BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI EGYETEM
Gépészmérnöki Kar

Tanszék: **Műszaki Mechanikai Tanszék**

DIPLOMATERV FELADAT

Szigorló neve: **Kossa Attila**

A tervfeladat témája:

Hiper- és hipoelasztikus testek konstitutív egyenleteinek elméleti és numerikus vizsgálata

A diplomatervezés helye: BME Műszaki Mechanikai Tanszék

Vállalat, üzem cime: -
Üzemi konzulens: -
Beosztása: -
Munkahelye: -

Tanszéki konzulens: Dr. Szabó László, egyetemi tanár

A záróvizsga tárgyai:

1. Gépek dinamikája (MM5003)
2. Szilárd testek mechanikája tárgycsoport (elmélet)
   (MM5096, MM4150, MM4107)
3. Szilárd testek mechanikája tárgycsoport (numerikus módszerek)
   (MM4150, MM4107)

Beadási határidő: **2005. május 20.**

A feladat kiadásának időpontja: **2005. január 24.**

A feladat részletezése:

1. Foglalja össze és rendszerezze a szakirodalom alapján a különböző hiper- és hipoelasztikus testek konstitutív egyenleteit különös tekintettel a logaritmikus deriválttal kapcsolatos modellekre!

2. Elemezze a logaritmikus deriváltra épülő hipoelasztikus anyagmodelleket és alkalmazásukra végezzen analitikus számításokat!

3. Dolgozzon ki számítási algoritmust a fenti modell végeselemes felhasználására!

4. Készítse el az algoritmusra épülő végeselemes szubrutint és implementálja az ABAQUS végeselem programba! A szakirodalomban talált tesztfeladatokkal ellenőrizze a programot és értékelje a kapott eredményeket.

Budapest, 2005. január 24.

BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI EGYETEM
GÉPÉSZMÉRNÖKI KAR
Műszaki Mechanikai Tanszék

....
Dr. Stépán Gábor
egyetemi tanár, tanszékvezető

A tervfeladatot jóváhagyom:

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Gépészmérnöki Kar
1.
Dékáni Hivatala

....
dékán

A feladatot átvettem:

....
szig.gm.

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Gépészmérnöki Kar
Műszaki Mechanikai Tanszék

Hiper- és hipoelasztikus testek konstitutív egyenleteinek
elméleti és numerikus vizsgálata

DIPLOMATERV

Készítette: Kossa Attila
Tanszéki konzulens: Dr. Szabó László, egyetemi tanár

2005

NYILATKOZAT AZ ÖNÁLLÓ MUNKÁRÓL

Alulírott Kossa Attila, a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem hallgatója kijelentem, hogy ezt a diplomatervet meg nem engedett segítség nélkül, saját magam készítettem, és a diplomatervben csak a megadott forrásokat használtam fel. Minden olyan részt, amelyet szó szerint vagy azonos értelemben, de átfogalmazva más forrásból átvettem, egyértelműen a forrás megadásával jelöltem.

Budapest, 2005. május 20. ------------------------------

TARTALOMJEGYZÉK

1. BEVEZETÉS 1
1.1. A DOLGOZAT CÉLKITŰZÉSEI 1
1.2. A DOLGOZAT TARTALMI ÁTTEKINTÉSE 1
1.3. ALKALMAZOTT JELÖLÉSEK 2
2. IRODALMI ÁTTEKINTÉS 6
3. KONTINUUMMECHANIKAI ALAPOK 7
3.1. KONTINUUMOK KINEMATIKÁJA 7
3.1.1. Az alakváltozási gradiens poláris felbontása 9
3.1.2. Sebességmező 13
3.2. ALAKVÁLTOZÁSI TENZOROK 14
3.2.1. Fajlagos ívhossz 14
3.2.2. Alakváltozási tenzorok a kezdeti konfigurációban 14
3.2.2.1. Jobboldali Cauchy-Green-féle deformációs tenzor 14
3.2.2.2. Piola-féle deformációs tenzor 15
3.2.2.3. Green-Lagrange-féle alakváltozási tenzor 15
3.2.2.4. Hencky-féle alakváltozási tenzor 16
3.2.2.5. Általánosított Lagrange-féle alakváltozási tenzorok 16
3.2.3. Alakváltozási tenzorok a pillanatnyi konfigurációban 17
3.2.3.1. Baloldali Cauchy-Green-féle deformációs tenzor 17
3.2.3.2. Cauchy-féle deformációs tenzor 18
3.2.3.3. Almansi-Euler-féle (Hamel-féle) alakváltozási tenzor 18
3.2.3.4. Hencky-féle alakváltozási tenzor 19
3.2.3.5. Általánosított Euler-féle alakváltozási tenzorok 19
3.3. FESZÜLTSÉGI TENZOROK 20
3.3.1. Cauchy-féle feszültségtenzor 21
3.3.2. Első Piola-Kirchhoff-féle feszültségtenzor 22
3.3.3. Második Piola-Kirchhoff-féle feszültségtenzor 22
3.3.4. Kirchhoff-féle feszültségtenzor 22
3.3.5. A feszültségtenzorok kapcsolata 23
3.4. OBJEKTÍV FESZÜLTSÉG-SEBESSÉGEK 24
3.4.1. Fizikai objektivitás 24
3.4.2. Objektív deriváltak 27
3.4.2.1. Nem együttforgó objektív deriváltak 27
3.4.2.2. Együttforgó objektív deriváltak 28
3.4.3. Objektív feszültség-sebességek 32
4. HIPOELASZTIKUS ANYAGMODELL 34
5. HIPERELASZTIKUS TESTEK 35
6. ANALITIKUS SZÁMÍTÁSOK 37
6.1. EGYSZERŰ NYÍRÁS 37
6.1.1. Analitikus megoldás a Truesdell-féle feszültség-sebesség használata esetén 40
6.1.2. Analitikus megoldás az Oldroyd-féle feszültség-sebesség használata esetén 40
6.1.3. Analitikus megoldás a Cotter-Rivlin-féle feszültség-sebesség használata esetén 40
6.1.4. Analitikus megoldás a Durban-Baruch-féle feszültség-sebesség használata esetén 41

6.1.5. Analitikus megoldás a Zaremba-Jaumann-Noll-féle feszültség-sebesség használata esetén 42
6.1.6. Analitikus megoldás a Green-McInnis-Naghdi-féle feszültség-sebesség használata esetén 43
6.1.7. Analitikus megoldás az Euler-féle triád spintenzorán alapuló feszültség-sebesség használata esetén 45
6.1.8. Analitikus megoldás a Lagrange-féle triád spintenzorán alapuló feszültség-sebesség használata esetén 46
6.1.9. Analitikus megoldás a logaritmikus feszültség-sebesség használata esetén 48
6.1.10. Eredmények összehasonlítása 49
6.2. Zárt terhelési ciklus 53
6.2.1. Analitikus megoldás a Truesdell-féle feszültség-sebesség használata esetén 61
6.2.2. Analitikus megoldás az Oldroyd-féle feszültség-sebesség használata esetén 62
6.2.3. Analitikus megoldás a Cotter-Rivlin-féle feszültség-sebesség használata esetén. 63
6.2.4. Analitikus megoldás a Zaremba-Jaumann-Noll-féle feszültség-sebesség használata esetén 64
6.2.5. Analitikus megoldás a Green-McInnis-Naghdi-féle feszültség-sebesség használata esetén 65
6.2.6. Analitikus megoldás a logaritmikus feszültség-sebesség használata esetén 71
6.2.7. Eredmények összehasonlítása 74

7. NUMERIKUS SZÁMÍTÁSOK 86

7.1. Numerikus integrálási algoritmus együtforgó deriváltak esetén 86
7.2. Algoritmus tesztelése MAPLE-ben 91
7.3. Véges alakváltozások az ABAQUS-ban 93
7.4. ABAQUS UMAT szubrutin bemutatása 94
7.5. ABAQUS UMAT szubrutinok együttforgó deriváltra épülő nulladrendű hipoelasztikus anyagmodellhez 97
7.5.1. Zaremba-Jaumann-Noll-féle feszültség-sebességre épülő szubrutin 109
7.5.2. Green-McInnis-Naghdi-féle feszültség-sebességre épülő szubrutin 113
7.5.3. Euler-féle triád spintenzorán alapuló feszültség-sebességre épülő szubrutin 117
7.5.4. Logaritmikus feszültség-sebességre épülő szubrutin 122
7.6. Egyszerű nyírás modellje ABAQUS-ban 128
7.7. Zárt terhelési ciklusú példa modellje ABAQUS-ban 130
7.8. A numerikus és analitikus eredmények összehasonlítása 137
7.8.1. Egyszerű nyírás 137
7.8.2. Zárt terhelési ciklusú példa 141

8. ÖSSZEFOGLALÁS 148

IRODALOMJEGYZÉK 151

1. BEVEZETÉS

1.1. A DOLGOZAT CÉLKITŰZÉSEI

A dolgozat fő célkitűzése az ABAQUS/CAE programrendszer számára a logaritmikus feszültség-sebességen alapuló nulladrendű hipoelasztikus anyagmodell elkészítése UMAT szubrutin formájában. A szubrutin megírását FORTRAN 77 környezetben kell elvégezni.

Cél a hipoelasztikus testek konstitutív egyenleteinek részletes vizsgálata, amely főként az ismertebb objektív feszültség-sebességek tanulmányozásából áll. A hiperelasztikus testek anyagegyenleteinek csak érintőleges ismertetése történik, ugyanis a logaritmikus feszültség-sebességre épülő hipoelasztikus konstitutív egyenlet megfelelő feltételek mellett átjárást biztosít hiperelasztikus anyagegyenletbe.

A szubrutin megírásához a növekményes konstitutív egyenletekre numerikus integrálási algoritmust kell alkalmazni. Ezen numerikus algoritmus, illetve az ABAQUS UMAT szubrutin teszteléséhez (ellenőrzéséhez) szükséges a különböző tesztfeladatokra végzett analitikus számítások elvégzése is.

A dolgozat fő célkitűzésén kívül megvalósításra kerül a *Zaremba-Jaumann-Noll*-féle, *Green-McInnis-Naghdi*-féle és az *Euler*-féle triád spintenzorán alapuló objektív feszültség-sebességek felhasználásával kapott nulladrendű hipoelasztikus konstitutív egyenlet ABAQUS UMAT szubrutinjának megírása is.

A dolgozatnak nem célja az ABAQUS végeselemes szoftver használatának részletes bemutatása.

1.2. A DOLGOZAT TARTALMI ÁTTEKINTÉSE

A dolgozat öt fő fejezetre tagolódik: Kontinuummechanikai alapok; Hipoelasztikus anyagmodell; Hiperelasztikus testek; Analitikus számítások; Numerikus számítások.

Elsőként a kontinuummechanikai alapok összefoglalása történik. Bemutatásra kerülnek a deformációval kapcsolatos mennyiségek származtatása, a különböző alakváltozási tenzorok számítása. A feszültségi tenzorok ismertetése után az objektivitás értelmezése következik, ami elengedhetetlen az objektív deriváltak bevezetéséhez, melyek egy lehetséges csoportosítás (nem együttforgó és együttforgó) szerint kerülnek tárgyalásra. Ezt követően az ismertebb objektív feszültség-sebességek összefoglalása történik.

A következő fejezetben a hipoelasztikus testek tárgyalására kerül sor, ahol főként a nulladrendű hipoelasztikus anyagmodell esetén érvényes konstitutív egyenlet ismertetése történik. Továbbá bemutatásra kerül, hogy miként képezhető a logaritmikus feszültség-sebesség esetén érvényes konstitutív egyenletből hiperelasztikus anyagmodell. Emiatt a hiperelasztikus testek ismertetésére szolgáló fejezet csak érintőlegesen tárgyalja hiperelasztikus anyagmodelleket. Célja a logaritmikus derivált felhasználásával képezhető hiperelasztikus anyagmodell bemutatása.

Az analitikus számításokat tartalmazó fejezetben két tesztpéldán (egyszerű nyírás, zárt terhelési ciklusú példa) a nulladrendű hipoelasztikus anyagmodell felhasználásával végzett analitikus számítások kerülnek ismertetésre, különböző objektív feszültség-sebességek alkalmazása esetén. A zárt terhelési ciklusú példa segítségével képet kaphatunk a maradó feszültségekről a zárt terhelési út végén. Mint majd látható lesz, a logaritmikus feszültég-sebesség kivételével minden esetben marad feszültség a záródó deformáció végén annak ellenére, hogy az alakváltozás tisztán rugalmas. Összehasonlításra kerülnek a különböző feszültség-sebességek esetén számított feszültség-komponensek.

A numerikus számításokat tartalmazó fejezetben elsőként az együttforgó deriváltakra *Simo* és *Hughes* által javasolt [51] numerikus integrálási algoritmus ismertetése történik. Ezt követően az egyszerű nyírás példáján az algoritmus tesztelése következik szimbolikus matematikai szoftver segítségével (MAPLESOFT MAPLE 9.01). Bemutatásra kerül az ABAQUS által alkalmazott konstitutív modell véges alakváltozások esetén. Ezt követően az UMAT szubrutin által kínált lehetőségek ismertetése következik, majd a dolgozat fő tartalmi részét képező ABAQUS UMAT szubrutinok FORTRAN kódjainak ismertetése. Ezek után az analitikus számításoknál felhasznált két tesztpéldára érvényes ABAQUS modell input file-jainak ismertetésére kerül sor. Legvégül az ABAQUS UMAT szubrutinok segítségével számított numerikus értékek összehasonlítása következik az analitikus megoldásokkal.

A dolgozat során a matematikai műveletek elvégzéséhez, ellenőrzéséhez MAPLESOFT MAPLE 9.01 szimbolikus matematikai szoftver használata történt.

1.3. ALKALMAZOTT JELÖLÉSEK

A dolgozat folyamán az invariáns és indexes jelölésmód használata (az összegzési konvenció érvényessége mellett) is történik. Skaláris mennyiségek jelölésére dőlt karaktertípust, a vektorok és másodrendű tenzorok jelölésére pedig vastag (bold-face) karaktertípust használok. A negyedrendű tenzorokat „CommercialScript BT” betűtípus jelöli (pl: $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$).

Tenzorok vektoriális, tenzoriális (diadikus) és belső szorzatait rendre $\times$, $\otimes$, $:$ jelöli. Skaláris szorzatnál a $\cdot$ jelölés elhagyásra kerül.

Amennyiben $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok, és $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$ másodrendű tenzorok, valamint $\mathscr{H}$ negyedrendű tenzor, akkor a következő szorzások értelmezettek:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a_{\mathrm{i}}b_{\mathrm{i}},$$
$$\left(\mathbf{a}\otimes\mathbf{b}\right)_{\mathrm{ij}} = a_{\mathrm{i}}b_{\mathrm{j}},$$
$$\mathbf{C}:\mathbf{D} = C_{\mathrm{ij}}D_{\mathrm{ij}},$$
$$\left(\mathbf{CD}\right)_{\mathrm{ij}} = C_{\mathrm{ik}}D_{\mathrm{kj}},$$
$$\left(\mathbf{C}\otimes\mathbf{D}\right)_{\mathrm{ijkl}} = C_{\mathrm{ij}}D_{\mathrm{kl}},$$
$$\left(\mathscr{H}:\mathbf{C}\right)_{\mathrm{ij}} = \mathscr{H}_{\mathrm{ijkl}}C_{\mathrm{kl}},$$
$$\left(\mathbf{C}:\mathscr{H}\right)_{\mathrm{ij}} = C_{\mathrm{kl}}\mathscr{H}_{\mathrm{klij}}.$$

A dolgozatban használt operátorok és fontosabb jelölések a következők:

$(\ )^{\mathrm{T}}$	transzponálás,
$(\ )^{-1}$	inverz képzés,
$(\ )_{\mathrm{s}}$	szimmetrikus rész,
$(\ )_{\mathrm{a}}$	antiszimmetrikus rész
$\dot{(\ )}$	anyagi idő szerinti derivált,
$\overset{\circ}{(\ )}{}^{*}$	objektív derivált,
$\overset{\circ}{(\ )}{}^{\mathrm{Tr}}$	*Truesdell*-féle objektív derivált,
$\overset{\circ}{(\ )}{}^{\mathrm{O}}$	*Oldroyd*-féle objektív derivált,
$\overset{\circ}{(\ )}{}^{\mathrm{CR}}$	*Cotter-Rivlin*-féle objektív derivált,
$\overset{\circ}{(\ )}{}^{\mathrm{DB}}$	*Durban-Baruch*-féle objektív derivált,
$\overset{\circ}{(\ )}{}^{\mathrm{SZB1}}$	*Szabó-Balla-1*-féle objektív derivált,
$\overset{\circ}{(\ )}{}^{\mathrm{SZB2}}$	*Szabó-Balla-2*-féle objektív derivált,
$\overset{\circ}{(\ )}{}^{\mathrm{ZJN}}$	*Zaremba-Jaumann-Noll*-féle objektív derivált,
$\overset{\circ}{(\ )}{}^{\mathrm{GMN}}$	*Green-McInnis-Naghdi*-féle objektív derivált,
$\overset{\circ}{(\ )}{}^{\mathrm{E}}$	*Euler*-féle triád spintenzorán alapuló objektív derivált,
$\overset{\circ}{(\ )}{}^{\mathrm{L}}$	*Lagrange*-féle triád spintenzorán alapuló objektív derivált,
$\overset{\circ}{(\ )}{}^{\log}$	logaritmikus objektív derivált,
$\det(\ )$	determináns,
$\mathrm{tr}(\ )$	első skalár invariáns (trace),
$\mathrm{Grad}(\ ),\ \nabla_{\mathbf{X}},\ \partial(\ )/\partial\mathbf{X}$	azonosító konfiguráción értelmezett gradiens képzés,
$\mathrm{grad}(\ ),\ \nabla_{\mathbf{x}},\ \partial(\ )/\partial\mathbf{x}$	pillanatnyi konfiguráción értelmezett gradiens képzés,

$\boldsymbol{\delta}$	másodrendű egységtenzor,
$\mathscr{I}$	negyedrendű egységtenzor,
Ω_0	azonosító konfiguráció,
Ω_t	pillanatnyi konfiguráció,
Ω^+	pillanatnyi konfiguráció merevtest-szerű mozgás után,
Ω_Λ	együttforgó konfiguráció,
P^0	anyagi pont az azonosító konfigurációban,
P^t	anyagi pont a pillanatnyi konfigurációban,
P^+	pillanatnyi konfiguráció anyagi pontja merevtest-szerű mozgás után,
$\mathbf{X}$	anyagi pont helyzete az azonosító konfigurációban,
$\mathbf{x}$	anyagi pont helyzete a pillanatnyi konfigurációban,
$\boldsymbol{\varphi}$	általános leképzés,
$\Re$	valós számok halmaza,
$\mathbf{E}_A$	az azonosító konfiguráció ortonormált bázisvektora,
$\mathbf{e}_a$	a pillanatnyi konfiguráció ortonormált bázisvektora,
$\mathbf{u}$	elmozdulásvektor,
$\mathbf{F}$	alakváltozási gradiens tenzor,
J	térfogatváltozás mértéke, *Jacobi*-determináns,
$\mathbf{R}$	polárfelbontásból származó ortogonális forgató tenzor,
$\mathbf{U}$	jobboldali nyújtástenzor,
$\mathbf{V}$	baloldali nyújtástenzor,
λ_α	$\mathbf{F}$, $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$ sajátértékei,
$\boldsymbol{\lambda}$	főnyúlások diagonális tenzora,
$\mathbf{b}$	balodali *Cauchy-Green*-féle deformációs tenzor,
$\mathbf{C}$	jobboldali *Cauchy-Green*-féle deformációs tenzor,
χ_α	$\mathbf{b}$, $\mathbf{C}$ sajátértékei,
$\boldsymbol{\chi}$	$\mathbf{b}$, $\mathbf{C}$ sajátértékeiből képzet diagonális tenzor,
$\mathbf{N}_\alpha$	$\mathbf{U}$, $\mathbf{C}$ egység sajátvektora,
$\mathbf{n}_\alpha$	$\mathbf{V}$, $\mathbf{b}$ egység sajátvektora,
$\mathbf{P}_\alpha$	$\mathbf{U}$, $\mathbf{C}$ bázis tenzora (sajátprojekciója),
$\mathbf{p}_\alpha$	$\mathbf{V}$, $\mathbf{b}$ bázis tenzora (sajátprojekciója),

$\mathbf{R}_{\mathbf{N}}$	*Lagrange*-féle egység sajátvektorok ortogonális forgató tenzora,
$\mathbf{R}_{\mathbf{n}}$	*Euler*-féle egység sajátvektorok ortogonális forgató tenzora,
$\mathbf{B}$	*Piola*-féle deformációs tenzor,
$\mathbf{E}$	*Green-Lagrange*-féle alakváltozási tenzor,
$\mathbf{H}$	azonosító konfiguráción értelmezett *Hencky*-féle alakváltozási tenzor,
$\mathbf{E}^{(*)}$	általánosított *Lagrange*-féle alakváltozási tenzor,
$\mathbf{c}$	*Cauchy*-féle deformációs tenzor,
$\mathbf{e}$	*Almansi-Euler*-féle alakváltozási tenzor,
$\mathbf{h}$	pillanatnyi konfiguráción értelmezett *Hencky*-féle alakváltozási tenzor,
$\mathbf{e}^{(*)}$	általánosított *Euler*-féle alakváltozási tenzor,
$\mathbf{l}$	*Euler*-féle sebességmező gradiens tenzor,
$\mathbf{d}$	alakváltozás-sebesség tenzor,
$\mathbf{D}$	visszaforgatott alakváltozás-sebesség tenzor,
$\mathbf{w}$	örvénytenzor,
$\mathbf{A}$	felületelem vektor az azonosító konfiguráción,
$\mathbf{a}$	felületelem vektor a pillanatnyi konfiguráción,
$\boldsymbol{\rho}$	feszültségvektor,
$\boldsymbol{\sigma}$	*Cauchy*-féle feszültségi tenzor,
$\mathbf{P}$	első *Piola-Kirchhoff*-féle feszültségi tenzor,
$\mathbf{S}$	második *Piola-Kirchhoff*-féle feszültségi tenzor,
$\boldsymbol{\tau}$	*Kirchhoff*-féle feszültségi tenzor,
$\mathbf{T}$	visszaforgatott *Kirchhoff*-féle feszültségi tenzor,
$\boldsymbol{\Omega}^{\mathrm{ZJN}}$	*Zaremba-Jaumann-Noll*-féle spintenzor,
$\boldsymbol{\Omega}^{\mathrm{GMN}}$	*Green-McInnis-Naghdi*-féle spintenzor,
$\boldsymbol{\Omega}^{\mathrm{E}}$	*Euler*-féle triád spintenzora,
$\boldsymbol{\Omega}^{\mathrm{L}}$	*Lagrange*-féle triád spintenzora,
$\bar{\boldsymbol{\Omega}}^{\mathrm{L}}$	*Lagrange*-féle triád spintenzora a pillanatnyi konfigurációba forgatva,
$\boldsymbol{\Omega}^{\log}$	logaritmikus spintenzor.

2. IRODALMI ÁTTEKINTÉS

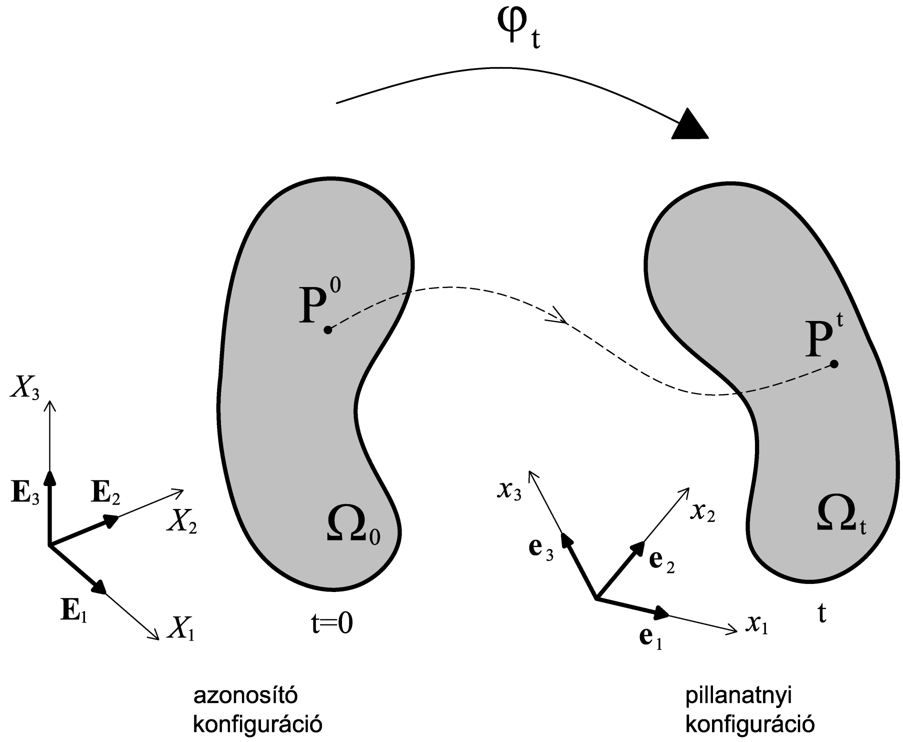
A hipoelasztikus anyagmodell bevezetésében és általánosításában *Truesdell* játszotta a döntő szerepet [54]. Attól függően, hogy az általa bevezetett általános hipoelasztikus konstitutív egyenletben milyen objektív feszültség-sebességet alkalmazunk, kapunk eltérő jellegű anyagmodelleket. A hipoelasztikus konstitutív egyenletben eredetileg a *Zaremba-Jaumann-Noll*-féle feszültség-sebesség használata történt [54], de azóta számos más objektív feszültség-sebesség használatának javaslatára került sor. Az objektív feszültség-sebességeket két csoportra szokás felosztani: nem együttforgó, és együttforgó feszültség-sebességekre [52], [63]. Az utóbbi években az eddig ismert objektív feszültség-sebességeken kívül egy új bevezetésére került sor *Xiao*, *Bruhns* és *Meyers* által [55], [56], [59]. Ez a logaritmikus feszültség-sebesség. Bevezetését az előzte meg, hogy keresték, vajon melyik alakváltozási jellemző melyik objektív deriváltja állítja elő az $\mathbf{l}$ *Euler*-féle sebességmező gradiens szimmetrikus részét képező $\mathbf{d}$ alakváltozás-sebesség tenzort? Bizonyították, hogy ez a pillanatnyi konfiguráción értelmezett *Hencky*-féle alakváltozási tenzor logaritmikus deriváltja [56]. A logaritmikus derivált felhasználásával képzett nulladrendű hipoelasztikus anyagegyenlet kedvező tulajdonsága, hogy integrálható, és az integrálással egy izotrop hiperelasztikus konstitutív egyenletet kapunk [56], [61]. Ismertetésre került a jellegzetesebb objektív együttforgó deriváltak bázisfüggetlen leírásmódja is [57], [58], [59], [61]. A logaritmikus feszültség-sebesség alkalmazása esetén a nulladrendű hipoelasztikus konstitutív egyenlet további előnyös tulajdonsága az, hogy – ellentétben a többi ismert feszültség-sebességgel − zárt terhelési ciklusú deformáció esetén nincs maradó feszültség [31], [36], [37]. Ez különböző zárt terhelési ciklusú példák (kör, ellipszis és négyzet mentén záródó) esetén is ismertetésre került [36], [37], [31]. *Bruhns*, *Xiao* és *Meyers* az általuk bevezetett logaritmikus feszültség-sebesség esetén érvényes nulladrendű hipoelasztikus anyagmodellből képzett hiperelasztikus konstitutív egyenletre vonatkozólag közöltek analitikus számításokat téglalap keresztmetszetű rúd hajlítására is [15].

Kezdetben a numerikus algoritmusok a *Zaremba-Jaumann-Noll*-féle és a *Green-McInnis-Naghdi*-féle feszültség-sebesség alkalmazása esetén érvényes konstitutív egyenletre vonatkoztak [25], [26], [20], [47], [42], [43]. *Simo* és *Hughes* azonban összefoglalóan közölt numerikus integrálási algoritmust mind együttforgó, mind nem együttforgó feszültség-sebességek alkalmazása esetén érvényes konstitutív egyenletre [51]. Az együttforgó deriváltakra érvényes numerikus algoritmus felhasználja a másodrendű, ferdén szimmetrikus tenzorok exponenciális leképzésének zárt alakban történő előállítását, ezáltal az együttforgó konfigurációhoz tartozó ortogonális forgató tenzorok számítása pontosabb. Ez az algoritmus megtalálható *Lin* munkájában is [32]. *Zhou* és *Tamma* az egyszerű nyírás példáján közli a különböző objektív feszültség-sebességek esetén a *Hughes-Winget*, *Rubinstein-Atluri* és *Flanagan-Taylor* algoritmusok eredményeit, ezenkívül két új számítási algoritmust közöl, az egyiket együttforgó feszültség-sebességekre, a másikat a logaritmikus feszültség-sebességre vonatkozólag [66].

3. KONTINUUMMECHANIKAI ALAPOK

Ebben a fejezetben a dolgozat további fejezeteihez szükséges kontinuummechanikai alapok összefoglalása történik. Részletezésre kerülnek a fontosabb kinematikai mennyiségek számítása, illetve az ezek felhasználásával számítható további mennyiségek meghatározása is.

3.1. KONTINUUMOK KINEMATIKÁJA

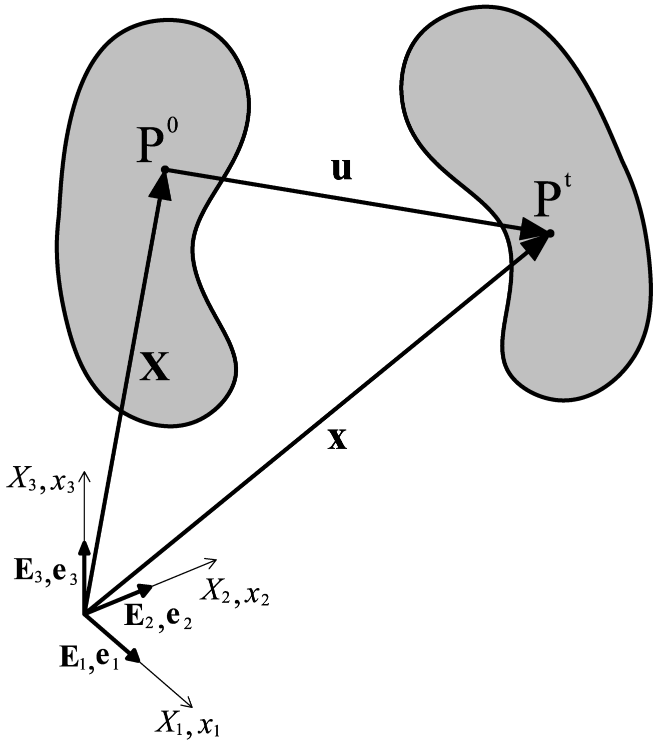


1. ábra: Az azonosító és pillanatnyi konfiguráció értelmezése.

Jelölje a mozgó kontinuum tetszőleges pontját az azonosító (kezdeti) konfigurációban P^0, a pillanatnyi konfigurációban P^t. Legyen $\Omega_0 \subset \Re^3$ a kontinuum azonosító konfigurációja, valamint jelölje $\mathbf{X} \in \Omega_0$ P^0 térbeli helyzetét ebben a konfigurációban. Ω_0 leképzését a t időpontban a pillanatnyi $\Omega_t \subset \Re^3$ konfigurációra a $\boldsymbol{\varphi}_t : \Omega_0 \to \Re^3$ végzi. A test tetszőleges pontjának az azonosító és a pillanatnyi konfigurációban elfoglalt helyzete közötti összefüggés:

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}_t(\mathbf{X}, t)\,. \tag{3.1}$$

A továbbiakban az azonosító és a vonatkoztatatási koordináta-rendszerek origói, bázisvektorai és tengelyei egybeesők.



2. ábra: Az elmozdulásvektor.

A deformáció során P^{t} és P^{0} között értelmezhető az elmozdulásvektor (`displacement vector`), amely megadható mind az azonosító konfiguráció, mind a pillanatnyi konfiguráció bázisaival. Mindkét esetben az $\mathbf{u}$ jelölés használata történik.

$$\mathbf{u} = U_{\mathrm{A}}\mathbf{E}_{\mathrm{A}} \equiv u_{\mathrm{a}}\mathbf{e}_{\mathrm{a}} . \tag{3.2}$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X} . \tag{3.3}$$

Az alakváltozási gradiens tenzor (`deformation gradient tensor`) számítása:

$$\mathbf{F} = \nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{x} = \nabla_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\varphi}_t(\mathbf{X},t) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial \varphi_{\mathrm{a}}}{\partial X_{\mathrm{A}}}(\mathbf{X},t)\mathbf{E}_{\mathrm{A}} \otimes \mathbf{e}_{\mathrm{a}} = F_{\mathrm{Aa}}\mathbf{E}_{\mathrm{A}} \otimes \mathbf{e}_{\mathrm{a}} , \tag{3.4}$$

ahol $\{\mathbf{E}_{\mathrm{A}}\}_{\mathrm{A}=1,2,3}$ és $\{\mathbf{e}_{\mathrm{a}}\}_{\mathrm{a}=1,2,3}$ Ω_0 és Ω_{t} ortonormált bázisait jelentik. Az alakváltozási gradiens tenzor segítségével képezhető a kapcsolat a pillanatnyi és az azonosító vonalelem, felületelem és térfogatelem között:

$$\mathrm{d}\mathbf{x} = \mathbf{F}\mathrm{d}\mathbf{X}, \qquad \mathrm{d}\mathbf{a} = J\mathbf{F}^{-\mathrm{T}}\mathrm{d}\mathbf{A}, \qquad \mathrm{d}v = J\mathrm{d}V , \tag{3.5}$$

ahol $J = \det \mathbf{F}$ a térfogatváltozás mértéke (*Jacobi*-determináns).

