les conditions nécessaires et suffisantes de la symétrie de contexture autour de  $x$ . Cette rotation infiniment petite est préférable à la rotation d'un demi-angle droit, opérée au § 25, p. 580.



teur égal à la somme des dénominateurs après avoir multiplié haut et bas par les dénominateurs  $c_x$ ,  $c_y$ ,  $c_z$  respectivement

$$(232) \left\{ \begin{aligned} & \frac{[ac^2_x + (2f+f')c^2_y + (2e+e')c^2_z]c_x}{c_x} = \frac{[(2f+f')c^2_x + bc^2_y + (2d+d')c^2_z]c_y}{c_y} \\ & = \frac{[(2e+e')c^2_x + (2d+d')c^2_y + cc^2_z]c_z}{c_z} = \mu_{x/y/z} \\ & \text{à combiner avec } c^2_x + c^2_y + c^2_z = 1. \end{aligned} \right.$$

Les facteurs communs aux numérateurs et aux dénominateurs, qu'à dessein nous n'avons pas supprimés, montrent qu'on a déjà trois maxima et minima

$$(233) \left\{ \begin{aligned} & \text{Pour } c_y = 0, \quad c_x = 0, \quad c^2_z = 1, \quad \text{d'où } \mu_{x/y/z} = a, \\ & \quad c_x = 0, \quad c_z = 0, \quad c^2_y = 1, \quad \quad \quad = b, \\ & \quad c_x = 0, \quad c_y = 0, \quad c^2_x = 1, \quad \quad \quad = c, \end{aligned} \right.$$

c'est-à-dire dans les directions des trois axes coordonnés.

On en obtient deux autres en combinant  $c_z = 0$  avec ce qui résulte du second et du troisième membre égaux après avoir été débarrassés des facteurs  $\frac{c_y}{c_x}$ ,  $\frac{c_x}{c_z}$ , ce qui donne  $bc^2_y + (2d+d')c^2_x = (2d+d')c^2_y + cc^2_x$ , d'où les deux premiers des six maxima ou minima suivants, dont les quatre autres s'obtiennent de même, et qui ont lieu suivant les directions comprises dans les angles plans  $yz$ ,  $zx$ ,  $xy$  et leurs opposés :

$$(234) \left\{ \begin{aligned} & c_z = 0, \quad \frac{c_x}{c_y} = \pm \sqrt{\frac{b - (2d+d')}{c - (2d+d')}} \quad \text{d'où } \mu_{x/y/z} = \frac{bc - (2d+d')^2}{b+c - 2(2d+d')} \\ & c_y = 0 \quad \text{avec des valeurs analogues de } \frac{c_x}{c_z} \quad \text{et } \mu_{x/y/z}; \\ & c_x = 0 \quad \text{id.} \quad \text{id.} \quad \frac{c_y}{c_z} \quad \text{id.} \end{aligned} \right.$$

Enfin, il peut y avoir quatre autres solutions ou directions de maximum ou de minimum, comprises dans l'intérieur des huit angles trièdres des axes principaux  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , et qu'on obtient en combinant  $c^2_x + c^2_y + c^2_z = 1$  avec ce qui résulte des trois trinômes entre crochets de (232) égaux entre eux, ce qui donne

$$(235) \left\{ \begin{array}{l} c_x = \pm \sqrt{\frac{N_x}{N_x + N_y + N_z}}, \quad c_y = \pm \sqrt{\frac{N_y}{N_x + N_y + N_z}}, \quad c_z = \pm \sqrt{\frac{N_z}{N_x + N_y + N_z}}, \\ \text{si } N_x = (b - 2f - f')(e - 2e - e') - (2f + f' - 2d - d')(2e + e' - 2d - d'), \\ \quad N_y = (e - 2d - d')(a - 2f - f') - (2d + d' - 2e - e')(2f + f' - 2e - e'), \\ \quad N_z = (a - 2e - e')(b - 2d - d') - (2e + e' - 2f - f')(2d + d' - 2f - f'). \end{array} \right.$$

Le six maxima et minima (234), compris dans les angles plans  $yz$ ,  $zx$ ,  $xy$ , manquent, vu l'imaginariété des rapports entre les cosinus, lorsque

$$(236) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2d + d' \text{ est compris entre } b \text{ et } c, \\ 2e + e' \text{ entre } c \text{ et } a, \\ 2f + f' \text{ entre } a \text{ et } b. \end{array} \right.$$

Ce sont les conditions, *probablement toujours remplies dans la nature*, pour que les élasticités directes *varient graduellement* dans les trois plans principaux ou de symétrie, ou ne croissent pas d'abord pour décroître ensuite en allant de l'une à l'autre de leurs valeurs principales  $b$  et  $c$ ,  $c$  et  $a$ ,  $a$  et  $b$ .

Alors, pour que les maxima et minima (235), de l'intérieur des angles trièdres, manquent aussi, ou bien se confondent avec ceux  $a$ ,  $b$ ,  $c$  dirigés suivant les arêtes de ces angles, il faut, ou qu'une ou plusieurs des quantités  $N_x$ ,  $N_y$ ,  $N_z$  s'annulent, ou que l'une des trois ait un signe différent des deux autres, afin qu'un ou deux des rapports  $\frac{c_y}{c_x}$ ,  $\frac{c_z}{c_x}$  soient imaginaires. C'est bien ce qui a lieu, par exemple, si, les conditions (236) étant remplies, et  $a$ ,  $b$ ,  $c$  étant rangés par ordre de grandeur en sorte que  $a > b > c$ ,  $2e + e'$  est ou plus petit que  $2d + d'$  ou plus grand que  $2f + f'$ , c'est-à-dire tombe hors de l'intervalle de  $2d + d'$  à  $2f + f'$ . Mais une pareille relation entre les grandeurs serait bizarre et ne saurait guère être non plus dans la nature, car, *très-probablement* :

$$(237) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Quand les conditions (236) sont remplies,} \\ \text{si } a > b > c, \text{ on a } 2d + d' < 2e + e' < 2f + f'. \end{array} \right.$$

Or on peut encore, avec cette dernière relation ou condition (237), remplir la suivante, que :

$$(238) \quad N_x, N_y, N_z \text{ ne soient pas tous trois de même signe.}$$

Il faudra, dans chaque cas, s'en assurer *numériquement* si l'on veut être certain que les nombres adoptés pour les six coefficients  $a, b, c, d = d', e = e', f = f'$ , que l'expérience ne pourra jamais fournir tous, donnent aux élasticités une loi de variation simple et naturelle en divers sens.

§ 88. *Surface donnant la distribution, autour d'un même point, des coefficients ou modules d'élasticité E de Young et de Navier.*

— Si, dans un corps élastique, on prend une petite portion ayant son milieu au point  $(x, y, z)$  et si l'on en extrait un prisme très-mince dont les arêtes aient la direction arbitraire  $x'$ , on aura (n° 21, 77) pour le module d'élasticité en ce point et dans cette direction.

$$(239) \quad E = \frac{p}{\delta_{x'}} \quad p \text{ étant la traction qui exercée sur l'unité de ses bases dilate le prisme dans la proportion } \delta_{x'}.$$

Comme les faces latérales de ce prisme, qu'on peut supposer rectangle, n'éprouvent aucune action extérieure, si  $y'$  et  $z'$  désignent les directions de leurs normales, on a

$$p_{x'x'} = p, \quad p_{y'y'} = 0, \quad p_{z'z'} = 0, \quad p_{y'z'} = 0, \quad p_{z'x'} = 0, \quad p_{x'y'} = 0;$$

d'où, d'après les formules (4) de changements de plans de pression avec  $x', y', z'$  pour  $x, y, z$  et réciproquement, et, ensuite, pour simplifier,  $c_x, c_y, c_z$  au lieu de  $c_{xx'}, c_{yy'}, c_{zz'}$  :

$$(240) \quad p_{xx} = pc_x^2, \quad p_{yy} = pc_y^2, \quad p_{zz} = pc_z^2, \quad p_{yz} = pc_y c_z, \quad p_{zx} = pc_z c_x, \quad p_{xy} = pc_x c_y.$$

Égalant les seconds membres aux expressions générales (12) des mêmes composantes  $p_{xx}$ , etc., nous aurons les six équations

$$(241) \quad \begin{cases} pc_x^2 = a_{xxxx}\delta_x + a_{xxyy}\delta_y + \dots + a_{xxxy}\xi_{xy} \\ pc_y^2 = a_{yyxx}\delta_x + \dots; \text{ etc.}; \quad pc_x c_y = a_{xyxx}\delta_x + \dots + a_{xyxy}\xi_{xy}, \end{cases}$$

dont on pourra, en les résolvant, tirer les valeurs des six inconnues

$$\delta_x, \quad \delta_y, \quad \delta_z, \quad \xi_{yz}, \quad \xi_{zx}, \quad \xi_{xy}.$$

Substituant celles-ci dans la première (41)

$$(242) \quad \delta_{x'} \text{ ou } \frac{p}{E} = \delta_x c_x^2 + \delta_y c_y^2 + \delta_z c_z^2 + \xi_{yz} c_y c_z + \xi_{zx} c_z c_x + \xi_{xy} c_x c_y,$$

on obtiendra, en divisant par  $p$

$$(243) \frac{1}{E} = \begin{cases} \text{Une expression à 45 termes en } C^4_x, C^4_y, C^4_z, C^2_y C^2_x, \dots, C^3_y C_x \\ \text{affectée de fonctions des 24 coefficients } a_{xxxx}, \dots, a_{xyxy}. \end{cases}$$

C'est la formule donnant la distribution des modules  $E$  en tous sens autour d'un point.

Si à partir de ce point on porte sur chaque droite de direction  $x'$  une longueur

$$\frac{x}{\sqrt{E}},$$

l'ensemble formera une surface du quatrième degré considérée par Cauchy (1), et dont il obtient l'équation en faisant, dans (243) multipliée par  $E$

$$C_x = \frac{x}{\sqrt{E}}, \quad C_y = \frac{y}{\sqrt{E}}, \quad C_z = \frac{z}{\sqrt{E}}.$$

Considérons seulement le cas de trois plans de symétrie, où l'on a (30) ou plutôt (175)

$$(244) \begin{cases} p_{xx} = a\partial_x + f\partial_y + e\partial_z & p_{yz} = dg_{yz}, \\ p_{yy} = f\partial_x + b\partial_y + d\partial_z & \text{et } p_{zx} = eg_{zx}, \\ p_{zz} = e\partial_x + d\partial_y + c\partial_z & p_{xy} = fg_{xy}. \end{cases}$$

Remplaçant les premiers membres par (240)  $pc^2_x, pc^2_y, \dots, pc_x c_y$ , tirant les valeurs de  $\partial_x, \partial_y, \partial_z, g_{yz}, g_{zx}, g_{xy}$  pour substituer dans (242)

$$\frac{p}{E} = \partial_x c^2_x + \dots, \text{ si nous faisons}$$

$$(245) \quad abc - ad'^2 - be'^2 - cf'^2 + 2d'e'f' = D \text{ (dénominateur commun),}$$

$$(246) \left\{ \begin{aligned} \frac{bc-d'^2}{D} &= \frac{1}{E_x}, & \frac{ca-e'^2}{D} &= \frac{1}{E_y}, & \frac{ab-f'^2}{D} &= \frac{1}{E_z}, \\ \frac{1}{2d} - \frac{ad'-e'f'}{D} &= \frac{1}{F_1}, & \frac{1}{2e} - \frac{be'-fd'}{D} &= \frac{1}{F_2}, & \frac{1}{2f} - \frac{cf'-d'e'}{D} &= \frac{1}{F_3}, \end{aligned} \right.$$

nous obtenons

$$(247) \quad \frac{1}{E} = \frac{c^4_x}{E_x} + \frac{c^4_y}{E_y} + \frac{c^4_z}{E_z} + 2 \frac{c^2_y c^2_x}{F_1} + 2 \frac{c^2_z c^2_x}{F_2} + 2 \frac{c^2_z c^2_y}{F_3},$$

(1) Exercices de math., 4<sup>e</sup> année (1829), p. 30 à 42.

et, pour l'équation de la surface dont les rayons sont les  $\sqrt[4]{E}$

$$(248) \quad 1 = \frac{x^4}{E_x} + \frac{y^4}{E_y} + \frac{z^4}{E_z} + 2 \frac{y^2 z^2}{F_1} + 2 \frac{z^2 x^2}{F_2} + 2 \frac{x^2 y^2}{F_3}.$$

$E_x, E_y, E_z$  sont les modules d'élasticité dans les directions  $x, y, z$ ;  $F_1, F_2, F_3$  peuvent, comme l'observe Cauchy, s'obtenir aussi expérimentalement en taillant de petits prismes dans les directions bissectrices des angles  $(y, z), (z, x), (x, y)$ , et mesurant leurs modules d'élasticité; car si l'on appelle ceux-ci

$$E_1, \quad E_2, \quad E_3,$$

on a en faisant  $E = E_1$  avec  $c_x = 0, c_y^2 = c_z^2 = \frac{1}{2}$ , puis de même pour  $E_2, E_3$ ,

$$(249) \quad \frac{1}{F_1} = \frac{2}{E_1} - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{E_y} + \frac{1}{E_z} \right), \quad \frac{1}{F_2} = \frac{2}{E_2} - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{E_x} + \frac{1}{E_z} \right), \quad \frac{1}{F_3} = \frac{2}{E_3} - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{E_x} + \frac{1}{E_y} \right).$$

On trouverait, en raisonnant comme au § précédent, que les conditions pour que le module  $E$  varie graduellement, ou ne fasse que croître et décroître entre ses valeurs principales  $E_x, E_y, E_z$  sans autre maximum ou minimum dans les plans  $yz, zx, xy$  ni dans leurs angles trièdres, sont

$$(250) \quad 1^\circ \left\{ \begin{array}{l} \text{Que } F_1 \text{ ne sorte pas de l'intervalle de } E_y \text{ à } E_x, \\ F_2 \quad \text{---} \quad \text{---} \quad \text{de } E_x \text{ à } E_z, \\ F_3 \quad \text{---} \quad \text{---} \quad \text{de } E_x \text{ à } E_y, \end{array} \right.$$

conditions probablement toujours remplies dans la nature, tout au moins pour les corps non cristallisés;

$$(251) \quad 2^\circ \text{ Que si } E_x > E_y > E_z \text{ on ait en même temps } F_1 < F_2 < F_3;$$

$$(252) \quad 3^\circ \left\{ \begin{array}{l} \text{Que, nonobstant, les trois quantités} \\ \left( \frac{1}{E_y} - \frac{1}{F_3} \right) \left( \frac{1}{E_x} - \frac{1}{F_2} \right) + \left( \frac{1}{F_3} - \frac{1}{F_1} \right) \left( \frac{1}{F_1} - \frac{1}{F_2} \right), \\ \left( \frac{1}{E_x} - \frac{1}{F_1} \right) \left( \frac{1}{E_x} - \frac{1}{F_2} \right) + \left( \frac{1}{F_1} - \frac{1}{F_2} \right) \left( \frac{1}{F_2} - \frac{1}{F_3} \right), \\ \left( \frac{1}{E_x} - \frac{1}{F_2} \right) \left( \frac{1}{E_y} - \frac{1}{F_1} \right) + \left( \frac{1}{F_2} - \frac{1}{F_3} \right) \left( \frac{1}{F_3} - \frac{1}{F_1} \right), \end{array} \right.$$

n'aient pas toutes trois des valeurs de même signe.

On voit, au reste, par la valeur qu'on tire de (246) pour  $E_x$  quand on suppose une contexture égale dans les trois sens  $x, y, z$ , mais

non dans les autres, savoir

$$E_x = \frac{D}{bc - d^2} = \frac{(a - d')(a + 2d')}{a + d'}$$

que  $d = a_{xyy}$  ou l'élasticité *latérale* ne saurait surpasser  $a = a_{xxx}$  ou l'élasticité *directe*, ce qui se voit d'ailleurs facilement pour peu qu'on les attribue au jeu des actions entre molécules (§ 3 de la note du n° 21, p. 16).

§ 89. *Distribution ELLIPSOÏDALE des élasticités directes  $a_{x|x|x|x}$ , et, aussi, des modules d'élasticité E.* Les conditions (236), (237), (238), (250), (251), (252) de variation graduelle et simple soit des élasticités directes soit des modules sont toutes remplies si l'on a

$$(253) \quad 2d + d' = \sqrt{bc}, \quad 2e + e' = \sqrt{ca}, \quad 2f + f' = \sqrt{ab},$$

ou, ce qui revient au même,

$$(254) \quad a = \frac{(2e + e')(2f + f')}{2d + d'}, \quad b = \frac{(2f + f')(2d + d')}{2e + e'},$$

$$c = \frac{(2d + d')(2e + e')}{2f + f'}$$

qui entraînent, comme il est facile de voir

$$(255) \quad F_1 = \sqrt{E_y E_x}, \quad F_2 = \sqrt{E_x E_z}, \quad F_3 = \sqrt{E_z E_y},$$

non-seulement si  $d = d'$ ,  $a = e'$ ,  $f = f'$  conformément aux résultats de la théorie moléculaire, ou au 5<sup>e</sup> appendice, mais même si l'on suppose entre  $d$  et  $d'$ ,  $e$  et  $e'$ ,  $f$  et  $f'$  tel rapport de grandeur qu'on veut, le même toutefois pour ces trois groupes de coefficients dans un même corps (1).