Mivel az anyagi kontinuumelem leképzése során a tükrözés fizikailag nem valósítható meg, emiatt jogos az a feltételezés, hogy $J > 0$. Másképpen megfogalmazva: a kontinuumelem mindig pozitívnak vett $\mathrm{d}V$ térfogateleme a leképzés során mindig pozitív $\mathrm{d}v$ térfogatelembe megy át. Amennyiben a tükrözés lehetséges lenne, akkor $\mathrm{d}v$ negatív előjelűvé válhatna [29].

Az azonosító konfiguráció bázisaival megadott mennyiségek esetén *Lagrange*-féle leírásról (*Lagrangian (material) description*), a pillanatnyi konfiguráció bázisaival történő megadáskor *Euler*-féle leírásról (*Eulerian (spatial) description*) beszélünk.

3.1.1. AZ ALAKVÁLTOZÁSI GRADIENS POLÁRIS FELBONTÁSA

A deformáció egy speciális esete a forgatás, melynek során a vektorok orientációja változhat, de a hosszuk nem. Ez esetben az alakváltozási gradiens ortogonális tenzor.

Teljesen eltérő esete a deformációnak a nyújtás, melynek során a vektorok hossza változhat, de orientációjuk nem. Ez esetben az alakváltozási gradiens szimmetrikus és pozitív definit. Fontos megjegyezni, hogy amennyiben az alakváltozási gradiens szimmetrikus, akkor az nem feltétlenül jelent tiszta nyújtást. A szimmetrikus tulajdonság miatt a nyújtás mátrixa a főirányok bázisában diagonális.

Az alakváltozási gradiens poláris felbontásának matematikai alapja az, hogy egy tetszőleges invertálható másodrendű tenzor felbontható egy ortogonális tenzor és egy szimmetrikus pozitív definit tenzor kombinációjára. Jelen esetben az ortogonális tenzor szerepét a forgatás tenzora tölti be, míg a szimmetrikus pozitív definit tenzorét a nyújtás tenzora.

Attól függően, hogy a nyújtás a forgatás előtt, vagy után következik két esetet különböztetünk meg. Az egyik szerint először a kontinuum nyújtása történik, majd a merevtest-szerű elforgatás:

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U}\,, \tag{3.6}$$

ahol $\mathbf{R} \in \Re^3 \times \Re^3$ az ortogonális forgató tenzor (*rotation tensor*) és $\mathbf{U} \in \Re^3 \times \Re^3$ a pozitív definit jobboldali nyújtástenzor (*Lagrangian stretch tensor* vagy *material stretch tensor* vagy *right stretch tensor*).

Amennyiben elsőként a forgatás történik, majd az elforgatott állapotban a nyújtás:

$$\mathbf{F} = \mathbf{V}\mathbf{R}\,, \tag{3.7}$$

ahol $\mathbf{V} \in \Re^3 \times \Re^3$ a pozitív definit baloldali nyújtástenzor (*Eulerian stretch tensor* vagy *spatial stretch tensor* vagy *left stretch tensor*).

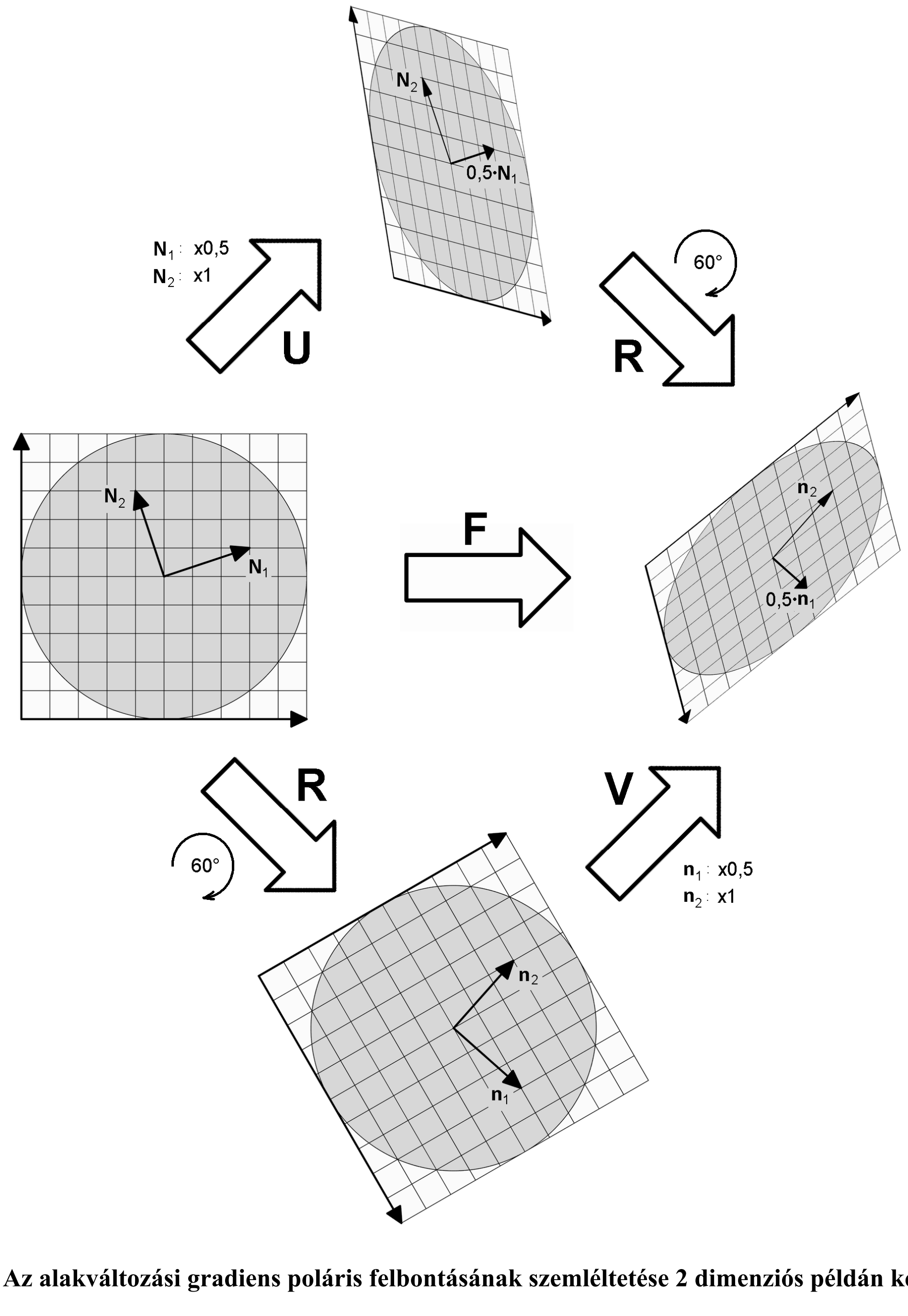
A forgató tenzor egy ortogonális kétpont tenzor, melyre teljesül:

$$\mathbf{R}^{\mathrm{T}}\mathbf{R} = \boldsymbol{\delta}, \qquad \mathbf{R}^{\mathrm{T}} = \mathbf{R}^{-1}, \qquad \mathbf{R} = \mathbf{R}^{-\mathrm{T}}\,, \tag{3.8}$$

ahol $\boldsymbol{\delta}$ jelenti a másodrendű egységtenzort.

Legyen $\mathbf{Y}$ az azonosító konfiguráción, $\mathbf{z}$ pedig a pillanatnyi konfiguráción értelemezett másodrendű tenzor. Ekkor az előreforgatott $\mathbf{Y}$ alatt az $\mathbf{R}\mathbf{Y}\mathbf{R}^{\mathrm{T}}$, a visszaforgatott $\mathbf{z}$ alatt pedig az $\mathbf{R}^{\mathrm{T}}\mathbf{z}\mathbf{R}$ mennyiséget értjük.

A 2. ábra a poláris felbontást szemlélteti egy 2 dimenziós példán keresztül. A nyújtások az $\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2$, illetve $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$ vektorok által kijelölt irányban történnek. Az $\mathbf{N}_2$ és $\mathbf{n}_2$ vektorok által kijelölt irányban nem történik alakváltozás, míg az $\mathbf{N}_1$, illetve $\mathbf{n}_1$ vektorok irányában 0,5-szörös az alkalmazott nyújtás (komprimálás).



3. ábra: Az alakváltozási gradiens poláris felbontásának szemléltetése 2 dimenziós példán keresztül.

Legyen $\mathbf{N}_\alpha, \alpha = 1,2,3$ és $\mathbf{n}_\alpha, \alpha = 1,2,3$ a jobb-, illetve baloldali nyújtástenzorok egység sajátvektorai, valamint $\lambda_\alpha, \alpha = 1,2,3$ a sajátértékek (főnyúlások). Továbbá $\mathbf{P}_\alpha = \mathbf{N}_\alpha \otimes \mathbf{N}_\alpha$ és $\mathbf{p}_\alpha = \mathbf{n}_\alpha \otimes \mathbf{n}_\alpha$ a sajátértékek bázis-tenzorai (sajátprojekciói). Ez esetben az $\mathbf{U}$ és $\mathbf{V}$ spektrális felbontása:

$$\mathbf{U}=\sum_{\alpha=1}^{3}\lambda_{\alpha}\mathbf{N}_{\alpha}\otimes\mathbf{N}_{\alpha}=\sum_{\alpha=1}^{3}\lambda_{\alpha}\mathbf{P}_{\alpha}\,, \tag{3.9}$$

$$\mathbf{V}=\sum_{\alpha=1}^{3}\lambda_{\alpha}\mathbf{n}_{\alpha}\otimes\mathbf{n}_{\alpha}=\sum_{\alpha=1}^{3}\lambda_{\alpha}\mathbf{p}_{\alpha}\,. \tag{3.10}$$

A másodrendű szimmetrikus $\mathbf{U}$ és $\mathbf{V}$ tenzorok sajátértékei előállíthatók a tenzorok skalár invariánsainak segítségével a következő módon (az alábbi összefüggés minden másodrendű szimmetrikus tenzorra érvényes) [4], [32]:

$$\begin{aligned}\lambda_{\alpha}&=\frac{1}{3}\left[I_{\mathbf{U}}+2\sqrt{I_{\mathbf{U}}^{2}-3II_{\mathbf{U}}}\cos\left(\frac{\theta-2\alpha\pi}{3}\right)\right],\qquad \alpha=1,2,3,\\ \cos\theta&=\frac{2I_{\mathbf{U}}^{3}-9I_{\mathbf{U}}II_{\mathbf{U}}+27III_{\mathbf{U}}}{2\left(I_{\mathbf{U}}^{2}-3II_{\mathbf{U}}\right)^{3/2}},\end{aligned} \tag{3.11}$$

ahol a skalár invariánsok:

$$\begin{aligned}I_{\mathbf{U}}&=\mathrm{tr}\left(\mathbf{U}\right),\\ II_{\mathbf{U}}&=\tfrac{1}{2}\left[\left(\mathrm{tr}\left(\mathbf{U}\right)\right)^{2}-\mathrm{tr}\left(\mathbf{U}^{2}\right)\right],\\ III_{\mathbf{U}}&=\det\left(\mathbf{U}\right).\end{aligned} \tag{3.12}$$

$\mathbf{U}$ és $\mathbf{V}$ sajátprojekcióinak zárt alakban történő számítására szolgáló képlet [4], [16]:

$$\mathbf{P}_{\alpha}=\mathbf{N}_{\alpha}\otimes\mathbf{N}_{\alpha}=\delta_{1\mathrm{m}}\boldsymbol{\delta}+\prod_{\beta=1,\beta\neq\alpha}^{\mathrm{m}}\frac{\mathbf{U}-\lambda_{\beta}\boldsymbol{\delta}}{\lambda_{\alpha}-\lambda_{\beta}}\,, \tag{3.13}$$

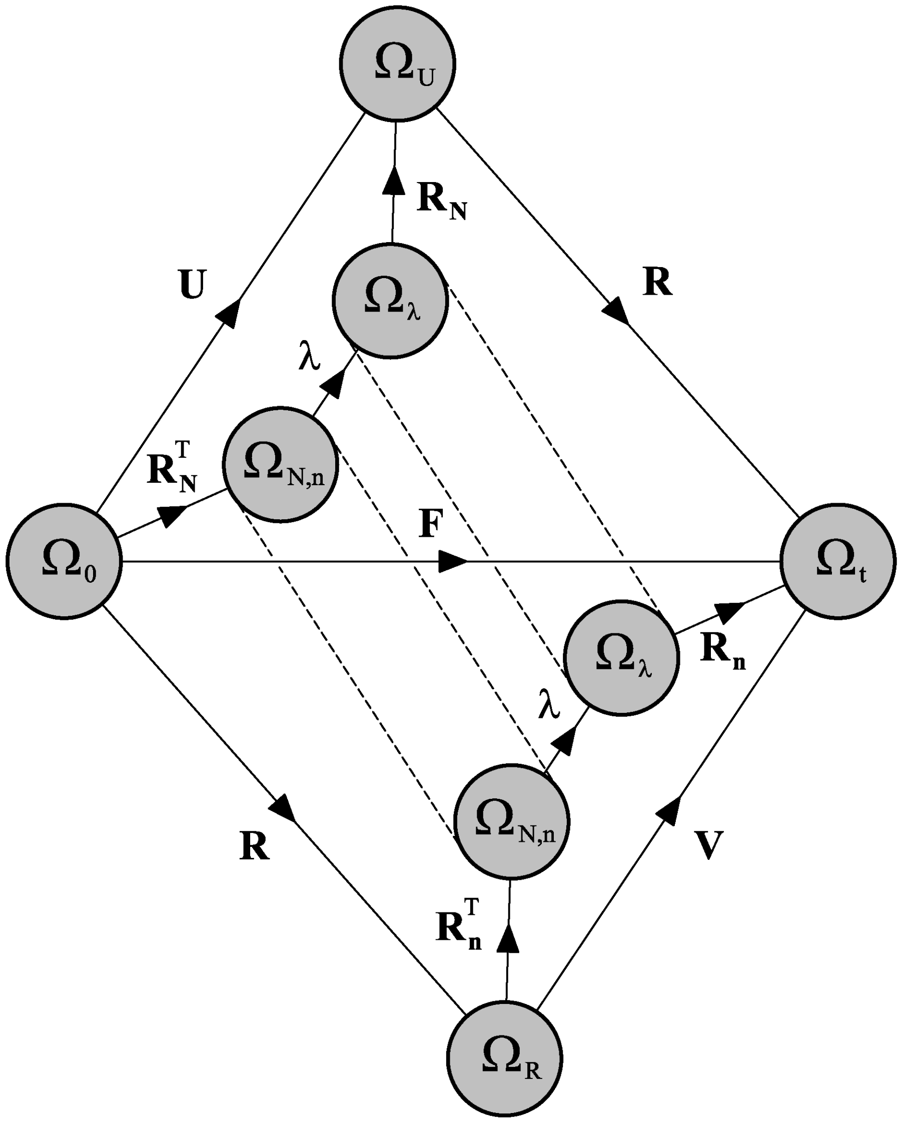
$$\mathbf{p}_{\alpha}=\mathbf{n}_{\alpha}\otimes\mathbf{n}_{\alpha}=\delta_{1\mathrm{m}}\boldsymbol{\delta}+\prod_{\beta=1,\beta\neq\alpha}^{\mathrm{m}}\frac{\mathbf{V}-\lambda_{\beta}\boldsymbol{\delta}}{\lambda_{\alpha}-\lambda_{\beta}}\,. \tag{3.14}$$

A sajátvektorok segítségével képezhető a *Lagrange*-féle egység sajátvektorok ortogonális forgató tenzora ($\mathbf{R}_{\mathbf{N}}$), illetve az *Euler*-féle egység sajátvektorok ortogonális forgató tenzora ($\mathbf{R}_{\mathbf{n}}$):

$$\begin{aligned}\left[\mathbf{R}_{\mathbf{N}}\right]&=\left[\mathbf{N}_{1},\mathbf{N}_{2},\mathbf{N}_{3}\right],\\ \left[\mathbf{R}_{\mathbf{n}}\right]&=\left[\mathbf{n}_{1},\mathbf{n}_{2},\mathbf{n}_{3}\right].\end{aligned} \tag{3.15}$$

A nyújtástenzorok sajátvektorai, illetve a sajátvektorok koordináta-rendszerébe forgató tenzorok közötti összefüggés:

$$\mathbf{n}_{\alpha}=\mathbf{R}\mathbf{N}_{\alpha},\qquad \mathbf{R}_{\mathbf{n}}=\mathbf{R}\mathbf{R}_{\mathbf{N}}\,. \tag{3.16}$$



4. ábra: A Lagrange- és Euler-féle egység sajátvektorok ortogonális forgatótenzorainak értelmezése.

$\mathbf{R}_\mathrm{N}$ és $\mathbf{R}_\mathbf{n}$ segítségével képezhetők a *Lagrange*-, illetve az *Euler*-féle triád spin tenzorai (`Twirl tensor of the Lagrangian triad, Twirl tensor of the Eulerian triad`):

$$\boldsymbol{\Omega}^\mathrm{L} = \dot{\mathbf{R}}_\mathrm{N}\mathbf{R}_\mathrm{N}^\mathrm{T}. \tag{3.17}$$

$$\boldsymbol{\Omega}^\mathrm{E} = \dot{\mathbf{R}}_\mathbf{n}\mathbf{R}_\mathbf{n}^\mathrm{T}. \tag{3.18}$$

$\boldsymbol{\Omega}^\mathrm{L}$ és $\boldsymbol{\Omega}^\mathrm{E}$ ferdén szimmetrikus tenzorok:

$$\boldsymbol{\Omega}^\mathrm{L} = -\left(\boldsymbol{\Omega}^\mathrm{L}\right)^\mathrm{T}, \qquad \boldsymbol{\Omega}^\mathrm{E} = -\left(\boldsymbol{\Omega}^\mathrm{E}\right)^\mathrm{T}. \tag{3.19}$$

A sajátvektorok koordináta-rendszerében értelmezhető a főnyúlások diagonális tenzora ($\boldsymbol{\lambda}$), melynek segítségével $\mathbf{U}$ és $\mathbf{V}$ előállítása:

$$\mathbf{U} = \mathbf{R}_\mathrm{N}\boldsymbol{\lambda}\mathbf{R}_\mathrm{N}^\mathrm{T}, \qquad \mathbf{V} = \mathbf{R}_\mathbf{n}\boldsymbol{\lambda}\mathbf{R}_\mathbf{n}^\mathrm{T}, \tag{3.20}$$

ahol

$$[\boldsymbol{\lambda}] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}. \tag{3.21}$$

Az alakváltozási gradiens előállítható a nyújtástenzorok egység sajátvektorai és a főnyúlások segítségével:

$$\mathbf{F} = \sum_{\alpha=1}^{3} \lambda_\alpha \mathbf{n}_\alpha \otimes \mathbf{N}_\alpha \,. \tag{3.22}$$

3.1.2. SEBESSÉGMEZŐ

A kontinuum tetszőleges P^t pontjának sebességét a mozgásfüggvény idő szerinti parciális deriválásával nyerjük:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x},t) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} = \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_t(\mathbf{X},t)}{\partial t} = \dot{\boldsymbol{\varphi}}_t(\mathbf{X},\mathrm{t}). \tag{3.23}$$

Az *Euler*-féle sebességmező gradiens tenzor (`Eulerian velocity gradient tensor`) számítása:

$$\mathbf{l} = \nabla \mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{X}} \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}} = \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1} \,. \tag{3.24}$$

A másodrendű $\mathbf{l}$ tenzor felbontható egy szimmetrikus és egy antiszimmetrikus tenzor összegére:

$$\mathbf{l} = (\mathbf{l})_{\mathrm{s}} + (\mathbf{l})_{\mathrm{a}} = \mathbf{d} + \mathbf{w} \,. \tag{3.25}$$

A szimmetrikus részt alakváltozás-sebesség tenzornak (`Eulerian rate of deformation tensor` vagy `stretching tensor` vagy `Eulerian strain rate` vagy `velocity strain`), az antiszimmetrikus részt örvénytenzornak (`spin tensor` vagy `vorticity tensor`) nevezzük, és a következőképpen számítjuk:

$$\mathbf{d} = (\mathbf{l})_{\mathrm{s}} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{l} + \mathbf{l}^{\mathrm{T}}\right), \tag{3.26}$$

$$\mathbf{w} = (\mathbf{l})_{\mathrm{a}} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{l} - \mathbf{l}^{\mathrm{T}}\right). \tag{3.27}$$

Az *Euler*-féle sebességmező gradiens tenzor és az alakváltozási gradiens tenzor közötti kapcsolat:

$$\begin{aligned} \mathbf{l} &= \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1}, \\ \dot{\mathbf{F}} &= \mathbf{l}\mathbf{F}. \end{aligned} \tag{3.28}$$

3.2. ALAKVÁLTOZÁSI TENZOROK

Az **F** alakváltozási gradiens segítségével további alakváltozási tenzorok képezhetők az alakváltozási mértékek meghatározására. Attól függően, hogy az alakváltozási tenzorokat a pillanatnyi vagy a kezdeti konfigurációban értelmezzük, megkülönböztetünk *Euler*-féle és *Lagrange*-féle alakváltozási tenzorokat.

3.2.1. FAJLAGOS ÍVHOSSZ

Jelölje a kezdeti (deformáció előtti) konfiguráción a kontinuum egy tetszőleges vonalelemének hosszát dS, a pillanatnyi konfiguráción pedig ds. A vonalelemek pillanatnyi és kezdeti ívhosszainak hányadosa definiálja a fajlagos ívhosszat (vonalelemarány) (`axial stretch`):

$$\lambda = \frac{ds}{dS}. \tag{3.29}$$

3.2.2. ALAKVÁLTOZÁSI TENZOROK A KEZDETI KONFIGURÁCIÓBAN

3.2.2.1. JOBBOLDALI CAUCHY-GREEN-FÉLE DEFORMÁCIÓS TENZOR

A $\mathbf{C} \in \Re^3 \times \Re^3$ jobboldali *Cauchy-Green*-féle deformációs tenzor (`right Cauchy-Green deformation tensor`) számítása:

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathbf{F}, \qquad \mathbf{C} = \mathbf{C}^{\mathrm{T}}. \tag{3.30}$$

Előállítható a jobboldali nyújtástenzor segítségével is:

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathbf{F} = \mathbf{U}^{\mathrm{T}}\mathbf{R}^{\mathrm{T}}\mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{U}^2, \tag{3.31}$$

valamint

$$\mathbf{C} = \mathbf{R_N}\boldsymbol{\lambda}^2\mathbf{R_N^{\mathrm{T}}} = \mathbf{R_N}\boldsymbol{\chi}\mathbf{R_N^{\mathrm{T}}}, \tag{3.32}$$

ahol $\boldsymbol{\chi}$ a sajátvektorok koordináta-rendszerében értelmezett diagonális tenzor (elemei **C** sajátértékei):

$$\boldsymbol{\chi} = \boldsymbol{\lambda}^2, \qquad [\boldsymbol{\chi}] = \begin{bmatrix} \chi_1 & 0 & 0 \\ 0 & \chi_2 & 0 \\ 0 & 0 & \chi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2 \end{bmatrix}. \tag{3.33}$$

A jobboldali *Cauchy-Green*-féle deformációs tenzor spektrális felbontása:

$$\mathbf{C} = \sum_{\alpha=1}^{3} \chi_\alpha \mathbf{N}_\alpha \otimes \mathbf{N}_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{3} \lambda_\alpha^2 \mathbf{N}_\alpha \otimes \mathbf{N}_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{3} \lambda_\alpha^2 \mathbf{P}_\alpha. \tag{3.34}$$

C és **U** sajátvektorai és sajátprojekció megegyeznek. A sajátprojekció számítása **C** felhasználásával:

$$\mathbf{P}_\alpha = \mathbf{N}_\alpha \otimes \mathbf{N}_\alpha = \delta_{1m}\boldsymbol{\delta} + \prod_{\beta=1,\beta\neq\alpha}^{m} \frac{\mathbf{C} - \chi_\beta \boldsymbol{\delta}}{\chi_\alpha - \chi_\beta} . \tag{3.35}$$

3.2.2.2. PIOLA-FÉLE DEFORMÁCIÓS TENZOR

A *Piola*-féle deformációs tenzor számítása:

$$\mathbf{B} = \mathbf{C}^{-1} = \mathbf{U}^{-2} , \tag{3.36}$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{R_N} \left(\frac{1}{\boldsymbol{\lambda}^2} \right) \mathbf{R_N^T} = \mathbf{R_N} \left(\frac{1}{\boldsymbol{\chi}} \right) \mathbf{R_N^T} . \tag{3.37}$$

Spektrális felbontása:

$$\mathbf{B} = \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{1}{\chi_\alpha} \mathbf{N}_\alpha \otimes \mathbf{N}_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{1}{\lambda_\alpha^2} \mathbf{N}_\alpha \otimes \mathbf{N}_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{1}{\lambda_\alpha^2} \mathbf{P}_\alpha . \tag{3.38}$$

3.2.2.3. GREEN-LAGRANGE-FÉLE ALAKVÁLTOZÁSI TENZOR

A $\mathbf{E} \in \Re^3 \times \Re^3$ *Green-Lagrange*-féle alakváltozási tenzor (*Green-Lagrangian strain tensor* vagy *Green-St. Venant strain tensor* vagy *Green strain* vagy *Lagrangian strain tensor*) meghatározása:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \boldsymbol{\delta}) = \frac{1}{2}(\mathbf{U}^2 - \boldsymbol{\delta}), \tag{3.39}$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{R_N} \frac{1}{2}(\boldsymbol{\chi} - \boldsymbol{\delta}) \mathbf{R_N^T} = \mathbf{R_N} \frac{1}{2}(\boldsymbol{\lambda}^2 - \boldsymbol{\delta}) \mathbf{R_N^T} . \tag{3.40}$$

A *Green-Lagrange*-féle alakváltozási tenzor spektrális felbontása:

$$\mathbf{E} = \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{1}{2}(\chi_\alpha - 1) \mathbf{N}_\alpha \otimes \mathbf{N}_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{1}{2}(\lambda_\alpha^2 - 1) \mathbf{N}_\alpha \otimes \mathbf{N}_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{1}{2}(\lambda_\alpha^2 - 1) \mathbf{P}_\alpha . \tag{3.41}$$

A *Green-Lagrange*-féle alakváltozási sebességtenzor (*Green strain rate tensor*):

$$\dot{\mathbf{E}} = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{C}} = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{F}}^T \mathbf{F} + \mathbf{F}^T \dot{\mathbf{F}}) . \tag{3.42}$$

A *Green-Lagrange*-féle alakváltozási sebességtenzor és az alakváltozás-sebesség tenzor kapcsolata:

$$\mathbf{d} = \mathbf{F}^{-T} \dot{\mathbf{E}} \mathbf{F}^{-1} , \qquad \dot{\mathbf{E}} = \mathbf{F}^T \mathbf{d} \mathbf{F} . \tag{3.43}$$

A térfogatváltozás sebessége $(\dot{J})$ előállítható a *Green-Lagrange*-féle alakváltozási sebességtenzor és az alakváltozás-sebesség tenzor segítségével is:

$$\dot{J} = J\,\mathrm{tr}\mathbf{d} = J\mathbf{C}^{-1} : \dot{\mathbf{E}} = \frac{1}{2} J\mathbf{C}^{-1} : \dot{\mathbf{C}} \,. \tag{3.44}$$

3.2.2.4. HENCKY-FÉLE ALAKVÁLTOZÁSI TENZOR

A kezdeti konfigurációban értelmezett $\mathbf{H} \in \Re^3 \times \Re^3$ *Hencky*-féle (vagy logaritmikus) alakváltozási tenzor (*Lagrangian Hencky strain tensor* vagy *Logarithmic-Lagrangian strain tensor*) számítása:

$$\mathbf{H} = \ln \mathbf{U} = \frac{1}{2} \ln \mathbf{C} \,, \tag{3.45}$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{R}_{\mathbf{N}} \frac{1}{2} (\ln \boldsymbol{\chi}) \mathbf{R}_{\mathbf{N}}^{\mathrm{T}} = \mathbf{R}_{\mathbf{N}} (\ln \boldsymbol{\lambda}) \mathbf{R}_{\mathbf{N}}^{\mathrm{T}} \,. \tag{3.46}$$

A kezdeti konfigurációban értelmezett *Hencky*-féle alakváltozási tenzor spektrális felbontása:

$$\mathbf{H} = \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{1}{2} \ln \chi_\alpha \mathbf{N}_\alpha \otimes \mathbf{N}_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{3} \ln \lambda_\alpha \mathbf{N}_\alpha \otimes \mathbf{N}_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{1}{2} \ln \chi_\alpha \mathbf{P}_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{3} \ln \lambda_\alpha \mathbf{P}_\alpha \,. \tag{3.47}$$

3.2.2.5. ÁLTALÁNOSÍTOTT LAGRANGE-FÉLE ALAKVÁLTOZÁSI TENZOROK

A kezdeti konfigurációban értelmezett általánosított *Lagrange*-féle alakváltozási tenzorok megadása:

$$\mathbf{E}^{(*)} = f(\mathbf{U}) = \sum_{\alpha=1}^{3} f(\lambda_\alpha) \mathbf{N}_\alpha \otimes \mathbf{N}_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{3} f(\lambda_\alpha) \mathbf{P}_\alpha \,, \tag{3.48}$$

ahol $f(\lambda)$ monoton növekvő függvény az alábbi tulajdonsággal:

$$f(1) = f'(1) - 1 = 0 \,. \tag{3.49}$$

Amennyiben $f(\lambda) = \dfrac{1}{m}(\lambda^m - 1)$ akkor:

$$\mathbf{E}^{(m)} = \frac{1}{m}(\mathbf{U}^m - \boldsymbol{\delta}) \,. \tag{3.50}$$

$m = 2, 1, 0, -1, -2$ behelyettesítésével az ismert alakváltozási tenzorokat kapjuk, melyeket az 1.Táblázat foglal össze.