(1) En effet, (255)  $F_1^2 = E_y E_x$  revient, d'après (246), (245), à

$$D^2 - 4Dd(ad' - e'f) = 4d^2[(ca - e'^2)(ab - f'^2) - (ad' - e'f)^2] = 4ad^2D.$$

On peut diviser par  $D$ ; et l'on obtient, en faisant de même pour les deux autres conditions (255) en remplaçant pour  $D$  sa valeur (245),

$$abc - ad'^2 - be'^2 - cf'^2 + 3d'e'f' =$$

$$= 4d[a(d + d') - e'f'] = 4e[b(e + e') - f'd'] = 4f[c(f + f') - d'e'],$$

équations qui sont satisfaites par (253) en y joignant  $\frac{d'}{d} = \frac{e'}{e} = \frac{f'}{f}$  une constante  $i$ .

Alors les expressions (230) de  $a_{x_1x_1x_1x_1}$ , et (247) de  $\frac{1}{E}$  sont des carrés parfaits, d'où

$$(256) \quad \sqrt{a_{x_1x_1x_1x_1}} = c_x^2 \sqrt{a} + c_y^2 \sqrt{b} + c_z^2 \sqrt{c},$$

$$(257) \quad \frac{1}{\sqrt{E}} = \frac{c_x^2}{\sqrt{E_x}} + \frac{c_y^2}{\sqrt{E_y}} + \frac{c_z^2}{\sqrt{E_z}}.$$

Les surfaces du quatrième degré (231) et (248) dont les rayons vecteurs sont les inverses des racines quatrièmes des élasticités directes  $a_{x_1x_1x_1x_1}$ , et les racines quatrièmes des modules  $E$ , se réduisent à des ellipsoïdes, car leurs équations deviennent

$$(258) \quad 1 = x^2 \sqrt{a} + y^2 \sqrt{b} + z^2 \sqrt{c},$$

$$(259) \quad 1 = \frac{x^2}{\sqrt{E_x}} + \frac{y^2}{\sqrt{E_y}} + \frac{z^2}{\sqrt{E_z}}.$$

Cette distribution *ellipsoïdale* des élasticités inégales en divers sens a des propriétés analytiques particulières, car elle rend intéressables les équations différentielles aussi facilement que lorsqu'il y a isotropie.

Mais elle doit à un autre titre, comme nous allons voir, attirer plus particulièrement notre attention.

§ 90. *Ce mode de distribution doit avoir lieu généralement, au moins à peu près, pour les solides amorphes ou à cristallisation confuse dans lesquels les molécules ou groupes d'atomes affectent indistinctement toutes sortes d'orientations sans distinction de sens.* — En effet, dans ces corps, l'inégale élasticité dans les divers sens ne peut tenir qu'à ce que les rapprochements moléculaires sont plus grands dans certains sens que dans d'autres, par suite des forgeages, étirages, etc., ou des circonstances de la solidification. Calculons ce qui en doit résulter, ou quelles sont les grandeurs des coefficients d'élasticité dans un corps primitivement isotrope, modifié d'une manière permanente par de petites dilata-tions, compressions ou autres déformations absolument quelconques.

Ce calcul ne peut se faire sans assigner une loi aux actions entre

leurs points matériels; faisons-les, comme au § 21, à la note du § 23 et à l'appendice V, sensibles seulement à des distances insensibles, dirigées suivant les lignes de jonction  $r$  des points, et fonctions  $fr$  des grandeurs de ces lignes; nous aurons comme à cette même note, p. 570, expression (26), en faisant

$$(260) \quad r c_{rx} = x, \quad r c_{ry} = y, \quad r c_{rz} = z,$$

c'est-à-dire en appelant  $x, y, z$ , les projections de  $r$  sur les  $x, y, z$ ,

$$(261) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_{xxxx} \text{ ou } a_{yyyy} \text{ ou } a_{xyxy} = \frac{\rho}{2} \sum m Fr. (x^4 \text{ ou } y^4 \text{ ou } x^2 y^2) \\ \text{où } Fr \text{ remplace } \frac{1}{r} \frac{dfr}{dr}. \end{array} \right.$$

Si nous dirigeons les axes coordonnés  $x, y, z$  parallèlement aux trois dilatations principales (§ 82) positives ou négatives, que nous appellerons

$$\delta, \delta', \delta'',$$

toutes les modifications à faire entrer dans le calcul se réduiront à ces trois dilatations sans glissements. Appelant  $\rho_0, r_0, x_0, y_0, z_0$  les grandeurs de la densité  $\rho$ , des distances  $r$  et de leurs trois projections avant que l'isotropie ait été altérée, nous aurons :

$$(262) \quad \left\{ \begin{array}{l} x = x_0(1 + \delta), \quad y = y_0(1 + \delta'), \quad z = z_0(1 + \delta''), \\ \rho = \rho_0 : (1 + \delta)(1 + \delta')(1 + \delta''), \\ Fr = Fr_0 + (r - r_0)F'r_0, \quad r = \sqrt{x_0^2(1 + \delta)^2 + y_0^2(1 + \delta')^2 + z_0^2(1 + \delta'')^2} = \\ = r_0 + \frac{x_0^2 \delta + y_0^2 \delta' + z_0^2 \delta''}{r_0}. \end{array} \right.$$

Substituons dans (261), en négligeant les carrés et produits des  $\delta, \delta', \delta''$  et faisant passer les premières puissances hors des signes

**S**, et posons pour abrégé, en remarquant que vu l'isotropie primitive les sommes **S** sont les mêmes quand on y échange entre elles les lettres  $x_0, y_0, z_0$  :



$$(263) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\rho_0}{2} \sum m Fr_0 (x^4 \text{ ou } y^4) = a_4, \quad \frac{\rho_0}{2} \sum m Fr_0 x^2 y^2 = a_{2,2}, \\ \frac{\rho_0}{2} \sum m \frac{F'r_0}{r_0} (x^6 \text{ ou } y^6) = a_6, \quad \frac{\rho_0}{2} \sum m \frac{F'r_0}{r_0} x^2 y^2 z^2 = a_{2,2,2}, \\ \frac{\rho_0}{2} \sum m \frac{F'r_0}{r_0} (x^4 y^2 \text{ ou } x^4 z^2 \text{ ou } y^4 x^2 \text{ ou } y^4 z^2) = a_{4,2}, \end{array} \right.$$

nous obtenons les trois expressions suivantes :

$$(264) \left\{ \begin{array}{l} a_{xxxx} = \frac{(1+\delta)^3}{(1+\delta')(1+\delta'')} a_4 + a_6 \delta + a_{4,2} \delta' + a_{4,2} \delta'', \\ a_{yyyy} = \frac{(1+\delta')^3}{(1+\delta)(1+\delta'')} a_4 + a_{4,2} \delta + a_6 \delta' + a_{4,2} \delta'', \\ a_{xyxy} \text{ ou } a_{xzyy} = \frac{(1+\delta)(1+\delta')}{1+\delta''} a_{2,2} + a_{4,2} \delta + a_{4,2} \delta' + a_{2,2,2} \delta''. \end{array} \right.$$

Mais, toujours en vertu de l'isotropie primitive, on a les relations

$$(265) \quad a_4 = 3a_{2,2}, \quad a_6 = 15a_{2,2,2}, \quad a_{4,2} = 2a_{2,2,2} \quad (1)$$

(1) La première de ces trois relations (265) a été démontrée ci-dessus plusieurs fois, et dès la note du n° 452 (voy. aussi § 25, §§ 48 et 87 en note), car elle n'est autre que  $a_{xxxx} = 3a_{xyxy}$  qu'on a pour la texture isotrope. Les deux autres se prouvent facilement en remarquant qu'il résulte de l'isotropie primitive qu'on aura  $\sum m Fr_0 x^6 = 2 \sum m Fr_0 x^4 x^2$ ,  $x'$  étant la projection de  $r'$  sur une autre direction quelconque; ou, ce qui est la même chose,  $c_x, c_y, c_z$  étant les cosinus des angles de cette direction avec  $x, y, z$  :

$$\frac{\rho_0}{2} \sum m Fr_0 (x_0 c_x + y_0 c_y + z_0 c_z)^6 = \frac{\rho_0}{2} \sum m Fr_0 x_0^6 (c_x^2 + c_y^2 + c_z^2)^3.$$

Développant et faisant passer  $c_x, c_y, c_z$  hors des signes  $\Sigma$ , on pourra évaluer les termes affectés des mêmes produits de puissances de ces trois cosinus dans les deux membres; car on peut effacer d'abord de part et d'autre, comme identiques, tous ceux où il n'y en a qu'un élevé à la puissance 6, puis faire l'un des trois nul dans l'équation restante qui pourra être divisée par le produit des deux autres, ce qui, en annulant l'un de ceux-ci et faisant l'autre = 1, donnera de nouveaux termes à évaluer et par suite à effacer, etc.

Or, en égalant les termes en  $c_x^2 c_y^2 c_z^2$ , on a  $90a_{2,2,2} = 6a_6$ .

Et en égalant ceux qui sont affectés de  $c_x^4 c_y^2$ , on a  $45a_{4,2} = 3a_6$ .

Par conséquent, on a les deux dernières relations (265).

Toutes celles de ce genre sont au reste comprises dans la formule générale suivante due à M. Cauchy (Dispersion de la lumière aux *Nouveaux Exercices*, Prague, 1835, p. 35) qui s'obtient par le même procédé :

$$(266) \left\{ \begin{array}{l} \sum m Fr_0 \lambda^\mu \mu^\nu = \frac{1.3 \dots \lambda - 1.1.3 \dots \mu - 1.1.3 \dots \nu - 1}{1.3.5 \dots \lambda + \mu + \nu - 1} \sum m Fr_0 x^{\lambda + \mu + \nu} \\ \text{si } \lambda, \mu, \nu \text{ sont pairs, et } = 0 \text{ si l'un d'eux est impair;} \end{array} \right.$$

Substituant, et multipliant entre elles les deux premières expressions (264) en négligeant toujours les carrés et produits des  $\delta$ , on trouve

$$(268) \ a_{xxxx} \times a_{yyyy} = 9 \left[ \frac{(1+\delta)^2 (1+\delta')^2}{(1+\delta'')^2} a_{1,1}^2 + a_{2,2} a_{3,3} (\delta + \delta') + 2\delta'' \right],$$

c'est-à-dire précisément neuf fois ce qu'on obtient en élevant au carré la troisième expression (264), ou l'élasticité tangentielle

$$a_{xy \ xy},$$

qui, lorsqu'on admet les conséquences de la loi des actions moléculaires, a la même valeur que l'élasticité latérale  $a_{xyxy}$ . On a donc, dans un corps ou un milieu primitivement isotrope, dont l'égalité de texture a été altérée d'une manière permanente par des dilatations ou compressions dans les trois sens  $x_0, y_0, z_0$  ou  $x, y, z$ :

$$2a_{xyxy} + a_{xyzy} = \sqrt{a_{xxxx} \cdot a_{yyyy}}$$

et des égalités semblables en  $y$  et  $z$ ,  $z$  et  $x$ , c'est-à-dire précisément les relations (253)  $2d + d' = \sqrt{bc}$ , etc., de distribution ellipsoïdale des racines quatrièmes des modules d'élasticité ou des inverses des racines quatrièmes des élasticités directes autour de chaque point.

Quelque sceptique qu'on veuille se montrer à l'égard des résultats de l'emploi explicite et avoué de la loi des actions moléculaires, dont l'admission au moins tacite est pourtant inévitable et sert de fondement à tout dans la mécanique des corps finis ou des systèmes (Appendice V, §§ 55, 56, 75 surtout), il est impossible de ne pas être frappé d'une pareille concordance.

Nous avons, il est vrai, négligé les termes affectés des carrés et des produits de  $\delta, \delta', \delta''$ . On ne pourrait apprécier l'influence de ces termes que si l'on connaissait la forme de la fonction  $f_r$  des distances  $r$  représentant les actions moléculaires, car leurs coefficients seraient des sommes comme (266) contenant, dans  $F_r$ , les dérivées successives de cette fonction inconnue. Mais cette influence,

et à laquelle il est souvent utile de joindre cette autre formule (facile à prouver en montrant que si elle a lieu pour une valeur de  $n$  elle a lieu par cela seul pour une valeur plus grande d'une unité).

$$(267) \quad S n F_r \cdot r^{2n} = (2n + 1) S n F_r \cdot r^{2n}.$$

qu'on a négligée jusqu'ici dans tous les calculs analogues, ne peut produire, du moins pour les métaux, le verre, etc., que de très-faibles erreurs si l'on considère que les écrouissages et la trempe, qui changent très-sensiblement la ténacité et les modules d'élasticité, altèrent à peine la densité des corps. On peut d'ailleurs s'assurer, par un calcul (1), que les portions ainsi négligées de l'expression de  $3a_{xyxy}$ , sont constamment comprises entre les portions correspondantes de celles de  $a_{xxxx}$  et  $a_{yyyy}$ , en sorte qu'en supposant même qu'elles altèrent légèrement les valeurs absolues de ces trois coefficients, elles n'altéreront pas sensiblement pour cela la relation de moyenne proportionnalité de  $3a_{xyxy}$  entre  $a_{xxxx}$  et  $a_{yyyy}$ , donnée par les termes du premier ordre.

Ainsi donc que nous l'avons dit par anticipation au § 76 ou à la fin du 5<sup>e</sup> Appendice, la texture de distribution ellipsoïdale, définie par les relations (253)  $2d + d' = \sqrt{bc}$ , etc., ou plutôt, vu  $d' = d$ , etc., par

$$(269) \quad 3d = \sqrt{bc}, \quad 3e = \sqrt{ca}, \quad 3f = \sqrt{ab}, \quad \text{d'où } a = 3 \frac{ef}{d}, \quad b = 3 \frac{fd}{e}, \quad c = 3 \frac{de}{f},$$

est celle qu'il convient le mieux, dans la pratique, d'attribuer aux corps amorphes ou dans lesquels les molécules ou groupes atomiques affectent indistinctement toutes sortes d'orientations, et où quelques indices font juger que la texture est hétérotrope ou offre en divers sens des élasticités différentes, mais ne variant probablement pas dans un rapport de plus de 3 à 2 ou de 2 à 1 d'une direction à l'autre.

§ 91. *Corps pour lesquels on peut supposer un mode de distribution des élasticités un peu différent.* — Ce sont (sans parler des cristaux), ceux dans lesquels les élasticités diffèrent considérablement les unes des autres dans les diverses directions, et où l'on peut penser que tout ou partie des molécules, soit en se déposant successivement, soit en se rangeant à nouveau par suite de modifications mécaniquement opérées, ont pu affecter de préférence certaines orientations.

Tels sont les bois. Tels sont peut-être certains fers étirés.

---

(1) Journal Liouville, 1863, *Distribution des Élasticités*, etc., art. 46.

Mais, même pour ces corps, il conviendra d'essayer toujours de satisfaire aux expériences au moyen de coefficients conformes à la distribution ellipsoïdale, ou dont les valeurs numériques aient entre elles les relations (269). Ce ne sera que dans l'impossibilité de le faire qu'on recourra à d'autres nombres, mais qui satisfassent toujours aux conditions (236), (237), (238), (250), (251), (252) de variation graduelle et simple des élasticités dans les divers sens.

Il sera même bon, pour s'assurer de la loi de cette variation, de construire diverses coupes, tant par les plans  $yz$ ,  $zx$ ,  $xy$  que par des plans intermédiaires et obliques, des surfaces (231)

$1 = a_{yz}x^2 + \text{etc.}$ , et (248)  $1 = \frac{x^4}{R_{yz}} + \text{etc.}$ , donnant en divers sens,

par leurs rayons vecteurs, les inverses des  $\sqrt{a_{yz}x^2}$  et les  $\sqrt[4]{E}$ .

Il sera tout aussi simple, et un peu plus propre au but proposé, de construire les surfaces d'un degré plus élevé, ayant pour rayons vecteurs les  $a_{yz}x^2$ , et les  $E$  eux-mêmes, en les calculant au moyen de leurs expressions (230) et (247) en fonction des trois cosinus des angles de leurs directions, pour diverses valeurs attribuées à ces angles (1).

§ 92. *Comparaison à quelques expériences.* — M. Hagen (2), après avoir mesuré les modules d'élasticité

$E_x$  dans le sens longitudinal

$E_y$  dans le sens transversal

de cinq espèces de bois, et avoir trouvé les rapports

$E_x : E_y = 48, 83, 15, 22, 28,$   
pour ceux de pin, sapin, chêne, hêtre rouge, hêtre blanc,

a fait aussi, à ce qu'il paraîtrait d'après son mémoire, pour les

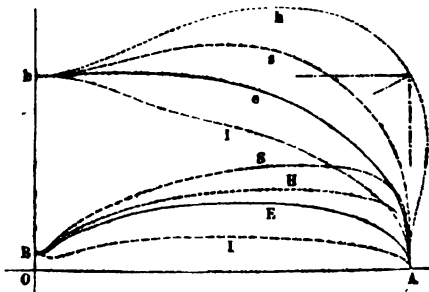
(1) Les équations en  $x, y, z$ , inutiles à poser, de ces deux surfaces, s'obtiendraient en faisant, dans (230) et (247),  $a_{yz}x^2$  ou  $E = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ , et  $c_{x,y,z} = \frac{x, y, z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ , en sorte que la première serait du 4<sup>o</sup> degré, la seconde du 3<sup>o</sup>.

(2) Ann. de Poggendorf, t. 58, p. 425; ou l'Ann. des ponts et chaussées, 1845, 2<sup>o</sup> semestre, p. 256.

modèles E dans des sens obliques  $x'$ , quelques expériences dont il ne donne pas le détail, mais qu'il représente empiriquement par

$$\frac{1}{E} = \frac{\cos^2(x', x)}{E_x} + \frac{\cos^2(x', y)}{E_y}.$$

Comme il est à présumer que ces expériences ont été opérées principalement sur le chêne et sur le hêtre, nous avons, en adoptant moyennement  $\frac{E_x}{E_y} = 20$ , construit le quart AHB de la courbe



dont les rayons vecteurs E dans les diverses directions  $x'$  sont donnés par cette formule de M. Hagen, et, comparativement, le quart AEB de la courbe dont les rayons E sont donnés par notre formule (257)

$$(270) \quad \frac{1}{\sqrt{E}} = \frac{\cos^2(x', x)}{\sqrt{E_x}} + \frac{\cos^2(x', y)}{\sqrt{E_y}}$$

de distribution ellipsoïdale, ou elliptique dans chaque coupe, des  $\sqrt{E}$ . Les rayons de ces deux courbes AHB, AEB ne diffèrent point les uns des autres dans les limites d'exactitude des expériences, et on peut les prendre l'une à la place de l'autre. Or la formule empirique de M. Hagen ne saurait être adoptée pour des valeurs de  $\frac{E_x}{E_y}$  sensiblement moins considérables, car la courbe qu'elle donne est circonscrite à un rectangle dont les côtés sont  $2E_x$ ,  $2E_y$ , d'où résulterait, pour E, un *maximum* qui serait en grandeur et en direction la demi-diagonale  $\sqrt{E_x^2 + E_y^2}$ , ce qui fait  $E_x\sqrt{2}$  quand  $E_x = E_y$ , tandis que, pour ce cas  $E_x = E_y$ , E devrait être  $= E_x$  ou le même en tous sens.

Les expériences de M. Hagen confirment donc autant qu'il leur est possible notre loi de distribution ellipsoïdale, et prouveraient que malgré le doute que nous avons dû exprimer au § précédent, on peut l'appliquer même pour les bois et pour des différences d'élasticité considérables en divers sens.

Au reste, sur la même figure, nous avons tracé deux autres courbes ne répondant pas à la distribution ellipsoïdale, et qui sont des coupes par le plan  $z = 0$  ou  $c_{xz} = 0$ , de la surface du 4<sup>e</sup> degré (247) ou (248) de distribution obligée des élasticités, en sorte que leurs équations sont

$$(271) \quad 1 = \frac{x^4}{E_x} + 2 \frac{x^2 y^2}{F_3} + \frac{y^4}{E_y}, \quad \text{ou, polairement,} \quad \frac{1}{E} = \frac{C^2_{xx}}{E_x} + 2 \frac{C^2_{xy} C^2_{yy}}{F_3} + \frac{C^2_{yy}}{E_y},$$

mais pour les deux limites des valeurs qu'on peut donner à  $F_3$ , sans qu'il cesse de satisfaire à la condition (250) à remplir pour que  $E$  ne fasse que croître ou décroître constamment et continûment quand on passe de la direction de  $E_x$  à celle de  $E_y$  dans leur plan, condition qui est que ce dénominateur ne sorte pas de l'intervalle de  $E_x$  à  $E_y$ , car

Pour la courbe ASB on a  $F_3 = E_x$ .

Pour la courbe AIB on a  $F_3 = E_y$ .

On voit que la deuxième courbe s'éloigne beaucoup trop de celle de M. Hagen et que la première offre une loi peu probable, en sorte qu'il y a lieu de s'en tenir à la courbe pleine intermédiaire AEB, de distribution ellipsoïdale.

Sur la même figure on a tracé les mêmes quatre quarts de courbe Aeb, Ahb, Asb, Aib dans la supposition  $\frac{E_x}{E_y} = 2$  seulement, qui est hors des limites des expériences de M. Hagen relatives aux bois mais qui peut convenir aux fers étirés, etc. La courbe Ahb représentée par son équation empirique est tout à fait inacceptable. La courbe Aib que représente l'équation du 4<sup>e</sup> degré (271) avec  $F_3 =$  sa limite inférieure  $E_y$ , ne saurait guère convenir non plus, car, bien qu'elle donne une croissance continue de  $E$  entre  $Ob = E_y$  et  $OA = E_x$ , l'inflexion qu'elle offre est peu naturelle. La courbe Asb représentée aussi par (271), avec  $F_3 =$  sa limite supérieure  $E_x$ , est moins irrégulière; mais la courbe Aeb ayant pour équation (270) ou répondant à la distribution elliptique des  $\sqrt[4]{E}$  paraît toujours bien plus propre à représenter la loi probable des modules d'élasticité en divers sens.

Nous pouvons conclure de cet examen, d'après le peu de données expérimentales que l'on possède, que quelles que soient les différences de grandeur des élasticités dans les trois sens princi-

paux, lorsqu'on ne pourra pas adopter les relations (269)  $3d = \sqrt{bc}$ ,  $3e = \sqrt{ca}$ ,  $3f = \sqrt{ab}$  donnant aussi (255)  $F_1 = \sqrt{E_y E_x}$ ,  $F_2 = \sqrt{E_x E_z}$ ,  $F_3 = \sqrt{E_z E_y}$ , de distribution ellipsoïdale, il ne faudra toujours pas beaucoup s'en écarter.

§ 93. *Conséquences diverses de la distribution ellipsoïdale, et des modifications qu'on peut y admettre. Remarques sur les rapports  $\eta$ ,  $\eta'$  entre les contractions transversales et les dilatations longitudinales correspondantes des prismes élastiques.* — Si, dans les expressions données p. 681, 682, sous les numéros (131) et (132) (mais sans les accents) pour les modules d'élasticité  $E$  dans les directions  $x$ ,  $y$ ,  $z$  des intersections des trois plans de symétrie supposés exister, et pour les rapports  $\eta$ ,  $\eta'$  des contractions dans les sens  $y$ ,  $z$ , aux dilatations, dans le sens  $x$ , d'un prisme taillé parallèlement à l'axe des  $x$  de plus grande élasticité :

$$(272) \quad \eta = \frac{cf - de}{bc - d^2}, \quad \eta' = \frac{be - fd}{bc - d^2}, \quad E_x = \frac{abc - ad^2 - be^2 - cf^2 + 2def}{bc - d^2},$$

$$E_y = E_x \frac{bc - d^2}{ca - e^2}, \quad E_z = E_x \frac{bc - d^2}{ab - f^2}.$$

l'on fait (269)  $d = \frac{1}{3} \sqrt{bc}$ ,  $e = \frac{1}{3} \sqrt{ca}$ ,  $f = \frac{1}{3} \sqrt{ab}$  exprimant la distribution ellipsoïdale, on obtient

$$(273) \quad \left\{ \begin{array}{l} E_x = \frac{5}{6} a, \quad E_y = \frac{5}{6} b, \quad E_z = \frac{5}{6} c, \\ \eta = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{E_x}{E_y}}, \quad \eta' = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{a}{c}} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{E_x}{E_z}}. \end{array} \right.$$

On peut voir déjà par ces expressions que la supposition de distribution ellipsoïdale est compatible avec les explications variées que nous avons données (§ 61, p. 683) de divers résultats de M. Wertheim, par un certain degré d'hétérotropie attribué aux matières de ses tubes de verre et de lalton, même en y admettant l'égalité de contexture dans les deux sens transversaux, et l'homogénéité *parallèle* (§ 22, p. 560), c'est-à-dire en admettant

$$b = c = 3d, \quad e = f, \quad E_y = E_z, \quad \eta = \eta' = \frac{be - de}{b^2 - d^2} = \frac{e}{b + d} = \frac{1}{4} \frac{e}{d};$$

Car 1° de  $\frac{e}{d} = \frac{4}{3}$  (expliquant  $\frac{\delta}{\gamma} = \frac{4}{3}$  au lieu de  $\frac{1}{2}$  qu'on aurait pour l'isotropie, § 52), combiné avec  $3e = \sqrt{ab} = \sqrt{a \cdot 3d}$  ou  $3e^2 = ad$ , que donne ce mode de distribution, résultent  $\frac{a}{e} = 4$ ,  $\frac{E_x}{e} = \frac{10}{3}$ ,  $\frac{E_x}{E_y} = \frac{16}{9}$ , et  $\eta = \frac{4}{3}$ , qui n'ont rien d'improbable.

2° De  $\frac{e}{d} = \frac{5}{4}$  (expliquant  $\frac{\delta}{d} = 0,375$ ) combiné de même, résultent  $\frac{a}{e} = \frac{15}{4}$ ,  $\frac{E_x}{e} = \frac{25}{8}$ ,  $\frac{E_x}{E_y} = \frac{25}{16}$ ,  $\eta = \frac{5}{16}$ , très-admissibles aussi.

Et de  $\frac{E_x}{e}$  supposé trouvé =  $\frac{8}{3}$ , et combiné encore avec  $3e^2 = ad$ , résultent  $\frac{a}{e} = \frac{16}{5}$ ,  $\frac{e}{d} = \frac{16}{15}$ ,  $\frac{E_x}{E_y} = \frac{256}{225}$ ,  $\eta = \frac{4}{15}$ , encore plus facilement admissibles.

Mais examinons les conséquences relatives aux corps tels que les bois, où les élasticités sont très-différentes dans les divers sens.

MM. Chevandier et Wertheim ont trouvé (§ 13 de la note du n° 113, p. 110) (1), pour le bois de chêne, les rapports  $\frac{E_x}{E_y} = 5$  et

$\frac{E_x}{E_s} = 7,3$  entre les modules d'élasticité dans le sens des fibres et

dans deux sens perpendiculaires. M. Hagen a trouvé  $\frac{E_x}{E_y \text{ ou } E_s} = 14,6$  aussi pour le chêne; et le sapin a donné des rapports bien plus grands.

Or, si  $\frac{E_x}{E_y} = 5$ , on a  $\eta = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{E_x}{E_y}} = 0,56$   
 $= 7 \dots \dots \dots = 0,66$   
 $= 16 \dots \dots \dots = 1,00.$

Ces nombres excèdent  $\frac{1}{2}$ ; que nous avons cru pouvoir avancer (au § 5 de la note du n° 21, p. 18) être présumablement la limite

(1) Mémoire sur les propriétés mécaniques des bois, présenté le 5 octobre 1846, et inséré aux *Ann. de ch. et de ph.* en 1848; 4<sup>e</sup> partie, p. 63-64 des tirages à part.



supérieure des rapports  $\eta, \eta'$  entre les dilatations longitudinales et les contractions transversales correspondantes des prismes, dans la vue d'empêcher le rapport  $\frac{\partial_x + \partial_y + \partial_z}{\partial_x} = 1 - \eta - \eta'$  de la dilatation cubique à la dilatation longitudinale d'avoir jamais le signe —, ou un allongement de produire une diminution de volume. Mais rien ne prouve que cette diminution ne puisse pas avoir lieu pour les substances qui, comme les bois, offrent une résistance relative très-faible à la compression dans le sens transversal. Quoi qu'il en soit, admettons, pour pouvoir donner à  $\eta$  et à  $\eta'$  des valeurs de moins de  $1/2$ , que dans les bois la distribution ellipsoïdale s'observe pour le sens transversal seulement, ou qu'on ait

$$(27h) \quad d = \frac{1}{3} \sqrt{bc}, \quad e = \frac{n}{3} \sqrt{ca}, \quad f = \frac{n}{3} \sqrt{ab} \quad \left\{ \begin{array}{l} n \text{ étant une constante un} \\ \text{peu différente de 1,} \end{array} \right.$$

nous trouverons en substituant dans (27g)

$$275) \quad \left\{ \begin{array}{l} E_x = \frac{6-n^2}{6} a, \quad E_y = \frac{24-4n^2}{27-3n^2} b, \quad E_z = \frac{24-4n^2}{27-3n^2} c, \quad \frac{E_x}{E_y} = \frac{9-n^2}{8} \frac{a}{b}, \quad \frac{E_x}{E_z} = \frac{9-n^2}{8} \frac{a}{c} \\ \eta = \frac{n}{4} \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{n}{4} \sqrt{\frac{8}{9-n^2}} \sqrt{\frac{E_x}{E_y}}, \quad \eta' = \frac{n}{4} \sqrt{\frac{a}{c}} = \frac{n}{4} \sqrt{\frac{8}{9-n^2}} \sqrt{\frac{E_x}{E_z}}. \end{array} \right.$$

On doit avoir (comme  $a$  est supposé plus grand que  $b$  et  $c$ ) pour que (236) 3e reste compris entre  $a$  et  $c$ , et  $3f$  entre  $a$  et  $b$

$$(276) \quad n < \sqrt{\frac{a}{b}} \quad \text{et} \quad \sqrt{\frac{a}{c}}; \quad \text{et} \quad > \sqrt{\frac{b}{a}} \quad \text{et} \quad \sqrt{\frac{c}{a}}.$$

Et même,  $n$  ne devra pas excéder 1 afin de ne pas rendre  $\eta$  et  $\eta'$  trop grands; et on ne devra pas le faire descendre au-dessous de 0,7 pour ne pas trop s'écarter de la distribution ellipsoïdale qui a en sa faveur de si fortes probabilités (§ 90) et quelques faits (§ 92).

Du reste, même pour les métaux, nous reconnaissons aujourd'hui qu'il n'est nullement impossible que  $\eta$  et  $\eta'$  excèdent quelquefois  $1/2$ , ou que de petits allongements de prismes, dans les limites de l'élasticité, augmentent la densité de leur matière; car c'est ce

qui a eu lieu pour des allongements plus forts, opérés par M. Wertheim au delà de ces limites et jusqu'à rupture (1).

Appliquons ceci à ce qui a dit au § 13 de la note du n° 113, p. 108 (rupture par flexion), c'est-à-dire aux considérations propres à déterminer ou à comparer ensemble les grandeurs  $R'_o$ ,  $R_o$ , des limites supérieures des *pressions* et des *tensions* ou tractions longitudinales non dangereuses. Nous avons (p. 109) en expliquant avec M. Poncelet (comme à la note du n° 3, *écrasement*, p. 10) la rupture ou l'énervation due à une contraction  $j$  exercée longitudinalement sur un prisme, par l'effet des dilatations transversales  $\eta_j$  qui l'accompagnent, posé la formule suivante, où  $\frac{R_{o,t}}{E_t}$  est la limite des dilatations transversales, comme  $\frac{R_o}{E}$ ,  $\frac{R'_o}{E}$  sont les limites des dilatations et des contractions longitudinales,

$$(277) \quad \eta \frac{R'_o}{E} = \frac{R_{o,t}}{E_t}, \quad \text{ou} \quad \frac{R'_o}{R_o} = \frac{1}{\eta} \frac{E}{E_t} \frac{R_{o,t}}{R_o}.$$

Comme les formules précédentes résultant de la distribution ellipsoïdale observée ou exactement ou à peu près établissent une liaison entre la fraction  $\eta$  et le rapport des coefficients  $E$ ,  $E_t$  (ce que nous n'apercevions pas encore en écrivant la note du n° 113, voyez

p. 111), faisons (form. 275)  $\eta = \frac{n}{4} \sqrt{\frac{8}{9-n^2}} \sqrt{\frac{E}{E_t}}$ . Il en résulte

$$(278) \quad \frac{R'_o}{R_o} = \frac{4}{n} \sqrt{\frac{9-n^2}{8}} \sqrt{\frac{E}{E_t}} \cdot \frac{R_{o,t}}{R_o}.$$

MM. Chevandier et Wertheim ont trouvé moyennement pour le chêne, comme on vient de dire,  $\frac{E}{E_t} = 6$ ; et aussi

$$\frac{R_t}{R} = \frac{\frac{1}{2}(0,582 + 0,406)}{\frac{1}{2}(6,49 + 5,66)} = \frac{1}{12}$$

pour le rapport des cohésions *instantanées* dans le sens transversal

(1) Mémoire du 18 juillet 1842 sur l'Elasticité et la cohérence des métaux. *Ann. de ch. et de ph.*, 3<sup>e</sup> série, t. XII, art. ix.

et dans le sens longitudinal. Si nous prenons aussi  $\frac{1}{12}$  pour le rapport  $\frac{R_{\text{et}}}{R_{\text{o}}}$  des cohésions *permanentes* (§§ 41, 42 de la même note, p. 406) dans les mêmes sens, la formule (278) nous donne

$$\begin{aligned} \frac{R'_{\text{o}}}{R_{\text{o}}} &= 0,816 \quad \text{si } n = 1 \\ &= 1,267 \quad \text{si on prend } n = 2/3, \end{aligned}$$

pour le rapport entre les charges  $R'_{\text{o}}$ ,  $R_{\text{o}}$  qu'on peut faire supporter longitudinalement à une pièce de chêne par pression (sans flexion) et par traction.