1. Táblázat: Általánosított Lagrange-féle alakváltozási tenzorok.

m	$\mathbf{E}^{(m)}$	Megnevezés
2	$\mathbf{E}^{(2)} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{U}^2 - \boldsymbol{\delta}\right)$	*Green-Lagrange*-féle
1	$\mathbf{E}^{(1)} = \mathbf{U} - \boldsymbol{\delta}$	*Biot*-féle
0	$\mathbf{E}^{(0)} = \ln \mathbf{U}$	*Hencky*-féle a kezdeti konfigurációban
-1	$\mathbf{E}^{(-1)} = \boldsymbol{\delta} - \mathbf{U}^{-1}$	*„True”*
-2	$\mathbf{E}^{(-2)} = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\delta} - \mathbf{U}^{-2}\right)$	Visszaforgatott *Almansi-Euler*-féle

3.2.3. Alakváltozási tenzorok a pillanatnyi konfigurációban

3.2.3.1. Baloldali Cauchy-Green-féle deformációs tenzor

A $\mathbf{b} \in \Re^3 \times \Re^3$ baloldali *Cauchy-Green*-féle deformációs tenzor (`left Cauchy-Green deformation tensor` vagy `Finger tensor`) számítása:

$$\mathbf{b} = \mathbf{F}\mathbf{F}^{\mathrm{T}}, \qquad \mathbf{b} = \mathbf{b}^{\mathrm{T}}. \tag{3.51}$$

Előállítható a baloldali nyújtótenzor segítségével is:

$$\mathbf{b} = \mathbf{F}\mathbf{F}^{\mathrm{T}} = \mathbf{V}\mathbf{R}\mathbf{R}^{\mathrm{T}}\mathbf{V}^{\mathrm{T}} = \mathbf{V}^2, \tag{3.52}$$

valamint

$$\mathbf{b} = \mathbf{R}_{\mathbf{n}}\boldsymbol{\lambda}^2\mathbf{R}_{\mathbf{n}}^{\mathrm{T}} = \mathbf{R}_{\mathbf{n}}\boldsymbol{\chi}\mathbf{R}_{\mathbf{n}}^{\mathrm{T}}. \tag{3.53}$$

A baloldali *Cauchy-Green*-féle deformációs tenzor spektrális felbontása:

$$\mathbf{b} = \sum_{\alpha=1}^{3} \chi_\alpha \mathbf{n}_\alpha \otimes \mathbf{n}_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{3} \lambda_\alpha^2 \mathbf{n}_\alpha \otimes \mathbf{n}_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{3} \lambda_\alpha^2 \mathbf{p}_\alpha . \tag{3.54}$$

$\mathbf{b}$ és $\mathbf{V}$ sajátvektorai és sajátprojekciói azonosak. A sajátprojekció számítása $\mathbf{b}$ felhasználásával:

$$\mathbf{p}_\alpha = \mathbf{n}_\alpha \otimes \mathbf{n}_\alpha = \delta_{1\mathrm{m}}\boldsymbol{\delta} + \prod_{\beta=1,\beta\neq\alpha}^{\mathrm{m}} \frac{\mathbf{b} - \chi_\beta\boldsymbol{\delta}}{\chi_\alpha - \chi_\beta}. \tag{3.55}$$

3.2.3.2. CAUCHY-FÉLE DEFORMÁCIÓS TENZOR

A *Cauchy*-féle deformációs tenzor számítása:

$$\mathbf{c} = \mathbf{b}^{-1} = \mathbf{V}^{-2}\,, \tag{3.56}$$

$$\mathbf{c} = \mathbf{R_n}\left(\frac{1}{\boldsymbol{\lambda}^2}\right)\mathbf{R_n^T} = \mathbf{R_n}\left(\frac{1}{\boldsymbol{\chi}}\right)\mathbf{R_n^T} \tag{3.57}$$

Spektrális felbontása:

$$\mathbf{c} = \sum_{\alpha=1}^{3}\frac{1}{\chi_\alpha}\mathbf{n}_\alpha\otimes\mathbf{n}_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{3}\frac{1}{\lambda_\alpha^2}\mathbf{n}_\alpha\otimes\mathbf{n}_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{3}\frac{1}{\lambda_\alpha^2}\mathbf{p}_\alpha\,. \tag{3.58}$$

3.2.3.3. ALMANSI-EULER-FÉLE (HAMEL-FÉLE) ALAKVÁLTOZÁSI TENZOR

Az $\mathbf{e}\in\Re^3\times\Re^3$ *Almansi-Euler*-féle (*Hamel*-féle) alakváltozási tenzor (`Almansi-Eulerian strain tensor` vagy `Almansi strain tensor` vagy `Eulerian strain tensor`) meghatározása:

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\delta}-\mathbf{b}^{-1}\right) = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\delta}-\mathbf{V}^{-2}\right), \tag{3.59}$$

$$\mathbf{e} = \mathbf{R_n}\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\delta}-\boldsymbol{\chi}^{-1}\right)\mathbf{R_n^T} = \mathbf{R_n}\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\delta}-\boldsymbol{\lambda}^{-2}\right)\mathbf{R_n^T}\,. \tag{3.60}$$

Az *Almansi-Euler*-féle alakváltozási tenzor spektrális felbontása:

$$\mathbf{e} = \sum_{\alpha=1}^{3}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\chi_\alpha}\right)\mathbf{n}_\alpha\otimes\mathbf{n}_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{3}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\lambda_\alpha^2}\right)\mathbf{n}_\alpha\otimes\mathbf{n}_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{3}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\lambda_\alpha^2}\right)\mathbf{p}_\alpha\,. \tag{3.61}$$

A *Green-Lagrange*-féle alakváltozási tenzor és az *Almansi-Euler*-féle alakváltozási tenzor kapcsolat:

$$\mathbf{e} = \mathbf{F}^{-\mathrm{T}}\mathbf{E}\mathbf{F}^{-1}, \qquad \mathbf{E} = \mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathbf{e}\mathbf{F}\,. \tag{3.62}$$

Az *Almansi-Euler*-féle alakváltozási tenzorból az alakváltozás-sebesség tenzorig vezető leképzés:

$$\mathbf{e}\xrightarrow{\mathbf{F}^{\mathrm{T}}[\mathbf{e}]\mathbf{F}}\mathbf{E}\xrightarrow{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\mathbf{E}]}\dot{\mathbf{E}}\xrightarrow{\mathbf{F}^{-\mathrm{T}}[\dot{\mathbf{E}}]\mathbf{F}^{-1}}\mathbf{d}\,, \tag{3.63}$$

vagyis:

$$\mathbf{d} = \mathbf{F}^{-\mathrm{T}}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathbf{e}\mathbf{F}\right)\right]\mathbf{F}^{-1}\,. \tag{3.64}$$

3.2.3.4. HENCKY-FÉLE ALAKVÁLTOZÁSI TENZOR

A pillanatnyi konfigurációban értelmezett $\mathbf{h} \in \Re^3 \times \Re^3$ *Hencky*-féle (vagy logaritmikus) alakváltozási tenzor (`Eulerian Hencky strain tensor` vagy `Logarithmic-Eulerian strain tensor`) számítása:

$$\mathbf{h} = \ln \mathbf{V} = \frac{1}{2} \ln \mathbf{b} , \tag{3.65}$$

$$\mathbf{h} = \mathbf{R_n} \frac{1}{2} \left(\ln \boldsymbol{\chi} \right) \mathbf{R_n}^{\mathrm{T}} = \mathbf{R_n} \left(\ln \boldsymbol{\lambda} \right) \mathbf{R_n}^{\mathrm{T}} . \tag{3.66}$$

A pillanatnyi konfigurációban értelmezett *Hencky*-féle alakváltozási tenzor spektrális felbontása:

$$\mathbf{h} = \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{1}{2} \ln \chi_\alpha \mathbf{n}_\alpha \otimes \mathbf{n}_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{3} \ln \lambda_\alpha \mathbf{n}_\alpha \otimes \mathbf{n}_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{1}{2} \ln \chi_\alpha \mathbf{p}_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{3} \ln \lambda_\alpha \mathbf{p}_\alpha . \tag{3.67}$$

Az azonosító és a pillanatnyi konfigurációban értelmezett *Hencky*-féle alakváltozási tenzorok közötti kapcsolat:

$$\mathbf{h} = \mathbf{R} \mathbf{H} \mathbf{R}^{\mathrm{T}} . \tag{3.68}$$

3.2.3.5. ÁLTALÁNOSÍTOTT EULER-FÉLE ALAKVÁLTOZÁSI TENZOROK

A pillanatnyi konfigurációban értelmezett általánosított *Euler*-féle alakváltozási tenzorok megadása:

$$\mathbf{e}^{(*)} = f(\mathbf{V}) = \sum_{\alpha=1}^{3} f\left(\lambda_\alpha\right) \mathbf{n}_\alpha \otimes \mathbf{n}_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{3} f\left(\lambda_\alpha\right) \mathbf{p}_\alpha , \tag{3.69}$$

ahol $f(\lambda)$ monoton növekvő függvény az alábbi tulajdonsággal:

$$f(1) = f'(1) - 1 = 0 . \tag{3.70}$$

Amennyiben $f(\lambda) = \frac{1}{m}\left(\lambda^m - 1\right)$ akkor:

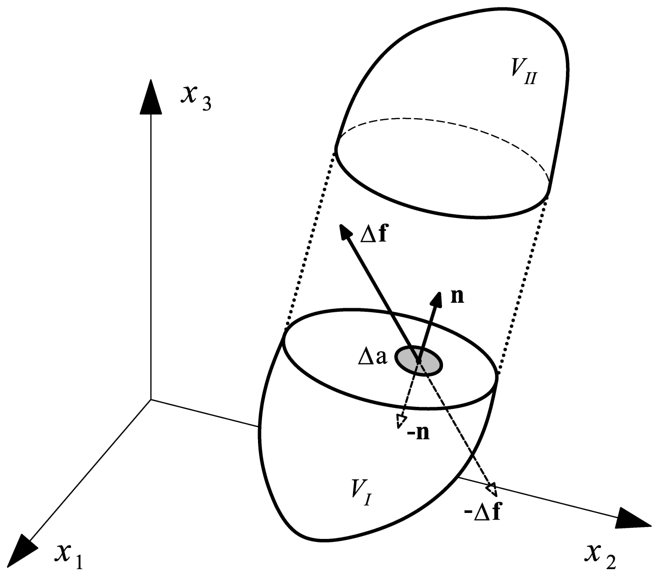
$$\mathbf{e}^{(m)} = \frac{1}{m}\left(\mathbf{V}^m - \boldsymbol{\delta}\right) . \tag{3.71}$$

$m = 2,1,0$ behelyettesítésével az ismert alakváltozási tenzorokat kapjuk, melyeket a 2. táblázat foglal össze.

2. Táblázat: Általánosított Euler-féle alakváltozási tenzorok.

m	$\mathbf{e}^{(m)}$	Megnevezés
-2	$\mathbf{e}^{(-2)}=\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\delta}-\mathbf{V}^{-2}\right)$	*Almansi-Euler*-féle
-1	$\mathbf{e}^{(-1)}=\boldsymbol{\delta}-\mathbf{V}^{-1}$	*Swainger*-féle
0	$\mathbf{e}^{(0)}=\ln\mathbf{V}$	*Hencky*-féle a pillanatnyi konfigurációban
1	$\mathbf{e}^{(1)}=\mathbf{V}-\boldsymbol{\delta}$	
2	$\mathbf{e}^{(2)}=\frac{1}{2}\left(\mathbf{V}^{2}-\boldsymbol{\delta}\right)$	

3.3. FESZÜLTSÉGI TENZOROK



5. ábra: A kontinuum felületen megoszló belső erőrendszere.

Vágjuk a Ω_{t} konfigurációban a kontinuumot a P^{t} ponton átmenő felülettel a V_{I} és V_{II} részekre. A V_{I} kontinuumrész hatását a V_{II} kontinuumrészre a közös felületen átadódó $\boldsymbol{\rho}(\mathbf{n})$ felületi erőrendszer fejezi ki. A $\boldsymbol{\rho}(\mathbf{n})$ vektort feszültségvektornak nevezzük és az alábbiak szerint definiáljuk:

$$\boldsymbol{\rho}(\mathbf{n})=\lim_{\Delta a\to 0}\frac{\Delta\mathbf{f}}{\Delta a}=\frac{\mathrm{d}\mathbf{f}}{\mathrm{d}a}, \tag{3.72}$$

ahol $\mathrm{d}\mathbf{f}$ az elemi erővektor, ami a $\mathrm{d}a$ felületen ébred.

3.3.1. CAUCHY-FÉLE FESZÜLTSÉGTENZOR

A pillanatnyi konfiguráción a kontinuum $\mathrm{d}\mathbf{a} = \mathrm{d}a\mathbf{n}$ felületelem vektorát és a $\mathrm{d}a$ felületelemhez tartozó $\mathrm{d}\mathbf{f} = \mathrm{d}a\boldsymbol{\rho}(\mathbf{n})$ elemi erő vektort a $\boldsymbol{\sigma}$ *Cauchy*-féle feszültségi tenzor kapcsolja össze:

$$\mathrm{d}\mathbf{f} = \boldsymbol{\sigma}\mathrm{d}\mathbf{a}, \tag{3.73}$$

illetve

$$\boldsymbol{\rho}(\mathbf{n}) = \boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}, \tag{3.74}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \sum_{\mathrm{a,b}=1}^{3} \sigma_{\mathrm{ab}}\mathbf{e}_{\mathrm{a}} \otimes \mathbf{e}_{\mathrm{b}}\,. \tag{3.75}$$

A *Cauchy*-féle feszültségi tenzor spektrális felbontása:

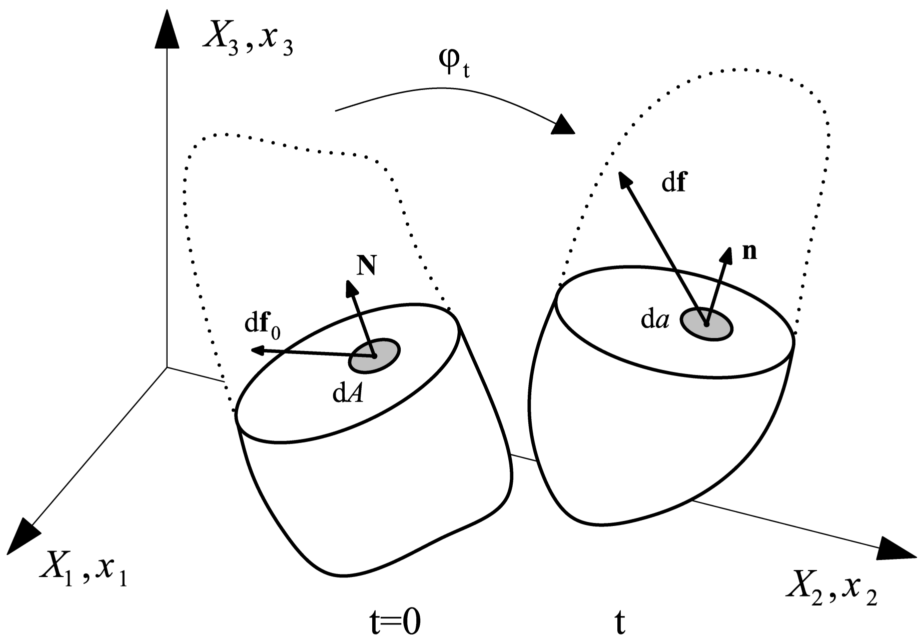
$$\boldsymbol{\sigma} = \sum_{\alpha=1}^{3} \sigma_{\alpha}\mathbf{m}_{\alpha} \otimes \mathbf{m}_{\alpha}\,, \tag{3.76}$$

ahol $\mathbf{m}_{\alpha}, \alpha = 1,2,3$ az egység sajátvektorok, és $\sigma_{\alpha}, \alpha = 1,2,3$ a sajátértékek (főfeszültségek).

Az alakváltozási gradiens segítségével képezhető egy látszólagos $\mathrm{d}\mathbf{f}_0$ elemi erővektor a kezdeti konfiguráción, ami a deformáció során $\mathrm{d}\mathbf{f}$ -be megy át:

$$\mathrm{d}\mathbf{f}_0 = \mathbf{F}^{-1}\mathrm{d}\mathbf{f}\,. \tag{3.77}$$

További feszültségi tenzorok képezhetők attól függően, hogy a $\mathrm{d}\mathbf{f}$, illetve $\mathrm{d}\mathbf{f}_0$ elemi erővektorokat a pillanatnyi konfiguráción érvényes $\mathrm{d}a$ vagy az azonosító konfiguráción érvényes $\mathrm{d}A$ felületelemhez rendeljük hozzá.



6. ábra: Az azonosító és a pillanatnyi konfiguráció belső erőrendszere.

3.3.2. ELSŐ PIOLA-KIRCHHOFF-FÉLE FESZÜLTSÉGTENZOR

Az első *Piola-Kirchhoff*-féle feszültségtenzor a $\mathrm{d}\mathbf{f}$ elemi erővektor és a $\mathrm{d}\mathbf{A} = \mathrm{d}A\mathbf{N}$ felületelem vektor között teremt kapcsolatot:

$$\mathrm{d}\mathbf{f} = \mathbf{P}\mathrm{d}\mathbf{A} \,. \tag{3.78}$$

Behelyettesítve a felületelem vektorok között érvényes $\mathrm{d}\mathbf{A} = \frac{1}{J}\mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathrm{d}\mathbf{a}$ transzformációt:

$$\mathrm{d}\mathbf{f} = \mathbf{P}\frac{1}{J}\mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathrm{d}\mathbf{a} = \boldsymbol{\sigma}\mathrm{d}\mathbf{a} \,, \tag{3.79}$$

ahonnan a *Cauchy*- és az első *Piola-Kirchhoff*-féle feszültségtenzor közötti összefüggés:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{J}\mathbf{P}\mathbf{F}^{\mathrm{T}} , \qquad \mathbf{P} = J\boldsymbol{\sigma}\mathbf{F}^{-\mathrm{T}} \,. \tag{3.80}$$

3.3.3. MÁSODIK PIOLA-KIRCHHOFF-FÉLE FESZÜLTSÉGTENZOR

A második *Piola-Kirchhoff*-féle feszültségtenzor a $\mathrm{d}\mathbf{f}_0$ elemi erővektor és a $\mathrm{d}\mathbf{A} = \mathrm{d}A\mathbf{N}$ felületelem vektor között teremt kapcsolatot:

$$\mathrm{d}\mathbf{f}_0 = \mathbf{S}\mathrm{d}\mathbf{A} \,. \tag{3.81}$$

Behelyettesítve a $\mathrm{d}\mathbf{f}_0$ és $\mathrm{d}\mathbf{f}$ közötti, és a $\mathrm{d}\mathbf{A}$ és $\mathrm{d}\mathbf{a}$ közötti kapcsolatot:

$$\mathbf{F}^{-1}\mathrm{d}\mathbf{f} = \mathbf{S}\frac{1}{J}\mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathrm{d}\mathbf{a} \,, \tag{3.82}$$

$$\mathrm{d}\mathbf{f} = \frac{1}{J}\mathbf{F}\mathbf{S}\mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathrm{d}\mathbf{a} = \boldsymbol{\sigma}\mathrm{d}\mathbf{a} \,, \tag{3.83}$$

ahonnan a *Cauchy*- és a második *Piola-Kirchhoff*-féle feszültségtenzor közötti összefüggés:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{J}\mathbf{F}\mathbf{S}\mathbf{F}^{\mathrm{T}} , \qquad \mathbf{S} = J\mathbf{F}^{-1}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{F}^{-\mathrm{T}} \,. \tag{3.84}$$

3.3.4. KIRCHHOFF-FÉLE FESZÜLTSÉGTENZOR

A *Kirchhoff*-féle feszültségtenzort a *Cauchy*-féle feszültségtenzor és az alakváltozási gradiens tenzor determinánsának (térfogatváltozás mértéke) szorzata szolgáltatja:

$$\boldsymbol{\tau} = J\boldsymbol{\sigma} \,. \tag{3.85}$$

Értelmezhető az Ω_{U} konfiguráción a visszaforgatott *Kirchhoff*-féle feszültségtenzor:

$$\mathbf{T} = \mathbf{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\tau}\mathbf{R} \,. \tag{3.86}$$

3.3.5. A FESZÜLTSÉGTENZOROK KAPCSOLATA

A 3. Táblázat a feszültségtenzorok közötti összefüggéseket tartalmazza.

3. Táblázat: A feszültségtenzorok kapcsolata.

	$\boldsymbol{\sigma}$	$\mathbf{P}$	$\mathbf{S}$	$\boldsymbol{\tau}$
$\boldsymbol{\sigma}$		$\frac{1}{J}\mathbf{P}\mathbf{F}^{\mathrm{T}}$	$\frac{1}{J}\mathbf{F}\mathbf{S}\mathbf{F}^{\mathrm{T}}$	$\frac{1}{J}\boldsymbol{\tau}$
$\mathbf{P}$	$J\boldsymbol{\sigma}\mathbf{F}^{-\mathrm{T}}$		$\mathbf{F}\mathbf{S}$	$\boldsymbol{\tau}\mathbf{F}^{-\mathrm{T}}$
$\mathbf{S}$	$J\mathbf{F}^{-1}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{F}^{-\mathrm{T}}$	$\mathbf{F}^{-1}\mathbf{P}$		$\mathbf{F}^{-1}\boldsymbol{\tau}\mathbf{F}^{-\mathrm{T}}$
$\boldsymbol{\tau}$	$J\boldsymbol{\sigma}$	$\mathbf{P}\mathbf{F}^{\mathrm{T}}$	$\mathbf{F}\mathbf{S}\mathbf{F}^{\mathrm{T}}$	

3.4. OBJEKTÍV FESZÜLTSÉG-SEBESSÉGEK

3.4.1. FIZIKAI OBJEKTIVITÁS

Fizikailag objektív tenzoroknak nevezzük tágabb értelemben azokat a tenzorokat, amelyek egymáshoz képest tetszőlegesen mozgó koordináta-rendszerek esetén is koordináta-rendszertől függetlenül értelmezhetők, vagyis tetszőleges transzformációval szemben invariánsok.

A kontinuummechanikai egyenletek fizikai egyenletek, melyeknek nézőponttól függetlennek (objektívnek) kell lenniük (`material frame indifference`, `material objectivity`). Az objektivitásnak döntő szerepe van a kontinuummechanikában, legfőképpen a konstitutív egyenletek megalkotásánál.

Az objektivitást kétféleképpen lehet szemléltetni [35]:

1. A kontinuumot és a rá alkalmazott terheléseket változatlanul hagyjuk, és a vonatkoztatási rendszert (`observer's reference frame`) változtatjuk.

2. A vonatkoztatási rendszert változatlanul hagyjuk, és egy merevtest-szerű mozgást (`rigid body motion`) alkalmazunk a testre. Ekkor minden egyes anyagi ponthoz egy szuperponálódó mozgás adódik, továbbá a kontinuumra alkalmazott terhelések a járulékos mozgás szerint transzformálódnak.

A merevtest-szerű mozgás alkalmazása során a kontinuumelemkre vonatkozó relatív távolságok változatlanok maradnak. A szuperponálódó mozgás után az anyagi pontok a $\mathbf{x}^{+}$ helyzetet foglalják el a $t^{+}=t+a$ időpillanatban, ahol a konstans (a „$+$” felső index a merevtestszerű mozgás után érvényes mennyiségekre vonatkozik). Jelölje P^{+} a kontinuum tetszőleges anyagi pontját a merevtest-szerű mozgás után érvényes Ω^{+} konfigurációban.

P^{+} és P^{0} közötti leképzés:

$$\mathbf{x}^{+}=\boldsymbol{\varphi}_{t}^{+}(\mathbf{X},t)\,. \tag{3.87}$$

Behelyettesítve a P^{0} és P^{t} közötti $\mathbf{X}=\boldsymbol{\varphi}_{\mathrm{t}}^{-1}(\mathbf{x})$ inverz leképzést megkapjuk a P^{+} és P^{t} közötti összefüggést:

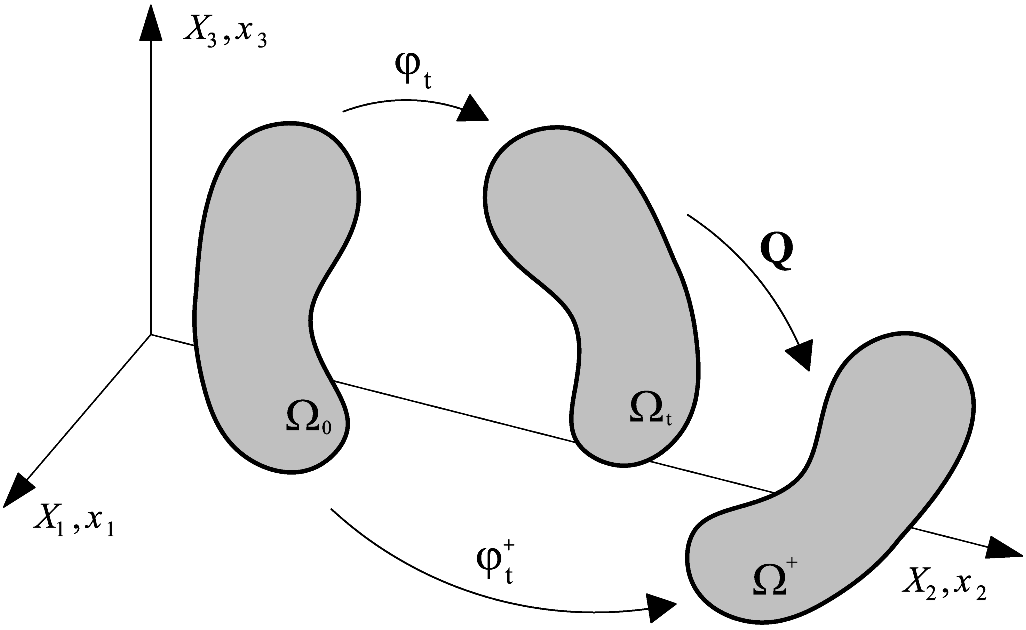
$$\mathbf{x}^{+}=\tilde{\boldsymbol{\varphi}}_{t}^{+}(\mathbf{x},t)\,. \tag{3.88}$$

Amennyiben a szuperponálódó mozgás merevtest-szerű forgatás, akkor az $\mathbf{x}^{+}$ és $\mathbf{x}$ közötti összefüggés:

$$\mathbf{x}^{+}=\mathbf{Q}(t)\,\mathbf{x}\,, \tag{3.89}$$

ahol $\mathbf{Q}(t)$ az ortogonális forgástenzor, az alábbi tulajdonságokkal:

$$\begin{aligned}&\mathbf{Q}\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{\delta},\\&\mathbf{Q}^{-1}=\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\\&\det(\mathbf{Q})=1.\end{aligned} \tag{3.90}$$



7. ábra: Járulékos merevtest-szerű forgatás.

Az *Euler*-féle mennyiségek objektívek, ha teljesülnek rájuk az alábbi objektivitási törvények:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{A}\left(\mathbf{x}^+, t^+\right) = \mathbf{Q}(t)\,\mathbf{A}(\mathbf{x},t)\,\mathbf{Q}(t)^{\mathrm{T}},\\
&\mathbf{u}\left(\mathbf{x}^+, t^+\right) = \mathbf{Q}(t)\,\mathbf{u}(\mathbf{x},t),\\
&\Phi\left(\mathbf{x}^+, t^+\right) = \Phi(\mathbf{x},t),
\end{aligned} \tag{3.91}$$

ahol $\mathbf{A}$, $\mathbf{u}$ és Φ másodrendű tenzort, vektort és skalárt jelentenek.

Az alakváltozási gradiens a Ω^+ konfigurációban:

$$\mathbf{F}^+ = \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}}\tilde{\boldsymbol{\varphi}}_t^+ = \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}}\left[\mathbf{Q}(t)\,\mathbf{x}\right] = \mathbf{Q}\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{Q}\frac{\partial}{\partial \mathbf{X}}\boldsymbol{\varphi}_t = \mathbf{QF}\,. \tag{3.92}$$

Az *Euler*-féle sebességmező gradiens tenzor számítása Ω^+-ban:

$$\begin{aligned}
\mathbf{l}^+ &= \dot{\mathbf{F}}^+\left(\mathbf{F}^+\right)^{-1} = \dot{\overline{(\mathbf{QF})}}(\mathbf{QF})^{-1} = \left(\dot{\mathbf{Q}}\mathbf{F} + \mathbf{Q}\dot{\mathbf{F}}\right)(\mathbf{QF})^{-1} = \\
&= \left(\dot{\mathbf{Q}}\mathbf{F}\right)(\mathbf{QF})^{-1} + \left(\mathbf{Q}\dot{\mathbf{F}}\right)(\mathbf{QF})^{-1} = \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{F}\mathbf{F}^{-1}\mathbf{Q}^{\mathrm{T}} + \mathbf{Q}\dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1}\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}
\end{aligned}, \tag{3.93}$$

felhasználva az $\dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1} = \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1}\boldsymbol{\delta} = \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{F}^{-1}$ azonosságot:

$$\begin{aligned}
\mathbf{l}^+ &= \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{F}\mathbf{F}^{-1}\mathbf{Q}^{\mathrm{T}} + \mathbf{Q}\left(\dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1}\right)\mathbf{F}\mathbf{F}^{-1}\mathbf{Q}^{\mathrm{T}} = \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{F}\mathbf{F}^{-1}\mathbf{Q}^{\mathrm{T}} + \mathbf{Q}\boldsymbol{\delta}\mathbf{F}\mathbf{F}^{-1}\mathbf{Q}^{\mathrm{T}} = \\
&= \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^{\mathrm{T}} + \mathbf{Q}\mathbf{l}\mathbf{Q}^{\mathrm{T}} = \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^{\mathrm{T}} + \mathbf{Q}(\mathbf{d}+\mathbf{w})\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}
\end{aligned}. \tag{3.94}$$

Mivel nem teljesül rá a másodrendű tenzorokra vonatkozó $(3.91)_1$ objektivitási feltétel, emiatt az *Euler*-féle sebességmező gradiens tenzor nem objektív mennyiség.

Az alakváltozás-sebesség objektivitásának vizsgálata:

$$\mathbf{d}^{+} = \frac{1}{2}\left[\left(\mathbf{l}^{+}\right) + \left(\mathbf{l}^{+}\right)^{\mathrm{T}}\right] = \frac{1}{2}\left[\dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^{\mathrm{T}} + \mathbf{Q}\mathbf{l}\mathbf{Q}^{\mathrm{T}} + \mathbf{Q}\dot{\mathbf{Q}}^{\mathrm{T}} + \mathbf{Q}\mathbf{l}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\right]. \tag{3.95}$$

Elvégezve az alábbi átalakítást:

$$\dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^{\mathrm{T}} + \mathbf{Q}\dot{\mathbf{Q}}^{\mathrm{T}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\overline{\left(\mathbf{Q}\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\right)} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\delta} = \mathbf{0}, \tag{3.96}$$

emiatt (3.95) az alábbi alakra egyszerűsödik:

$$\mathbf{d}^{+} = \frac{1}{2}\mathbf{Q}\left(\mathbf{l} + \mathbf{l}^{\mathrm{T}}\right)\mathbf{Q}^{\mathrm{T}} = \mathbf{Q}\mathbf{d}\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}, \tag{3.97}$$

tehát az alakváltozás-sebesség objektív mennyiség.

Az örvénytenzor objektivitásának vizsgálata:

$$\mathbf{w}^{+} = \mathbf{l}^{+} - \mathbf{d}^{+} = \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^{\mathrm{T}} + \mathbf{Q}\left(\mathbf{d} + \mathbf{w}\right)\mathbf{Q}^{\mathrm{T}} - \mathbf{Q}\mathbf{d}\mathbf{Q}^{\mathrm{T}} = \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^{\mathrm{T}} + \mathbf{Q}\mathbf{w}\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}. \tag{3.98}$$

Mivel $\mathbf{w}^{+} \neq \mathbf{Q}\mathbf{w}\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}$, emiatt az örvénytenzor nem objektív mennyiség.

A 6. ábra szerinti $\mathrm{d}\mathbf{f}$ elemi erővektor és $\mathrm{d}\mathbf{a} = \mathrm{d}a\mathbf{n}$ felületelem vektor a Ω^{+} konfigurációban:

$$\mathrm{d}\mathbf{f}^{+} = \mathbf{Q}\mathrm{d}\mathbf{f}, \tag{3.99}$$

$$\mathrm{d}\mathbf{a}^{+} = \mathbf{Q}\mathrm{d}\mathbf{a}. \tag{3.100}$$

A Cauchy-féle feszültség objektivitásának vizsgálata:

$$\mathrm{d}\mathbf{f}^{+} = \boldsymbol{\sigma}^{+}\mathrm{d}\mathbf{a}^{+}, \tag{3.101}$$

$$\mathbf{Q}\mathrm{d}\mathbf{f} = \boldsymbol{\sigma}^{+}\mathbf{Q}\mathrm{d}\mathbf{a}, \tag{3.102}$$

$$\mathrm{d}\mathbf{f} = \mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\sigma}^{+}\mathbf{Q}\mathrm{d}\mathbf{a} = \boldsymbol{\sigma}\mathrm{d}\mathbf{a}, \qquad \rightarrow \qquad \boldsymbol{\sigma}^{+} = \mathbf{Q}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}, \tag{3.103}$$

tehát a *Cauchy*-féle feszültség objektív mennyiség.

A *Jacobi*-determináns objektivitásának vizsgálata:

$$J^{+} = \det\left(\mathbf{F}^{+}\right) = \det\left(\mathbf{Q}\mathbf{F}\right) = \det\left(\mathbf{Q}\right)\det\left(\mathbf{F}\right) = 1 \cdot J = J, \tag{3.104}$$

tehát J objektív skalár mennyiség.

A *Kirchhoff*-féle feszültségi tenzor objektivitásának vizsgálata:

$$\boldsymbol{\tau}^{+} = J^{+}\boldsymbol{\sigma}^{+} = J\mathbf{Q}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{Q}^{\mathrm{T}} = \mathbf{Q}J\boldsymbol{\sigma}\mathbf{Q}^{\mathrm{T}} = \mathbf{Q}\boldsymbol{\tau}\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}, \tag{3.105}$$

tehát a *Kirchhoff*-féle feszültség is objektív mennyiség.

3.4.2. OBJEKTÍV DERIVÁLTAK

A következőkben a nevezetes objektív deriváltak (`objective rates`) bemutatása következik. Az objektív deriváltaknak jelentős szerepe van a konstitutív egyenletek megalkotásánál. Legfőképpen abban az esetben, ha a konstitutív egyenlet feszültség-sebesség tagot is tartalmaz.

Az objektív deriváltak egy lehetséges csoportosítási módja az együttforgó deriváltakra (`corotational rates`) és nem együttforgó (`non-corotational rates`) deriváltakra történő felosztás [63].

3.4.2.1. NEM EGYÜTTFORGÓ OBJEKTÍV DERIVÁLTAK

Legyen $\mathbf{z}$ egy differenciálható (idő szerint) objektív *Euler*-féle szimmetrikus másodrendű tenzor (mint például a *Cauchy*-féle feszültségi tenzor).