Quant aux expériences de M. Hagen, elles ont donné

$$\frac{E}{E_t} = \frac{1051}{71,8} = 14,6, \quad \frac{R_t}{R} = \frac{0,0190 \cdot 71,8}{0,0139 \cdot 1051} = \frac{1}{11},$$

car 1051 et 71,8 ont été (en kilogrammes par millimètre carré) les modules trouvés pour les élasticités longitudinale et transversale du chêne, et 0,0139, 0,0190 les limites trouvées pour l'allongement avant rupture par traction. Il en résulte, en substituant dans (278),

$$\begin{aligned} \frac{R'_{\text{o}}}{R_{\text{o}}} &= 1,390 \quad \text{si } n = 1, \\ &= 2,155 \quad \text{si } n = 2/3. \end{aligned}$$

Pour le sapin on a (Chevandier et Wertheim)  $\frac{E}{E_t} = 22$  (moyen-

nement), et  $\frac{R_t}{R} = \frac{1}{2} \frac{0,220 + 0,297}{4,18} = \frac{1}{16}$ : d'où

$$\frac{R'_{\text{o}}}{R_{\text{o}}} = 1,173 \quad \text{si } n = 1; \quad \text{et } 1,819 \quad \text{si } n = \frac{2}{3};$$

et (Hagen)  $\frac{E}{E_t} = 47,6$ ,  $\frac{R_t}{R} = \frac{0,0115 \cdot 25,3}{0,0268 \cdot 1204} = \frac{1}{44,1}$ , d'où

$$\frac{R'_{\text{o}}}{R_{\text{o}}} = 2,486 \quad \text{si } n = 1, \quad \text{et } 3,857 \quad \text{si } n = \frac{2}{3}.$$

Bien que leurs bases soient affectées de bien des causes d'incer-

titude, ces résultats n'ont rien d'improbable ni de contraire aux faits connus.

L'inverse de ce rapport, ou  $\frac{R_0}{R'}$  est ce que nous avons désigné par

$\eta_1$

à la note du n° 120 (§ 17, p. 446-449), et aussi à la note du n° 156 (torsion avec flexion, § 43, p. 378-382, § 48, p. 416, et à la *Récapitulation* des formules, § 58, p. 453-459). Sa valeur d'après (278), qu'on peut réduire à

$$\frac{\pi}{h} \sqrt{\frac{E_t}{E} \frac{R_0}{R_{0,t}}}$$

vu que le radical  $\sqrt{\frac{8}{9-\eta^2}}$  diffère peu de 1, étant substituées dans l'équation générale de cohésion permanente du bas de la p. 379, § 43 de la note du n° 156, la change en

$$(279) \quad \text{Lim.} \left( \frac{G'g'}{T'_{0'}} \right)^2 + \left( \frac{G''g''}{T''_{0''}} \right)^2 = \left( 1 - \frac{E_i}{R_0} \right) \left( 1 + \frac{E_i'}{R'_0} \right) = \left( 1 - \frac{E_i}{R_0} \right) \left( 1 + \frac{\pi}{h} \sqrt{\frac{E_t}{E} \frac{R_0}{R_{0,t}}} \right).$$

§ 94. *Travaux de M. Clebsch.* — A défaut d'un moyen, qu'on ne possédera peut-être jamais, de tirer *directement*, des équations de l'élasticité, les grandeurs des déplacements dus à des forces données agissant sur un solide élastique de dimensions finies, nous avons, en 1847-55, pour résoudre les problèmes de la torsion et de la flexion des prismes, fait usage d'une méthode *inverse* ou plutôt mixte, qui consiste à se donner à la fois une partie des forces et une partie des déplacements, et à déterminer par l'analyse rendue abordable au moyen de cet artifice, quels doivent être et les autres déplacements et les autres forces, après s'être assuré, bien entendu, que les données choisies sont compatibles entre elles ainsi qu'avec les lois de l'élasticité exprimées par les équations générales de l'équilibre intérieur. Notre donnée sur les déplacements était successivement une petite torsion uniforme et une petite flexion tantôt uniforme tantôt uniformément croissante d'un bout à l'autre du prisme; notre donnée sur les forces était la nullité de toute action ou pression sur ses faces latérales. Et nous étions constamment obligés, pour poursuivre le calcul, de joindre à ces données, par manière d'essai, la supposition très-naturelle que sur les fibres ou éléments longitudinaux intérieurs les actions étaient nulles aussi dans le

*sens transversal*<sup>(1)</sup>, en sorte que les fibres, si elles agissent les unes sur les autres, ne le fassent que suivant leur longueur. La suite du calcul justifiait complètement cette supposition, dont nous avons ci-dessus démontré synthétiquement la possibilité (aux §§ 3 des notes du n° 24 et du n° 80), et qui s'exprime analytiquement, si  $y$  et  $z$  sont les coordonnées transversales, et  $x$  la coordonnée dans le sens longitudinal, par

$$p_{yy} = 0, p_{zz} = 0, p_{yz} = 0 \text{ partout à l'intérieur du prisme.}$$

Le calcul montre en effet que toute torsion ou flexion prise ainsi pour donnée, accompagnée ou non d'extensions et de glissements, peut avoir lieu en même temps que cette nullité supposée des trois composantes transversales d'actions  $p_{yy}$ ,  $p_{zz}$ ,  $p_{yz}$  à l'intérieur, et que celle des actions longitudinales sur les faces latérales extérieures; pourvu que sur les deux bases extrêmes on répartisse d'une certaine manière les forces tant normales que tangentielles ayant des résultantes et des moments résultants d'une grandeur en rapport avec celles des extensions, glissements, flexions et torsions à produire dans les limites de stabilité de la contexture.

M. Clebsch, dans un beau livre intitulé *Theorie der Elasticität fester Körper*, publié en 1862, a eu l'idée d'embrasser ces divers cas de déformation dans une même analyse, sans poser de prime-abord de donnée sur le mode des déplacements, et en prenant pour seule donnée sur les forces notre double supposition première et auxiliaire, de nullité 1° de toutes les pressions extérieures sur les faces latérales libres, 2° des composantes de toutes les pressions intérieures dans un sens perpendiculaires aux fibres; c'est-à-dire en partant uniquement de

$$(280) \quad p_{yy} = 0, p_{zz} = 0, p_{yz} = 0 \text{ partout,}$$

$$(281) \quad p_{xy} \cos(n, y) + p_{xz} \cos(n, z) = 0 \text{ sur la surface latérale du prisme;}$$

car c'est à cette dernière équation que se réduisent les trois conditions définies (39) du § 28 quand on y fait la pression  $\varpi = 0$ , et

(1) D'abord, pour la flexion, au ch. IV de notre Mémoire sur la torsion, art. 35 surtout, et art. 40; et ensuite au Mémoire sur la flexion (1854 et 1855), art. 44; et, pour la torsion, au premier de ces deux Mémoires, art. 50, 51.

en même temps  $\cos(n, x) = 0$ , qui caractérise bien la surface latérale. Et il a bien voulu donner notre nom au problème suivant :

« Rechercher quels sont les systèmes de forces devant agir sur les points des bases extrêmes du prisme ou cylindre pour que les choses se passent ainsi tant à l'intérieur que sur les faces latérales, et quels sont les divers déplacements qui en résultent pour ses points. »

Bien entendu que pour faire cesser l'indétermination à l'égard de ces déplacements, ou pour abstraire les translations et rotations générales, on suppose remplies, en un endroit, par exemple au centre de gravité de l'une des deux bases, pris ordinairement pour origine des coordonnées, les conditions qui rendraient le corps immobile s'il était parfaitement rigide, c'est-à-dire qu'on suppose que ce point reste fixe, ainsi qu'un élément matériel linéaire passant par ce point et un élément plan passant par cet élément linéaire <sup>(1)</sup>, ce qui s'exprime de la manière suivante :

Que pour  $x = 0, y = 0, z = 0$  on ait

$$(282) \left\{ \begin{array}{l} u = 0, v = 0, w = 0, \text{ avec } \frac{du}{dy} = 0, \frac{dw}{dy} = 0, \frac{du}{dz} = 0 \text{ si l'élément} \\ \text{linéaire fixe est suivant l'axe des } y \text{ et l'élément plan dans le plan } yz. \end{array} \right.$$

$$(283) \left\{ \begin{array}{l} u = 0, v = 0, w = 0, \text{ avec } \frac{dv}{dx} = 0, \frac{dw}{dx} = 0, \frac{dw}{dy} = 0 \text{ si l'élément} \\ \text{linéaire fixe est suivant l'axe des } x \text{ et l'élément plan dans le plan } xy \text{ (2)}. \end{array} \right.$$

(1) Comme à notre Mémoire sur la Torsion, art. 30, p. 60, et 49, p. 97 (nous choisissons, pour les fixer ainsi, un élément de l'axe  $x$  du prisme et un élément du plan  $xy$ ); et sur la Flexion, art. 44, p. 40.

(2) En effet, les coordonnées de trois points situés sur les axes des  $x, y, z$  à des distances infiniment petites  $x, y, z$  de l'origine, sont, avant les déplacements

$$x, 0, 0; \quad 0, y, 0; \quad 0, 0, z;$$

et, après les déplacements, si l'on a  $u = 0, v = 0, w = 0$  à l'origine :

$$x + \frac{du}{dx}x, \frac{dv}{dx}x, \frac{dw}{dx}x; \quad \frac{du}{dy}y, y + \frac{dv}{dy}y, \frac{dw}{dy}y; \quad \frac{du}{dz}z, \frac{dv}{dz}z, z + \frac{dw}{dz}z.$$

Pour que l'élément linéaire suivant l'axe des  $y$  conserve sa direction, il faut que le deuxième point ne puisse se mouvoir que suivant cet axe, d'où  $\frac{du}{dy} = 0$ ,

$\frac{dv}{dy} = 0$ . Pour que l'élément du plan  $yz$  conserve sa direction ou ne puisse

Les conditions (280) fournissent immédiatement, d'après les valeurs (30) ou (175) des composantes de pressions relatives à trois plans de symétrie de contecture, et d'après la signification (form. 59, p. 603) de  $\eta$ ,  $\eta'$ ,  $E$  :

$$\frac{dv}{dy} = -\eta \frac{du}{dx}, \quad \frac{dw}{dz} = -\eta' \frac{du}{dx}, \quad \frac{dv}{dx} + \frac{dw}{dy} = 0, \quad p_{xx} = E \frac{du}{dx},$$

et réduisent les équations d'équilibre indéfinies (38) à

$$\frac{dp_{xx}}{dx} + \frac{dp_{xy}}{dy} + \frac{dp_{xz}}{dz} = 0, \quad \frac{dp_{xy}}{dx} = 0, \quad \frac{dp_{xz}}{dx} = 0.$$

Leur combinaison entre elles montre facilement que les quatre dérivées secondes sur  $dx^2$ ,  $dy^2$ ,  $dz^2$ ,  $dydz$ , de  $\frac{du}{dx}$  et par suite de  $\frac{dv}{dy}$ ,  $\frac{dw}{dz}$ , doivent être nulles. D'où l'on déduit <sup>(1)</sup> que les déplacements  $v$ ,  $w$ , ne peuvent être que des fonctions entières du troisième degré au plus en  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , contenant seulement six constantes, et que le déplacement longitudinal  $u$  se compose d'une pareille fonction entière dépendant des mêmes constantes, plus une autre fonction  $u'$ , de  $y$ ,  $z$  seuls, astreinte à satisfaire à

$$\frac{d^2u'}{dy^2} + \frac{d^2u'}{dz^2} = 0 \text{ partout,}$$

et à une condition déduite de (281) pour le contour des sections. Et cette dernière fonction  $u'$  peut être décomposée en quatre autres, multipliées par les mêmes constantes, et qui séparément sont relatives aux cas d'extension simple due à une force longitudinale, de flexions autour des deux axes principaux d'inertie des sections, dues aux moments autour de ces axes, et de torsion simple due au moment autour de celui du prisme. M. Clebsch arrive

tourner autour de l'élément linéaire  $y$ , il faut que le troisième point ne puisse se mouvoir parallèlement aux  $x$ , ou que  $\frac{du}{dx} = 0$ .

Le même raisonnement donne les conditions (283).

(1) *Theorie der Elasticität fester Körper*, § 23. *Das de Saint-Venant'sche Problem.*

Il faut observer que c'est seulement pour le cas de contecture égale dans les sens transversaux que les équations (280) ont pour conséquence la conservation des grandeurs des angles que font entre eux les côtés des petites bases des fibres.

ainsi, par une même analyse, aux diverses équations particulières que nous avons posées par des considérations spéciales pour chacun de ces genres de déformation d'un solide prismatique.

La possibilité, ainsi établie pour tous les cas, de la solution du problème général posé tout l'heure, peut être énoncée par ce théorème :

« On peut toujours appliquer et distribuer, aux divers points des bases de tout prisme ou cylindre élastique, des forces ayant une résultante et un moment résultant donnés quelconques (dans des limites de grandeur dépendant de la matière), de telle sorte que si aucune pression ne s'exerce sur les faces latérales du même prisme, il ne s'en exerce aucune non plus à l'intérieur dans un sens transversal sur des faces parallèles aux arêtes [c'est-à-dire qu'on ait (280) si on a (281)]. — Et, alors, la détermination des déplacements dus à ces forces dépend simplement de l'intégration d'une équation linéaire du second ordre à une inconnue et deux variables indépendantes, avec condition définie aussi linéaire, et du premier ordre, à remplir au contour des sections du prisme. »

Dans un paragraphe <sup>(1)</sup> intitulé *Application approximative à des problèmes réels*, M. Clebsch observe qu'en remplaçant les forces par d'autres, distribuées différemment, mais ayant même résultante et même moment résultant, et agissant comme elles aux extrémités du prisme d'une longueur supposée beaucoup plus grande que ses dimensions transversales, les déformations ou déplacements éprouvés devront être à peu près les mêmes. Les formules d'extension, torsion et flexion autour des deux axes principaux des sections, qu'une analyse exacte a fait trouver pour certaines forces, conviennent donc *approximativement* pour d'autres forces quelconques qui agiraient de la même manière sur un corps rigide.

Prenant ensuite pour exemple un cylindre à base elliptique, M. Clebsch trouve des expressions identiques avec les nôtres pour sa torsion et pour sa flexion, ainsi que pour les plus grandes tensions ou pressions qui en résultent <sup>(2)</sup>.

<sup>(1)</sup> Même ouvrage, § 28.

<sup>(2)</sup> Nous devons observer, sur le § 37 du livre de M. Clebsch, où il traite de ce dernier sujet, que limiter les tensions ou pressions ne donne pas les mêmes conditions de cohésion permanente que limiter les dilatations, même quand



Puis, par une analyse ingénieuse et savante, fondée sur l'emploi d'arcs d'ellipses et d'hyperboles homofocales pour coordonnées, M. Clebsch détermine la torsion d'un cylindre creux elliptique dont les bases concentriques extérieure et intérieure, au lieu d'être semblables comme nous avons supposé au § 41 de la note du n° 156, ont les deux mêmes foyers, ce qui offre un bel exercice analytique de l'usage des coordonnées curvilignes et orthogonales.

§ 95. *Travaux de M. Kirchhoff.* 1° *Expressions des dérivées des déplacements par rapport à la coordonnée longitudinale dans les tiges infiniment minces.* — Mais c'est surtout des recherches originales et délicates de l'illustre professeur de l'Université de Heidelberg qu'on peut tirer la justification mathématique de l'emploi, par approximation, pour des forces distribuées d'une manière quelconque aux extrémités des pièces solides, des formules de torsion et de flexion que nous avons trouvées pour des forces distribuées d'une manière particulière et jamais réalisées, et de l'application de ces formules à des pièces à section graduellement variable d'une extrémité à l'autre, même à des pièces légèrement courbes; enfin, même à des pièces chargées ou sollicitées dans toutes leurs parties et non pas seulement aux extrémités; ce qui étend légitimement leur emploi aux cas de pièces animées de vibrations transversales ou de vibrations tournantes, puisque les inerties des parties en mouvement se ramènent toujours à des forces.

M. Kirchhoff, dans son beau mémoire *Sur l'équilibre et le mouvement d'une tige élastique infiniment mince* (1), où il veut bien

la contexture est isotrope. Ainsi, en représentant par  $\delta$  la plus grande dilatation non dangereuse, si un corps isotrope est également dilaté en tous sens, la plus grande pression ou tension  $y$  sera (formule 36)  $p = G(3\delta + \delta + \delta) = 5G\delta$ ; mais s'il est tiré par ses bases et dilaté de  $\delta$  dans le sens de la longueur pendant que ses faces latérales sont libres et que les dimensions transversales éprouvent des contractions  $\frac{4}{3}\delta$ , la plus grande tension  $y$  sera  $p = E\delta = \frac{5}{2}G\delta$ , c'est-à-dire moitié moindre que dans le premier cas, où cependant le corps courait le même danger de rompre, mesuré par la plus grande dilatation éprouvée. Si donc on veut, à la manière de M. Clebsch, poser les équations de cohésion permanente au moyen des théorèmes des §§ 84 et 82, c'est de l'ellipsoïde des dilatations (§ 82) et non de l'ellipsoïde des pressions (§ 84) qu'il faut se servir.

(1) Ueber das Gleichgewicht und Bewegung einer unendlich dünnen elastischen Stäbe. (Journal de Crelle, t. 56, p. 263.)

nous citer comme ayant le premier résolu avec rigueur le problème de la torsion et de la flexion d'un corps de ce genre lorsque sa forme primitive est prismatique ou son axe rectiligne <sup>(1)</sup>, suppose de prime abord que les dimensions transversales de sa tige sont infiniment petites, ce qui lui permet d'arriver aux équations de la flexion et de la torsion sans aucune restriction sur le mode de distribution et d'application, aux extrémités, des forces qui font tordre et fléchir (mais en négligeant nécessairement, alors, les effets des glissements transversaux et longitudinaux dont la flexion est accompagnée et qui sont infiniment petits du second ordre dans cette supposition). Et il étend son analyse, au moyen d'une ingénieuse substitution de différences de déplacements possibles aux déplacements réels, à des tiges naturellement *un peu courbes*; ce qui peut être appliqué aussi, comme nous verrons, à celles qui sont naturellement tordues ou *torses*, c'est-à-dire dont les sections successives ont des points homologues rangés en espèces d'hélices au lieu de se correspondre sur des lignes toutes parallèles à la fibre moyenne.

Il partage cette tige AB ayant une section ou constante ou graduellement et légèrement variable, mais dont l'axe primitif de

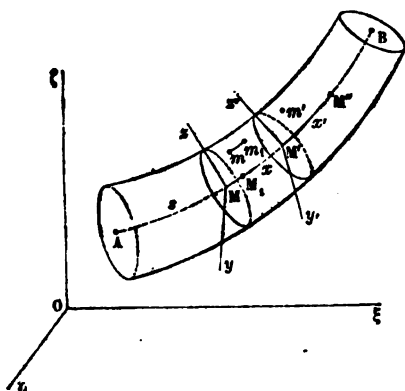
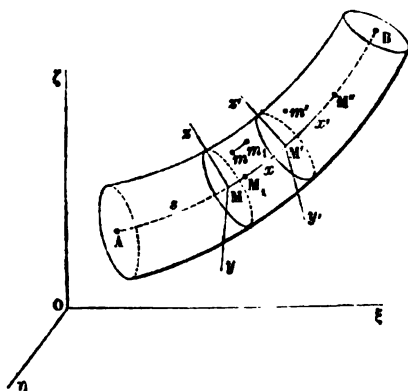


figure est d'abord supposé rectiligne, en tronçons infiniment courts MM' ayant leurs trois dimensions du même ordre de grandeur l'une que l'autre; ce qui permettra tout à l'heure d'assimiler chacun de ces tronçons à un corps fini en tous sens. Et il rapporte les déplacements de leurs points  $m$  à trois axes coordonnés rectangulaires  $Mx, My, Mz$  variables d'un tronçon à

(<sup>1</sup>) Il ajoute « et lorsque les changements de forme sont infiniment petits et que l'axe de la tige est un axe d'élasticité. » On peut observer cependant que nos solutions de 1853-1855 fournissent des déplacements relatifs totaux aussi grands

l'autre et tracés dans chacun par le centre de gravité  $M$  d'une de ses bases, l'axe coordonné  $Mx$  étant dirigé suivant l'axe de figure ou la fibre moyenne de la tige, et  $My$ ,  $Mz$  étant pris, pour les sections successives, dans des directions homologues. Il prend même, un peu plus loin, ces deux derniers axes suivant les directions principales autour desquelles on a le plus petit et le plus grand moment d'inertie de la section, comme nous avons fait constamment depuis 1843.

Il suppose, d'abord, qu'avant les déplacements, l'axe de figure  $AMM'B$  est rectiligne et que les axes principaux  $My$ ,  $Mz$  des sections voisines se corres-



pondent ou sont dans un même plan avec l'axe de la tige qui, ainsi, n'est ni courbe ni tordue en *torse* dans son état primitif.

Après les déplacements, il rapporte les mêmes points matériels  $m$  de chaque tronçon à des axes coordonnés encore rectangulaires  $Mx$ ,  $My$ ,  $Mz$

tirés du même point central  $M$  de la base, savoir  $Mx$  tangentielle-ment à l'axe fléchi de la tige,  $My$  dans le plan passant par l'élément superficiel  $xy$ , c'est-à-dire dans le plan tangent à la fois à l'axe de la tige et à ce que devient l'axe de plus petit moment d'inertie de la section; enfin  $Mz$  perpendiculairement à  $Mx$  et à  $My$ . Il appelle alors

$$x + u, \quad y + v, \quad z + w$$

qu'on veut d'un bout à l'autre, et qu'elles s'appliquent non-seulement au cas (envisagé au § 39 de la note du n° 156 ci-dessus, p. 345-356) de trois plans de symétrie de contexture, mais encore (chap. II, art. 16 de notre Mémoire sur la torsion de 1853), au moyen du changement des coordonnées latérales  $y$ ,  $z$  en d'autres  $y'$ ,  $z'$ , et de l'égalité  $h'' = h'''$  que M. Kirchhoff admet comme nous avec Green, au cas plus général où il n'y a de plans de symétrie que les sections transversales, changement ou simplification qui conduit au même résultat comme nous l'avons observé plus haut (§ 79, 6°, p. 774) que l'usage direct des équations non réduites indéfinie (73) et définie (74) du § 35 de l'app. III, p. 607, posées par lui en 1859 et par nous en 1860 (Société philomathique, 28 juillet).

les coordonnées infiniment petites du point du tronçon qui avait primitivement les coordonnées  $x, y, z$ ; en sorte que

$$u, v, w$$

donnent, pour chaque tronçon, les déplacements des points non pas dans l'espace mais dans son intérieur; déplacements nuls en  $M$ , et tels que, conformément aux équations de détermination (283) du § précédent,

$$(283 \text{ bis}) \text{ pour } x=0, y=0, z=0 \text{ on ait } u=0, v=0, w=0, \frac{dv}{dx}=0, \frac{dw}{dx}=0, \frac{dw}{dy}=0.$$

Et, pour établir la continuité, ou pour lier entre eux les déplacements relatifs des points de ces divers tronçons, et pouvoir les cumuler de manière à obtenir les déplacements absolus, M. Kirchhoff se sert de cette remarque aussi simple qu'ingénieuse (<sup>1</sup>): que si, après que les déplacements ont eu lieu, l'on considère les coordonnées absolues, dans l'espace, d'un point quelconque  $m$  d'un tronçon  $MM'$  par rapport à des axes fixes extérieurs rectangulaires  $O\xi, O\eta, O\xi$ , et si l'on en compose les expressions en fonction de

$$\xi, \eta, \zeta$$

représentant celles de l'origine  $M$  des petites coordonnées particulières au tronçon, après les déplacements, et de celles-ci, qui sont  $x+u, y+v, z+w$  pour  $m$ , les dérivées de ces expressions des coordonnées finies ou absolues de  $m$ , prises par rapport à la petite coordonnée particulière  $x$ , sont égales à leurs dérivées prises par rapport à la distance finie

$$AM' = s$$

(<sup>1</sup>) Elle a été appliquée depuis aux éléments des plaques infiniment minces, ce qui a opéré comme une révolution dans la théorie de leurs changements de forme, en permettant de la traiter exactement et de se passer tout à fait de ces considérations peu rigoureuses de développement en série convergente suivant les puissances entières de la coordonnée normale, etc., auxquelles Poisson avait eu recours. Voyez la note du § 4, p. 308, du Mémoire de M. Kirchhoff. Ce qu'il y annonce a été exécuté par un de ses élèves, M. Gehring, dans une thèse de doctorat (*De Aequationibus quibus aequilibrium et motus laminarum crystallinarum definiuntur Dissertatio inauguralis*. Berolini, MDCCLX).

comptée sur l'axe de figure de la tige entre son extrémité A et le tronçon.

Et, en effet, d'après la forme primitive supposée à la tige, les coordonnées finies de  $m$  par rapport à des axes fixes quelconques croissent bien évidemment d'une manière égale, soit qu'on passe du point  $m$  à un point voisin  $m_1$  du même tronçon, situé sur une même parallèle aux  $x$ , la base  $M$  restant fixe, soit qu'on avance tout le tronçon d'une quantité  $MM_1 = mm_1$ , c'est-à-dire qu'on déplace sa base  $M$  d'une distance  $MM_1 = ds$ , égale à  $mm_1 = dx$  le long de l'axe de figure d'abord rectiligne  $AMM'B$ , sans que le point  $m$  qui fait partie du tronçon change de distance  $x$  à cette base.

Cette égalité ou relation est facile à exprimer. Ajoutons chaque coordonnéé  $\xi, \eta, \zeta$  du centre  $M$  avec la projection, sur sa direction, de la ligne brisée  $(x+u) + (y+v) + (z+w)$  des petites coordonnées de  $m$  mises bout à bout, et représentons, comme aux §§ ci-dessus, par

$$c_{x\xi}, c_{x\eta}, \dots, c_{x\zeta}$$

les cosinus des angles formés avec les axes  $\xi, \eta, \zeta$  des coordonnées fixes, par ceux des petites coordonnées mobiles  $x, y, z$ ; nous aurons

$$(284) \quad \left. \begin{array}{l} \text{coordonnées de} \\ m \text{ par rapport} \\ \text{à } O\xi, O\eta, O\zeta \end{array} \right\} \begin{cases} \xi + (x+u)c_{x\xi} + (y+v)c_{y\xi} + (z+w)c_{z\xi}, \\ \eta + (x+u)c_{x\eta} + (y+v)c_{y\eta} + (z+w)c_{z\eta}, \\ \zeta + (x+u)c_{x\zeta} + (y+v)c_{y\zeta} + (z+w)c_{z\zeta}. \end{cases}$$

Leurs dérivées par rapport à  $x$  doivent, disons-nous, être égales à leurs dérivées par rapport à  $s$ . Or les neuf cosinus, et  $\xi, \eta, \zeta$ , coordonnées de  $M$ , ne varient qu'avec  $s$ . On a donc ces équations, base de toute l'analyse ci-après

$$(285) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left(1 + \frac{du}{dx}\right)c_{x\xi} + \frac{dv}{dx}c_{y\xi} + \frac{dw}{dx}c_{z\xi} = \frac{d\xi}{ds} + \frac{du}{ds}c_{x\xi} + \frac{dv}{ds}c_{y\xi} + \frac{dw}{ds}c_{z\xi} + \\ \quad + (x+u)\frac{dc_{x\xi}}{ds} + (y+v)\frac{dc_{y\xi}}{ds} + (z+w)\frac{dc_{z\xi}}{ds}, \\ \left(1 + \frac{du}{dx}\right)c_{x\eta} + \frac{dv}{dx}c_{y\eta} + \frac{dw}{dx}c_{z\eta} = \frac{d\eta}{ds} + \frac{du}{ds}c_{x\eta} + \dots + (z+w)\frac{dc_{z\eta}}{ds}, \\ \left(1 + \frac{du}{dx}\right)c_{x\zeta} + \frac{dv}{dx}c_{y\zeta} + \frac{dw}{dx}c_{z\zeta} = \frac{d\zeta}{ds} + \frac{du}{ds}c_{x\zeta} + \dots + (z+w)\frac{dc_{z\zeta}}{ds}. \end{array} \right.$$

Ajoutons-les, multipliées respectivement par  $c_{x\xi}$ ,  $c_{x\eta}$ ,  $c_{x\zeta}$ ; ajoutons-les, en second lieu, multipliées par  $c_{y\xi}$ ,  $c_{y\eta}$ ,  $c_{y\zeta}$ ; en troisième lieu, multipliées par  $c_{z\xi}$ ,  $c_{z\eta}$ ,  $c_{z\zeta}$ ; il ne restera dans les premiers membres de ces équations-sommes, que  $1 + \frac{du}{dx}, \frac{dv}{dx}, \frac{dw}{dx}$  respectivement, en vertu des six relations connues entre les neuf cosinus. Or faisons, en nous appuyant sur les différentielles des trois relations telles que  $c_{y\xi}c_{x\xi} + c_{y\eta}c_{x\eta} + c_{y\zeta}c_{x\zeta} = 0$ ,

$$(286) \left\{ \begin{aligned} c_{x\xi} \frac{dc_{y\xi}}{ds} + c_{x\eta} \frac{dc_{y\eta}}{ds} + c_{x\zeta} \frac{dc_{y\zeta}}{ds} &= -c_{y\xi} \frac{dc_{x\xi}}{ds} - c_{y\eta} \frac{dc_{x\eta}}{ds} - c_{y\zeta} \frac{dc_{x\zeta}}{ds} = p, \\ c_{x\xi} \frac{dc_{z\xi}}{ds} + c_{x\eta} \frac{dc_{z\eta}}{ds} + c_{x\zeta} \frac{dc_{z\zeta}}{ds} &= -c_{z\xi} \frac{dc_{x\xi}}{ds} - c_{z\eta} \frac{dc_{x\eta}}{ds} - c_{z\zeta} \frac{dc_{x\zeta}}{ds} = q, \\ c_{y\xi} \frac{dc_{z\xi}}{ds} + c_{y\eta} \frac{dc_{z\eta}}{ds} + c_{y\zeta} \frac{dc_{z\zeta}}{ds} &= -c_{z\xi} \frac{dc_{y\xi}}{ds} - c_{z\eta} \frac{dc_{y\eta}}{ds} - c_{z\zeta} \frac{dc_{y\zeta}}{ds} = r \end{aligned} \right.$$

quantités dont nous verrons tout à l'heure la signification. Et, en remarquant que les différentielles  $d\xi$ ,  $d\eta$ ,  $d\zeta$  des coordonnées de M par rapport à l'axe  $s$ , ou ce dont elles augmentent quand on passe de M à un point voisin  $M_1$ , aussi situé sur l'axe courbé de la tige, sont proportionnelles aux cosinus  $c_{x\xi}$ ,  $c_{x\eta}$ ,  $c_{x\zeta}$  des angles de  $MM_1$  avec  $O\xi$ ,  $O\eta$ ,  $O\zeta$ , faisons

$$(287) \quad \frac{1}{c_{x\xi}} \frac{d\xi}{ds} = \frac{1}{c_{x\eta}} \frac{d\eta}{ds} = \frac{1}{c_{x\zeta}} \frac{d\zeta}{ds} = 1 + \varepsilon;$$

nous avons

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{ds} c_{x\xi} + \frac{d\eta}{ds} c_{x\eta} + \frac{d\zeta}{ds} c_{x\zeta} &= (1 + \varepsilon) (c_{x\xi}^2 + c_{x\eta}^2 + c_{x\zeta}^2) = 1 + \varepsilon, \\ \frac{d\xi}{ds} c_{y\xi} + \frac{d\eta}{ds} c_{y\eta} + \frac{d\zeta}{ds} c_{y\zeta} &= (1 + \varepsilon) (c_{x\xi}c_{y\xi} + c_{x\eta}c_{y\eta} + c_{x\zeta}c_{y\zeta}) = 0. \end{aligned}$$

Les équations-sommes sont donc

$$(288) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{du}{dx} &= \frac{du}{ds} + q(z+w) - r(y+v) + \varepsilon, \\ \frac{dv}{dx} &= \frac{dv}{ds} + r(x+u) - p(z+w), \\ \frac{dw}{dx} &= \frac{dw}{ds} + p(y+v) - q(x+u). \end{aligned} \right.$$

Mais on n'a pas encore eu égard, jusqu'ici, à ce que les dimensions transversales de la tige sont infiniment petites. Cette circonstance introduite permet à M. Kirchhoff de simplifier encore ces trois équations (288) par la suppression de tous les termes en  $u$ ,  $v$ ,  $w$  de leurs seconds membres.