Ez esetben a jellegzetesebb, nem együttforgó objektív deriváltak a következők:

***Truesdell*-féle derivált:**

$$\overset{\circ}{\mathbf{z}}^{\mathrm{Tr}} = \dot{\mathbf{z}} - \mathbf{z}\mathbf{l}^{\mathrm{T}} - \mathbf{l}\mathbf{z} + \mathrm{tr}(\mathbf{d})\mathbf{z}\,. \tag{3.106}$$

***Cotter-Rivlin*-féle derivált:**

$$\overset{\circ}{\mathbf{z}}^{\mathrm{CR}} = \dot{\mathbf{z}} + \mathbf{z}\mathbf{l} + \mathbf{l}^{\mathrm{T}}\mathbf{z}\,. \tag{3.107}$$

***Oldroyd*-féle derivált:**

$$\overset{\circ}{\mathbf{z}}^{\mathrm{O}} = \dot{\mathbf{z}} - \mathbf{z}\mathbf{l}^{\mathrm{T}} - \mathbf{l}\mathbf{z}\,. \tag{3.108}$$

***Durban-Baruch*-féle derivált:**

$$\overset{\circ}{\mathbf{z}}^{\mathrm{DB}} = \dot{\mathbf{z}} + \mathbf{z}\left(\mathbf{w} - \tfrac{1}{2}\mathbf{d}\right) - \left(\mathbf{w} + \tfrac{1}{2}\mathbf{d}\right)\mathbf{z} + \mathrm{tr}(\mathbf{d})\mathbf{z}\,. \tag{3.109}$$

***Szabó-Balla-1*-féle derivált:**

$$\overset{\circ}{\mathbf{z}}^{\mathrm{SZB1}} = \dot{\mathbf{z}} - \mathbf{z}\left(\dot{\mathbf{V}}\mathbf{V}^{-1} + \mathbf{V}\mathbf{\Omega}^{\mathrm{E}}\mathbf{V}^{-1}\right)^{\mathrm{T}} - \left(\dot{\mathbf{V}}\mathbf{V}^{-1} + \mathbf{V}\mathbf{\Omega}^{\mathrm{E}}\mathbf{V}^{-1}\right)\mathbf{z}\,. \tag{3.110}$$

***Szabó-Balla-2*-féle derivált:**

$$\overset{\circ}{\mathbf{z}}^{\mathrm{SZB2}} = \dot{\mathbf{z}} + \mathbf{z}\left(\dot{\mathbf{V}}\mathbf{V}^{-1} + \mathbf{V}\mathbf{\Omega}^{\mathrm{E}}\mathbf{V}^{-1}\right) + \left(\dot{\mathbf{V}}\mathbf{V}^{-1} + \mathbf{V}\mathbf{\Omega}^{\mathrm{E}}\mathbf{V}^{-1}\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{z}\,. \tag{3.111}$$

3.4.2.2. EGYÜTTFORGÓ OBJEKTÍV DERIVÁLTAK

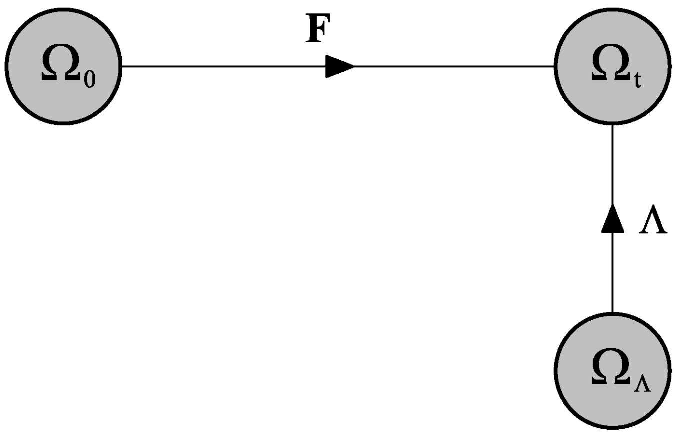
Az objektív együttforgó deriváltak (`objective corotational rates`) általános alakja:

$$\overset{\circ}{\mathbf{z}}{}^{*} = \dot{\mathbf{z}} + \mathbf{z}\boldsymbol{\Omega}^{*} - \boldsymbol{\Omega}^{*}\mathbf{z}\,, \tag{3.112}$$

ahol $\boldsymbol{\Omega}^{*}$ az együttforgó konfigurációhoz tartozó ferdén szimmetrikus spin tenzor $\left(\boldsymbol{\Omega}^{*} = -\left(\boldsymbol{\Omega}^{*}\right)^{\mathrm{T}}\right)$.
A spintenzor előállítása a hozzá tartozó $\left(\boldsymbol{\Lambda}^{*}\right)$ ortogonális forgatótenzor segítségével ($\boldsymbol{\Lambda}^{*}$ jelölés helyett a továbbiakban $\boldsymbol{\Lambda}$ jelölés használata történik):

$$\boldsymbol{\Omega}^{*} = \dot{\boldsymbol{\Lambda}}\boldsymbol{\Lambda}^{\mathrm{T}}. \tag{3.113}$$

A $\boldsymbol{\Lambda}$ ortogonális forgatótenzor végzi a leképzést az együttforgó konfigurációból $\left(\Omega_{\Lambda}\right)$ a pillanatnyi konfigurációba $\left(\Omega_{\mathrm{t}}\right)$.



8. ábra: Együttforgó konfiguráció értelmezése.

Az objektív együttforgó deriváltak esetén a pillanatnyi konfiguráción érvényes objektív mennyiséget az együttforgó konfigurációra transzformáljuk (a megfelelő ortogonális forgatótenzor segítségével), majd ott idő szerint deriváljuk, végül a kapott mennyiséget visszatranszformáljuk a pillanatnyi konfigurációra. Az így számított mennyiség az objektív együttforgó derivált.

$$\mathbf{z} \xrightarrow{\boldsymbol{\Lambda}^{-1}} \boldsymbol{\Lambda}^{\mathrm{T}}\mathbf{z}\boldsymbol{\Lambda} \xrightarrow{\mathrm{d}/\mathrm{d}t} \overline{\left(\boldsymbol{\Lambda}^{\mathrm{T}}\mathbf{z}\boldsymbol{\Lambda}\right)}^{\boldsymbol{\cdot}} \xrightarrow{\boldsymbol{\Lambda}} \boldsymbol{\Lambda}\overline{\left(\boldsymbol{\Lambda}^{\mathrm{T}}\mathbf{z}\boldsymbol{\Lambda}\right)}^{\boldsymbol{\cdot}}\boldsymbol{\Lambda}^{\mathrm{T}} = \overset{\circ}{\mathbf{z}}{}^{*}. \tag{3.114}$$

A spin tenzor felírható a következő alakban:

$$\boldsymbol{\Omega}^{*} = \mathbf{w} + \boldsymbol{\Upsilon}^{*}\left(\mathbf{b},\mathbf{d}\right), \tag{3.115}$$

ahol $\boldsymbol{\Upsilon}^{*}\left(\mathbf{b},\mathbf{d}\right)$ az alakváltozás-sebességnek $\left(\mathbf{d}\right)$ és a baloldali *Cauchy-Green* deformációs tenzornak $\left(\mathbf{b}\right)$ a ferdén szimmetrikus, izotrop tenzor függvénye. Ebben az alakban felírható spin tenzorok száma korlátlan. Ezek közül csak a jellegzetesebbek kerülnek tárgyalásra.

A spintenzor megadásának egy másik, speciális alakja a következő:

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{\Omega}^* = \mathbf{w} + \sum_{\alpha=1,\beta=1,\alpha\neq\beta}^{\mathrm{m}} f^*\left(\frac{\chi_\alpha}{\chi_\beta}\right)\mathbf{p}_\alpha \mathbf{d} \mathbf{p}_\beta, \\
&f^*\left(z^{-1}\right) = -f^*\left(z\right) \qquad \forall z \in \Re^+,
\end{aligned}
\tag{3.116}
$$

ahol $f^*\left(z\right)$ skalár értékű spin-függvény, χ_α, illetve $\mathbf{p}_\alpha$ a baloldali *Cauchy-Green* deformációs tenzornak $\left(\mathbf{b}\right)$ sajátértékei, illetve bázis tenzorai (sajátprojekciói), valamint m a $\mathbf{b}$ különböző sajátértékeinek a száma.

A spintenzor megadásának egy másik lehetséges módja:

$$
\boldsymbol{\Omega}^* = \mathbf{w} + \mathbf{N}^*,
\tag{3.117}
$$

és

$$
\mathbf{N}^* = \begin{cases}
\mathbf{0}, \quad \chi_1 = \chi_2 = \chi_3, \\
v^*\left[\mathbf{bd} - \left(\mathbf{bd}\right)^{\mathrm{T}}\right], \quad \chi_1 \neq \chi_2 = \chi_3, \\
v_1^*\left[\mathbf{bd} - \left(\mathbf{bd}\right)^{\mathrm{T}}\right] + v_2^*\left[\mathbf{b}^2\mathbf{d} - \left(\mathbf{b}^2\mathbf{d}\right)^{\mathrm{T}}\right] + v_3^*\left[\mathbf{b}^2\mathbf{db} - \left(\mathbf{b}^2\mathbf{db}\right)^{\mathrm{T}}\right], \quad \chi_1 \neq \chi_2 \neq \chi_3 \neq \chi_1,
\end{cases}
\tag{3.118}
$$

ahol

$$
v^* = \frac{f^*\left(\chi_1/\chi_2\right)}{\chi_1 - \chi_2},
\tag{3.119}
$$

$$
\begin{aligned}
&v_{\mathrm{k}}^* = \frac{\left(-1\right)^{\mathrm{k}}}{\Delta}\left(\chi_1^{3-\mathrm{k}} f_{23}^* + \chi_2^{3-\mathrm{k}} f_{31}^* + \chi_3^{3-\mathrm{k}} f_{12}^*\right), \quad \mathrm{k} = 1,2,3, \\
&f_{\mathrm{ij}}^* = f^*\left(\frac{\chi_{\mathrm{i}}}{\chi_{\mathrm{j}}}\right).
\end{aligned}
\tag{3.120}
$$

A jellegzetes spintenzorok, és a hozzájuk tartozó spin-függvények a következők:

***Zaremba-Jaumann-Noll*-féle spin tenzor:**

$$
\begin{aligned}
&f^{\mathrm{ZJN}}(z)=0,\\
&\boldsymbol{\Omega}^{\mathrm{ZJN}}=\mathbf{w}.
\end{aligned}
\tag{3.121}
$$

***Green-McInnis-Naghdi*-féle spin tenzor:**

$$
\begin{aligned}
&f^{\mathrm{GMN}}(z)=\frac{1-\sqrt{z}}{1+\sqrt{z}},\\
&\boldsymbol{\Omega}^{\mathrm{ZJN}}=\mathbf{w}+\sum_{\alpha=1,\beta=1,\alpha\neq\beta}^{\mathrm{m}}\frac{\sqrt{\chi_\beta}-\sqrt{\chi_\alpha}}{\sqrt{\chi_\alpha}+\sqrt{\chi_\beta}}\mathbf{p}_\alpha\mathbf{d}\mathbf{p}_\beta,\\
&\boldsymbol{\Lambda}^{\mathrm{ZJN}}=\mathbf{R}.
\end{aligned}
\tag{3.122}
$$

***Euler*-féle triád spin tenzora:**

$$
\begin{aligned}
&f^{\mathrm{E}}(z)=\frac{1+z}{1-z},\\
&\boldsymbol{\Omega}^{\mathrm{E}}=\mathbf{w}+\sum_{\alpha=1,\beta=1,\alpha\neq\beta}^{\mathrm{m}}\frac{\chi_\alpha+\chi_\beta}{\chi_\beta-\chi_\alpha}\mathbf{p}_\alpha\mathbf{d}\mathbf{p}_\beta,\\
&\boldsymbol{\Lambda}^{\mathrm{E}}=\mathbf{R}_{\mathrm{n}}.
\end{aligned}
\tag{3.123}
$$

***Lagrange*-féle triád spin tenzora:**

$$
\begin{aligned}
&f^{\mathrm{L}}(z)=\frac{2\sqrt{z}}{1-z},\\
&\hat{\boldsymbol{\Omega}}^{\mathrm{L}}=\mathbf{w}+\sum_{\alpha=1,\beta=1,\alpha\neq\beta}^{\mathrm{m}}\frac{2\sqrt{\chi_\alpha\chi_\beta}}{\chi_\beta-\chi_\alpha}\mathbf{p}_\alpha\mathbf{d}\mathbf{p}_\beta,\\
&\bar{\boldsymbol{\Omega}}^{\mathrm{L}}=\hat{\boldsymbol{\Omega}}^{\mathrm{L}}-\mathbf{w},\\
&\boldsymbol{\Omega}^{\mathrm{L}}=\mathbf{R}^{\mathrm{T}}\left(\bar{\boldsymbol{\Omega}}^{\mathrm{L}}\right)\mathbf{R}=\mathbf{R}^{\mathrm{T}}\left(\hat{\boldsymbol{\Omega}}^{\mathrm{L}}-\mathbf{w}\right)\mathbf{R}=\sum_{\alpha=1,\beta=1,\alpha\neq\beta}^{\mathrm{m}}\frac{2\sqrt{\chi_\alpha\chi_\beta}}{\chi_\beta-\chi_\alpha}\mathbf{P}_\alpha\mathbf{D}\mathbf{P}_\beta,\\
&\mathbf{D}=\mathbf{R}^{\mathrm{T}}\mathbf{d}\mathbf{R},\qquad \mathbf{P}_\alpha=\mathbf{R}^{\mathrm{T}}\mathbf{p}_\alpha\mathbf{R},\\
&\boldsymbol{\Lambda}^{\mathrm{L}}=\mathbf{R}_{\mathrm{N}}.
\end{aligned}
\tag{3.124}
$$

ahol $\bar{\boldsymbol{\Omega}}^{\mathrm{L}}$ jelenti az azonosító konfiguráción értelmezett *Lagrange*-féle triád spintenzorának a pillanatnyi konfigurációra történő forgatásával nyert spintenzort. Az (3.112) szerinti együttforgó objektív derivált kifejezésben ennek a mennyiségnek a használata történik.

Logaritmikus spin tenzor:

$$
\begin{aligned}
&f^{\log}(z)=\frac{1+z}{1-z}+\frac{2}{\ln z},\\
&\boldsymbol{\Omega}^{\log}=\mathbf{w}+\sum_{\alpha=1,\beta=1,\alpha\neq\beta}^{\mathrm{m}}\left(\frac{\chi_\alpha+\chi_\beta}{\chi_\beta-\chi_\alpha}+\frac{2}{\ln\chi_\alpha-\ln\chi_\beta}\right)\mathbf{p}_\alpha\mathbf{d}\mathbf{p}_\beta.
\end{aligned}
\tag{3.125}
$$

A merevtest-szerű forgatás leírásában a spintenzor, a spintenzorhoz rendelhető szögsebesség vektor és a megfelelő ortogonális forgatótenzor játssza a döntő szerepet. A spintenzor számítása az ortogonális forgatótenzor segítségével (3.113) szerint történik. Az ortogonális forgatótenzor számítása a spintenzor segítségével már nem ennyire egyértelmű.

Legyen $\mathbf{W} = \mathbf{\Omega} \mathrm{d}t$ differenciális forgást képviselő ferdén szimmetrikus tenzor. $\mathbf{W}$-hez hozzárendelhető egy szögsebesség vektor $(\boldsymbol{\omega})$ a következőképpen:

$$\mathbf{v} = \mathbf{W} \cdot \mathbf{r} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \qquad \forall \mathbf{r} \in \Re^3 , \tag{3.126}$$

ahol $\mathbf{v}$ jelenti az érintő irányú sebességet a tetszőleges $\mathbf{r}$ vektor végén. $\mathbf{W}$ és $\boldsymbol{\omega}$ elemei között a kapcsolat a következő:

$$[\mathbf{W}] = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad [\boldsymbol{\omega}] = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix}. \tag{3.127}$$

$\mathbf{W}$ exponenciális leképzése szolgáltatja a megfelelő ortogonális tenzort:

$$\mathbf{q} = \exp(\mathbf{W}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \mathbf{W}^n . \tag{3.128}$$

Ferdén szimmetrikus tenzorok exponenciális leképzése zárt alakban is előállítható a következő módon [51], [4]:

$$\mathbf{q} = \boldsymbol{\delta} + \frac{\sin\omega}{\omega} \mathbf{W} + \frac{1}{2} \left(\frac{\sin(\omega/2)}{\omega/2} \right)^2 \mathbf{W}^2 , \tag{3.129}$$

ahol ω a szögsebesség vektor hossza:

$$\omega = \|\boldsymbol{\omega}\| = \left(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 \right)^{1/2} .$$

A $\mathbf{q}$ ortogonális forgató tenzor egy pillanatnyi differenciális forgatáshoz tartozik. Az időben folytonos spin tenzor függvényhez $(\mathbf{\Omega}(t))$ tartozó ortogonális forgató tenzort megkapjuk a pillanatnyi forgató tenzorok összeszorzásával:

$$\mathbf{\Lambda} = \lim_{n \to \infty} \mathbf{q}_n \ldots \mathbf{q}_\alpha \ldots \mathbf{q}_2 \mathbf{q}_1 \boldsymbol{\delta}, \text{ ahol } \mathbf{q}_\alpha = \exp(\mathbf{W}_\alpha) = \exp\left(\mathbf{\Omega}(t_\alpha)\mathrm{d}t\right). \tag{3.130}$$

A teljes forgatás meghatározható a következő tenzor differenciálegyenlet segítségével is:

$$\mathbf{\Omega} = \dot{\mathbf{\Lambda}} \mathbf{\Lambda}^{\mathrm{T}} \quad \to \quad \dot{\mathbf{\Lambda}} = \mathbf{\Omega} \mathbf{\Lambda}, \qquad \mathbf{\Lambda}\big|_{t=0} = \boldsymbol{\delta} , \tag{3.131}$$

melynek megoldása:

$$\mathbf{\Lambda} = \exp\left(\int_0^t \mathbf{\Omega} \mathrm{d}t \right) \boldsymbol{\delta} . \tag{3.132}$$

3.4.3. OBJEKTÍV FESZÜLTSÉG-SEBESSÉGEK

Az 3.4.2 pontban tárgyalt objektív deriváltak segítségével az objektív *Cauchy*-féle és *Kirchhoff*-féle feszültségi tenzorok objektív feszültség-sebességei (`objective stress rate`) képezhetők.

A *Cauchy* feszültség *Truesdell*-féle feszültség-sebessége:

$$\overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}}{}^{\mathrm{Tr}} = \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma}\mathbf{l}^{\mathrm{T}} - \mathbf{l}\boldsymbol{\sigma} + \mathrm{tr}\left(\mathbf{d}\right)\boldsymbol{\sigma}, \tag{3.133}$$

illetve

$$\overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}}{}^{\mathrm{Tr}} = J^{-1}\mathbf{F}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(J\mathbf{F}^{-1}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{F}^{-\mathrm{T}}\right)\right]\mathbf{F}^{\mathrm{T}}. \tag{3.134}$$

A *Kirchhoff* feszültség *Cotter-Rivlin*-féle feszültség-sebessége:

$$\overset{\circ}{\boldsymbol{\tau}}{}^{\mathrm{CR}} = \dot{\boldsymbol{\tau}} + \boldsymbol{\tau}\mathbf{l} + \mathbf{l}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\tau} \tag{3.135}$$

A *Kirchhoff* feszültség *Oldroyd*-féle feszültség-sebessége:

$$\overset{\circ}{\boldsymbol{\tau}}{}^{\mathrm{O}} = \dot{\boldsymbol{\tau}} - \boldsymbol{\tau}\mathbf{l}^{\mathrm{T}} - \mathbf{l}\boldsymbol{\tau}, \tag{3.136}$$

$$\overset{\circ}{\boldsymbol{\tau}}{}^{\mathrm{O}} = J\overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}}{}^{\mathrm{Tr}}. \tag{3.137}$$

A *Cauchy* feszültség *Durban-Baruch*-féle feszültség-sebessége:

$$\overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}}{}^{\mathrm{DB}} = \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \boldsymbol{\sigma}\left(\mathbf{w} - \tfrac{1}{2}\mathbf{d}\right) - \left(\mathbf{w} + \tfrac{1}{2}\mathbf{d}\right)\boldsymbol{\sigma} + \left(\mathrm{tr}\left(\mathbf{d}\right)\right)\boldsymbol{\sigma}. \tag{3.138}$$

A *Cauchy* feszültség *Szabó-Balla-1*-féle feszültség-sebessége:

$$\overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}}{}^{\mathrm{SZB1}} = \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma}\left(\dot{\mathbf{V}}\mathbf{V}^{-1} + \mathbf{V}\boldsymbol{\Omega}^{\mathrm{E}}\mathbf{V}^{-1}\right)^{\mathrm{T}} - \left(\dot{\mathbf{V}}\mathbf{V}^{-1} + \mathbf{V}\boldsymbol{\Omega}^{\mathrm{E}}\mathbf{V}^{-1}\right)\boldsymbol{\sigma}. \tag{3.139}$$

A *Cauchy* feszültség *Szabó-Balla-2*-féle feszültség-sebessége:

$$\overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}}{}^{\mathrm{SZB2}} = \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \boldsymbol{\sigma}\left(\dot{\mathbf{V}}\mathbf{V}^{-1} + \mathbf{V}\boldsymbol{\Omega}^{\mathrm{E}}\mathbf{V}^{-1}\right) + \left(\dot{\mathbf{V}}\mathbf{V}^{-1} + \mathbf{V}\boldsymbol{\Omega}^{\mathrm{E}}\mathbf{V}^{-1}\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\sigma}. \tag{3.140}$$

A *Kirchhoff* feszültség *Zaremba-Jaumann-Noll* -féle feszültség-sebessége:

$$\overset{\circ}{\boldsymbol{\tau}}{}^{\mathrm{ZJN}} = \dot{\boldsymbol{\tau}} + \boldsymbol{\tau}\mathbf{w} - \mathbf{w}\boldsymbol{\tau}. \tag{3.141}$$

A *Kirchhoff* feszültség *Green-McInnis-Naghdi* -féle feszültség-sebessége:

$$\overset{\circ}{\boldsymbol{\tau}}{}^{\mathrm{GMN}} = \dot{\boldsymbol{\tau}} + \boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\Omega}^{\mathrm{GMN}} - \boldsymbol{\Omega}^{\mathrm{GMN}}\boldsymbol{\tau}. \tag{3.142}$$

A *Kirchhoff* feszültség *Euler*-féle triád spin tenzorán alapuló feszültség-sebessége:

$$\overset{\circ}{\boldsymbol{\tau}}{}^{\mathrm{E}} = \dot{\boldsymbol{\tau}} + \boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\Omega}^{\mathrm{E}} - \boldsymbol{\Omega}^{\mathrm{E}}\boldsymbol{\tau}. \tag{3.143}$$

A *Kirchhoff* feszültség *Lagrange*-féle triád spin tenzorán alapuló feszültség-sebessége:

$$\overset{\circ}{\boldsymbol{\tau}}{}^{\mathrm{L}} = \dot{\boldsymbol{\tau}} + \boldsymbol{\tau}\bar{\boldsymbol{\Omega}}^{\mathrm{L}} - \bar{\boldsymbol{\Omega}}^{\mathrm{L}}\boldsymbol{\tau}\,. \tag{3.144}$$

A *Kirchhoff* feszültség Logaritmikus feszültség-sebessége:

$$\overset{\circ}{\boldsymbol{\tau}}{}^{\log} = \dot{\boldsymbol{\tau}} + \boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\Omega}^{\log} - \boldsymbol{\Omega}^{\log}\boldsymbol{\tau}\,. \tag{3.145}$$

4. HIPOELASZTIKUS ANYAGMODELL

A hipoelasztikus testek elméletének megalapozója Truesdell volt, aki a konstitutív egyenletet az alábbi formában közölte [54]:

$$\overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}}{}^{*} = \mathscr{H}^{*} : \mathbf{d}\,, \tag{4.1}$$

ahol $\overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}}{}^{*}$ a *Cauchy*-féle feszültség objektív deriváltja (objektív feszültség-sebesség), $\mathscr{H}^{*} = \mathscr{H}^{*}(\boldsymbol{\sigma})$ feszültségtől függő negyedrendű hipoelasztikus érintő tenzor (*hypo-elasticity tensor*), $\mathbf{d}$ az alakváltozás-sebesség tenzor. A hipoelasztikus konstitutív egyenlet *Kirchhoff*-féle feszültségre érvényes alakja:

$$\overset{\circ}{\boldsymbol{\tau}}{}^{*} = \mathscr{H}^{*} : \mathbf{d}\,. \tag{4.2}$$

Nulladrendű hipoelasztikus anyagtörvényről beszélünk abban az esetben, ha $\mathscr{H}^{*}$ alakja a következő:

$$\mathscr{H}^{*} = \mathscr{C} = \lambda \boldsymbol{\delta} \otimes \boldsymbol{\delta} + 2\mu \mathscr{I}\,, \tag{4.3}$$

ahol λ, μ a *Lamé*-állandók és $\mathscr{I}$ jelenti a negyedrendű egységtenzort.

Ez esetben a (4.2) szerinti a konstitutív egyenlet az alábbi formában is felírható:

$$\overset{\circ}{\boldsymbol{\tau}}{}^{*} = \lambda \operatorname{tr}(\mathbf{d})\boldsymbol{\delta} + 2\mu \mathbf{d}\,. \tag{4.4}$$

A (4.2) szerinti hipoelasztikus konstitutív egyenlet széles körben alkalmazott véges rugalmas-képlékeny alakváltozásoknál. Objektív feszültség-sebességként leginkább a *Zaremba-Jaumann-Noll*-féle feszültség-sebesség volt az alkalmazott, mindaddig, amíg ki nem mutatták az egyszerű nyírás esetén a feszültségekben mutatkozó oszcilláló jelleget. Számos más objektív feszültség-sebesség használata került javaslatra, melyek közül az utóbbi években egyre jobban a logaritmikus feszültség-sebesség kerül előtérbe a következő előnyös tulajdonsága miatt: az összes ismert feszültség-sebesség közül egyedül a logaritmikus derivált esetén integrálható a (4.4) szerinti hipoelasztikus konstitutív egyenlet [16]. Feszültségmentes kezdeti konfiguráció esetén (4.4) integrálásával nyert izotrop hiperelasztikus konstitutív egyenlet a következő:

$$\boldsymbol{\tau} = \lambda \operatorname{tr}(\mathbf{h})\boldsymbol{\delta} + 2\mu \mathbf{h}\,, \tag{4.5}$$

ahol $\mathbf{h}$ a pillanatnyi konfiguráción értelmezett *Hencky*-féle alakváltozási tenzor. (4.5) az alábbi alakban is felírható:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathscr{C} : \mathbf{h}\,. \tag{4.6}$$

5. HIPERELASZTIKUS TESTEK

A hiperelasztikus testek elméletének alapja az, hogy feltételezi egy olyan $\Psi\left(\mathbf{F}(\mathbf{X}),\mathbf{X}\right)$ alakváltozási energia függvény (potenciál) létezését, amely adott időpillanatban csakis az $\mathbf{F}$ alakváltozási gradiens és az $\mathbf{X}$ hely függvénye, továbbá az alakváltozási energia a deformáció során kizárólag a kiindulási- és a végállapot függvénye [6].

A tömegegységre vonatkoztatott energiasűrűség számítása a konjugált feszültségi és alakváltozási tenzorok segítségével [5]:

$$D=\frac{1}{\rho}\boldsymbol{\sigma}:\mathbf{d}=\frac{1}{\rho_0}\boldsymbol{\tau}:\mathbf{d}=\frac{1}{\rho_0}\boldsymbol{\tau}:\overset{\circ}{\mathbf{h}}{}^{\log}=\frac{1}{\rho_0}\mathbf{P}:\dot{\mathbf{F}}=\frac{1}{\rho_0}\mathbf{S}:\dot{\mathbf{E}}=\frac{1}{2\rho_0}\mathbf{S}:\dot{\mathbf{C}} \tag{5.1}$$

alakú, ahol felhasználásra került a logaritmikus derivált azon tulajdonsága, hogy a pillanatnyi konfiguráción értelmezett $\mathbf{h}$ *Hencky*-féle alakváltozási tenzorra alkalmazva a $\mathbf{d}$ alakváltozás-sebesség tenzort adja [55], [56]. Fontos meghegyezni, hogy a *Kirchhoff*-féle feszültségi tenzor és $\mathbf{h}$ *Hencky*-féle alakváltozási tenzor csak izotrop esetben képez konjugált párt.

Az azonosító konfiguráción a térfogategységre vonatkoztatott energiasűrűség (5.1) felhasználásával:

$$\rho_0 D=\boldsymbol{\tau}:\mathbf{d}=\boldsymbol{\tau}:\overset{\circ}{\mathbf{h}}{}^{\log}=\mathbf{P}:\dot{\mathbf{F}}=\mathbf{S}:\dot{\mathbf{E}}=\tfrac{1}{2}\mathbf{S}:\dot{\mathbf{C}}. \tag{5.2}$$

Hiperelasztikus testeknél az útfüggetlenség következményeként az alakváltozási energia az alábbi formában írható:

$$\begin{aligned}&\Psi\left(\mathbf{F}(\mathbf{X}),\mathbf{X}\right)=\int_{t_0}^{t}\rho_0 D\,\mathrm{d}t,\\ &\Psi\left(\mathbf{F}(\mathbf{X}),\mathbf{X}\right)=\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\tau}:\mathbf{d}\mathrm{d}t=\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\tau}:\overset{\circ}{\mathbf{h}}{}^{\log}\mathrm{d}t=\int_{t_0}^{t}\mathbf{P}:\dot{\mathbf{F}}\mathrm{d}t=\int_{t_0}^{t}\mathbf{S}:\dot{\mathbf{E}}\mathrm{d}t=\int_{t_0}^{t}\tfrac{1}{2}\mathbf{S}:\dot{\mathbf{C}}\mathrm{d}t.\end{aligned} \tag{5.3}$$

Továbbá:

$$\begin{aligned}&\dot{\Psi}=\rho_0 D,\\ &\dot{\Psi}=\boldsymbol{\tau}:\mathbf{d}=\boldsymbol{\tau}:\overset{\circ}{\mathbf{h}}{}^{\log}=\mathbf{P}:\dot{\mathbf{F}}=\mathbf{S}:\dot{\mathbf{E}}=\tfrac{1}{2}\mathbf{S}:\dot{\mathbf{C}}.\end{aligned} \tag{5.4}$$

$(5.4)_2$ felhasználásával az egyes feszültségtenzorokat megkapjuk az alakváltozási energiának a megfelelő feszültségi tenzorhoz tartozó konjugált alakváltozási tenzorral képzett parciális deriválásával:

$$\boldsymbol{\tau}=\frac{\partial\Psi}{\partial\mathbf{h}},\qquad \mathbf{P}=\frac{\partial\Psi}{\partial\mathbf{F}},\qquad \mathbf{S}=\frac{\partial\Psi}{\partial\mathbf{E}},\qquad \mathbf{S}=2\frac{\partial\Psi}{\partial\mathbf{C}}. \tag{5.5}$$

$(5.5)_1$ felírásában felhasználásra került a $(3.91)_3$ szerinti objektivitási törvény, miszerint skalár értékű változó idő szerinti deriváltja és tetszőleges együttforgó deriváltja azonos.

Amennyiben az alakváltozási energia függvény alakja a következő:

$$\Psi = \frac{\mathbf{h} : \mathscr{C} : \mathbf{h}}{2}, \tag{5.6}$$

akkor a belőle $(5.5)_1$ szerint képzett *Kirchhoff*-féle feszültségi tenzorra adódó összefüggés:

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{h}} = \frac{\partial\left(\frac{1}{2}\mathbf{h} : \mathscr{C} : \mathbf{h}\right)}{\partial \mathbf{h}} = \mathscr{C} : \mathbf{h}, \tag{5.7}$$

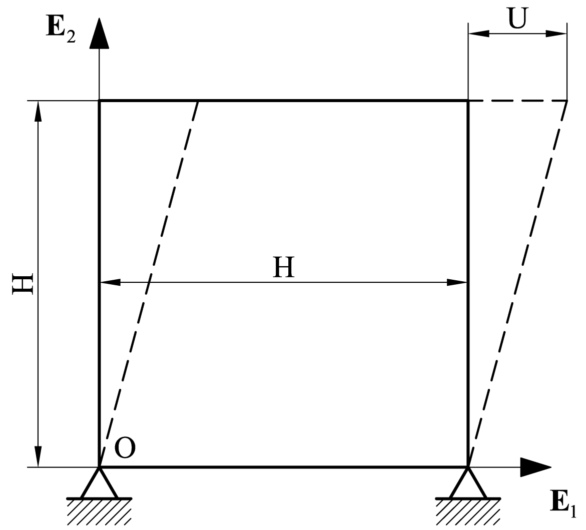
ami megegyezik a (4.6) szerinti konstitutív egyenlettel.

6. ANALITIKUS SZÁMÍTÁSOK

Ebben a fejezetben az egyszerű nyírás példáján (`simple shear`) és egy zárt ciklusú terhelés esetén nyert analitikus eredmények ismertetése történik a (4.5) szerinti hipoelasztikus anyagmodellre vonatkozólag, különböző objektív feszültség-sebességek alkalmazása esetén.

6.1. EGYSZERŰ NYÍRÁS

Az egyszerű nyírás estén vizsgált geometriát szemlélteti a 9. ábra. Az eredetileg H élhosszúságú kocka felső lapját az $\mathbf{E}_1$ irányban elmozdítjuk U értékkel úgy, hogy közben az $\mathbf{E}_2$ és $\mathbf{E}_3$ irányú mozgásokat gátoljuk. A deformáció homogénnek feltételezett.



9. ábra: Az egyszerű nyírás példája.

A fajlagos szögtorzulás értéke:

$$\gamma = \mathrm{U}/\mathrm{H}\,. \tag{6.1}$$

Egyszerű nyírás esetére a mozgásfüggvény:

$$\begin{aligned} x_1 &= X_1 + \gamma(t) X_2, \\ x_2 &= X_2, \\ x_3 &= X_3. \end{aligned} \tag{6.2}$$

Mivel az azonosító és a pillanatnyi konfiguráció bázisvektorai egybeesők, így a továbbiakban mind az azonosító, mind a pillanatnyi konfigurációhoz köthető tenzorok leírása az azonosító konfiguráció bázisvektoraival történik.

Az alakváltozási gradiens számítása:

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial x_\mathrm{a}}{\partial X_\mathrm{A}} \mathbf{e}_\mathrm{a} \otimes \mathbf{E}_\mathrm{A}, \qquad [\mathbf{F}] = \begin{bmatrix} 1 & \gamma(t) & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{6.3}$$

illetve a kezdeti konfiguráció bázisaival kifejezve:

$$\mathbf{F} = \boldsymbol{\delta} + \gamma(t)\mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_2. \tag{6.4}$$

A térfogatváltozás mértéke (*Jacobi*-determináns):

$$J = \det(\mathbf{F}) = 1. \tag{6.5}$$

Az alakváltozási gradiens idő szerinti deriváltja, illetve inverze:

$$\dot{\mathbf{F}} = \dot{\gamma}\mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_2, \qquad [\dot{\mathbf{F}}] = \begin{bmatrix} 0 & \dot{\gamma} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{6.6}$$

$$\mathbf{F}^{-1} = \boldsymbol{\delta} - \gamma\mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_2, \qquad [\mathbf{F}^{-1}] = \begin{bmatrix} 1 & -\gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{6.7}$$

Az Euler-féle sebességmező gradiens tenzor:

$$\mathbf{l} = \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1} = \dot{\gamma}\mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_2, \qquad [\mathbf{l}] = \begin{bmatrix} 0 & \dot{\gamma} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{6.8}$$

Az alakváltozás-sebesség tenzor és az örvénytenzor számítása:

$$\mathbf{d} = \frac{1}{2}(\mathbf{l} + \mathbf{l}^\mathrm{T}) = \frac{1}{2}\dot{\gamma}(\mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_2 \otimes \mathbf{E}_1), \qquad [\mathbf{d}] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\dot{\gamma} & 0 \\ \frac{1}{2}\dot{\gamma} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{6.9}$$

$$\mathbf{w} = \frac{1}{2}(\mathbf{l} - \mathbf{l}^\mathrm{T}) = \frac{1}{2}\dot{\gamma}(\mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_2 \otimes \mathbf{E}_1), \qquad [\mathbf{w}] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\dot{\gamma} & 0 \\ -\frac{1}{2}\dot{\gamma} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{6.10}$$

A baloldali *Cauchy-Green*–féle deformációs tenzor:

$$\mathbf{b} = \mathbf{F}\mathbf{F}^\mathrm{T} = \boldsymbol{\delta} + \gamma^2\mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_1 + \gamma(\mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_2 \otimes \mathbf{E}_1), \qquad [\mathbf{b}] = \begin{bmatrix} 1+\gamma^2 & \gamma & 0 \\ \gamma & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{6.11}$$

b sajátértékeinek meghatározása (3.11) segítségével:

$$\chi_1 = \frac{1}{2}\left(2+\gamma^2+\gamma\sqrt{4+\gamma^2}\right), \quad \chi_2 = \frac{1}{2}\left(2+\gamma^2-\gamma\sqrt{4+\gamma^2}\right), \quad \chi_3 = 1 . \tag{6.12}$$

A bázis-tenzorok (sajátprojekciók) meghatározása (3.55) felhasználásával:

$$\begin{aligned}
\mathbf{p}_1 &= \left[\mathbf{b}-\chi_2\boldsymbol{\delta}+\left(\chi_2-1\right)\mathbf{E}_3\otimes\mathbf{E}_3\right]/\left(\chi_1-\chi_2\right),\\
\mathbf{p}_2 &= \left[\mathbf{b}-\chi_1\boldsymbol{\delta}+\left(\chi_1-1\right)\mathbf{E}_3\otimes\mathbf{E}_3\right]/\left(\chi_2-\chi_1\right),\\
\mathbf{p}_3 &= \mathbf{E}_3\otimes\mathbf{E}_3 .
\end{aligned} \tag{6.13}$$

A spintenzorok (3.121)-(3.125) szerinti képleteibe (6.9), (6.10), (6.12) és (6.13) behelyettesítésével egy általános összefüggést kapunk a különböző spintenzorok számítására, egyszerű nyírás esetén:

$$\boldsymbol{\Omega}^* = \frac{1}{2}\dot{\gamma}\left[1+\frac{f_{12}^*\gamma}{\sqrt{4+\gamma^2}}\right]\left(\mathbf{E}_1\otimes\mathbf{E}_2-\mathbf{E}_2\otimes\mathbf{E}_1\right), \tag{6.14}$$

ahol $(3.120)_2$ szerint

$$f_{12}^* = f^*\left(\frac{\chi_1}{\chi_2}\right). \tag{6.15}$$

A (6.14) szerinti összefüggés $\bar{\boldsymbol{\Omega}}^{\mathrm{L}}$ számítására abban az esetben érvényes, ha a szögletes zárójelből az 1-est elhagyjuk ($\bar{\boldsymbol{\Omega}}^{\mathrm{L}}$ a *Lagrange*-féle triád spintenzorának $\mathbf{R}$-rel történő elforgatásával nyert *Euler*-féle mennyiség).

Az előzőekben az objektív feszültség-sebességek számításához szükséges kinematikai mennyiségek meghatározása történt. A következőkben a különböző objektív feszültség-sebességek alkalmazása esetén számított feszültségkomponensek ismertetése történik. Mivel az egyszerű nyírás során a terhelés (elmozdulás terhelés) az 1-2 síkban lép fel, emiatt a τ_{13} és τ_{23} feszültségkomponensek zérus értékűek minden esetben. A *Kirchhoff*-féle feszültségi tenzor mátrixa:

$$\left[\boldsymbol{\tau}\right] = \begin{bmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & 0 \\ \tau_{12} & \tau_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \tau_{33} \end{bmatrix}. \tag{6.16}$$

Mivel (6.5) szerint a *Jacobi*-determináns az egyszerű nyírás esetén $J=1$ marad a deformáció során, így a *Cauchy*- és *Kirchhoff*-féle feszültségkomponensek azonosak.

Egyszerű nyírás esetén $\mathrm{tr}\left(\mathbf{d}\right)=0$, emiatt a (4.5) szerinti hipoelaszikus konstitutív egyenlet az alábbi alakra egyszerűsödik:

$$\overset{\circ}{\boldsymbol{\tau}}{}^* = 2\mu\mathbf{d} . \tag{6.17}$$

6.1.1. ANALITIKUS MEGOLDÁS A TRUESDELL-FÉLE FESZÜLTSÉG-SEBESSÉG HASZNÁLATA ESETÉN

Az (3.133) szerinti *Truesdell*-féle feszültségsebességet behelyettesítve a (6.17) szerinti konstitutív egyenletbe (figyelembe véve, hogy jelen esetben $\boldsymbol{\tau} \equiv \boldsymbol{\sigma}$, valamint $\operatorname{tr}(\mathbf{d}) = 0$):

$$\dot{\boldsymbol{\tau}} - \boldsymbol{\tau}\mathbf{l}^{\mathrm{T}} - \mathbf{l}\boldsymbol{\tau} = 2\mu\mathbf{d}. \tag{6.18}$$

Felhasználva $\mathbf{l}$-re és $\mathbf{d}$-re kapott (6.8) és (6.9) szerinti összefüggéseket, a feszültségkomponensekre az alábbi differenciálegyenlet rendszer adódik:

$$\begin{aligned}
&\dot{\tau}_{11} - 2\tau_{12}\dot{\gamma} = 0,\\
&\dot{\tau}_{12} - \tau_{22}\dot{\gamma} = \mu\dot{\gamma},\\
&\dot{\tau}_{22} = 0,\\
&\dot{\tau}_{33} = 0.
\end{aligned} \tag{6.19}$$

Átírva a differenciálegyenlet-rendszert:

$$\frac{\mathrm{d}\tau_{11}}{\mathrm{d}\gamma} - 2\tau_{12} = 0, \quad \frac{\mathrm{d}\tau_{12}}{\mathrm{d}\gamma} - \tau_{22} = \mu, \quad \frac{\mathrm{d}\tau_{22}}{\mathrm{d}\gamma} = 0, \quad \frac{\mathrm{d}\tau_{33}}{\mathrm{d}\gamma} = 0. \tag{6.20}$$

A $\boldsymbol{\tau}(\gamma = 0) = \mathbf{0}$ kezdeti feltétel figyelembe vételével a differenciálegyenlet rendszer megoldása:

$$\tau_{11} = \mu\gamma^2, \qquad \tau_{12} = \mu\gamma, \qquad \tau_{22} = 0, \qquad \tau_{33} = 0. \tag{6.21}$$

6.1.2. ANALITIKUS MEGOLDÁS AZ OLDROYD-FÉLE FESZÜLTSÉG-SEBESSÉG HASZNÁLATA ESETÉN

Felhasználva a (3.137) szerinti azonosságot és figyelembe véve, hogy jelen esetben $J = 1$, az *Oldroyd*-féle feszültség-sebesség használata esetén az analitikus megoldások megegyeznek a *Trusdell*-féle feszültség-sebesség alkalmazása esetén számított (6.21) szerinti megoldásokkal:

$$\tau_{11} = \mu\gamma^2, \qquad \tau_{12} = \mu\gamma, \qquad \tau_{22} = 0, \qquad \tau_{33} = 0. \tag{6.22}$$

6.1.3. ANALITIKUS MEGOLDÁS A COTTER-RIVLIN-FÉLE FESZÜLTSÉG-SEBESSÉG HASZNÁLATA ESETÉN

Alkalmazva az (3.135) szerinti összefüggést a (6.17) szerinti anyagtörvényben, megkapjuk a Cotter-Rivlin-féle feszültség-sebesség használata esetén érvényes hipoelasztikus konstitutív egyenletet:

$$\dot{\boldsymbol{\tau}} + \boldsymbol{\tau}\mathbf{l} + \mathbf{l}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\tau} = 2\mu\mathbf{d}. \tag{6.23}$$

A $\mathbf{d}$-re, illetve $\mathbf{l}$-re kapott összefüggések behelyettesítése után a feszültségkomponensekre adódó differenciálegyenlet-rendszer a következő:

$$\begin{aligned}
&\dot{\tau}_{11} = 0, \\
&\dot{\tau}_{12} + \tau_{11}\dot{\gamma} = \mu\dot{\gamma}, \\
&\dot{\tau}_{22} + 2\tau_{12}\dot{\gamma} = 0, \\
&\dot{\tau}_{33} = 0.
\end{aligned} \tag{6.24}$$

Átírva a differenciálegyenlet-rendszert:

$$\frac{\mathrm{d}\tau_{11}}{\mathrm{d}\gamma} = 0, \quad \frac{\mathrm{d}\tau_{12}}{\mathrm{d}\gamma} + \tau_{11} = \mu, \quad \frac{\mathrm{d}\tau_{22}}{\mathrm{d}\gamma} + 2\tau_{12} = 0, \quad \frac{\mathrm{d}\tau_{33}}{\mathrm{d}\gamma} = 0. \tag{6.25}$$

A $\boldsymbol{\tau}(\gamma = 0) = \mathbf{0}$ kezdeti feltétel figyelembe vételével a differenciálegyenlet-rendszer megoldása:

$$\tau_{11} = 0, \qquad \tau_{12} = \mu\gamma, \qquad \tau_{22} = -\mu\gamma^2, \qquad \tau_{33} = 0. \tag{6.26}$$

6.1.4. Analitikus megoldás a Durban-Baruch-féle feszültség-sebesség használata esetén

Az (3.138) szerinti feszültség-sebességet a (6.17) konstitutív egyenletbe helyettesítve és felhasználva, hogy $\mathrm{tr}(\mathbf{d}) = 0$, valamint $\boldsymbol{\tau} \equiv \boldsymbol{\sigma}$, megkapjuk a *Durban-Baruch*-féle feszültség-sebesség használata esetén érvényes hipoelasztikus konstitutív egyenletet:

$$\dot{\boldsymbol{\tau}} + \boldsymbol{\tau}\left(\mathbf{w} - \tfrac{1}{2}\mathbf{d}\right) - \left(\mathbf{w} + \tfrac{1}{2}\mathbf{d}\right)\boldsymbol{\tau} = 2\mu\mathbf{d}\,. \tag{6.27}$$

$\mathbf{w}$-re, $\mathbf{d}$-re kapott összefüggések behelyettesítésével a feszültségkomponensekre adódó differenciálegyenlet-rendszer:

$$\begin{aligned}
&\dot{\tau}_{11} - \tfrac{3}{2}\tau_{12}\dot{\gamma} = 0, \\
&\dot{\tau}_{12} + \tfrac{1}{4}\tau_{11}\dot{\gamma} - \tfrac{3}{4}\tau_{22}\dot{\gamma} = \mu\dot{\gamma}, \\
&\dot{\tau}_{22} + \tfrac{1}{2}\tau_{12}\dot{\gamma} = 0, \\
&\dot{\tau}_{33} = 0.
\end{aligned} \tag{6.28}$$

Átírva a differenciálegyenlet-rendszert:

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}\tau_{11}}{\mathrm{d}\gamma} - \frac{3}{2}\tau_{12} = 0, \\
&\frac{\mathrm{d}\tau_{12}}{\mathrm{d}\gamma} + \frac{1}{4}\tau_{11} - \frac{3}{4}\tau_{22} = \mu, \\
&\frac{\mathrm{d}\tau_{22}}{\mathrm{d}\gamma} + \frac{1}{2}\tau_{12} = 0, \\
&\frac{\mathrm{d}\tau_{33}}{\mathrm{d}\gamma} = 0.
\end{aligned} \tag{6.29}$$

A $\boldsymbol{\tau}(\gamma=0)=\mathbf{0}$ kezdeti feltétel figyelembevételével a differenciálegyenlet rendszer megoldása:

$$\begin{aligned}
\tau_{11} &= 2\mu\left[1-\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\gamma\right)\right],\\
\tau_{12} &= \frac{2}{\sqrt{3}}\mu\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\gamma\right),\\
\tau_{22} &= \frac{2}{3}\mu\left[\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\gamma\right)-1\right],\\
\tau_{33} &= 0.
\end{aligned} \tag{6.30}$$

6.1.5. Analitikus megoldás a Zaremba-Jaumann-Noll-féle feszültség-sebesség használata esetén

Az (3.141) szerinti *Zaremba-Jaumann-Noll*-féle feszültségsebességet a (6.17) konstitutív egyenletbe helyettesítve adódik:

$$\dot{\boldsymbol{\tau}}+\boldsymbol{\tau}\mathbf{w}-\mathbf{w}\boldsymbol{\tau}=2\mu\mathbf{d}\,. \tag{6.31}$$

Felhasználva $\mathbf{w}$-re és $\mathbf{d}$-re kapott összefüggéseket, a feszültségkomponensekre adódó differenciálegyenlet-rendszer:

$$\begin{aligned}
&\dot{\tau}_{11}-\tau_{12}\dot{\gamma}=0,\\
&\dot{\tau}_{12}+\tfrac{1}{2}(\tau_{11}-\tau_{22})\dot{\gamma}=\mu\dot{\gamma},\\
&\dot{\tau}_{22}+\tau_{12}\dot{\gamma}=0,\\
&\dot{\tau}_{33}=0.
\end{aligned} \tag{6.32}$$

Átírva a differenciálegyenlet-rendszert:

$$\frac{\mathrm{d}\tau_{11}}{\mathrm{d}\gamma}-\tau_{12}=0,\quad \frac{\mathrm{d}\tau_{12}}{\mathrm{d}\gamma}+\frac{1}{2}(\tau_{11}-\tau_{22})=\mu,\quad \frac{\mathrm{d}\tau_{22}}{\mathrm{d}\gamma}+\tau_{12}=0,\quad \frac{\mathrm{d}\tau_{33}}{\mathrm{d}\gamma}=0. \tag{6.33}$$

A $\boldsymbol{\tau}(\gamma=0)=\mathbf{0}$ kezdeti feltétel figyelembevételével a differenciálegyenlet-rendszer megoldása:

$$\begin{aligned}
\tau_{11} &= \mu(1-\cos\gamma),\\
\tau_{12} &= \mu\sin\gamma,\\
\tau_{22} &= \mu(\cos\gamma-1),\\
\tau_{33} &= 0.
\end{aligned} \tag{6.34}$$

6.1.6. Analitikus megoldás a Green-McInnis-Naghdi-féle feszültség-sebesség használata esetén

A (6.15) szerinti összefüggés a *Green-McInnis-Naghdi*-féle derivált esetén (felhasználva $(3.122)_1$-t):

$$f_{12}^{\mathrm{GMN}} = \frac{\sqrt{\chi_2} - \sqrt{\chi_1}}{\sqrt{\chi_2} + \sqrt{\chi_1}}. \tag{6.35}$$

Felhasználva a $\mathbf{b}$ sajátértékeire kapott (6.12) összefüggéseket az alábbi alakra egyszerűsödik:

$$f_{12}^{\mathrm{GMN}} = -\frac{\gamma}{\sqrt{4+\gamma^2}}. \tag{6.36}$$

Behelyettesítve (6.14)-be, elvégezve az egyszerűsítéseket megkapjuk a *Green-McInnis-Naghdi*-féle derivált esetén érvényes spintenzort:

$$\boldsymbol{\Omega}^{\mathrm{GMN}} = \frac{2\dot{\gamma}}{4+\gamma^2}\left(\mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_2 \otimes \mathbf{E}_1\right). \tag{6.37}$$

A konstitutív egyenlet alakja:

$$\dot{\boldsymbol{\tau}} + \boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\Omega}^{\mathrm{GMN}} - \boldsymbol{\Omega}^{\mathrm{GMN}}\boldsymbol{\tau} = 2\mu\mathbf{d}. \tag{6.38}$$

Felhasználva a spintenzorra kapott (6.37) összefüggést a feszültségkomponensekre adódó differenciálegyenlet-rendszer a következő:

$$\begin{aligned}
&\dot{\tau}_{11} - \frac{4\tau_{12}}{4+\gamma^2}\dot{\gamma} = 0,\\
&\dot{\tau}_{12} + \frac{2\left(\tau_{11}-\tau_{22}\right)}{4+\gamma^2}\dot{\gamma} = \mu\dot{\gamma},\\
&\dot{\tau}_{22} + \frac{4\tau_{12}}{4+\gamma^2}\dot{\gamma} = 0,\\
&\dot{\tau}_{33} = 0.
\end{aligned} \tag{6.39}$$

Átírva a differenciálegyenlet-rendszert:

$$\frac{\mathrm{d}\tau_{11}}{\mathrm{d}\gamma} - \frac{4\tau_{12}}{4+\gamma^2} = 0, \quad \frac{\mathrm{d}\tau_{12}}{\mathrm{d}\gamma} + \frac{2\left(\tau_{11}-\tau_{22}\right)}{4+\gamma^2} = \mu, \quad \frac{\mathrm{d}\tau_{22}}{\mathrm{d}\gamma} + \frac{4\tau_{12}}{4+\gamma^2} = 0, \quad \frac{\mathrm{d}\tau_{33}}{\mathrm{d}\gamma} = 0. \tag{6.40}$$

Legyen $\gamma = 2\tan\beta$. Ekkor az alábbi differenciálási szabályok érvényesülnek:

$$\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}\beta} = 2 + 2\tan^2\beta, \tag{6.41}$$

$$\frac{\mathrm{d}(\,)}{\mathrm{d}\beta} = \frac{\mathrm{d}(\,)}{\mathrm{d}\gamma}\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}\beta}, \quad \rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}(\,)}{\mathrm{d}\gamma} = \frac{\mathrm{d}(\,)}{\mathrm{d}\beta}\frac{1}{2+2\tan^2\beta}. \tag{6.42}$$

Elvégezve a behelyettesítéseket és az átalakításokat (6.40)-en, valamint felhasználva az $1+\tan^2\beta = 1/\cos^2\beta$ azonosságot az alábbi differenciálegyenlet-rendszer adódik:

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}\tau_{11}}{\mathrm{d}\beta} - 2\tau_{12} = 0,\\
&\frac{\mathrm{d}\tau_{12}}{\mathrm{d}\beta} + \tau_{11} - \tau_{22} = 2\mu\frac{1}{\cos^2\beta},\\
&\frac{\mathrm{d}\tau_{22}}{\mathrm{d}\beta} + 2\tau_{12} = 0,\\
&\frac{\mathrm{d}\tau_{33}}{\mathrm{d}\beta} = 0.
\end{aligned} \tag{6.43}$$

A megoldandó differenciálegyenlet-rendszer tovább egyszerűsíthető $\tau_{11} = -\tau_{22}$ észrevételével az alábbi alakra:

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}\tau_{11}}{\mathrm{d}\beta} - 2\tau_{12} = 0,\\
&\frac{\mathrm{d}\tau_{12}}{\mathrm{d}\beta} + 2\tau_{11} = 2\mu\frac{1}{\cos^2\beta}.
\end{aligned} \tag{6.44}$$

A $\tau_{11}(\beta=0)=0$, $\tau_{12}(\beta=0)=0$ kezdeti feltétel figyelembevételével a differenciálegyenlet-rendszer megoldása:

$$\begin{aligned}
&\tau_{11} = 4\mu\left(\cos 2\beta \cdot \ln\cos\beta + \beta\sin 2\beta - \sin^2\beta\right),\\
&\tau_{12} = 2\mu\cos 2\beta\left(2\beta - \tan\beta - 2\ln\cos\beta\cdot\tan 2\beta\right),\\
&\tau_{22} = -\tau_{11},\\
&\tau_{33} = 0.
\end{aligned} \tag{6.45}$$

Visszaírva a $\beta = \arctan(\gamma/2)$ összefüggést és elvégezve az egyszerűsítéseket, megkapjuk a keresett megoldásokat:

$$\begin{aligned}
&\tau_{11} = \frac{2\mu}{4+\gamma^2}\left[8\gamma\arctan\left(\frac{\gamma}{2}\right) + \left(4-\gamma^2\right)\ln\left(\frac{4}{4+\gamma^2}\right) - 2\gamma^2\right],\\
&\tau_{12} = \frac{4\mu}{4+\gamma^2}\left[\left(4-\gamma^2\right)\arctan\left(\frac{\gamma}{2}\right) - 2\gamma\ln\left(\frac{4}{4+\gamma^2}\right) + \frac{\gamma^3}{4} - \gamma\right],\\
&\tau_{22} = -\tau_{11},\\
&\tau_{33} = 0.
\end{aligned} \tag{6.46}$$

6.1.7. ANALITIKUS MEGOLDÁS AZ EULER-FÉLE TRIÁD SPINTENZORÁN ALAPULÓ FESZÜLTSÉG-SEBESSÉG HASZNÁLATA ESETÉN

A (6.15) szerinti összefüggés az *Euler*-féle triád spintenzorán alapuló derivált esetén (felhasználva $(3.123)_1$-t):

$$f_{12}^{\mathrm{E}} = \frac{\chi_2 + \chi_1}{\chi_2 - \chi_1}. \tag{6.47}$$

Felhasználva a (6.14) szerinti összefüggésben, a spintenzorra adódó összefüggés:

$$\mathbf{\Omega}^{\mathrm{E}} = \frac{\dot{\gamma}}{4+\gamma^2}\left(\mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_2 \otimes \mathbf{E}_1\right). \tag{6.48}$$

A konstitutív egyenlet alakja:

$$\dot{\boldsymbol{\tau}} + \boldsymbol{\tau}\mathbf{\Omega}^{\mathrm{E}} - \mathbf{\Omega}^{\mathrm{E}}\boldsymbol{\tau} = 2\mu\mathbf{d}. \tag{6.49}$$

Behelyettesítve $\mathbf{\Omega}^{\mathrm{E}}$-re kapott (6.48) szerinti összefüggést, a feszültségkomponensekre adódó differeneciálegyenlet-rendszer:

$$\begin{aligned}
&\dot{\tau}_{11} - \frac{2\tau_{12}}{4+\gamma^2}\dot{\gamma} = 0,\\
&\dot{\tau}_{12} + \frac{\left(\tau_{11} - \tau_{22}\right)}{4+\gamma^2}\dot{\gamma} = \mu\dot{\gamma},\\
&\dot{\tau}_{22} + \frac{2\tau_{12}}{4+\gamma^2}\dot{\gamma} = 0,\\
&\dot{\tau}_{33} = 0.
\end{aligned} \tag{6.50}$$

Átírva a differenciálegyenlet-rendszert:

$$\frac{\mathrm{d}\tau_{11}}{\mathrm{d}\gamma} - \frac{2\tau_{12}}{4+\gamma^2} = 0, \quad \frac{\mathrm{d}\tau_{12}}{\mathrm{d}\gamma} + \frac{\left(\tau_{11} - \tau_{22}\right)}{4+\gamma^2} = \mu, \quad \frac{\mathrm{d}\tau_{22}}{\mathrm{d}\gamma} + \frac{2\tau_{12}}{4+\gamma^2} = 0, \quad \frac{\mathrm{d}\tau_{33}}{\mathrm{d}\gamma} = 0. \tag{6.51}$$

Felhasználva(6.41), (6.42) szerinti átalakításokat, az alábbi differenciálegyenlet-rendszer adódik:

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}\tau_{11}}{\mathrm{d}\beta} - \tau_{12} = 0,\\
&\frac{\mathrm{d}\tau_{12}}{\mathrm{d}\beta} + \frac{1}{2}\left(\tau_{11} - \tau_{22}\right) = 2\mu\frac{1}{\cos^2\beta},\\
&\frac{\mathrm{d}\tau_{22}}{\mathrm{d}\beta} + \tau_{12} = 0,\\
&\frac{\mathrm{d}\tau_{33}}{\mathrm{d}\beta} = 0.
\end{aligned} \tag{6.52}$$

A megoldandó differenciálegyenlet-rendszer tovább egyszerűsíthető $\tau_{11} = -\tau_{22}$ észrevételével az alábbi alakra:

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}\tau_{11}}{\mathrm{d}\beta} - \tau_{12} = 0, \\ &\frac{\mathrm{d}\tau_{12}}{\mathrm{d}\beta} + \tau_{11} = 2\mu \frac{1}{\cos^2 \beta}. \end{aligned} \tag{6.53}$$

A $\tau_{11}(\beta = 0) = 0$, $\tau_{12}(\beta = 0) = 0$ kezdeti feltétel figyelembevételével a differenciálegyenlet-rendszer megoldása:

$$\begin{aligned} &\tau_{11} = 2\mu \left(\cos\beta + \ln\left(\frac{1+\sin\beta}{\cos\beta} \right) \sin\beta - 1 \right), \\ &\tau_{12} = 2\mu \left(\tan\beta - \sin\beta + \ln\left(\frac{1+\sin\beta}{\cos\beta} \right) \cos\beta \right), \\ &\tau_{22} = -\tau_{11}, \\ &\tau_{33} = 0. \end{aligned} \tag{6.54}$$

Visszaírva a $\beta = \arctan(\gamma/2)$ összefüggést és elvégezve az egyszerűsítéseket, megkapjuk a keresett megoldásokat:

$$\begin{aligned} &\tau_{11} = \frac{2\mu}{\sqrt{4+\gamma^2}} \left(2 - \gamma \ln\left(\frac{2}{\sqrt{4+\gamma^2} + \gamma} \right) - \sqrt{4+\gamma^2} \right), \\ &\tau_{12} = \frac{\mu}{\sqrt{4+\gamma^2}} \left(\gamma\left(\sqrt{4+\gamma^2} - 2 \right) - 4\ln\left(\frac{2}{\sqrt{4+\gamma^2} + \gamma} \right) \right), \\ &\tau_{22} = -\tau_{11}, \\ &\tau_{33} = 0. \end{aligned} \tag{6.55}$$

6.1.8. Analitikus megoldás a Lagrange-féle triád spintenzorán alapuló feszültség-sebesség használata esetén

Fontos megjegyezni, hogy az (6.17) szerinti konstitutív egyenletben nem az azonosító konfiguráción értelmezett $\mathbf{\Omega}^{\mathrm{L}}$ mennyiség használata történik, hanem ennek a pillanatnyi konfigurációra forgatott értéke $\bar{\mathbf{\Omega}}^{\mathrm{L}} = \mathbf{R}\mathbf{\Omega}^{\mathrm{L}}\mathbf{R}^{\mathrm{T}}$.

A (6.15) szerinti spinfüggvény jelen esetben:

$$f_{12}^{\mathrm{L}} = \frac{2\sqrt{\chi_2 \chi_1}}{\chi_2 - \chi_1}. \tag{6.56}$$

$\bar{\mathbf{\Omega}}^{\mathrm{L}}$ számítására érvényes összefüggés (azonos (6.14) szerinti összefüggéssel, ha a szögletes zárójelen belüli 1-est elhagyjuk):

$$\bar{\mathbf{\Omega}}^{\mathrm{L}} = \frac{1}{2}\dot{\gamma}\left[\frac{f_{12}^{\mathrm{L}}\gamma}{\sqrt{4+\gamma^2}}\right]\left(\mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_2 \otimes \mathbf{E}_1\right). \tag{6.57}$$

Elvégezve a behelyettesítéseket, és az egyszerűsítéseket, a spintenzorra adódó összefüggés:

$$\bar{\mathbf{\Omega}}^{\mathrm{L}} = -\frac{\dot{\gamma}}{4+\gamma^2}\left(\mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_2 \otimes \mathbf{E}_1\right). \tag{6.58}$$

A *Lagrange*-féle triád spintenzorán alapuló objektív derivált alkalmazása esetén érvényes hipoelasztikus konstitutív egyenlet az egyszerű nyírás esetén:

$$\dot{\boldsymbol{\tau}} + \boldsymbol{\tau}\bar{\mathbf{\Omega}}^{\mathrm{L}} - \bar{\mathbf{\Omega}}^{\mathrm{L}}\boldsymbol{\tau} = 2\mu\mathbf{d}. \tag{6.59}$$

A feszültségkomponensekre adódó differenciálegyenlet-rendszer:

$$\begin{aligned}
&\dot{\tau}_{11} + \frac{2\tau_{12}}{4+\gamma^2}\dot{\gamma} = 0,\\
&\dot{\tau}_{12} - \frac{\left(\tau_{11}-\tau_{22}\right)}{4+\gamma^2}\dot{\gamma} = \mu\dot{\gamma},\\
&\dot{\tau}_{22} - \frac{2\tau_{12}}{4+\gamma^2}\dot{\gamma} = 0,\\
&\dot{\tau}_{33} = 0.
\end{aligned} \tag{6.60}$$

(6.60)-t összehasonlítva (6.50)-tel megállapítható, hogy a differenciálegyenlet-rendszer azonos amennyiben (6.60)-ben a τ_{11} és τ_{22} változókat felcseréljük. Ennek figyelembevételével a megoldások:

$$\begin{aligned}
&\tau_{11} = -\frac{2\mu}{\sqrt{4+\gamma^2}}\left(2-\gamma\ln\left(\frac{2}{\sqrt{4+\gamma^2}+\gamma}\right)-\sqrt{4+\gamma^2}\right),\\
&\tau_{12} = \frac{\mu}{\sqrt{4+\gamma^2}}\left(\gamma\left(\sqrt{4+\gamma^2}-2\right)-4\ln\left(\frac{2}{\sqrt{4+\gamma^2}+\gamma}\right)\right),\\
&\tau_{22} = -\tau_{11},\\
&\tau_{33} = 0.
\end{aligned} \tag{6.61}$$

6.1.9. ANALITIKUS MEGOLDÁS A LOGARITMIKUS FESZÜLTSÉG-SEBESSÉG HASZNÁLATA ESETÉN

Mivel a (4.4) szerinti konstitutív egyenlet a logaritmikus feszültség-sebesség használata esetén integrálható, így az analitikus megoldás meghatározása az integrálással nyert (4.5) szerinti anyagegyenlet segítségével történik.