Pour cela, il appuie de divers raisonnements et calculs les principes suivants de mécanique infinitésimale, que tout le monde, nous le pensons, lui accordera comme évidents :

1° Si l'on assujettit quelque part un corps élastique de dimensions finies de la même manière qu'on fait pour rendre immobile un corps rigide, c'est-à-dire si l'on rend fixes, outre l'un de ses points matériels (§ précédent, p. 827), une droite matérielle infiniment petite qui y passe, et une face matérielle infiniment petite passant par cette droite, les autres points du corps ainsi empêché de glisser et de tourner *n'éprouveront ensuite de déplacement que si des forces extérieures y agissent.*

2° Si, sur le corps ainsi assujetti, l'on fait successivement agir, aux mêmes points de l'intérieur ou de la surface, deux systèmes de forces, tels que celles du premier soient infiniment plus petites que celles du second, les déplacements produits par les premières seront infiniment plus petits que les déplacements produits par les secondes.

3° Si le corps, supposé encore assujetti quelque part de cette manière en une de ses parties, a des dimensions infiniment petites en tous sens (il est entendu qu'alors les éléments linéaire et plan rendus fixes sont infiniment petits d'ordre supérieur), les déplacements de ses points seront *infiniment plus petits* que ceux des points homologues d'un corps *semblable* de même matière et de dimensions finies, ces points homologues étant supposés sollicités dans les deux corps par des forces de même intensité pour l'unité de volume des éléments solides ainsi que pour l'unité de superficie des éléments de la surface enveloppe.

4° Mais les *dérivées de ces déplacements* par rapport aux coordonnées des points seront *aussi grandes dans le corps infiniment petit que dans le corps fini* et semblable, en sorte que les déplacements dans celui-là sont infiniment petits vis à vis de leurs déri-

vées, si les déplacements et leurs dérivées sont, dans celui-ci, du même ordre de grandeur (1).

De là il résulte qu'on peut, avec ce Savant, effacer comme négligeables  $u, v, w$  dans les seconds membres des trois équations (288) dont les premiers membres sont occupés par les dérivées  $\frac{du}{dx}, \frac{dv}{dx}, \frac{dw}{dx}$  de ces déplacements du point quelconque  $m$  du tron-

(1) Ce quatrième principe, très-essentiel à employer, ne paraîtra pas moins évident que les trois autres, si l'on considère que le corps infiniment petit se trouve dans le même cas, quant à l'ordre de grandeur des déplacements et de leurs dérivées, que l'élément du corps fini qui comprend l'endroit assujéti. Les dérivées des déplacements, par exemple les dilatations  $\frac{du}{dx}$ , y sont du même ordre de grandeur que dans le reste du corps fini, bien que les déplacements eux-mêmes  $u, \dots$ , y soient infiniment plus petits qu'à des distances finies du point immobile; et si les  $du$  y sont pris plus petits, les  $dx$  le sont dans la même proportion, de sorte que les rapports  $\frac{du}{dx}$  sont les mêmes aux points semblablement placés dans les deux corps.

Voici, au reste, à peu près comment l'éminent professeur tire ce principe des trois équations indéfinies (38) écrites, eu égard à (12), sous la forme suivante, qui sont à satisfaire partout (on n'écrit que la première des trois)

$$\frac{d}{dx} \left[ a_{xxxx} \frac{du}{dx} + \dots + a_{xyzxy} \left( \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} \right) \right] + \frac{d}{dy} \left[ a_{xyzz} \frac{du}{dx} + \dots \right] + \frac{d}{dz} \left[ a_{zzxx} \frac{du}{dx} + \dots \right] = X,$$

et des trois définies (39), de la forme suivante, à satisfaire à la surface seulement (on n'écrit que la première)

$$\left[ a_{xxxx} \frac{du}{dx} + \dots \right] \cos(n, x) + \left[ a_{xyzz} \frac{du}{dx} + \dots \right] \cos(n, y) + \left[ a_{zzxx} \frac{du}{dx} + \dots \right] \cos(n, z) = \varpi \cos(n, \varpi),$$

ainsi que des six équations particulières ou d'assujétissement (283 bis) à satisfaire pour  $x = 0, y = 0, z = 0$  :

$$u = 0, v = 0, w = 0, \frac{dv}{dx} = 0, \frac{dw}{dx} = 0, \frac{dw}{dy} = 0.$$

Il faut dans ces douze équations, posées pour le corps infiniment petit,

$$x = ix, y = iy, z = iz,$$

$i$  étant la fraction infiniment petite qui exprime la proportion dans laquelle il faut



çon MM' par rapport aux axes mobiles ou variables  $Mx, My, Mz$ . Ce corps MM' est, en effet, infiniment petit en tous sens, et il satisfait aux conditions d'*assujettissement*, car l'origine des coordonnées primitives  $x, y, z$  de  $m$  comme de ses coordonnées nouvelles  $x+u, y+v, z+w$  est un de ses points matériels, M; l'axe des  $x$  ou  $x+u$ , supposé tangent à l'axe de figure MM', se trouve pris ainsi dans la direction d'un des éléments linéaires matériels, et l'on suppose aussi qu'on prend pour le plan des  $xy$  le prolongement d'un des éléments plans matériels passant par le même élément linéaire, par exemple l'élément plan passant par l'un des deux axes principaux de la section, en sorte qu'on a bien les six équations particulières (283 bis) de non-déplacement d'un point et de deux éléments, expri-

réduire les dimensions linéaires du corps fini pour avoir celles du corps semblable infiniment petit, et il multiplie tous les termes par  $i^2$  et  $i$  pour ne les avoir plus aux dénominateurs. Il en résulte douze équations toutes semblables, excepté qu'aux coordonnées infiniment petites  $x, y, z$  des points de celui-ci se trouvent substituées les coordonnées finies  $x, y, z$  des points homologues de celui-là, et que, dans les seconds membres des six premières équations, les forces  $X, Y, Z$  agissant sur l'unité de volume, et la force  $\omega$  agissant sur l'unité de surface, se trouvent remplacées par

$$i^2X, i^2Y, i^2Z \text{ et } i\omega.$$

Or, ainsi transformées, ces douze équations montrent bien que les déplacements  $u, v, w$  qui sont toujours ceux des points du corps infiniment petit, dus aux forces  $X, Y, Z$  et  $\omega$ , sont ce que seraient les déplacements homologues dans le corps fini s'ils étaient déterminés par des forces infiniment plus petites  $i\omega$  que celles-ci à la surface, et, à l'intérieur, par des forces  $i^2X, i^2Y, i^2Z$  négligeables comme *encore plus petites* dans une proportion infinie.

Mais, pour le corps infiniment petit, sollicité par les forces  $\omega$ , etc., les neuf dérivées

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{i} \frac{du}{dx}, \quad \frac{dv}{dy} = \frac{1}{i} \frac{dv}{dy}, \quad \dots, \quad \frac{dw}{dz} = \frac{1}{i} \frac{dw}{dz},$$

$\frac{1}{i}$  fois ou infiniment plus grandes que les dérivées analogues  $\frac{du}{dx}, \dots, \frac{dw}{dz}$  relatives au corps fini sollicité par les forces  $i\omega$ , etc., sont, comme on voit, du même ordre de grandeur que seraient ces dernières dérivées si la surface du corps fini était soumise, par unité, aux mêmes forces  $\omega$  qui agissent sur le corps infiniment petit; en sorte que, comme l'exprime M. Kirchhoff, les déplacements  $u, v, w$  dans le petit corps sont bien *infiniment petits vis-à-vis de leurs dérivées*  $\frac{du}{dx}$ ,

$$\frac{dv}{dy}, \quad \dots, \quad \frac{dw}{dz}.$$

mant la condition sous laquelle se trouvent établis les quatre principes énoncés.

Or on peut aussi, dans les seconds membres de (288), effacer

$$\frac{du}{ds}, \quad \frac{dv}{ds}, \quad \frac{dw}{ds}$$

si l'on suppose, comme dit M. Kirchhoff, que ces coefficients différentiels ne sont pas infiniment grands vis-à-vis de  $u, v, w$ ; car alors, d'après ce qu'on vient de voir, ils sont négligeables comme infiniment plus petits que les premiers membres  $\frac{du}{dx}, \frac{dv}{dx}, \frac{dw}{dx}$ .

Et ceci n'a rien de contraire à ce qui a été montré tout à l'heure de l'indifférence des différentiations opérées par rapport à  $x$  ou par rapport à  $s$ , car il s'agissait des déplacements absolus des points de la tige dans l'espace, tandis qu'il s'agit maintenant de  $u, v, w$ , déplacements relatifs dans l'intérieur de chaque tronçon. On conçoit très-bien que les déplacements absolus augmentent de mêmes quantités soit qu'on aille d'un point pris sur la première base  $M$  au point correspondant de la deuxième base  $M'$  d'un même tronçon  $MM'$ , soit qu'on aille du point  $m$  de ce tronçon au point homologue  $m'$  du tronçon suivant,  $M'M''$ ; mais qu'il n'en soit nullement de même pour les déplacements relatifs  $u, v, w$  pris par rapport aux axes se croisant au centre de la base de chaque tronçon. Il est clair que ces derniers déplacements doivent varier incomparablement plus d'un bout à l'autre du même tronçon  $MM'$  où ils sont rapportés aux mêmes axes  $Mx, My, Mz$ , que d'un point d'un tronçon au point homologue d'un autre, où ils sont rapportés à de nouveaux axes  $M'x', M'y', M'z'$ , qui ont d'autres directions en raison précisément des différences des déplacements qui ont eu lieu d'un bout à l'autre de  $MM'$ .

Si, d'un tronçon à l'autre, les déplacements homologues, relatifs à ces axes différents, variaient d'une quantité de l'ordre de la distance  $ds$  des bases de ces tronçons, en sorte que  $\frac{du}{ds}$  fût du même ordre de grandeur que  $\frac{du}{dx}$ , c'est que la tige aurait éprouvé de brusques variations de forme, telles que des flexions anguleuses ou

des torsions non graduelles. Or c'est ce qu'on ne suppose jamais dans les questions comme celles qui nous occupent;  $\frac{du}{ds}$ ,  $\frac{dv}{ds}$ ,  $\frac{dw}{ds}$

doivent donc être négligées devant  $\frac{du}{dx}$ ,  $\frac{dv}{dx}$ ,  $\frac{dw}{dx}$ :

Les équations (288) se réduisent en conséquence à

$$(289) \quad \frac{du}{dx} = \varepsilon + qz - ry, \quad \frac{dv}{dx} = rz - pz, \quad \frac{dw}{dx} = py - qx.$$

§ 96. 2° *Interprétation et conséquences de ces équations (289).*

— Dans ces équations,  $x, y, z$  sont, pour un tronçon quelconque, les coordonnées infiniment petites *primitives* d'un quelconque de ses points, rapportés à des axes coordonnés pris dans ce tronçon même, et  $u, v, w$  sont ce dont il faut les augmenter pour avoir les coordonnées ultérieures du même point par rapport à des axes nouveaux  $Mx, My, Mz$  aussi rectangulaires, ayant même origine  $M$  au centre de gravité de la base,  $Mx$  étant tangent à l'axe fléchi de la tige, et le plan  $xMy$  passant par  $Mx$  et par la tangente à l'axe principal de plus petit moment d'inertie de la section.

$\varepsilon$  représente, d'après (287), la *dilatation longitudinale de l'axe de la tige* en  $M$ ; car, comme les coordonnées, avant et après les déplacements, des deux points  $M, M'$  de cet axe, sont respectivement

$$\xi, \eta, \zeta, \text{ et } \xi + \frac{d\xi}{ds} ds, \quad \eta + \frac{d\eta}{ds} ds, \quad \zeta + \frac{d\zeta}{ds} ds,$$

l'allongement subi par la portion  $MM'$  de la tige est :

$$\sqrt{\left(\frac{d\xi}{ds} ds\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{ds} ds\right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{ds} ds\right)^2} - ds = ds(1 + \varepsilon) - ds = \varepsilon ds.$$

Quant aux quantités  $p, q, r$ , les formes (286) de leurs expressions telles que  $c_x \frac{dc_x}{ds} + c_{\eta} \frac{dc_{\eta}}{ds} + c_x \frac{dc_x}{ds}$  sont connues dans une théorie dynamique, celle de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe. Si en effet l'on y met en dénominateurs l'élément  $dt$  du temps  $t$  au lieu de l'élément  $ds$  de l'arc  $AMB$ ,  $\xi, \eta, \zeta$  étant toujours les directions d'axes coordonnés fixes dans l'espace, elles représentent les composantes de la vitesse angulaire instantanée

d'un pareil corps autour d'axes rectangulaires mobiles  $x, y, z$  liés avec lui et se croisant au centre fixe de rotation. Elles représentent aussi, comme l'a remarqué M. Duhamel (1), les cosinus infiniment petits, divisés par  $dt$ , des angles presque droits faits par chacun des trois axes rectangulaires mobiles, avec les directions qu'auront les deux autres après cet instant  $dt$ .

Analogiquement, pour en revenir à notre problème statique, si nous appelons

$$x', y', z'$$

les directions des axes rectangulaires  $M'x', M'y', M'z'$  tracés dans le tronçon suivant,  $M'M''$ , après les déplacements, de la même manière que l'ont été  $Mx, My, Mz$  dans le tronçon  $MM'$ , remarquons qu'on a, d'après (286),

$$\begin{aligned} \cos(z, y') &= c_{x\xi} \left( c_{y\xi} + \frac{dc_{y\xi}}{ds} ds \right) + c_{x\eta} \left( c_{y\eta} + \frac{dc_{y\eta}}{ds} ds \right) + c_{x\zeta} \left( c_{y\zeta} + \frac{dc_{y\zeta}}{ds} ds \right) = \\ &= \left( c_{x\xi} \frac{dc_{y\xi}}{ds} + c_{x\eta} \frac{dc_{y\eta}}{ds} + c_{x\zeta} \frac{dc_{y\zeta}}{ds} \right) ds = p ds, \end{aligned}$$

et ainsi de même des cinq autres cosinus analogues; en sorte que

$$(290) \quad p = \frac{c_{xy}'}{ds} = -\frac{c_{yx}'}{ds}, \quad q = \frac{c_{xz}'}{ds} = -\frac{c_{zx}'}{ds}, \quad r = \frac{c_{yz}'}{ds} = -\frac{c_{zy}'}{ds};$$

c'est-à-dire que  $p ds, q ds, r ds$  sont les projections, sur  $Mz, Mx, My$ , de l'unité de longueur portée sur les lignes aussi rectangulaires  $M'y', M'z', M'x'$ , ou, au signe près, les projections sur  $My, Mz, Mx$  de la même unité portée sur  $M'z', M'x', M'y'$  respectivement. Autrement,

$$p, q, r$$

sont les *rotations*, rapportées à l'unité de la distance  $ds$  des deux sections  $M, M'$ , qu'il faut faire subir à la première en même temps qu'on amène par une translation son point central  $M$  en  $M'$ , pour que l'élément matériel de l'axe de la tige, qui lui est lié, vienne coïncider avec l'élément correspondant partant de  $M'$ , et pour

(1) Cours de Mécanique, 2<sup>e</sup> édition (1853), t. 2, n<sup>o</sup> 409 (note).

qu'il y ait aussi coïncidence entre les éléments plans passant en M et en M', par ces éléments linéaires et par ceux qui appartiennent aux axes principaux de moindre moment d'inertie des deux sections.

D'où l'on peut voir que :

$p$  est ce que nous avons appelé la *torsion* jusqu'ici, autour de Mx;  
 $q$ ,  $r$  sont les *flexions* que la tige a prise simultanément autour des axes principaux Mz, My.