A pillanatnyi konfiguráción értelmezett *Hencky*-féle alakváltozási tenzor számítása (3.67) szerint történik:

$$\mathbf{h} = \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{1}{2} \ln \chi_\alpha \mathbf{p}_\alpha \,. \tag{6.62}$$

Felhasználva a (6.12), (6.13) összefüggéseket, a $\mathbf{h}$ -ra adódó összefüggés egyszerű nyírás esetén:

$$\begin{aligned} &\mathbf{h} = \frac{\ln \chi_1}{2(\chi_1 - \chi_2)} \left[\gamma^2 \left(\mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2 \otimes \mathbf{E}_2 \right) + 2\gamma \left(\mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_2 \otimes \mathbf{E}_1 \right) \right], \\ &\operatorname{tr}(\mathbf{h}) = 0. \end{aligned} \tag{6.63}$$

A (4.5) szerinti konstitutív egyenlet egyszerű az nyírás esetére:

$$\boldsymbol{\tau} = 2\mu \mathbf{h} \,. \tag{6.64}$$

Ennek alapján a megoldások:

$$\begin{aligned} \tau_{11} &= 2\mu \frac{\gamma^2 \ln \chi_1}{2(\chi_1 - \chi_2)} = \frac{\gamma\mu}{\sqrt{4+\gamma^2}} \ln\left(1 + \frac{1}{2}\gamma^2 + \frac{1}{2}\gamma\sqrt{4+\gamma^2}\right), \\ \tau_{12} &= 2\mu \frac{\gamma \ln \chi_1}{(\chi_1 - \chi_2)} = \frac{2}{\gamma}\tau_{11} = \frac{2\mu}{\sqrt{4+\gamma^2}} \ln\left(1 + \frac{1}{2}\gamma^2 + \frac{1}{2}\gamma\sqrt{4+\gamma^2}\right), \\ \tau_{22} &= -2\mu \frac{\gamma^2 \ln \chi_1}{2(\chi_1 - \chi_2)} = -\tau_{11} = \frac{\gamma\mu}{\sqrt{4+\gamma^2}} \ln\left(1 + \frac{1}{2}\gamma^2 + \frac{1}{2}\gamma\sqrt{4+\gamma^2}\right), \\ \tau_{33} &= 0. \end{aligned} \tag{6.65}$$

A spintenzor meghatározására szolgáló (6.14) összefüggésben f_{12}^* meghatározása jelen esetben $(3.125)_1$ szerint történik.

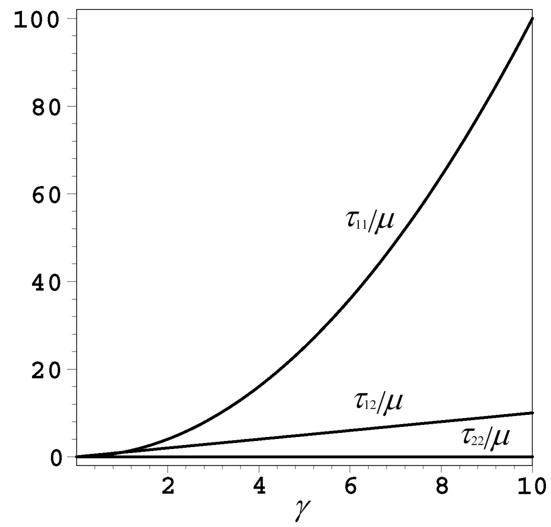
$$f_{12}^{\log} = \frac{\chi_2 + \chi_1}{\chi_2 - \chi_1} + \frac{2}{\ln(\chi_1/\chi_2)} \,. \tag{6.66}$$

Behelyettesítve (6.14)-be, megkapjuk a logaritmikus spintenzort egyszerű nyírás esetén:

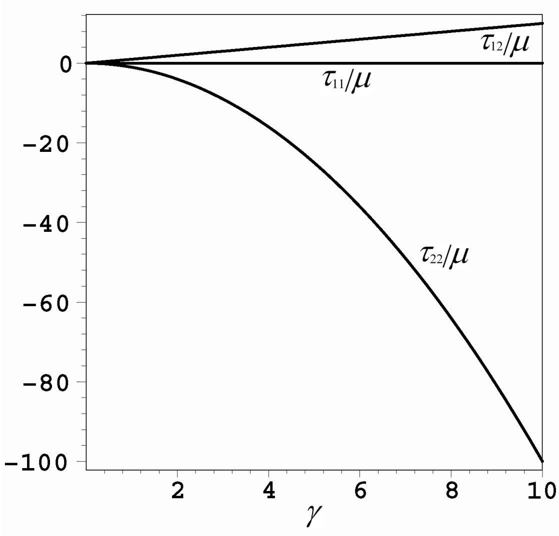
$$\boldsymbol{\Omega}^{\log} = \frac{\dot{\gamma}}{4} \left(\frac{4}{4+\gamma^2} + \frac{\gamma}{\sqrt{4+\gamma^2}\, \ln\left(\gamma/2 + \frac{1}{2}\sqrt{4+\gamma^2}\right)} \right) \left(\mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_2 \otimes \mathbf{E}_1 \right). \tag{6.67}$$

6.1.10. EREDMÉNYEK ÖSSZEHASONLÍTÁSA

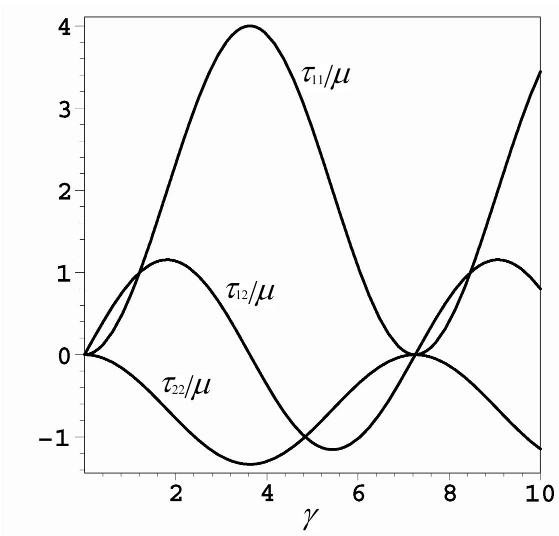
A különböző feszültség-sebességek alkalmazása esetén előállított analitikus megoldásokat szemléltetik a 10.-17. ábrák.



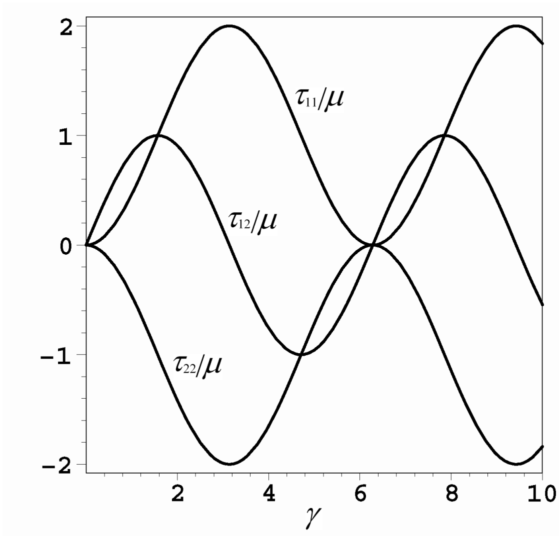
10. ábra: Analitikus megoldás a Truesdell-féle, és az Oldroyd-féle feszültség-sebesség esetén.



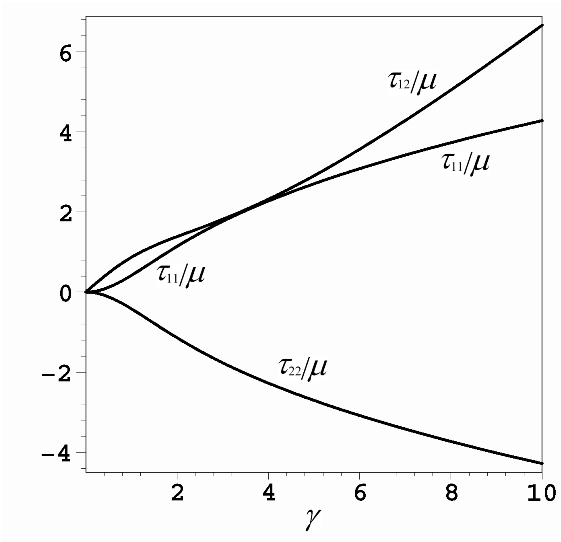
11. ábra: Analitikus megoldás a Cotter-Rivlin-féle feszültség-sebesség esetén.



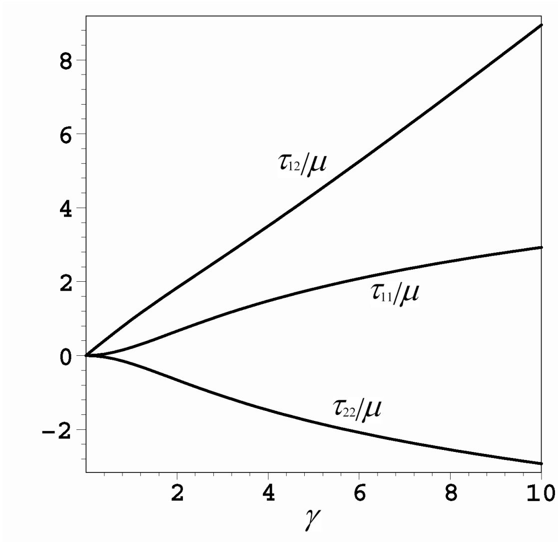
12. ábra: Analitikus megoldás a Durban-Baruch-féle feszültség-sebesség esetén.



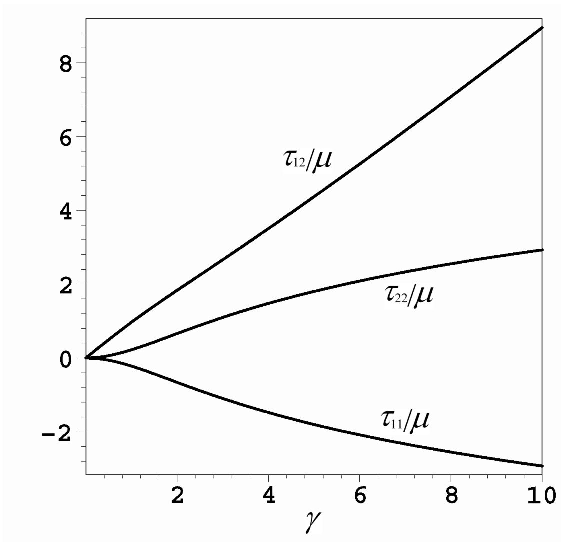
13. ábra: Analitikus megoldás a Zaremba-Jaumann-Noll-féle feszültség-sebesség esetén.



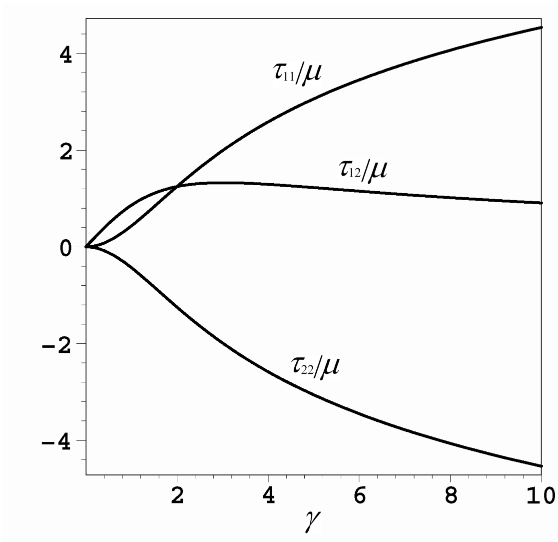
14. ábra: Analitikus megoldás a Green-McInnis-Naghdi-féle feszültség-sebesség esetén.



15. ábra: Analitikus megoldás az Euler-féle triád spintenzorán alapuló feszültség-sebesség esetén.

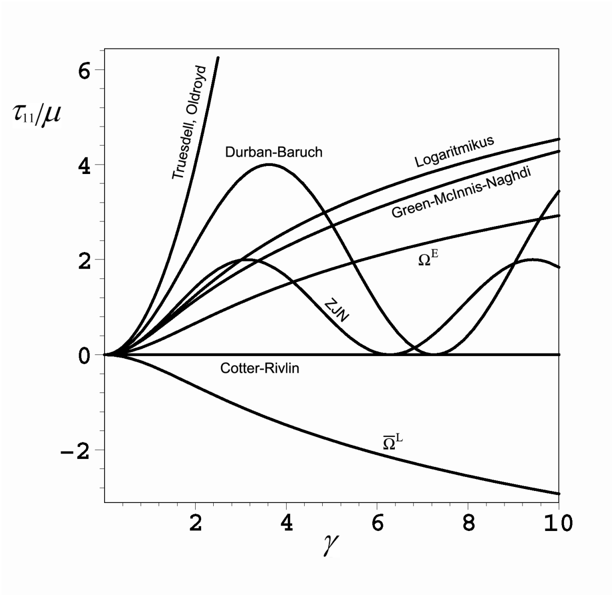


16. ábra: Analitikus megoldás a Lagrange-féle triád spintenzorán alapuló feszültség-sebesség esetén.

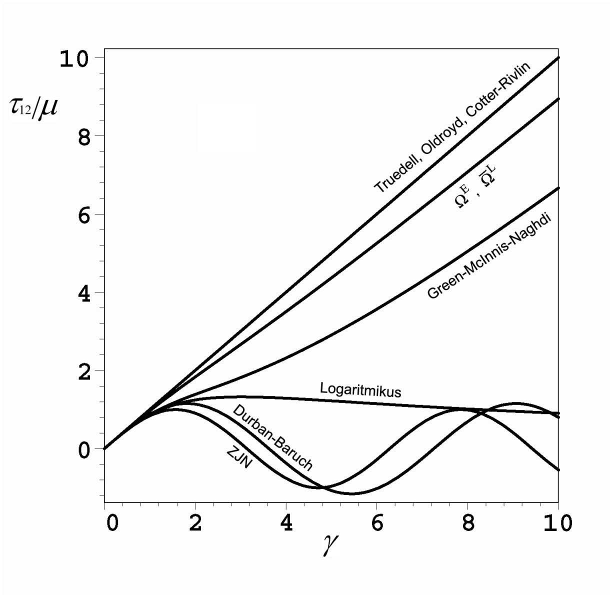


17. ábra: Analitikus megoldás a logaritmikus feszültség-sebesség esetén.

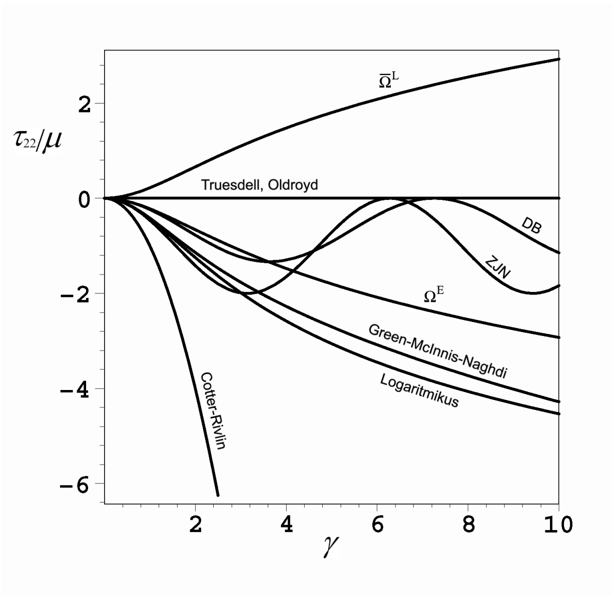
A vizsgált objektív feszültség-sebességek esetén a τ_{33} feszültség komponens minden esetben zérus értékű. Az együttforgó deriváltakhoz tartozó spintenzor, és az alakváltozás-sebesség tenzor felépítése miatt az egyszerű nyírás példáján tetszőleges objektív együttforgó derivált alkalmazása esetén a $\tau_{11} = -\tau_{22}$ egyenlőség fennáll. A *Truesdell*-féle és az *Oldroyd*-féle deriváltak esetén adódó feszültségek jelen esetben azonosak. A *Zaremba-Jaumann-Noll*-féle és a *Durban-Baruch*-féle objektív deriváltak alkalmazása esetén a megoldásban oszcilláló jelleg mutatkozik. A különböző objektív feszültség-sebességek esetén számított feszültségkomponenseket foglalják össze a 18-21. ábrák.



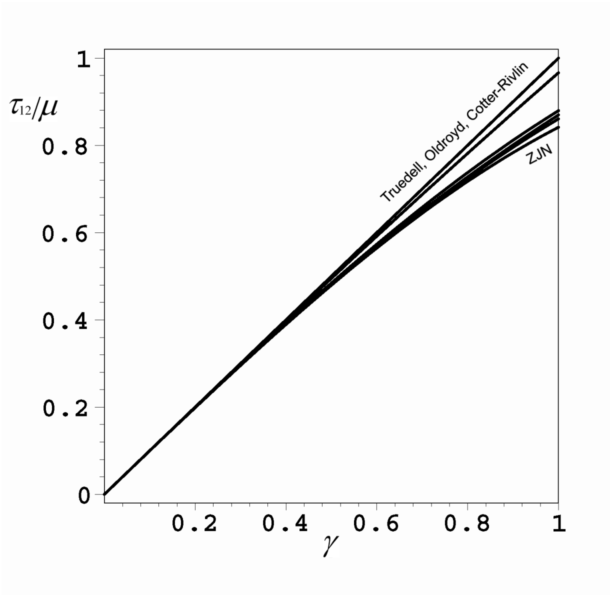
18. ábra: A $\boldsymbol{\tau}_{11}$ feszültségkomponensek összehasonlítása.



19. ábra: A $\boldsymbol{\tau}_{12}$ feszültségkomponensek összehasonlítása.



20. ábra: A $\boldsymbol{\tau}_{22}$ feszültségkomponensek összehasonlítása.



21. ábra: A $\boldsymbol{\tau}_{12}$ feszültségkomponensek összehasonlítása kisebb $\boldsymbol{\gamma}$ értékek esetén

A τ_{11} feszültség komponens a *Cotter-Rivlin-*, *Durban-Baruch-* és a *Zaremba-Jaumann-Noll*-féle deriváltak kivételével a γ növekedésével fokozatosan növekszik. Az $\overline{\mathbf{\Omega}}^{\mathrm{L}}$-n alapuló együttforgó derivált esetén a τ_{11} feszültségkomponens az $\mathbf{\Omega}^{\mathrm{E}}$-n alapuló objektív derivált esetén számított (-1)-szerese (és fordítva).

A τ_{12} feszültség komponens a *Durban-Baruch*-féle, *Zaremba-Jaumann-Noll*-féle és a logaritmikus deriváltak kivételével a deformáció előrehaladtával fokozatosan nőnek. A logaritmikus derivált esetén a τ_{12}-nek γ_{m}-nél maximuma van, amit szélsőérték kereséssel meghatározhatunk.

$$\tau_{12} = \frac{2\mu}{\sqrt{4+\gamma^2}} \ln\left(1+\frac{1}{2}\gamma^2+\frac{1}{2}\gamma\sqrt{4+\gamma^2}\right),$$

$$\frac{\mathrm{d}\tau_{12}}{\mathrm{d}\gamma} = 2\mu\frac{\gamma}{\left(4+\gamma^2\right)^{3/2}}\left[\frac{2\sqrt{4+\gamma^2}}{\gamma}-\ln\left(1+\frac{1}{2}\gamma^2+\frac{1}{2}\gamma\sqrt{4+\gamma^2}\right)\right]=0, \tag{6.68}$$

$$\frac{\mathrm{d}\tau_{12}}{\mathrm{d}\gamma}=0 \quad \Rightarrow \quad \gamma_{\mathrm{m}}=3,0177171.$$

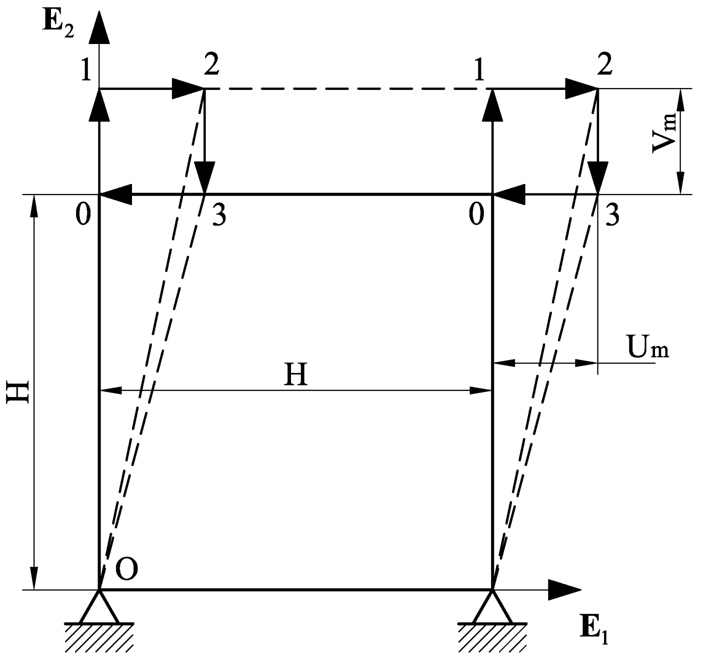
A γ_{m} helyen a feszültség maximuma:

$$\frac{\tau_{12}\left(\gamma_{\mathrm{m}}\right)}{\mu}=1,32548684. \tag{6.69}$$

A különböző objektív deriváltak esetén a nyírófeszültségek a deformáció kezdeti szakaszában közel azonosak. Ezt szemlélteti a 22. ábra, ahol a feszültségek a $\gamma = 0...1$ tartományban láthatók.

6.2. ZÁRT TERHELÉSI CIKLUS

A vizsgált geometria azonos az egyszerű nyírás esetével, eltérés a terhelésben jelentkezik. A zárt ciklusú terhelés húzás és egyszerű nyírás terhelések kombinációjából tevődik össze a következőképpen: Az 1. szakaszban nyújtás történik a 2-es irányban. A felső él a 2-es irányban az eredetileg H pozíciójából $H+V_{\mathrm{m}}$ helyzetbe kerül. Ezt követően a 2. szakaszban egyszerű nyírás következik az 1-es irányban. A felső él U_{m} értékkel az 1-es irányba mozdul. A 3. szakaszban nyomás történik a 2-es irányban. A felső él visszatér a H pozíciójába a 2-es irányban. Végül a 4. szakaszban egyszerű nyírás következik a negatív 1-es irányban. A terhelés végén a test visszatér a kiindulási állapotába. A 3-as irányban a deformáció gátolt.



22. ábra: A zárt terhelési folyamat esetén vizsgált geometria.

Mivel a terhelési folyamat végén a test visszatér a kiindulási – feszültségmentes – állapotába, emiatt a tisztán rugalmas alakváltozás miatt elvárás, hogy maradó feszültségek ne keletkezzenek. A zárt terhelési ciklusú példa vizsgálatával képet kaphatunk a különböző feszültség-sebességek alkalmazása esetén a maradó feszültségekről.

Az analitikus megoldások meghatározása a *Truesdell*-féle, *Oldroyd*-féle, *Cotter-Rivlin*-féle, *Zaremba-Jaumann-Noll*-féle, *Green-McInnis-Naghdi*-féle és logaritmikus feszültség sebességek esetére történik.

A következőkben az egymást követő szakaszokra érvényes kinematikai mennyiségek meghatározása történik.

Mivel az azonosító és a pillanatnyi konfiguráció bázisvektorai egybeesők, így a továbbiakban mind az azonosító, mind a pillanatnyi konfigurációhoz köthető tenzorok leírása az azonosító konfiguráció bázisvektoraival történik.

1. szakasz:

A 2-es irányú elmozdulást a 0 pontból jelölje V. A deformáció a $0 \le t \le 1$ időtartományban történik. Legyen a fajlagos ívhossz a 2-es irányban $A = 1 + V/H$.

A mozgásfüggvény alakja:

$$x_1 = X_1, \qquad x_2 = AX_2, \qquad x_3 = X_3. \tag{6.70}$$

Az alakváltozási gradiens számítása:

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial x_{\mathrm{a}}}{\partial X_{\mathrm{A}}} \mathbf{e}_{\mathrm{a}} \otimes \mathbf{E}_{\mathrm{A}}, \qquad \left[\mathbf{F}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{6.71}$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_1 + A\mathbf{E}_2 \otimes \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3 \otimes \mathbf{E}_3.$$

A térfogatváltozás mértéke (*Jacobi*-determináns):

$$J = \det\left(\mathbf{F}\right) = A. \tag{6.72}$$

Az alakváltozási gradiens idő szerinti deriváltja, illetve inverze:

$$\dot{\mathbf{F}} = \dot{A}\mathbf{E}_2 \otimes \mathbf{E}_2, \qquad \left[\dot{\mathbf{F}}\right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dot{A} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{6.73}$$

$$\mathbf{F}^{-1} = \mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_1 + 1/A\,\mathbf{E}_2 \otimes \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3 \otimes \mathbf{E}_3, \qquad \left[\mathbf{F}^{-1}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/A & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{6.74}$$

Az *Euler*-féle sebességmező gradiens tenzor:

$$\mathbf{l} = \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1} = \dot{A}/A\,\mathbf{E}_2 \otimes \mathbf{E}_2, \qquad \left[\mathbf{l}\right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dot{A}/A & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{6.75}$$

Az alakváltozás-sebesség tenzor és az örvénytenzor számítása:

$$\mathbf{d} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{l} + \mathbf{l}^{\mathrm{T}}\right) = \mathbf{l}, \qquad \left[\mathbf{d}\right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dot{A}/A & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{6.76}$$

$$\mathbf{w} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{l} - \mathbf{l}^{\mathrm{T}}\right) = \mathbf{0}, \qquad \left[\mathbf{w}\right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{6.77}$$

A baloldali *Cauchy-Green*–féle deformációs tenzor:

$$\mathbf{b} = \mathbf{F}\mathbf{F}^{\mathrm{T}} = \mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_1 + A^2 \mathbf{E}_2 \otimes \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3 \otimes \mathbf{E}_3, \qquad [\mathbf{b}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & A^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{6.78}$$

$\mathbf{b}$ sajátértékei:

$$\chi_1 = 1, \quad \chi_2 = A^2, \quad \chi_3 = 1. \tag{6.79}$$

A bázis-tenzorok (sajátprojekciók):

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_1 &= \mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_1, \\ \mathbf{p}_2 &= \mathbf{E}_2 \otimes \mathbf{E}_2, \\ \mathbf{p}_3 &= \mathbf{E}_3 \otimes \mathbf{E}_3. \end{aligned} \tag{6.80}$$

A deformáció során a sajátprojekciók változatlanok maradnak, nincs forgás, emiatt a spintenzorok zérus értékűek:

$$\boldsymbol{\Omega}^{\mathrm{GMN}} = \mathbf{0}, \qquad \boldsymbol{\Omega}^{\log} = \mathbf{0}, \qquad \boldsymbol{\Omega}^{\mathrm{ZJN}} = \mathbf{w} = \mathbf{0}. \tag{6.81}$$

2. szakasz:

A vizsgált időtartomány $1 \le t \le 2$. Jelölje az 1. szakasz végén a 2-es irányban a fajlagos ívhosszat $A_{\mathrm{m}} = 1 + V_{\mathrm{m}}/H$, valamint a 2. szakaszban az 1 ponttól mért 1-es irányú elmozdulást U, ekkor a fajlagos szögtorzulás $\gamma = U/H$. Ez esetben a mozgásfüggvény alakja:

$$x_1 = X_1 + \gamma X_2, \qquad x_2 = A_{\mathrm{m}} X_2, \qquad x_3 = X_3 \tag{6.82}$$

Az alakváltozási gradiens számítása:

$$\begin{aligned} &\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial x_{\mathrm{a}}}{\partial X_{\mathrm{A}}} \mathbf{e}_{\mathrm{a}} \otimes \mathbf{E}_{\mathrm{A}}, \qquad [\mathbf{F}] = \begin{bmatrix} 1 & \gamma & 0 \\ 0 & A_{\mathrm{m}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ &\mathbf{F} = \mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_1 + A_{\mathrm{m}} \mathbf{E}_2 \otimes \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3 \otimes \mathbf{E}_3 + \gamma \mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_2. \end{aligned} \tag{6.83}$$

A térfogatváltozás mértéke (*Jacobi*-determináns):

$$J = \det(\mathbf{F}) = A_{\mathrm{m}}. \tag{6.84}$$

Az alakváltozási gradiens idő szerinti deriváltja, illetve inverze:

$$\dot{\mathbf{F}} = \dot{\gamma} \mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_2, \qquad [\dot{\mathbf{F}}] = \begin{bmatrix} 0 & \dot{\gamma} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{6.85}$$

$$\mathbf{F}^{-1} = \mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_1 + 1/A_\mathrm{m}\, \mathbf{E}_2 \otimes \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3 \otimes \mathbf{E}_3 - \gamma/A_\mathrm{m}\, \mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_2,$$
$$\left[\mathbf{F}^{-1}\right] = \begin{bmatrix} 1 & -\gamma/A_\mathrm{m} & 0 \\ 0 & 1/A_\mathrm{m} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{6.86}$$

Az *Euler*-féle sebességmező gradiens tenzor:

$$\mathbf{l} = \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1} = \dot{\gamma}/A_\mathrm{m}\, \mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_2, \qquad [\mathbf{l}] = \begin{bmatrix} 0 & \dot{\gamma}/A_\mathrm{m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{6.87}$$

Az alakváltozás-sebesség tenzor és az örvénytenzor számítása:

$$\mathbf{d} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{l} + \mathbf{l}^\mathrm{T}\right) = \frac{\dot{\gamma}}{2A_\mathrm{m}}\left(\mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_2 \otimes \mathbf{E}_1\right), \qquad [\mathbf{d}] = \begin{bmatrix} 0 & \tfrac{1}{2}\dot{\gamma}/A_\mathrm{m} & 0 \\ \tfrac{1}{2}\dot{\gamma}/A_\mathrm{m} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{6.88}$$

$$\mathbf{w} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{l} - \mathbf{l}^\mathrm{T}\right) = \frac{\dot{\gamma}}{2A_\mathrm{m}}\left(\mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_2 \otimes \mathbf{E}_1\right), \qquad [\mathbf{w}] = \begin{bmatrix} 0 & \tfrac{1}{2}\dot{\gamma}/A_\mathrm{m} & 0 \\ -\tfrac{1}{2}\dot{\gamma}/A_\mathrm{m} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{6.89}$$

A baloldali *Cauchy-Green*–féle deformációs tenzor:

$$\mathbf{b} = \mathbf{F}\mathbf{F}^\mathrm{T} = \left(1+\gamma^2\right)\mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_1 + A_\mathrm{m}^2 \mathbf{E}_2 \otimes \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3 \otimes \mathbf{E}_3 + A_\mathrm{m}\gamma\left(\mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_2 \otimes \mathbf{E}_1\right),$$
$$[\mathbf{b}] = \begin{bmatrix} 1+\gamma^2 & A_\mathrm{m}\gamma & 0 \\ A_\mathrm{m}\gamma & A_\mathrm{m}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \tag{6.90}$$

b sajátértékeinek meghatározása (3.11) segítségével történik:

$$\chi_1 = \frac{1}{2}\left\{1 + A_\mathrm{m}^2 + \gamma^2 + \sqrt{\left[\left(1+A_\mathrm{m}\right)^2 + \gamma^2\right]\left[\left(1-A_\mathrm{m}\right)^2 + \gamma^2\right]}\right\},$$
$$\chi_2 = \frac{1}{2}\left\{1 + A_\mathrm{m}^2 + \gamma^2 - \sqrt{\left[\left(1+A_\mathrm{m}\right)^2 + \gamma^2\right]\left[\left(1-A_\mathrm{m}\right)^2 + \gamma^2\right]}\right\}, \tag{6.91}$$
$$\chi_3 = 1.$$

A bázis-tenzorok (sajátprojekciók) számítása (3.55) segítségével történik. A bonyolult összefüggés egyszerűsítésében az alábbi átalakítások segítenek:

$$\chi_1\chi_2 = A_\mathrm{m}^2, \qquad \chi_1 + \chi_2 = 1 + A_\mathrm{m}^2 + \gamma^2,$$
$$\left(\chi_1 - 1\right)\left(\chi_2 - 1\right) = -\gamma^2, \qquad \chi_1 - \chi_2 = \sqrt{\left[\left(1+A_\mathrm{m}\right)^2 + \gamma^2\right]\left[\left(1-A_\mathrm{m}\right)^2 + \gamma^2\right]}. \tag{6.92}$$

Ezeket felhasználva, a sajátprojekciókra adódó összefüggések:

$$\mathbf{p}_1 = \frac{1}{\chi_1 - \chi_2}\left[\chi_1(1-\chi_2)\mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_1 + \chi_2(\chi_1 - 1)\mathbf{E}_2 \otimes \mathbf{E}_2 + A_\mathrm{m}\gamma(\mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_2 \otimes \mathbf{E}_1)\right],$$
$$\mathbf{p}_2 = \frac{1}{\chi_1 - \chi_2}\left[\chi_2(\chi_1 - 1)\mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_1 + \chi_1(1-\chi_2)\mathbf{E}_2 \otimes \mathbf{E}_2 - A_\mathrm{m}\gamma(\mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_2 \otimes \mathbf{E}_1)\right], \tag{6.93}$$
$$\mathbf{p}_3 = \mathbf{E}_3 \otimes \mathbf{E}_3.$$

Mivel $\mathbf{p}_3$ az $\mathbf{E}_3$-ból képzett diád, valamint $\mathbf{d}$ csak az $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$-vel van kapcsolatban, emiatt az (3.116)-ból a $\mathbf{p}_3$-tól függő tag eltűnik. Vagyis a spintenzorok számítása jelen esetben a következőképpen történik:

$$\mathbf{\Omega}^* = \mathbf{w} + f_{12}^*\mathbf{p}_1\mathbf{d}\mathbf{p}_2 + f_{21}^*\mathbf{p}_2\mathbf{d}\mathbf{p}_1. \tag{6.94}$$

A behelyettesítések és egyszerűsítések elvégzése után:

$$\mathbf{\Omega}^* = \frac{\dot{\gamma}}{2A_\mathrm{m}}\left[1 + f_{12}^*\frac{1+\gamma^2 - A_\mathrm{m}^2}{\chi_1 - \chi_2}\right](\mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_2 \otimes \mathbf{E}_1). \tag{6.95}$$

3. szakasz:

A vizsgált időtartomány $2 \le t \le 3$. Jelölje a 2. szakasz végén az 1-es irányban a fajlagos szögtorzulást $\gamma_\mathrm{m} = U_\mathrm{m}/H$. A 2-es irányban a fajlagos ívhossz $A = 1 + (V_\mathrm{m} - V)/H$, ahol V a 2-es ponttól a 3-as pont felé mért elmozdulás. Ez esetben a mozgásfüggvény alakja:

$$x_1 = X_1 + \gamma_\mathrm{m} X_2, \qquad x_2 = AX_2, \qquad x_3 = X_3. \tag{6.96}$$

Az alakváltozási gradiens számítása:

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial x_\mathrm{a}}{\partial X_\mathrm{A}}\mathbf{e}_\mathrm{a} \otimes \mathbf{E}_\mathrm{A}, \qquad [\mathbf{F}] = \begin{bmatrix} 1 & \gamma_\mathrm{m} & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{6.97}$$
$$\mathbf{F} = \mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_1 + A\mathbf{E}_2 \otimes \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3 \otimes \mathbf{E}_3 + \gamma_\mathrm{m}\mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_2.$$

A térfogatváltozás mértéke (*Jacobi*-determináns):

$$J = \det(\mathbf{F}) = A. \tag{6.98}$$

Az alakváltozási gradiens idő szerinti deriváltja, illetve inverze:

$$\dot{\mathbf{F}} = \dot{A}\mathbf{E}_2 \otimes \mathbf{E}_2, \qquad [\dot{\mathbf{F}}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dot{A} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{6.99}$$

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{F}^{-1} = \mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_1 + 1/A\,\mathbf{E}_2 \otimes \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3 \otimes \mathbf{E}_3 - \gamma_{\mathrm{m}}/A\,\mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_2, \\
&\left[\mathbf{F}^{-1}\right] = \begin{bmatrix} 1 & -\gamma_{\mathrm{m}}/A & 0 \\ 0 & 1/A & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
\tag{6.100}
$$

Az *Euler*-féle sebességmező gradiens tenzor:

$$
\mathbf{l} = \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1} = \dot{A}/A\,\mathbf{E}_2 \otimes \mathbf{E}_2, \qquad [\mathbf{l}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dot{A}/A & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.
\tag{6.101}
$$

Az alakváltozás-sebesség tenzor és az örvénytenzor számítása:

$$
\mathbf{d} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{l} + \mathbf{l}^{\mathrm{T}}\right) = \mathbf{l}, \qquad [\mathbf{d}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dot{A}/A & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},
\tag{6.102}
$$

$$
\mathbf{w} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{l} - \mathbf{l}^{\mathrm{T}}\right) = \mathbf{0}, \qquad [\mathbf{w}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.
\tag{6.103}
$$

A baloldali *Cauchy-Green*–féle deformációs tenzor:

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{b} = \mathbf{F}\mathbf{F}^{\mathrm{T}} = \left(1+\gamma_{\mathrm{m}}^2\right)\mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_1 + A^2\mathbf{E}_2 \otimes \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3 \otimes \mathbf{E}_3 + A\gamma_{\mathrm{m}}\left(\mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_2 \otimes \mathbf{E}_1\right), \\
&[\mathbf{b}] = \begin{bmatrix} 1+\gamma_{\mathrm{m}}^2 & A\gamma_{\mathrm{m}} & 0 \\ A\gamma_{\mathrm{m}} & A^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
\tag{6.104}
$$

b sajátértékei:

$$
\begin{aligned}
&\chi_1 = \frac{1}{2}\left\{1 + A^2 + \gamma_{\mathrm{m}}^2 + \sqrt{\left[(1+A)^2 + \gamma_{\mathrm{m}}^2\right]\left[(1-A)^2 + \gamma_{\mathrm{m}}^2\right]}\right\}, \\
&\chi_2 = \frac{1}{2}\left\{1 + A^2 + \gamma_{\mathrm{m}}^2 - \sqrt{\left[(1+A)^2 + \gamma_{\mathrm{m}}^2\right]\left[(1-A)^2 + \gamma_{\mathrm{m}}^2\right]}\right\},. \\
&\chi_3 = 1.
\end{aligned}
\tag{6.105}
$$

A sajátértékek és a sajátprojekciók megegyeznek a 2. szakaszban számolt értékekkel amennyiben az „m” alsó indexet kicseréljük A és γ között. Ennek figyelembevételével a bázis-tenzorok (sajátprojekciók):

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{p}_1 = \frac{1}{\chi_1 - \chi_2}\left[\chi_1(1-\chi_2)\mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_1 + \chi_2(\chi_1 - 1)\mathbf{E}_2 \otimes \mathbf{E}_2 + A\gamma_{\mathrm{m}}\left(\mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_2 \otimes \mathbf{E}_1\right)\right], \\
&\mathbf{p}_2 = \frac{1}{\chi_1 - \chi_2}\left[\chi_2(\chi_1 - 1)\mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_1 + \chi_1(1-\chi_2)\mathbf{E}_2 \otimes \mathbf{E}_2 \text{ - } A\gamma_{\mathrm{m}}\left(\mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_2 \otimes \mathbf{E}_1\right)\right], \\
&\mathbf{p}_3 = \mathbf{E}_3 \otimes \mathbf{E}_3.
\end{aligned}
\tag{6.106}
$$

A behelyettesítések és egyszerűsítések elvégzése után a spintenzorra adódó összefüggés:

$$\mathbf{\Omega}^* = f_{12}^* \frac{\gamma \dot{A}}{\chi_1 - \chi_2} \left(\mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_2 \otimes \mathbf{E}_1 \right). \tag{6.107}$$

4. szakasz:

A vizsgált időtartomány $3 \le t \le 4$. Az 1-es irányban a fajlagos szögtorzulás $\gamma = \left(U_{\mathrm{m}} - \mathrm{U} \right) / H$, ahol U jelenti a 3-as ponttól a 0 pont felé mért elmozdulást. Ez esetben a mozgásfüggvény alakja:

$$x_1 = X_1 + \gamma X_2, \qquad x_2 = X_2, \qquad x_3 = X_3 \tag{6.108}$$

Az alakváltozási gradiens számítása:

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial x_{\mathrm{a}}}{\partial X_{\mathrm{A}}} \mathbf{e}_{\mathrm{a}} \otimes \mathbf{E}_{\mathrm{A}}, \qquad \left[\mathbf{F} \right] = \begin{bmatrix} 1 & \gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{6.109}$$

$$\mathbf{F} = \boldsymbol{\delta} + \gamma \mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_2 .$$

A térfogatváltozás mértéke (*Jacobi*-determináns):

$$J = \det\left(\mathbf{F} \right) = 1 . \tag{6.110}$$

Az alakváltozási gradiens idő szerinti deriváltja, illetve inverze:

$$\dot{\mathbf{F}} = \dot{\gamma} \mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_2, \qquad \left[\dot{\mathbf{F}} \right] = \begin{bmatrix} 0 & \dot{\gamma} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{6.111}$$

$$\mathbf{F}^{-1} = \boldsymbol{\delta} - \gamma \mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_2, \qquad \left[\mathbf{F}^{-1} \right] = \begin{bmatrix} 1 & -\gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{6.112}$$

Az *Euler*-féle sebességmező gradiens tenzor:

$$\mathbf{l} = \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1} = \dot{\gamma} \mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_2, \qquad \left[\mathbf{l} \right] = \begin{bmatrix} 0 & \dot{\gamma} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{6.113}$$

Az alakváltozás-sebesség tenzor és az örvénytenzor számítása:

$$\mathbf{d} = \frac{1}{2} \left(\mathbf{l} + \mathbf{l}^{\mathrm{T}} \right) = \frac{1}{2} \dot{\gamma} \left(\mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_2 \otimes \mathbf{E}_1 \right), \qquad \left[\mathbf{d} \right] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\dot{\gamma} & 0 \\ \frac{1}{2}\dot{\gamma} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{6.114}$$

$$\mathbf{w} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{l} - \mathbf{l}^{\mathrm{T}}\right) = \frac{1}{2}\dot{\gamma}\left(\mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_2 \otimes \mathbf{E}_1\right), \qquad \left[\mathbf{w}\right] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\dot{\gamma} & 0 \\ -\frac{1}{2}\dot{\gamma} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{6.115}$$

A baloldali *Cauchy-Green*–féle deformációs tenzor:

$$\begin{gathered} \mathbf{b} = \mathbf{F}\mathbf{F}^{\mathrm{T}} = \left(1+\gamma^2\right)\mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 \otimes \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3 \otimes \mathbf{E}_3 + \gamma\left(\mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_2 \otimes \mathbf{E}_1\right), \\ \left[\mathbf{b}\right] = \begin{bmatrix} 1+\gamma^2 & \gamma & 0 \\ \gamma & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{gathered} \tag{6.116}$$

$\mathbf{b}$ sajátértékeinek meghatározása (3.11) segítségével történik:

$$\begin{aligned} \chi_1 &= \frac{1}{2}\left(2+\gamma^2+\gamma\sqrt{4+\gamma^2}\right), \\ \chi_2 &= \frac{1}{2}\left(2+\gamma^2-\gamma\sqrt{4+\gamma^2}\right), \\ \chi_3 &= 1. \end{aligned} \tag{6.117}$$

A bázis-tenzorok (sajátprojekciók) számítása (3.55) felhasználásával:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_1 &= \frac{1}{\chi_1-\chi_2}\left[\left(\chi_1-1\right)\mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_1 + \left(1-\chi_2\right)\mathbf{E}_2 \otimes \mathbf{E}_2 + \gamma\left(\mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_2 \otimes \mathbf{E}_1\right)\right], \\ \mathbf{p}_2 &= \frac{1}{\chi_1-\chi_2}\left[\left(1-\chi_2\right)\mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_1 + \left(\chi_1-1\right)\mathbf{E}_2 \otimes \mathbf{E}_2 - \gamma\left(\mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_2 \otimes \mathbf{E}_1\right)\right], \\ \mathbf{p}_3 &= \mathbf{E}_3 \otimes \mathbf{E}_3. \end{aligned} \tag{6.118}$$

A spintenzorra adódó összefüggés:

$$\mathbf{\Omega}^* = \frac{\dot{\gamma}}{2}\left[1 + f_{12}^* \frac{\gamma^2}{\chi_1-\chi_2}\right]\left(\mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_2 \otimes \mathbf{E}_1\right). \tag{6.119}$$

A 4. és 2. fázisban számított kinematikai mennyiségek azonosak abban az esetben, ha $A_{\mathrm{m}} = 1$.

A következő alfejezetekben az analitikus megoldások ismertetése történik különböző feszültség-sebességek alkalmazása esetén.

Az analitikus megoldások meghatározásának részletes ismertetése a *Green-McInnis-Naghdi*-féle és a logaritmikus feszültség-sebesség példáján történik A további feszültség-sebességek (*Truesdell*, *Oldroyd*, *Cotter-Rivlin*, *Zaremba-Jaumann-Noll*) alkalmazása során érvényes analitikus megoldásoknak csak a végső alakja kerül közlésre [32] alapján. Az $\mathbf{\Omega}^{\mathrm{E}}$-n és $\overline{\mathbf{\Omega}}^{\mathrm{L}}$-n alapuló objektív deriváltak nem kerülnek tárgyalásra.

6.2.1. ANALITIKUS MEGOLDÁS A TRUESDELL-FÉLE FESZÜLTSÉG-SEBESSÉG HASZNÁLATA ESETÉN

A *Truesdell*-féle feszültség-sebesség a *Cauchy* feszültségre van felírva. A különböző fázisokban érvényes megoldások a következők:

1. terhelési szakasz:

$$\sigma_{11} = \sigma_{33} = \lambda\left(1 - 1/A\right), \qquad \sigma_{22} = \left(\lambda + 2\mu\right)\left(A - 1\right), \qquad \sigma_{12} = 0, \tag{6.120}$$

ahol $A = 1 + V/H$.

2. terhelési szakasz:

$$\begin{aligned} &\sigma_{11} = \mathrm{K}\gamma^2/A_\mathrm{m}^2 + \lambda\left(1 - 1/A_\mathrm{m}\right), \qquad &&\sigma_{22} = \left(\lambda + 2\mu\right)\left(A_\mathrm{m} - 1\right), \\ &\sigma_{33} = \lambda\left(1 - 1/A_\mathrm{m}\right), &&\sigma_{12} = \mathrm{K}\gamma/A_\mathrm{m}, \end{aligned} \tag{6.121}$$

ahol $\gamma = U/H$, $A_\mathrm{m} = 1 + V_\mathrm{m}/H$, $K = \mu + \left(\lambda + 2\mu\right)\left(A_\mathrm{m} - 1\right)$.

3. terhelési szakasz:

$$\begin{aligned} &\sigma_{11} = \lambda + \left(K\gamma_\mathrm{m}^2/A_\mathrm{m} - \lambda\right)/A, \qquad &&\sigma_{22} = \left(\lambda + 2\mu\right)\left(A - 1\right), \\ &\sigma_{33} = \lambda\left(1 - 1/A\right), &&\sigma_{12} = \mathrm{K}\gamma_\mathrm{m}/A_\mathrm{m}, \end{aligned} \tag{6.122}$$

ahol $A = 1 + \left(V_\mathrm{m} - V\right)/H$, $\gamma_\mathrm{m} = U_\mathrm{m}/H$.

4. terhelési szakasz:

$$\begin{aligned} &\sigma_{11} = \mu\gamma^2 + \gamma_\mathrm{m}\left(K/A_\mathrm{m} - \mu\right)\left(2\gamma - \gamma_\mathrm{m}\right), \qquad &&\sigma_{22} = \sigma_{33} = 0, \\ &\sigma_{12} = \mu\gamma + \left(K/A_\mathrm{m} - \mu\right)\gamma_\mathrm{m}, && \end{aligned} \tag{6.123}$$

ahol $\gamma = \left(U_\mathrm{m} - U\right)/H$.

A 4. szakaszban érvényes feszültségképletekbe behelyettesítve K értékét, valamint a deformáció végén érvényes $\gamma = 0$ -t, megkapjuk a teljes terhelési ciklus után maradó feszültségeket:

$$\sigma_{11}^{\mathrm{IV}} = -\left(\lambda + \mu\right)\gamma_\mathrm{m}^2\left(1 - 1/A_\mathrm{m}\right), \qquad \sigma_{12}^{\mathrm{IV}} = \left(\lambda + \mu\right)\gamma_\mathrm{m}\left(1 - 1/A_\mathrm{m}\right). \tag{6.124}$$

Mivel a 4. fázisban a Jacobi-determináns értéke 1, emiatt ezek a feszültségkomponensek egyben a *Kirchhoff*-féle feszültségkomponensek is.

6.2.2. Analitikus megoldás az Oldroyd-féle feszültség-sebesség használata esetén

Az analitikus megoldások a *Kirchhoff*-féle feszültség komponenseire vannak felírva, amelyekből az aktuális Jacobi-determináns osztásával megkapjuk a megfelelő *Cauchy*-féle feszültség-komponenseket.

1. szakasz:

A *Jacobi*-determináns ebben a szakaszban (6.72) szerint $J = A$. A *Kirchhoff*-féle feszültség komponensek:

$$\tau_{11} = \tau_{33} = \lambda \ln A, \qquad \tau_{22} = \left(\mu + \lambda/2\right)\left(A^2 - 1\right), \qquad \tau_{12} = 0, \tag{6.125}$$

ahol $A = 1 + V/H$.

2. szakasz:

A *Jacobi*-determináns (6.84) szerint $J = A_\mathrm{m}$. A *Kirchhoff*-féle feszültség komponensek:

$$\begin{aligned} &\tau_{11} = K\left(\gamma/A_\mathrm{m}\right)^2 + \lambda \ln A_\mathrm{m}, &&\tau_{22} = \left(\mu + \lambda/2\right)\left(A_\mathrm{m}^2 - 1\right), \\ &\tau_{33} = \lambda \ln A_\mathrm{m}, &&\tau_{12} = K\,\gamma/A_\mathrm{m}, \end{aligned} \tag{6.126}$$

ahol $\gamma = U/H$, $A_\mathrm{m} = 1 + V_\mathrm{m}/H$, $K = \left(\mu + \lambda/2\right)A_\mathrm{m}^2 - \lambda/2$.

3. szakasz:

A *Jacobi*-determináns ebben a szakaszban (6.98) szerint $J = A$. A *Kirchhoff*-féle feszültség komponensek:

$$\begin{aligned} &\tau_{11} = \lambda \ln A + K\left(\gamma_\mathrm{m}/A_\mathrm{m}\right)^2, &&\tau_{22} = \left(\mu + \lambda/2\right)\left(A^2 - 1\right), \\ &\tau_{33} = \lambda \ln A, &&\tau_{12} = K\gamma_\mathrm{m} A/A_\mathrm{m}^2, \end{aligned} \tag{6.127}$$

ahol $A = 1 + \left(V_\mathrm{m} - V\right)/H$, $\gamma_\mathrm{m} = U_\mathrm{m}/H$.

4. szakasz:

A Jacobi-determináns (6.110) szerint $J = 1$. A *Kirchhoff*-féle feszültség komponensek:

$$\begin{aligned} &\tau_{11} = \mu\gamma^2 + \gamma_\mathrm{m}\left(K/A_\mathrm{m}^2 - \mu\right)\left(2\gamma - \gamma_\mathrm{m}\right), &&\tau_{22} = \tau_{33} = 0, \\ &\tau_{12} = \mu\gamma + \left(K/A_\mathrm{m}^2 - \mu\right)\gamma_\mathrm{m}, \end{aligned} \tag{6.128}$$

ahol $\gamma = \left(U_\mathrm{m} - U\right)/H$.

A zárt terhelési ciklus végén $\left(\gamma = 0\right)$ a maradó feszültségek:

$$\tau_{11}^{\mathrm{IV}} = -\frac{1}{2}\lambda\gamma_\mathrm{m}^2\left(1 - 1/A_\mathrm{m}^2\right), \qquad \tau_{11}^{\mathrm{IV}} = \frac{1}{2}\lambda\gamma_\mathrm{m}^2\left(1 - 1/A_\mathrm{m}^2\right). \tag{6.129}$$

6.2.3. ANALITIKUS MEGOLDÁS A COTTER-RIVLIN-FÉLE FESZÜLTSÉG-SEBESSÉG HASZNÁLATA ESETÉN

1. szakasz:

A *Jacobi*-determináns ebben a szakaszban (6.72) szerint $J = A$. A *Kirchhoff*-féle feszültség komponensek:

$$\tau_{11} = \tau_{33} = \lambda \ln A, \qquad \tau_{22} = \left(\mu + \lambda/2\right)\left(1 - A^{-2}\right), \qquad \tau_{12} = 0, \tag{6.130}$$

ahol $A = 1 + V/H$.

2. szakasz:

A *Jacobi*-determináns (6.84) szerint $J = A_{\mathrm{m}}$. A *Kirchhoff*-féle feszültség komponensek:

$$\tau_{11} = \tau_{33} = \lambda \ln A_{\mathrm{m}}, \qquad \tau_{22} = -K\gamma^2 / A_{\mathrm{m}}^2 + \left(\mu + \lambda/2\right)\left(1 - A_{\mathrm{m}}^{-2}\right), \qquad \tau_{12} = K\gamma / A_{\mathrm{m}}, \tag{6.131}$$

ahol $K = \mu - \lambda \ln A_{\mathrm{m}}$.

3. szakasz:

A *Jacobi*-determináns ebben a szakaszban (6.98) szerint $J = A$. A *Kirchhoff*-féle feszültség komponensek:

$$\tau_{11} = \tau_{33} = \lambda \ln A, \qquad \tau_{22} = \left(\mu + \lambda/2\right) - \left(\mu + \lambda/2 + K\gamma_{\mathrm{m}}^2\right) / A^2, \qquad \tau_{12} = K\gamma_{\mathrm{m}} / A, \tag{6.132}$$

ahol $A = 1 + \left(V_{\mathrm{m}} - V\right)/H$, $\gamma_{\mathrm{m}} = U_{\mathrm{m}}/H$.

4. szakasz:

A *Jacobi*-determináns (6.110) szerint $J = 1$. A *Kirchhoff*-féle feszültség komponensek:

$$\tau_{11} = \tau_{33} = 0, \qquad \tau_{22} = -\mu\gamma^2 + \gamma_{\mathrm{m}}\left(\mu - K\right)\left(2\gamma - \gamma_{\mathrm{m}}\right), \qquad \tau_{12} = \mu\gamma - \left(\mu - K\right)\gamma_{\mathrm{m}}, \tag{6.133}$$

ahol $\gamma = \left(U_{\mathrm{m}} - U\right)/H$.

A zárt terhelési ciklus végén $\left(\gamma = 0\right)$ a maradó feszültségek:

$$\tau_{22}^{\mathrm{IV}} = -\lambda\gamma_{\mathrm{m}}^2 \ln A_{\mathrm{m}}, \qquad \tau_{12}^{\mathrm{IV}} = -\lambda\gamma_{\mathrm{m}} \ln A_{\mathrm{m}}. \tag{6.134}$$

6.2.4. ANALITIKUS MEGOLDÁS A ZAREMBA-JAUMANN-NOLL-FÉLE FESZÜLTSÉG-SEBESSÉG HASZNÁLATA ESETÉN

1. szakasz:

A *Jacobi*-determináns ebben a szakaszban (6.72) szerint $J = A$. A *Kirchhoff*-féle feszültség komponensek:

$$\tau_{11} = \tau_{33} = \lambda \ln A, \qquad \tau_{22} = \left(\lambda + 2\mu\right) \ln A, \qquad \tau_{12} = 0, \tag{6.135}$$

ahol $A = 1 + V/H$.

2. szakasz:

A *Jacobi*-determináns (6.84) szerint $J = A_\mathrm{m}$. A *Kirchhoff*-féle feszültség komponensek:

$$\begin{aligned} &\tau_{11} = \lambda \ln A_\mathrm{m} + K\left[1 - \cos\left(\gamma/A_\mathrm{m}\right)\right], && \tau_{33} = \lambda \ln A_\mathrm{m}, \\ &\tau_{22} = \left(\lambda + 2\mu\right) \ln A_\mathrm{m} + K\left[\cos\left(\gamma/A_\mathrm{m}\right) - 1\right], && \tau_{12} = K \sin\left(\gamma/A_\mathrm{m}\right), \end{aligned} \tag{6.136}$$

ahol $\gamma = U/H$, $A_\mathrm{m} = 1 + V_\mathrm{m}/H$, $K = \mu\left(1 + \ln A_\mathrm{m}\right)$.

3. szakasz:

A *Jacobi*-determináns ebben a szakaszban (6.98) szerint $J = A$. A *Kirchhoff*-féle feszültség komponensek:

$$\begin{aligned} &\tau_{11} = \lambda \ln A + K\left[1 - \cos\left(\gamma_\mathrm{m}/A_\mathrm{m}\right)\right], && \tau_{33} = \lambda \ln A, \\ &\tau_{22} = \left(\lambda + 2\mu\right) \ln A + K\left[\cos\left(\gamma_\mathrm{m}/A_\mathrm{m}\right) - 1\right] && \tau_{12} = K \sin\left(\gamma_\mathrm{m}/A_\mathrm{m}\right), \end{aligned} \tag{6.137}$$

ahol $A = 1 + \left(V_\mathrm{m} - V\right)/H$.

4. szakasz:

A *Jacobi*-determináns (6.110) szerint $J = 1$. A *Kirchhoff*-féle feszültség komponensek:

$$\begin{aligned} &\tau_{11} = \mu + \left(K - \mu\right)\cos\left(\gamma_\mathrm{m} - \gamma\right) - K \cos\left[\gamma - \gamma_\mathrm{m}\left(1 - 1/A_\mathrm{m}\right)\right], && \tau_{22} = -\tau_{11}, \\ &\tau_{12} = \left(K - \mu\right)\sin\left(\gamma_\mathrm{m} - \gamma\right) + K \sin\left[\gamma - \gamma_\mathrm{m}\left(1 - 1/A_\mathrm{m}\right)\right], && \tau_{33} = 0, \end{aligned} \tag{6.138}$$

ahol $\gamma = \left(U_\mathrm{m} - U\right)/H$.

A zárt terhelési ciklus végén $\left(\gamma = 0\right)$ a maradó feszültségek:

$$\begin{aligned} &\tau_{11}^{\mathrm{IV}} = \mu\left\{1 + \ln A_\mathrm{m} \cos\gamma_\mathrm{m} - \left(1 + \ln A_\mathrm{m}\right)\cos\left[\gamma_\mathrm{m}\left(1 - 1/A_\mathrm{m}\right)\right]\right\}, && \tau_{22}^{\mathrm{IV}} = -\tau_{11}^{\mathrm{IV}}, \\ &\tau_{12}^{\mathrm{IV}} = \mu\left\{\ln A_\mathrm{m} \sin\gamma_\mathrm{m} - \left(1 + \ln A_\mathrm{m}\right)\sin\left[\gamma_\mathrm{m}\left(1 - 1/A_\mathrm{m}\right)\right]\right\}. \end{aligned} \tag{6.139}$$

6.2.5. Analitikus megoldás a Green-McInnis-Naghdi-féle feszültség-sebesség használata esetén

1. szakasz:

Mivel (6.81)$_1$ szerint a spintenzor minden elem zérus, emiatt a *Kirchhoff*-féle feszültség *Green-McInnis-Naghdi*-féle feszültség-sebessége megegyezik a *Kirchhoff*-féle feszültség idő szerinti deriváltjával.

$$\overset{\circ}{\boldsymbol{\tau}}{}^{\mathrm{GMN}} = \dot{\boldsymbol{\tau}} = \dot{\tau}_{11}\mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_1 + \dot{\tau}_{22}\mathbf{E}_2 \otimes \mathbf{E}_2 + \dot{\tau}_{12}\left(\mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_2 \otimes \mathbf{E}_1\right). \tag{6.140}$$

Behelyettesítve(6.140), (6.76)-t a (4.4) szerinti konstitutív egyenletbe, a feszültségkomponensekre adódó differenciálegyenletek a következők:

$$\dot{\tau}_{11} = \lambda \dot{A}/A, \qquad \dot{\tau}_{22} = \left(\lambda + 2\mu\right)\dot{A}/A, \qquad \dot{\tau}_{33} = \lambda \dot{A}/A, \qquad \dot{\tau}_{12} = 0, \tag{6.141}$$

ahol $A = 1 + V/H$. A differenciálegyenletek megoldásai a $\boldsymbol{\tau}\left(A=0\right) = \mathbf{0}$ kezdeti feltétel mellett:

$$\begin{aligned} &\tau_{11} = \lambda \ln A, && \tau_{22} = \left(\lambda + 2\mu\right)\ln A, \\ &\tau_{33} = \lambda \ln A, && \tau_{12} = 0. \end{aligned} \tag{6.142}$$

Az 1. szakaszban (6.72) szerint $J = A$, emiatt a *Cauchy*-féle feszültségkomponensek:

$$\begin{aligned} &\sigma_{11} = \lambda \ln A/A, && \sigma_{22} = \left(\lambda + 2\mu\right)\ln A/A, \\ &\sigma_{33} = \lambda \ln A/A, && \sigma_{12} = 0. \end{aligned} \tag{6.143}$$

Az 1. terhelési szakasz végén a *Kirchhoff*-féle feszültségkomponenseket megkapjuk $A = A_{\mathrm{m}}$ (6.142)-be történő behelyettesítésével:

$$\begin{aligned} &\tau_{11}^{\mathrm{I}} = \lambda \ln A_{\mathrm{m}}, && \tau_{22}^{\mathrm{I}} = \left(\lambda + 2\mu\right)\ln A_{\mathrm{m}}, \\ &\tau_{33}^{\mathrm{I}} = \lambda \ln A_{\mathrm{m}}, && \tau_{12}^{\mathrm{I}} = 0. \end{aligned} \tag{6.144}$$

2. szakasz:

Az f_{12}^{GMN} spinfüggvény (3.122)$_1$ szerint

$$f_{12}^{\mathrm{GMN}} = \frac{\sqrt{\chi_2} - \sqrt{\chi_1}}{\sqrt{\chi_2} + \sqrt{\chi_1}}. \tag{6.145}$$

Behelyettesítve (6.145)-t és (6.91)$_{1,2}$-t a (6.95) szerinti összefüggésbe, megkapjuk az aktuális spintenzort:

$$\boldsymbol{\Omega}^{\mathrm{GMN}} = \frac{\left(1 + A_{\mathrm{m}}\right)\dot{\gamma}}{\left(1 + A_{\mathrm{m}}\right)^2 + \gamma^2}\left(\mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_2 \otimes \mathbf{E}_1\right). \tag{6.146}$$

(6.146)-nek, (6.88)-nek a (4.4) szerinti konstitutív egyenletben történő behelyettesítésével előálló differenciálegyenlet-rendszer a következő:

$$\dot{\tau}_{11}-\frac{2\left(1+A_{\mathrm{m}}\right)\dot{\gamma}}{\left(1+A_{\mathrm{m}}\right)^{2}+\gamma^{2}}\tau_{12}=0,\qquad \dot{\tau}_{22}+\frac{2\left(1+A_{\mathrm{m}}\right)\dot{\gamma}}{\left(1+A_{\mathrm{m}}\right)^{2}+\gamma^{2}}\tau_{12}=0,$$
$$\dot{\tau}_{33}=0,\qquad \dot{\tau}_{12}+\frac{\left(1+A_{\mathrm{m}}\right)\dot{\gamma}}{\left(1+A_{\mathrm{m}}\right)^{2}+\gamma^{2}}\left(\tau_{11}-\tau_{22}\right)=\frac{\mu}{A_{\mathrm{m}}}\dot{\gamma}. \tag{6.147}$$

Átírva a differenciálegyenlet-rendszert:

$$\frac{\mathrm{d}\tau_{11}}{\mathrm{d}\gamma}-\frac{2\left(1+A_{\mathrm{m}}\right)}{\left(1+A_{\mathrm{m}}\right)^{2}+\gamma^{2}}\tau_{12}=0,\qquad \frac{\mathrm{d}\tau_{22}}{\mathrm{d}\gamma}+\frac{2\left(1+A_{\mathrm{m}}\right)}{\left(1+A_{\mathrm{m}}\right)^{2}+\gamma^{2}}\tau_{12}=0,$$
$$\frac{\mathrm{d}\tau_{33}}{\mathrm{d}\gamma}=0,\qquad \frac{\mathrm{d}\tau_{12}}{\mathrm{d}\gamma}+\frac{\left(1+A_{\mathrm{m}}\right)}{\left(1+A_{\mathrm{m}}\right)^{2}+\gamma^{2}}\left(\tau_{11}-\tau_{22}\right)=\frac{\mu}{A_{\mathrm{m}}}. \tag{6.148}$$

Legyen $\gamma=\left(1+A_{\mathrm{m}}\right)\tan\beta$. Ekkor az alábbi differenciálási szabályok érvényesülnek:

$$\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}\beta}=\left(1+A_{\mathrm{m}}\right)\left(1+\tan^{2}\beta\right), \tag{6.149}$$

$$\frac{\mathrm{d}(\;)}{\mathrm{d}\beta}=\frac{\mathrm{d}(\;)}{\mathrm{d}\gamma}\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}\beta},\qquad \rightarrow\qquad \frac{\mathrm{d}(\;)}{\mathrm{d}\gamma}=\frac{\mathrm{d}(\;)}{\mathrm{d}\beta}\frac{1}{\left(1+A_{\mathrm{m}}\right)\left(1+\tan^{2}\beta\right)}. \tag{6.150}$$

Elvégezve a behelyettesítéseket és az átalakításokat (6.147)-en, valamint felhasználva az $1+\tan^{2}\beta=1/\cos^{2}\beta$ azonosságot az alábbi differenciálegyenlet-rendszer adódik:

$$\frac{\mathrm{d}\tau_{11}}{\mathrm{d}\beta}-2\tau_{12}=0,\qquad \frac{\mathrm{d}\tau_{22}}{\mathrm{d}\beta}+2\tau_{12}=0,$$
$$\frac{\mathrm{d}\tau_{33}}{\mathrm{d}\beta}=0,\qquad \frac{\mathrm{d}\tau_{12}}{\mathrm{d}\beta}+\left(\tau_{11}-\tau_{22}\right)=\left(1+1/A_{\mathrm{m}}\right)\frac{\mu}{\cos^{2}\beta}. \tag{6.151}$$

$(6.151)_{1,2}$-ből megállapítható, hogy $\tau_{11}+\tau_{22}=K$, ahol K konstans. Valamint $(6.151)_{1}$ szerint $\tau_{12}=\frac{1}{2}\mathrm{d}\tau_{11}/\mathrm{d}\beta$. Felhasználva $(6.151)_{4}$ összefüggésben, egy közönséges másodrendű differenciálegyenlethez jutunk:

$$\frac{\mathrm{d}^{2}\tau_{11}}{\mathrm{d}\beta^{2}}+4\tau_{11}=\frac{2\left(1+1/A_{\mathrm{m}}\right)\mu}{\cos^{2}\beta}+2K. \tag{6.152}$$

A differenciálegyenlet általános megoldása:

$$\tau_{11}=2\mu\left(1+1/A_{\mathrm{m}}\right)\left(\cos 2\beta\ln\cos\beta+\beta\sin 2\beta-\sin^{2}\beta\right)+C_{1}\cos 2\beta+C_{2}\sin 2\beta+K/2. \tag{6.153}$$

Ebből $\tau_{22}=K-\tau_{11}$, valamint $\tau_{12}=\frac{1}{2}\mathrm{d}\tau_{11}/\mathrm{d}\beta$.

$$\tau_{22}=-2\mu\left(1+1/A_{\mathrm{m}}\right)\left(\cos 2\beta \ln\cos\beta+\beta\sin 2\beta-\sin^2\beta\right)-\mathrm{C}_1\cos 2\beta-\mathrm{C}_2\sin 2\beta+K/2,\tag{6.154}$$

$$\tau_{12}=\mu\left(1+1/A_{\mathrm{m}}\right)\cos 2\beta\left[2\beta-2\tan 2\beta\ln\cos\beta-\gamma/\left(1+A_{\mathrm{m}}\right)\right]-C_1\sin 2\beta+C_2\cos 2\beta.\tag{6.155}$$

(6.151)$_3$-ból $\tau_{33}=C_3$, ahol C_3 konstans.