Nommons donc pour le point M, comme aux notes du n° 83 (p. 59) et du n° 156 (p. 246), et au 3<sup>e</sup> appendice :

$\delta$  la dilatation longitudinale;

$\theta$  la torsion, ou l'arc d'un rayon = 1 mesurant la rotation relative, autour de l'axe MM', de deux sections infiniment voisines, divisée par leur distance;

$\rho'$ ,  $\rho''$  les rayons de courbure des projections de la courbe d'axe sur les plans  $zx$  et  $yx$ ;

nous pourrons, dans les formules (289), écrire

$$(290 \text{ bis}) \left\{ \begin{array}{l} \delta, \theta, \frac{1}{\rho'}, \frac{1}{\rho''} \\ \text{à la place de } \varepsilon, p, q, -r; \end{array} \right.$$

ce qui donne

$$(291) \quad \frac{du}{dx} = \delta + \frac{z}{\rho'} + \frac{y}{\rho''}, \quad \frac{dv}{dx} = -\frac{x}{\rho'} - 0z, \quad \frac{dw}{dx} = \theta y - \frac{x}{\rho'}.$$

Or, intégrons d'abord ces équations, ce qui donne, en représentant par

$$u, v, w$$

des grandeurs indépendantes de  $x$ , ou des fonctions de  $y, z$  seuls pour chaque tronçon,

$$(292) \quad \left\{ \begin{array}{l} u = u + \left( \delta + \frac{x}{\rho'} + \frac{y}{\rho''} \right) x, \\ v = v - 0zx - \frac{x^2}{2\rho'}, \quad w = w + \theta xy - \frac{x^2}{2\rho'}; \end{array} \right.$$

puis, différencions non-seulement par rapport à  $x$  ce qui reproduit (291), mais aussi par rapport à  $y$  et à  $z$ , afin de composer

les trois dilatations (42)  $\partial_x = \frac{du}{dx}$ , etc. et les trois glissements  $\varepsilon_{xy} = \frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}$ , etc. Il en résulte les formules

$$(293) \left\{ \begin{array}{l} \partial_x = \delta + \frac{x}{\rho'} + \frac{y}{\rho''}, \quad \partial_y = \frac{dv}{dy}, \quad \partial_z = \frac{dw}{dz} \\ \varepsilon_{xy} = \frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}, \quad \varepsilon_{xz} = \frac{du}{dx} + \theta y, \quad \varepsilon_{yz} = \frac{du}{dy} - \theta z. \end{array} \right.$$

Les grandeurs  $u$ ,  $v$ ,  $w$  entrant dans (293) ne sont autre chose que les petits déplacements  $u$ ,  $v$ ,  $w$  pour  $x = 0$ , c'est-à-dire aux divers points de toute section de la tige, car chacune de ces sections peut être prise pour base d'un des tronçons infiniment petits considérés. Ces déplacements sont nuls au centre de gravité  $M$ , origine des coordonnées particulières dont  $u$ ,  $v$ ,  $w$  étaient les augmentations. Ainsi

$u$

est, pour chaque point de chaque section, ce dont le *gauchissement* qu'elle éprouve écarte ce point du plan mené par le centre  $M$  normalement à l'axe de la tige; et

$v, w$

sont les écarts transversaux provenant des dilatations latérales  $\partial_y$ ,  $\partial_z$  et du *glissement de déformation transversale*  $\varepsilon_{yz}$ , quand ces dilatations et ce glissement particulier ne sont pas comme cela a lieu dans la torsion pure considérée à la note du n° 156.

Les équations qui précèdent sont, on peut le dire, de pure cinématique, ou tout à fait indépendantes des intensités et du mode d'application et de distribution des forces sollicitant la tige (sous la seule restriction énoncée que  $\frac{du}{ds}$ ,  $\frac{dv}{ds}$ ,  $\frac{dw}{ds}$  ne soient pas infiniment grands vis à vis de  $u$ ,  $v$ ,  $w$  ou qu'il n'y ait rien de brusque dans la marche des effets de ces forces d'un bout à l'autre de la tige). Elles sont le résultat de la seule supposition de dimensions transversales infiniment petites.

Or les deux dernières de ces expressions (293), savoir celles des glissements  $\varepsilon_{xy}$ ,  $\varepsilon_{xz}$ , ne sont autre chose que celles [§§ 8, 9 de la note du n° 156, ou § 35 du 3<sup>e</sup> appendice, formules (72)] que nous avons

données en 1847 et en 1853 <sup>(1)</sup> pour les glissements produits par la torsion d'un prisme quelconque dont les fibres droites se changent en hélices toutes de même pas; ce qui n'a lieu rigoureusement, quand les dimensions transversales sont finies, qu'autant que ce prisme est sollicité d'une certaine manière sur ses bases extrêmes, comme nous l'avons prouvé, et M. Clebsch après nous (§ 94). La première, celle de  $\delta_x$ , se compose de la dilatation de l'axe plus deux termes semblables au terme unique qu'on tire, dans la théorie ordinaire de la flexion, de l'hypothèse que les sections restent planes et normales aux fibres, mais que nous avons démontré subsister lorsque, conformément à la réalité, ces sections sont supposées en outre s'incliner et se courber d'une manière qui pour s'accomplir exactement exige encore un mode particulier de sollicitation et de distribution des forces sur les bases extrêmes des prismes quand ces bases ont des dimensions finies. On voit maintenant que ces trois expressions de la dilatation longitudinale et de deux glissements sont vraies (même lorsqu'il y a simultanément de petites dilatations et déformations transversales  $\delta_y, \delta_z, g_y$ , que nous avons abstraites) pour tout mode d'application et de distribution des forces sollicitantes si la section transversale a des dimensions infiniment petites, et qu'alors les parties des glissements  $g_{xy}, g_{xz}$  ou de l'incurvation des sections qui accompagnent la flexion inégale ou qui ne viennent pas de la torsion <sup>(2)</sup>, sont négligeables; toutes choses que nous avons dites avoir lieu à peu près et avec l'approximation désirable lorsque les dimensions transversales sont seulement petites par rapport aux dimensions longitudinales.

Toute notre théorie de la torsion, et ce que nous avons dit de la possibilité de l'application très-approchée de ses formules à la pratique, se trouvent ainsi confirmés par l'analyse et les considérations délicates de M. Kirchhoff.

On le vérifie en substituant les expressions précédentes (298) dans les formules de composantes de pression (29), p. 577, ou

<sup>(1)</sup> Comptes rendus, 22 mars, t. XXIV, p. 487; et Savants étrangers, t. XVI, art. 50, form. (103).

<sup>(2)</sup> C'est-à-dire les parties de  $g_{xz}, g_{xy}$  que nous appelons  $g'_1, g''_1$  aux §§ 44 à 46 (46 surtout, p. 403-405), ou  $g', g''$  au Théorème IV, § 43 du deuxième Appendice, p. 537.

plutôt (174), p. 759, relatives au cas d'un seul plan de symétrie de contecture, perpendiculaire à la coordonnée longitudinale  $x$ , que l'on ne prend toujours que pour une portion de tige de longueur infiniment petite, et ces formules dans la première équation d'équilibre indéfinie (38)  $\frac{dp_{xx}}{dx} + \frac{dp_{xy}}{dy} + \frac{dp_{xz}}{dz} = 0$ , dont on peut ainsi effacer le premier terme vu que  $\delta, \theta, \rho', \rho''$  sont constants dans cette étendue infiniment petite  $MM'$ , et substituant aussi dans la première équation définie (39) qui se réduit, sur la surface latérale supposée non pressée, à  $p_{xy} \cos(n, y) + p_{xz} \cos(n, z) = 0$ .

Ces substitutions donnent en effet

$$(294) \left\{ \begin{array}{l} f \frac{d^2 u}{dy^2} + 2h' \frac{d^2 u}{dy dz} + e \frac{d^2 u}{dz^2} = 0 \text{ partout;} \\ \text{et, au contour des sections} \\ \left[ e \left( \frac{du}{dz} + \theta y \right) + h' \left( \frac{du}{dy} - \theta z \right) \right] \cos(n, z) + \\ \left[ h' \left( \frac{du}{dz} + \theta y \right) + f \left( \frac{du}{dy} - \theta z \right) \right] \cos(n, y) = 0, \end{array} \right.$$

équations semblables à (73) et (74), p. 607-608 [en faisant  $h'' = h''' = h'$  suivant les égalités (149) du § 70, p. 716]; et se réduisant, quand on se trouve dans le cas particulier de trois plans de symétrie  $yz, zx, xy$ , ou bien quand on change les coordonnées transversales comme aux p. 614, 771, à

$$G' \frac{d^2 u}{dy^2} + G'' \frac{d^2 u}{dz^2} = 0, \quad G'' \left( \frac{du}{dz} + \theta y \right) dy - G' \left( \frac{du}{dy} - \theta z \right) dz = 0$$

de notre mémoire de 1853 et du § 39 de la note du n° 156, p. 348; et qui servent à déterminer la variable  $u$ .

Et, pour déterminer les deux autres inconnues  $v$  et  $w$ , M. Kirchhoff montre autrement que nous que l'on satisfait aux autres conditions, comme nous l'avons, dit-il, remarqué le premier, en posant pour tout le solide :

$$(295) \quad p_{yy} = 0, \quad p_{zz} = 0, \quad p_{yz} = 0$$

(ou les équations (280) prises pour point de départ par M. Clebsch); car M. Kirchhoff observe qu'en mettant dans (295) pour  $p_{yy}, p_{zz},$

$p_{yz}$  leurs expressions (29) ou (174), et (293)  $\delta + \frac{x}{\rho'} + \frac{y}{\rho''}$  pour  $\delta_x$ , on



tire pour  $\delta_y, \delta_x, g_{yz}$  des expressions en  $y, z$  de forme linéaire, satisfaisant par conséquent à

$$\frac{d^2\delta_y}{dz^2} + \frac{d^2\delta_x}{dy^2} = 0 = \frac{d^2g_{yz}}{dydz},$$

condition de compatibilité (50), p. 596, sous laquelle  $\delta_y, \delta_x, g_{yz}$  peuvent avoir les formes (293); etc.

On peut observer que les équations différentielles obtenues sont encore applicables quand la torsion  $\theta$  varie légèrement avec  $s$ , ou change graduellement d'un bout à l'autre de la tige, comme quand elle est constante. Cela permet de passer, sans l'espèce de postulat invoqué § 42 (p. 633), du cas de l'équilibre de torsion au cas de vibrations tournantes, dont M. Kirchhoff démontre, du reste, aussi l'équation un peu plus loin.

On peut voir aussi, conformément à ce qui a été dit au commencement du § précédent, que les expressions (293), conséquences de la petitesse des dimensions transversales, s'appliquent aussi bien à une tige dont la section varie graduellement et légèrement qu'à une tige de section constante, pourvu que son axe soit primitivement rectiligne, et que les points homologues des sections voisines se correspondent, condition qui est remplie si les axes principaux de plus petit moment d'inertie sont dans un même plan. En effet, malgré le petit défaut de parallélisme, à l'axe  $MM'$  (figure p. 833), des fibres joignant ces points homologues, si l'on prend sur l'une quelconque d'entre elles, comme au § précédent,  $mm_1$ , égal à  $MM_1$ , ou  $ds$ , on aura toujours, à cela près d'infiniment petits d'ordre négligeable, les mêmes accroissements des coordonnées finies  $\xi, \eta, \zeta$  du point  $m$  dans l'espace, soit qu'on passe de  $m$  en  $m_1$  sur cette fibre dans un même tronçon  $MM'$ , soit qu'on avance tout le tronçon de la quantité  $MM_1$  en conservant la distance  $x$  de  $m$  à la base  $M$ ; en sorte qu'on peut toujours regarder ces coordonnées finies  $\xi, \eta, \zeta$  comme ayant les mêmes dérivées par rapport à  $x$  que par rapport à  $s$ ; d'où les équations (285) et les formules qui suivent.

Enfin, toutes ces formules, en les employant doublement, peuvent fournir ce qui est relatif à une tige naturellement courbe, comme le remarque très-bien M. Kirchhoff; et, aussi, à une tige naturellement tordue, c'est-à-dire analogue à une colonne torse, ou dont les sections transversales successives n'ont pas leurs axes de

moindre ou de plus grand moment d'inertie dans un même plan. Il suffit, pour cela, de supposer imprimée à la tige une première déformation qui la *rectifie* et la *détorde*, et de prendre pour cet état les petites coordonnées  $x, y, z$ , qui seront alors parallèles à son axe de figure et aux axes principaux d'inertie de ses sections; puis à imprimer à la tige une deuxième déformation qui l'amène à son état définitif, en la faisant repasser par son état donné. On a alors deux systèmes de trois équations comme (293). En retranchant celles du premier système de celles du second qui y correspondent, et représentant par l'indice 0 les quantités relatives à celui-là, les équations (292) donnent

$$(295) \quad u - u_0 = u - u_0 + \left[ \delta - \delta_0 + z \left( \frac{1}{\rho'} - \frac{1}{\rho'_0} \right) + y \left( \frac{1}{\rho''} - \frac{1}{\rho''_0} \right) \right] x, \\ v - v_0 = \text{etc.}, \quad w - w_0 = \text{etc.}$$

Et les (293) donnent

$$(296) \quad \left\{ \begin{aligned} \delta_x &= \frac{d(u - u_0)}{dx} = \delta - \delta_0 + z \left( \frac{1}{\rho'} - \frac{1}{\rho'_0} \right) + y \left( \frac{1}{\rho''} - \frac{1}{\rho''_0} \right), \\ \varepsilon_{xz} &= \frac{d(u - u_0)}{dz} + (\theta - \theta_0)y, \quad \varepsilon_{xy} = \frac{d(u - u_0)}{dy} - (\theta - \theta_0)x \quad (1). \end{aligned} \right.$$

Nous comptons y revenir quand nous traiterons des pièces cour-

(1) On voit que les *flexions* autour des axes transversaux principaux  $y, z$  ont pour grandeurs, quand la tige était primitivement courbe,

$$\frac{1}{\rho'} - \frac{1}{\rho'_0}, \quad \frac{1}{\rho''} - \frac{1}{\rho''_0};$$

ou, en appelant  $\varepsilon, \varepsilon'$  les angles que forme, avant et après ces flexions, l'axe principal  $y$  avec la normale au plan osculateur de la fibre moyenne de la tige, ou l'axe principal  $x$  avec les rayons de courbure primitif et ultérieur  $\rho_0$  et  $\rho$ :

$$\frac{\cos(\varepsilon + \varepsilon')}{\rho} - \frac{\cos \varepsilon'}{\rho_0}, \quad \frac{-\sin(\varepsilon + \varepsilon')}{\rho} + \frac{\sin \varepsilon'}{\rho_0}.$$

En intégrant pour toute l'étendue d'une section  $\omega$  les deux membres de la première équation (296) multipliés d'abord par  $Ez d\omega$ , puis par  $Ey d\omega$ , on trouve, comme au § 2 de la note du n° 83, p. 54, que ces deux flexions doivent être égales à

$$\frac{M_y}{EI'}, \quad \frac{M_x}{EI''},$$

bes à simple et à double courbure. Mentionnons toujours ici que M. Kirchhoff, en développant le calcul pour le cas où les forces extérieures n'agissent qu'aux extrémités de la tige primitivement droite et prismatique, trouve que les équations sont les mêmes que celles dont dépend la détermination du mouvement de rotation d'un corps pesant autour d'un point, en y remplaçant le temps  $t$  par l'arc  $s$ , et les trois moments d'inertie principaux du corps tournant, par les coefficients appelés ci-dessus  $GJ'$ ,  $EI'$ ,  $EI''$  qui multipliés par la torsion et les flexions donnent les moments des forces capables de les produire; ce qui découle de l'assimilation déjà signalée ci-dessus entre ces deux genres de problèmes.

M. Kirchhoff, comme l'on voit, en 1858-59, se plaçant résolument dans l'hypothèse de dimensions infiniment petites suivant le sens transversal, et partageant les tiges dans le sens de leur longueur en tronçons aussi infiniment courts dont il lie entre eux les déplacements par des espèces d'équations de continuité, arrive, au moyen de considérations de pure géométrie ou de cinématique, quand ces tiges sont sollicitées d'une manière quelconque, à des résultats qui avaient échappé à l'analyse de Cauchy (note du

$M_y$ ,  $M_z$  étant les moments des forces, et  $I'$ ,  $I''$  les moments d'inertie de la section autour de ses axes principaux  $y$  et  $z$ .

Il est facile de voir aussi qu'on a la torsion

$$\theta - \theta_0 = \frac{dc}{ds} + \frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau_0},$$

$\frac{ds}{\tau_0}$  et  $\frac{d\theta}{\tau}$  étant, avant et après les déformations, les angles que font ensemble les plans osculateurs menés en deux points de l'axe à la distance  $ds$ . On a, ainsi, les équations que nous avons données en 1843 et 1844 (*Comptes rendus*, t. XVII, p. 952, et t. XIX, p. 44), dont on déduit que la flexion résultante est

$$\sqrt{\left(\frac{1}{\rho'} - \frac{1}{\rho'_0}\right)^2 + \left(\frac{1}{\rho''} - \frac{1}{\rho''_0}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{\rho^2} - \frac{2 \cos \epsilon}{\rho \rho_0} + \frac{1}{\rho_0^2}},$$

et non pas  $\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0}$  comme l'ont pensé quelques auteurs qui oublièrent de tenir compte de l'angle  $\epsilon$  dont le rayon de courbure, ou la trace du plan osculateur sur une section, tourne généralement sur le plan de celle-ci par l'effet des déplacements quand la courbe d'axe est à double courbure (On peut voir aussi *Comptes rendus*, 22 juin 1863, t. LVI, p. 1450, et Société philomathique 8 août 1863, ou *l'Institut*, n° 4554).

§ 39, 4<sup>e</sup> appendice, p. 621) fondée sur la supposition de dimensions très-petites et de développabilité des diverses grandeurs en série convergente suivant les puissances entières de ces dimensions.

Nous avons dû, dans l'intérêt de l'avancement de la science théorique et pratique, tenir à justifier par la citation de travaux de deux éminents professeurs des Universités de l'Allemagne, des formules nouvelles peu connues jusqu'ici en France quoique approuvées par l'Académie, et dont nous nous sommes efforcé de rendre (à la note du n<sup>o</sup> 156 et au 2<sup>e</sup> appendice) l'établissement simple et élémentaire autant que possible.

FIN DE LA PREMIÈRE SECTION.

ERRATA.

## ERRATA.

<i>Pages :</i>	<i>Lignes :</i>	<i>Au lieu de :</i>	<i>Lisez :</i>
cixij	2	généralement	seulement
cxciij	17	étant libres	étant libres
40	9	$\int v d\omega$	$\int v^2 d\omega$
73	19	$\frac{e}{p}$	$\frac{1}{p}$
82	12	$\frac{1}{2}^s$	48
83	2 en remontant	expression	L'expression
	3 idem	restes	suites
90	11 en remontant	coordonnées	ordonnées
140	6 en remontant	949 800 000	E = 949 800 000
	idem	6 075 000	R = 6 075 000
145	2	$\frac{R}{E}$	$\frac{R_0}{E}$
144	9 en remontant	$\frac{1}{v'}$	$\frac{1}{v_1'}$
149	3	$\eta' =$	$\eta_1 =$
169	17	130	150
213	11	$\eta \frac{Pv^2}{2EI}$	$nvr = \eta \frac{Pv^2}{2EI}$
218	9 en remontant	$xy_1$	$xy$
	2 en remontant	$1 + k$	$i + k$
225	4	4,084	4,087
	idem	4,449	4,493
246	7	1a	2a
255	dernière	u—	+ u —
268	6	$\Sigma n C_n \cos na$	$\Sigma n C_n r^n \cos na$
280	4 en remontant	2b	b
294	11 en remontant	$e^{-mu} - e^{-mu}$	$e^{mu} - e^{-mu}$
	4 idem	cmv	cmv

Pages :	Lignes :	Au lieu de :	Lisez :
306	44	$-\frac{c^4}{k}$	$-\frac{c^2}{k}$
358	7	la torsion	θ la torsion
384	8	$\frac{R'}{E}$	$\frac{R'_0}{E}$
382	3 en remontant	$\frac{R_0}{R_0}$	$\frac{R_0}{R'_0}$
	6 idem	45	48
396	7 en remontant	$du$	$dv$
	2 idem	$\int -v''$	$\int -v''$
401	dernière	$\frac{d}{dv}$	$\frac{dx}{dv}$
403	6 en remontant	intégrale	intégradle
453	6 en remontant	$\eta_1 R_0$	$\frac{4}{\eta_1} R_0$
458	5	$R_0 b^2 c$	$R_0 b c^2$
	8	$\left(\frac{\gamma}{2\mu} R_0 \frac{M_1}{T'_0}\right)^2$	$\left(\frac{\gamma}{2\mu} R_0 \frac{M_1}{T'_0}\right)^2$
465	1 en remontant	$M =$	$M_1 =$
527	48	$mn_1 +$	$mm_1 +$
	49	$mn_2 +$	$mm_2 +$
537	6 en remontant	$dg'''$	$dg''$
538	40 en remontant	$(a - v)$	$(a - x)$
539	dernière du texte	mément.	formément
	2 en remontant	$d^2v$	$d^2v$
543	44	ainsi	aussi
574	41	$x, y, z$	$x_1, y_1, z_1$
603	41	$-\eta'd''$	$-\eta'e''$
644	41	$\frac{dp_{xy}}{dx}$	$\frac{dp_{xy}}{dy}$
645	4	$\pi at$	$\pi at$
757	4	75	76
813	6	$rc_{rz} = \gamma$	$rc_{ry} = \gamma$

---

CHANGEMENTS.

## CHANGEMENTS.

---

Page ccij, ligne 4 de la note, *ajoutez* : Le résultat est le même.

Au bas de la page ccxiv et au haut de la page ccxv, remplacer l'alinéa par :

Sauveur, élu en 1696 membre de l'Académie des Sciences, avait déterminé analytiquement, en se fondant sur la théorie du pendule, les rapports mutuels des nombres des vibrations fournies par des cordes tendues de différentes longueurs et de différents poids, soit qu'elles ne vibrent qu'entières, soit qu'on les fasse vibrer simultanément en plusieurs parties, en approchant un chevalet d'un de leurs points de division aliquote, sans les toucher <sup>(1)</sup>.

Et p. ccxv, remplacer la note par :

(1) *Mémoires de l'Académie*, 1704, p. 424, 299 et surtout 354 ; et 1713, p. 324.

A la p. 426 : la diagonale de la figure devrait être horizontale.

A la p. 444, ligne 6, en remontant :

*remplacez* : l'école de Metz, M. Michon,  
*par* : la Sorbonne, M. Poncelet.

Page 484, ligne 8, en remontant, ajoutez : 4,5  
Id, 9, en remontant, ajoutez : ∞

Bas de la page 547, au tableau qui porte le nom de Poisson, mettez des accents à toutes les lettres, qui seront ainsi : P', Q', etc.

*Idem*, ajoutez ce tableau :

M. Kirchhoff.

$x \quad y \quad z$

$X_x$	$X_y$	$X_z$
$Y_x$	$Y_y$	$Y_z$
$Z_x$	$Z_y$	$Z_z$

Fig. 1. (N° 7, 113)

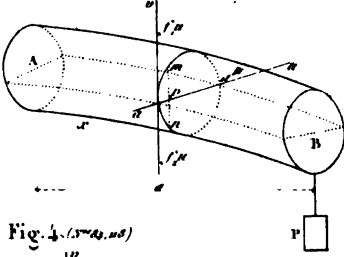


Fig. 2. (N° 8, 91, 113, 117)

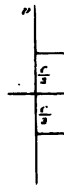


Fig. 3. (N° 82, 101)

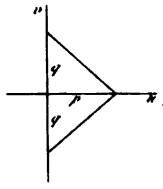


Fig. 4. (N° 80, 108)

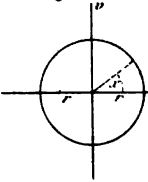


Fig. 5. (N° 88)

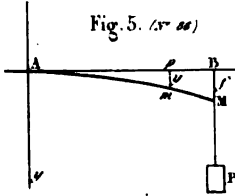


Fig. 6. (N° 87)

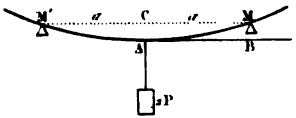


Fig. 7. (N° 89)

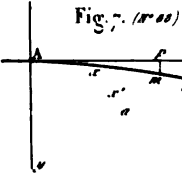


Fig. 8. (N° 90)

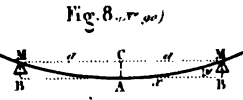


Fig. 9. (N° 101, 108, 112)

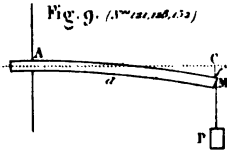


Fig. 11. (N° 107)

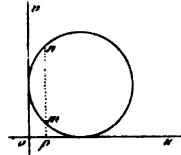


Fig. 10. (N° 102, 111)

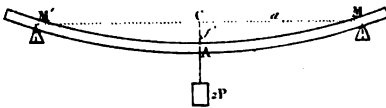


Fig. 12. (N° 116, 169)

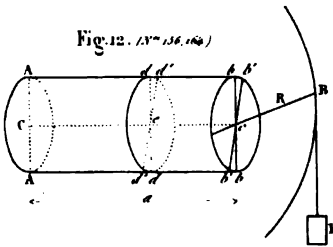
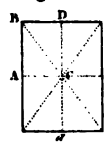
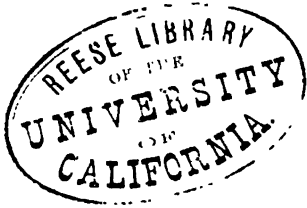


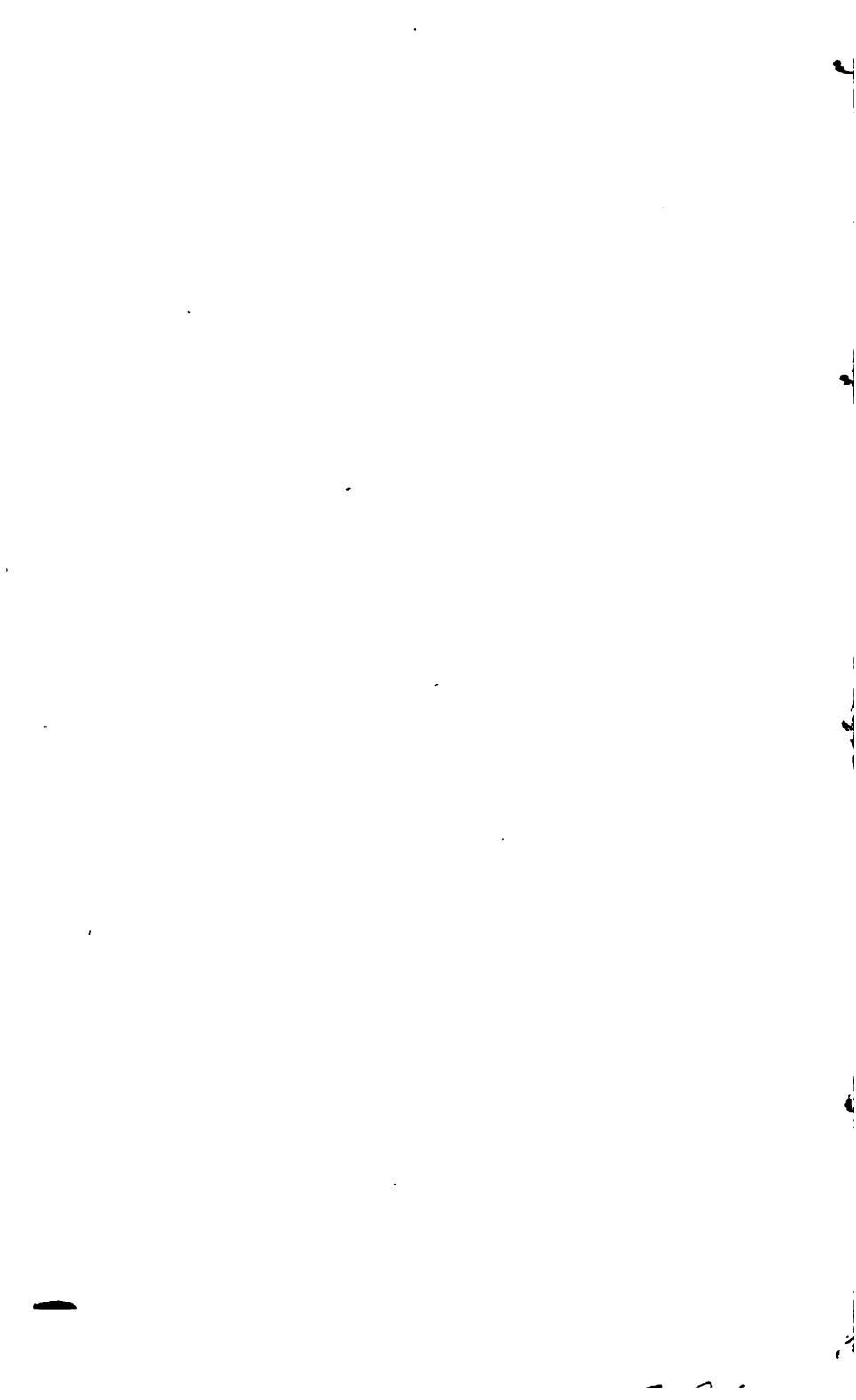
Fig. 15. (N° 118)

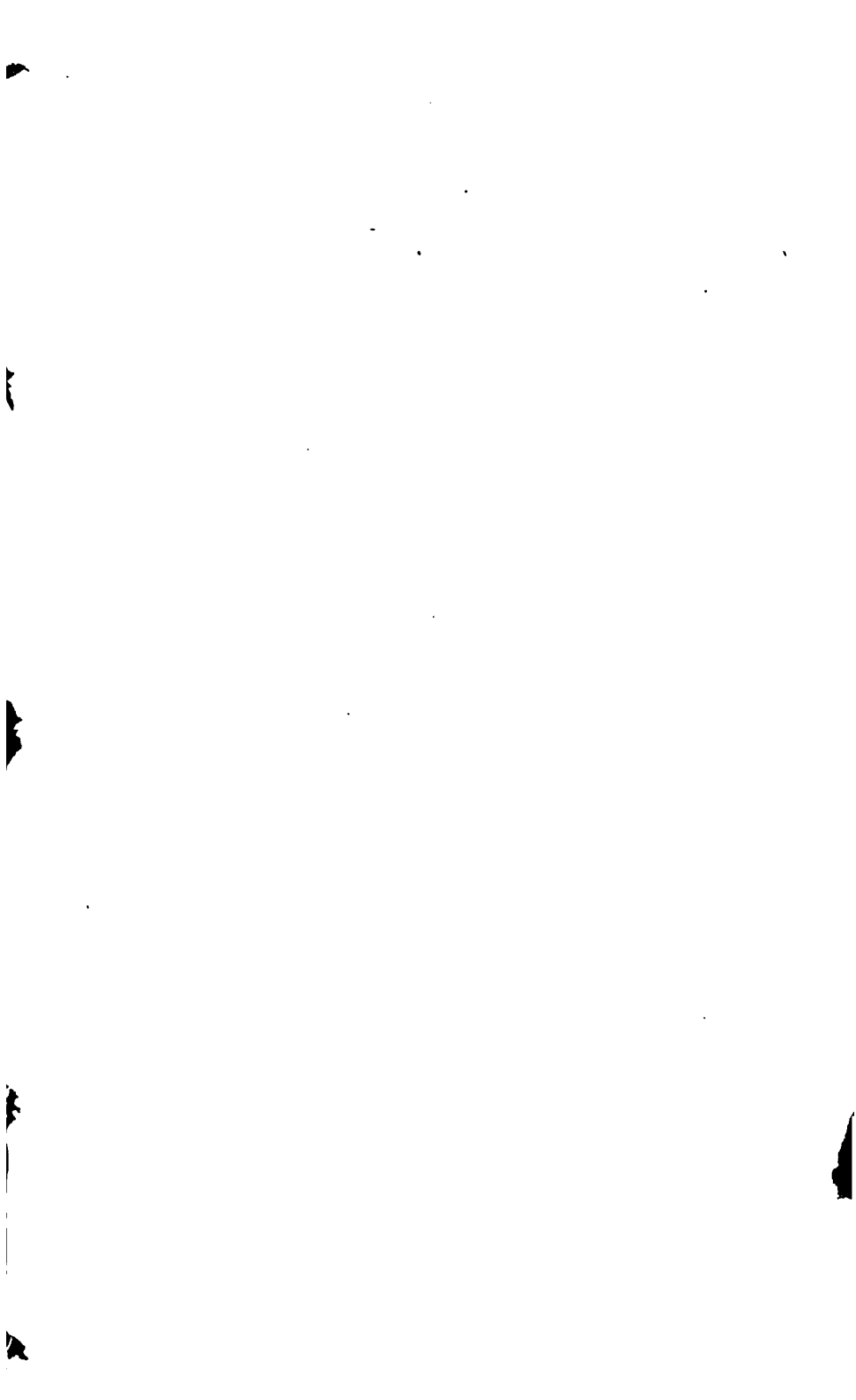












RETURN TO the circulation desk of any  
University of California Library  
or to the  
NORTHERN REGIONAL LIBRARY FACILITY  
Bldg. 400, Richmond Field Station  
University of California  
Richmond, CA 94804-4698

---

ALL BOOKS MAY BE RECALLED AFTER 7 DAYS

- 2-month loans may be renewed by calling (510) 642-6753
- 1-year loans may be recharged by bringing books to NRLF
- Renewals and recharges may be made 4 days prior to due date.

---

DUE AS STAMPED BELOW

~~OCT 03 2000~~

---

JUN 10 2005

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

12.000 (11/95)

FORM NO. DD6

BERKELEY, CA 94720

YC 105282

15961

350

N3

1864

CASE

UNIVERSITY OF CALIFORNIA LIBRARY

U.C. BERKELEY LIBRARIES



020924771