A kezdeti feltételek megegyeznek az 1. terhelési szakasz végén adódó feszültség komponensekkel:

$$\begin{aligned}&\tau_{11}\left(\beta=0\right)=\tau_{11}^{\mathrm{I}}=\lambda\ln A_{\mathrm{m}}, &&\tau_{22}\left(\beta=0\right)=\tau_{22}^{\mathrm{I}}=\left(\lambda+2\mu\right)\ln A_{\mathrm{m}},\\ &\tau_{33}\left(\beta=0\right)=\tau_{33}^{\mathrm{I}}=\lambda\ln A_{\mathrm{m}}, &&\tau_{12}\left(\beta=0\right)=\tau_{12}^{\mathrm{I}}=0.\end{aligned}\tag{6.156}$$

A kezdeti feltétel figyelembevételével a (6.151) szerinti differenciálegyenlet-rendszer megoldása:

$$\begin{aligned}\tau_{11}&=2\mu\left(1+1/A_{\mathrm{m}}\right)\left(\cos 2\beta\ln\cos\beta+\beta\sin 2\beta-\sin^2\beta\right)-\mu\ln A_{\mathrm{m}}\cos 2\beta+\left(\lambda+\mu\right)\ln A_{\mathrm{m}},\\ \tau_{22}&=-2\mu\left(1+1/A_{\mathrm{m}}\right)\left(\cos 2\beta\ln\cos\beta+\beta\sin 2\beta-\sin^2\beta\right)+\mu\ln A_{\mathrm{m}}\cos 2\beta+\left(\lambda+\mu\right)\ln A_{\mathrm{m}},\\ \tau_{12}&=\mu\left(1+1/A_{\mathrm{m}}\right)\cos 2\beta\left[2\beta-2\tan 2\beta\ln\cos\beta-\gamma/\left(1+A_{\mathrm{m}}\right)\right]+\mu\ln A_{\mathrm{m}}\sin 2\beta,\\ \tau_{33}&=\lambda\ln A_{\mathrm{m}}.\end{aligned}\tag{6.157}$$

Mivel ebben a szakaszban $J=A_{\mathrm{m}}$, így a *Cauchy*-féle feszültségkomponensek:

$$\sigma_{11}=\tau_{11}/A_{\mathrm{m}},\qquad \sigma_{22}=\tau_{22}/A_{\mathrm{m}},\qquad \sigma_{12}=\tau_{12}/A_{\mathrm{m}},\qquad \sigma_{33}=\tau_{33}/A_{\mathrm{m}}.\tag{6.158}$$

A 2. terhelési szakasz végén a *Kirchhoff*-féle feszültségkomponenseket megkapjuk $\gamma=\gamma_{\mathrm{m}}$ (6.157)-be történő behelyettesítésével:

$$\begin{aligned}\tau_{11}^{\mathrm{II}}&=2\mu\left(1+1/A_{\mathrm{m}}\right)\left(\cos 2\beta_{\mathrm{m}}\ln\cos\beta_{\mathrm{m}}+\beta_{\mathrm{m}}\sin 2\beta_{\mathrm{m}}-\sin^2\beta_{\mathrm{m}}\right)-\mu\ln A_{\mathrm{m}}\cos 2\beta_{\mathrm{m}}+\left(\lambda+\mu\right)\ln A_{\mathrm{m}},\\ \tau_{22}^{\mathrm{II}}&=-2\mu\left(1+1/A_{\mathrm{m}}\right)\left(\cos 2\beta_{\mathrm{m}}\ln\cos\beta_{\mathrm{m}}+\beta_{\mathrm{m}}\sin 2\beta_{\mathrm{m}}-\sin^2\beta_{\mathrm{m}}\right)+\mu\ln A_{\mathrm{m}}\cos 2\beta_{\mathrm{m}}+\left(\lambda+\mu\right)\ln A_{\mathrm{m}},\\ \tau_{12}^{\mathrm{II}}&=\mu\left(1+1/A_{\mathrm{m}}\right)\cos 2\beta_{\mathrm{m}}\left[2\beta_{\mathrm{m}}-2\tan 2\beta_{\mathrm{m}}\ln\cos\beta_{\mathrm{m}}-\gamma_{\mathrm{m}}/\left(1+A_{\mathrm{m}}\right)\right]+\mu\ln A_{\mathrm{m}}\sin 2\beta_{\mathrm{m}},\\ \tau_{33}^{\mathrm{II}}&=\lambda\ln A_{\mathrm{m}},\end{aligned}\tag{6.159}$$

ahol $\beta_{\mathrm{m}}=\arctan\left(\dfrac{\gamma_{\mathrm{m}}}{1+A_{\mathrm{m}}}\right)$.

3. szakasz:

Behelyettesítve (6.145)-t és $(6.105)_{1,2}$-t a (6.107) szerinti összefüggésbe, megkapjuk a pillanatnyi terhelési szakaszban érvényes spintenzort:

$$\mathbf{\Omega}^{\mathrm{GMN}} = -\frac{\gamma_{\mathrm{m}}\dot{A}}{\gamma_{\mathrm{m}}^2 + (1+A)^2}\left(\mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_2 \otimes \mathbf{E}_1\right). \tag{6.160}$$

(6.160)-nak, (6.102)-nek a (4.4) szerinti konstitutív egyenletben történő behelyettesítésével előálló differenciálegyenlet-rendszer a következő:

$$\begin{aligned}
&\dot{\tau}_{11} + \frac{2\gamma_{\mathrm{m}}\dot{A}}{\gamma_{\mathrm{m}}^2 + (1+A)^2}\tau_{12} = \lambda\frac{\dot{A}}{A}, &&\dot{\tau}_{22} - \frac{2\gamma_{\mathrm{m}}\dot{A}}{\gamma_{\mathrm{m}}^2 + (1+A)^2}\tau_{12} = (\lambda + 2\mu)\frac{\dot{A}}{A},\\
&\dot{\tau}_{33} = \lambda\frac{\dot{A}}{A}, &&\dot{\tau}_{12} - \frac{\gamma_{\mathrm{m}}\dot{A}}{\gamma_{\mathrm{m}}^2 + (1+A)^2}(\tau_{11} - \tau_{22}) = 0.
\end{aligned} \tag{6.161}$$

Átírva a differenciálegyenlet-rendszert:

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}\tau_{11}}{\mathrm{d}A} + \frac{2\gamma_{\mathrm{m}}}{\gamma_{\mathrm{m}}^2 + (1+A)^2}\tau_{12} = \lambda\frac{1}{A}, &&\frac{\mathrm{d}\tau_{22}}{\mathrm{d}A} - \frac{2\gamma_{\mathrm{m}}}{\gamma_{\mathrm{m}}^2 + (1+A)^2}\tau_{12} = (\lambda + 2\mu)\frac{1}{A},\\
&\frac{\mathrm{d}\tau_{33}}{\mathrm{d}A} = \lambda\frac{1}{A}, &&\frac{\mathrm{d}\tau_{12}}{\mathrm{d}A} - \frac{\gamma_{\mathrm{m}}}{\gamma_{\mathrm{m}}^2 + (1+A)^2}(\tau_{11} - \tau_{22}) = 0.
\end{aligned} \tag{6.162}$$

$(6.161)_3$ integrálásával a $\tau_{33} = \lambda \ln A + C$ eredményhez jutunk. A τ_{33}^{II} kezdeti feltétel figyelembevételével $C = 0$.

Legyen $A = \gamma_{\mathrm{m}} \tan\beta - 1$. Ekkor az alábbi differenciálási szabályok érvényesülnek:

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}\beta} = \gamma_{\mathrm{m}}\left(1 + \tan^2\beta\right), \tag{6.163}$$

$$\frac{\mathrm{d}(\;)}{\mathrm{d}\beta} = \frac{\mathrm{d}(\;)}{\mathrm{d}A}\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}\beta}, \quad \rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}(\;)}{\mathrm{d}A} = \frac{\mathrm{d}(\;)}{\mathrm{d}\beta}\frac{1}{\gamma_{\mathrm{m}}\left(1 + \tan^2\beta\right)} \tag{6.164}$$

Elvégezve a behelyettesítéseket és az átalakításokat (6.162)-on, az alábbi differenciálegyenlet-rendszer adódik:

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}\tau_{11}}{\mathrm{d}\beta} + 2\tau_{12} = \lambda\frac{\gamma_{\mathrm{m}}\left(1 + \tan^2\beta\right)}{\gamma_{\mathrm{m}}\tan\beta - 1}, &&\frac{\mathrm{d}\tau_{12}}{\mathrm{d}\beta} - (\tau_{11} - \tau_{22}) = 0,\\
&\frac{\mathrm{d}\tau_{11}}{\mathrm{d}\beta} - 2\tau_{12} = (\lambda + 2\mu)\frac{\gamma_{\mathrm{m}}\left(1 + \tan^2\beta\right)}{\gamma_{\mathrm{m}}\tan\beta - 1}.
\end{aligned} \tag{6.165}$$

A differenciálegyenlet-rendszer megoldása a következő:

$$\begin{aligned}
\tau_{11} &= C_1 + \mathrm{B}_1(\beta) + \left[C_2 + \mathrm{B}_2(\beta)\right]\cos 2\beta + \left[C_3 + \mathrm{B}_3(\beta)\right]\sin 2\beta, \\
\tau_{22} &= C_1 + \mathrm{B}_1(\beta) - \left[C_2 + \mathrm{B}_2(\beta)\right]\cos 2\beta - \left[C_3 + \mathrm{B}_3(\beta)\right]\sin 2\beta, \\
\tau_{12} &= -\left[C_3 + \mathrm{B}_3(\beta)\right]\cos 2\beta + \left[C_2 + \mathrm{B}_2(\beta)\right]\sin 2\beta,
\end{aligned} \tag{6.166}$$

ahol a $\mathrm{B}_1(\beta), \mathrm{B}_2(\beta), \mathrm{B}_3(\beta)$ függvények alakja a következő:

$$\begin{aligned}
\mathrm{B}_1(\beta) &= (\lambda + \mu)\ln A, \\
\mathrm{B}_2(\beta) &= \frac{\mu}{1+\gamma_{\mathrm{m}}^2}\left[2\gamma_{\mathrm{m}}\left(\beta - \gamma_{\mathrm{m}}\ln\cos\beta\right) + \left(1-\gamma_{\mathrm{m}}^2\right)\ln A\right], \\
\mathrm{B}_3(\beta) &= -\frac{2\gamma_{\mathrm{m}}\mu}{1+\gamma_{\mathrm{m}}^2}\left[\gamma_{\mathrm{m}}\beta + \ln\cos\beta + \ln A\right].
\end{aligned} \tag{6.167}$$

A kezdeti feltételek rendre megegyeznek a 2. terhelési szakasz végén érvényes $\tau_{11}^{\mathrm{II}}, \tau_{22}^{\mathrm{II}}, \tau_{12}^{\mathrm{II}}$ feszültségekkel. (6.166)-be történő behelyettesítésével C_1, C_2, C_3 konstansok meghatározhatók:

$$\begin{aligned}
C_1 &= 0, \\
C_2 &= \left[\tau_{11}^{\mathrm{II}} - \mathrm{B}_1(\beta_{\mathrm{m}})\right]\cos 2\beta_{\mathrm{m}} + \tau_{12}^{\mathrm{II}}\sin 2\beta_{\mathrm{m}} - \mathrm{B}_2(\beta_{\mathrm{m}}), \\
C_3 &= \left[\tau_{11}^{\mathrm{II}} - \mathrm{B}_1(\beta_{\mathrm{m}})\right]\sin 2\beta_{\mathrm{m}} - \tau_{12}^{\mathrm{II}}\cos 2\beta_{\mathrm{m}} - \mathrm{B}_3(\beta_{\mathrm{m}}),
\end{aligned} \tag{6.168}$$

ahol β_{m} a 3. terhelési szakasz elején érvényes β érték, vagyis $\beta_{\mathrm{m}} = \arctan\left[\left(1 + A_{\mathrm{m}}\right)/\gamma_{\mathrm{m}}\right]$. Visszahelyettesítve (6.168)-t (6.166)-be, megkapjuk a *Kirchhoff*-féle analitikus megoldásokat a 3. terhelési szakaszban:

$$\begin{aligned}
\tau_{11} &= \mathrm{B}_1(\beta) + \left[C_2 + \mathrm{B}_2(\beta)\right]\cos 2\beta + \left[C_3 + \mathrm{B}_3(\beta)\right]\sin 2\beta, \\
\tau_{22} &= \mathrm{B}_1(\beta) - \left[C_2 + \mathrm{B}_2(\beta)\right]\cos 2\beta - \left[C_3 + \mathrm{B}_3(\beta)\right]\sin 2\beta, \\
\tau_{12} &= -\left[C_3 + \mathrm{B}_3(\beta)\right]\cos 2\beta + \left[C_2 + \mathrm{B}_2(\beta)\right]\sin 2\beta, \\
\tau_{33} &= \lambda\ln A.
\end{aligned} \tag{6.169}$$

A 3. terhelési szakasz végén a *Kirchhoff*-féle feszültségkomponenseket megkapjuk $A = 1$ (6.169)-be történő behelyettesítésével:

$$\begin{aligned}
\tau_{11}^{\mathrm{III}} &= \frac{C_2\left(\gamma_{\mathrm{m}}^4 - 3\gamma_{\mathrm{m}}^2 - 4\right) - \left(6\mu\gamma_{\mathrm{m}}^3 + 8\mu\gamma_{\mathrm{m}}\right)\arctan\left(2/\gamma_{\mathrm{m}}\right) + \mu\gamma_{\mathrm{m}}^4\ln\left(1 + 4/\gamma_{\mathrm{m}}^2\right) + 4C_3\left(\gamma_{\mathrm{m}} + \gamma_{\mathrm{m}}^3\right)}{\left(1+\gamma_{\mathrm{m}}^2\right)\left(\gamma_{\mathrm{m}}^2 + 4\right)}, \\
\tau_{22}^{\mathrm{III}} &= -\tau_{11}^{\mathrm{III}}, \\
\tau_{12}^{\mathrm{III}} &= \frac{C_3\left(3\gamma_{\mathrm{m}}^2 - \gamma_{\mathrm{m}}^4 + 4\right) + 2\mu\gamma_{\mathrm{m}}^4\arctan\left(2/\gamma_{\mathrm{m}}\right) + \left(3\mu\gamma_{\mathrm{m}}^3 + 4\mu\gamma_{\mathrm{m}}\right)\ln\left(1 + 4/\gamma_{\mathrm{m}}^2\right) + 4C_2\left(\gamma_{\mathrm{m}} + \gamma_{\mathrm{m}}^3\right)}{\left(1+\gamma_{\mathrm{m}}^2\right)\left(\gamma_{\mathrm{m}}^2 + 4\right)}, \\
\tau_{33}^{\mathrm{III}} &= 0.
\end{aligned} \tag{6.170}$$

4. szakasz:

A megoldandó differenciálegyenlet-rendszert megkapjuk $A_{\rm m}=1$-nek a 2. szakaszban érvényes (6.147)-be történő helyettesítésével:

$$\begin{aligned}
&\dot{\tau}_{11}-\frac{4\dot{\gamma}}{4+\gamma^2}\tau_{12}=0, &&\dot{\tau}_{22}+\frac{4\dot{\gamma}}{4+\gamma^2}\tau_{12}=0,\\
&\dot{\tau}_{33}=0, &&\dot{\tau}_{12}+\frac{2\dot{\gamma}}{4+\gamma^2}\left(\tau_{11}-\tau_{22}\right)=\mu\dot{\gamma}.
\end{aligned} \tag{6.171}$$

Az általános megoldás megegyezik a 2. szakaszban számított (6.153)-(6.155) megoldásokkal, $A_{\rm m}=1$ behelyettesítésével:

$$\begin{aligned}
\tau_{11}&=4\mu\left(\cos 2\beta\ln\cos\beta+\beta\sin 2\beta-\sin^2\beta\right)+C_1\cos 2\beta+C_2\sin 2\beta+C,\\
\tau_{22}&=-4\mu\left(\cos 2\beta\ln\cos\beta+\beta\sin 2\beta-\sin^2\beta\right)-C_1\cos 2\beta-C_2\sin 2\beta+C,\\
\tau_{12}&=2\mu\cos 2\beta\left[2\beta-2\tan 2\beta\ln\cos\beta-\gamma/\left(1+A_{\rm m}\right)\right]-C_1\sin 2\beta+C_2\cos 2\beta,
\end{aligned} \tag{6.172}$$

ahol $\beta=\arctan(\gamma/2)$. $(6.171)_3$ integrálásával nyert megoldás:

$$\tau_{33}=C_3. \tag{6.173}$$

A kezdeti feltételek rendre megegyeznek a 3. terhelési szakasz végén érvényes $\tau_{11}^{\rm III},\tau_{22}^{\rm III},\tau_{12}^{\rm III},\tau_{33}^{\rm III}$ feszültségekkel.(6.172), (6.173)-be történő behelyettesítésével C,C_1,C_2,C_3 konstansok meghatározhatók:

$$\begin{aligned}
C&=C_3=0,\\
C_1&=-4\mu\ln\cos\beta_{\rm m}+\tau_{11}^{\rm III}\cos 2\beta_{\rm m}-\tau_{12}^{\rm III}\sin 2\beta_{\rm m},\\
C_2&=\mu\left(\gamma_{\rm m}-4\beta_{\rm m}\right)+\tau_{11}^{\rm III}\sin 2\beta_{\rm m}+\tau_{12}^{\rm III}\cos 2\beta_{\rm m},
\end{aligned} \tag{6.174}$$

ahol $\beta_{\rm m}$ a terhelési szakasz elején érvényes érték, vagyis $\beta_{\rm m}=\arctan\left(\gamma_{\rm m}/2\right)$. Visszahelyettesítve a (6.174) konstansokat (6.172), (6.173)-ba, megkapjuk a keresett megoldásokat:

$$\begin{aligned}
\tau_{11}&=\left(C_1+4\mu\ln\cos\beta\right)\cos 2\beta+\left[C_2+\mu\left(4\beta-\gamma\right)\right]\sin 2\beta,\\
\tau_{12}&=\left[C_2+\mu\left(4\beta-\gamma\right)\right]\cos 2\beta-\left(C_1+4\mu\ln\cos\beta\right)\sin 2\beta,\\
\tau_{22}&=-\tau_{11},\\
\tau_{33}&=0.
\end{aligned} \tag{6.175}$$

Ebben a terhelési szakaszban $J=1$, emiatt a *Kirchhoff*-féle és *Cauchy*-féle feszültség komponensek megegyeznek.

A 4. szakasz végén maradó feszültségeket leíró függvények rendkívül összetettek, ugyanis a 4. szakaszban érvényes megoldásokban a C_1, C_2 konstansok visszamenőleg tartalmazzák az egyes terhelési szakaszok végén érvényes $\tau_{**}^{\rm I}$, $\tau_{**}^{\rm II}$, $\tau_{**}^{\rm II}$ értékeket. Ezek sorozatos visszahelyettesítése miatt adódik a meglehetősen bonyolult összefüggés.

6.2.6. ANALITIKUS MEGOLDÁS A LOGARITMIKUS FESZÜLTSÉG-SEBESSÉG HASZNÁLATA ESETÉN

Mivel a (4.4) szerinti hipoelasztikus konstitutív egyenlet a logaritmikus feszültség-sebesség használata esetén integrálható, így az analitikus megoldás meghatározása az integrálással nyert (4.5) szerinti anyagegyenlet segítségével történik, ahol a *Kirchhoff*-féle feszültség és a pillanatnyi konfiguráción értelmezett *Hencky*-féle alakváltozási tenzor között a kapcsolat lineáris.

1. terhelési szakasz:

A pillanatnyi konfiguráción értelmezett *Hencky*-féle alakváltozási tenzor számítása (3.67) szerint történik:

$$\mathbf{h} = \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{1}{2} \ln \chi_\alpha \mathbf{p}_\alpha \,. \tag{6.176}$$

(6.79), (6.80) figyelembevételével:

$$\mathbf{h} = \ln A \mathbf{E}_2 \otimes \mathbf{E}_2 \,. \tag{6.177}$$

Mivel $\operatorname{tr}(\mathbf{h}) = \ln A$, így (4.5)-be történő behelyettesítések után a feszültségkomponensekre adódó összefüggések:

$$\begin{aligned} \tau_{11} &= \lambda \ln A, & \tau_{22} &= (\lambda + 2\mu) \ln A, \\ \tau_{33} &= \lambda \ln A, & \tau_{12} &= 0. \end{aligned} \tag{6.178}$$

Ebben a terhelési szakaszban $J = A$, így a *Cauchy*-féle feszültségkomponensek:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \lambda \ln A / A, & \sigma_{22} &= (\lambda + 2\mu) \ln A / A, \\ \sigma_{33} &= \lambda \ln A / A, & \sigma_{12} &= 0. \end{aligned} \tag{6.179}$$

2. terhelési szakasz:

Ebben a terhelési szakaszban érvényes *Hencky*-féle alakváltozási tenzort megkapjuk (6.91) és (6.93)-nak (3.67)-be történő behelyettesítésével. Az egyszerűsítések után a komponensekre adódó összefüggés:

$$\begin{aligned} h_{11} &= \frac{1}{\chi_1 - \chi_2} \left[\left(A_\mathrm{m}^2 - \chi_2 \right) \ln A_\mathrm{m} + \frac{1}{2} \left(1 - A_\mathrm{m}^2 + \gamma^2 \right) \ln \chi_1 \right], \\ h_{22} &= \frac{1}{\chi_1 - \chi_2} \left[\left(\chi_1 - A_\mathrm{m}^2 \right) \ln A_\mathrm{m} - \frac{1}{2} \left(1 - A_\mathrm{m}^2 + \gamma^2 \right) \ln \chi_1 \right], \\ h_{12} &= \frac{A_\mathrm{m} \gamma}{\chi_1 - \chi_2} \left(\ln \chi_1 - \ln A_\mathrm{m} \right), \\ h_{33} &= 0. \end{aligned} \tag{6.180}$$

Mivel $\operatorname{tr}(\mathbf{h}) = \ln A_\mathrm{m}$, így (4.5)-be történő behelyettesítések után a feszültségkomponensekre adódó összefüggések:

$$
\begin{aligned}
\tau_{11} &= \frac{2\mu}{\chi_1-\chi_2}\left[\left(A_\mathrm{m}^2-\chi_2\right)\ln A_\mathrm{m}+\frac{1}{2}\left(1-A_\mathrm{m}^2+\gamma^2\right)\ln\chi_1\right]+\lambda\ln A_\mathrm{m},\\
\tau_{22} &= \frac{2\mu}{\chi_1-\chi_2}\left[\left(\chi_1-A_\mathrm{m}^2\right)\ln A_\mathrm{m}-\frac{1}{2}\left(1-A_\mathrm{m}^2+\gamma^2\right)\ln\chi_1\right]+\lambda\ln A_\mathrm{m},\\
\tau_{12} &= \frac{2\mu A_\mathrm{m}\gamma}{\chi_1-\chi_2}\left(\ln\chi_1-\ln A_\mathrm{m}\right),\\
\tau_{33} &= \lambda\ln A_\mathrm{m}.
\end{aligned}
\qquad (6.181)
$$

Ebben a terhelési szakaszban $J = A_\mathrm{m}$, így a *Cauchy*-féle feszültségkomponensek:

$$
\begin{aligned}
\sigma_{11} &= \frac{2\mu}{A_\mathrm{m}\left(\chi_1-\chi_2\right)}\left[\left(A_\mathrm{m}^2-\chi_2\right)\ln A_\mathrm{m}+\frac{1}{2}\left(1-A_\mathrm{m}^2+\gamma^2\right)\ln\chi_1\right]+\lambda\ln A_\mathrm{m}/A_\mathrm{m},\\
\sigma_{22} &= \frac{2\mu}{A_\mathrm{m}\left(\chi_1-\chi_2\right)}\left[\left(\chi_1-A_\mathrm{m}^2\right)\ln A_\mathrm{m}-\frac{1}{2}\left(1-A_\mathrm{m}^2+\gamma^2\right)\ln\chi_1\right]+\lambda\ln A_\mathrm{m}/A_\mathrm{m},\\
\sigma_{12} &= \frac{2\mu\gamma}{\chi_1-\chi_2}\left(\ln\chi_1-\ln A_\mathrm{m}\right),\\
\sigma_{33} &= \lambda\ln A_\mathrm{m}/A_\mathrm{m}.
\end{aligned}
\qquad (6.182)
$$

<u>3. terhelési szakasz:</u>

A 3. terhelési szakaszban érvényes (6.105) szerinti sajátértékek, és (6.106) szerinti sajátprojekciók (3.67)-be történő behelyettesítésével, és az egyszerűsítések elvégzése után:

$$
\begin{aligned}
h_{11} &= \frac{1}{\chi_1-\chi_2}\left[\left(A^2-\chi_2\right)\ln A+\frac{1}{2}\left(1-A^2+\gamma_\mathrm{m}^2\right)\ln\chi_1\right],\\
h_{22} &= \frac{1}{\chi_1-\chi_2}\left[\left(\chi_1-A^2\right)\ln A-\frac{1}{2}\left(1-A^2+\gamma_\mathrm{m}^2\right)\ln\chi_1\right],\\
h_{12} &= \frac{A\gamma_\mathrm{m}}{\chi_1-\chi_2}\left(\ln\chi_1-\ln A\right),\\
h_{33} &= 0.
\end{aligned}
\qquad (6.183)
$$

Mivel $\operatorname{tr}(\mathbf{h}) = \ln A$, így (4.5)-be történő behelyettesítések után a feszültségkomponensekre adódó összefüggések:

$$
\begin{aligned}
\tau_{11} &= \frac{2\mu}{\chi_1-\chi_2}\left[\left(A^2-\chi_2\right)\ln A+\frac{1}{2}\left(1-A^2+\gamma_\mathrm{m}^2\right)\ln\chi_1\right]+\lambda\ln A,\\
\tau_{22} &= \frac{2\mu}{\chi_1-\chi_2}\left[\left(\chi_1-A^2\right)\ln A-\frac{1}{2}\left(1-A^2+\gamma_\mathrm{m}^2\right)\ln\chi_1\right]+\lambda\ln A,\\
\tau_{12} &= \frac{2\mu A\gamma_\mathrm{m}}{\chi_1-\chi_2}\left(\ln\chi_1-\ln A\right),\\
\tau_{33} &= \lambda\ln A.
\end{aligned}
\qquad (6.184)
$$

Ebben a terhelési szakaszban $J = A$, így a *Cauchy*-féle feszültségkomponensek:

$$
\begin{aligned}
\sigma_{11} &= \frac{2\mu}{A(\chi_1-\chi_2)}\left[\left(A^2-\chi_2\right)\ln A + \frac{1}{2}\left(1-A^2+\gamma_{\mathrm{m}}^2\right)\ln\chi_1\right] + \lambda \ln A/A,\\
\sigma_{22} &= \frac{2\mu}{A(\chi_1-\chi_2)}\left[\left(\chi_1-A^2\right)\ln A - \frac{1}{2}\left(1-A^2+\gamma_{\mathrm{m}}^2\right)\ln\chi_1\right] + \lambda \ln A/A,\\
\sigma_{12} &= \frac{2\mu\gamma_{\mathrm{m}}}{\chi_1-\chi_2}\left(\ln\chi_1 - \ln A\right),\\
\sigma_{33} &= \lambda \ln A/A.
\end{aligned}
\tag{6.185}
$$

4. terhelési szakasz:

A *Hencky*-féle alakváltozás komponenseket megkapjuk(6.117), (6.118)-nak (3.67)-be történő behelyettesítésével.

$$
\begin{aligned}
h_{11} &= \frac{\gamma}{2\sqrt{4+\gamma^2}}\ln\left(1+\frac{1}{2}\gamma^2+\frac{1}{2}\gamma\sqrt{4+\gamma^2}\right),\\
h_{22} &= -\frac{\gamma}{2\sqrt{4+\gamma^2}}\ln\left(1+\frac{1}{2}\gamma^2+\frac{1}{2}\gamma\sqrt{4+\gamma^2}\right),\\
h_{12} &= \frac{1}{\sqrt{4+\gamma^2}}\ln\left(1+\frac{1}{2}\gamma^2+\frac{1}{2}\gamma\sqrt{4+\gamma^2}\right),\\
h_{11} &= 0.
\end{aligned}
\tag{6.186}
$$

Ebben a terhelési szakaszban $\mathrm{tr}(\mathbf{h}) = 0$. (4.5)-be történő behelyettesítések után a feszültségkomponensekre adódó összefüggések:

$$
\begin{aligned}
\tau_{12} &= \frac{2\mu}{\sqrt{4+\gamma^2}}\ln\left(1+\frac{1}{2}\gamma^2+\frac{1}{2}\gamma\sqrt{4+\gamma^2}\right),\\
\tau_{11} &= \frac{\mu\gamma}{\sqrt{4+\gamma^2}}\ln\left(1+\frac{1}{2}\gamma^2+\frac{1}{2}\gamma\sqrt{4+\gamma^2}\right),\\
\tau_{22} &= -\tau_{11},\\
\tau_{33} &= 0.
\end{aligned}
\tag{6.187}
$$

Mivel (6.110) szerint $J = 1$, emiatt a *Cauchy*-féle feszültség komponensek megegyeznek a *Kirchhoff*-féle feszültségkomponensekkel.

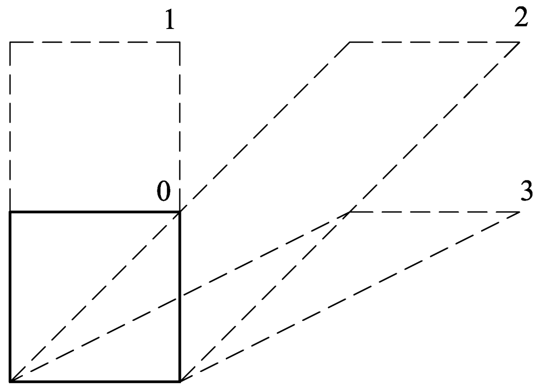
A logaritmikus feszültség-sebesség használata esetén a zárt terhelési folyamat végén nincsen maradó feszültség. Ezt megkapjuk a 4. terhelési szakasz végén érvényes $\gamma = 0$ értéknek (6.187)-be történő behelyettesítésével.

6.2.7. EREDMÉNYEK ÖSSZEHASONLÍTÁSA

Az eredmények megjelenítéséhez az alábbi numerikus értékek használata történik: $E = 2500$, $\nu = 0{,}35$. E értéke dimenziótlannak vett, mivel itt csak az analitikus számítás eredményeinek a megjelenítése a cél azért, hogy a későbbi numerikus eljárás útján nyert értékekkel az összehasonlítás elvégezhető legyen, tehát a számítások nem konkrét anyagtípusra vonatkoznak. Ennek megfelelően a *Lamé*-konstansok:

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} = 2160{,}494, \qquad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} = 925{,}926. \tag{6.188}$$

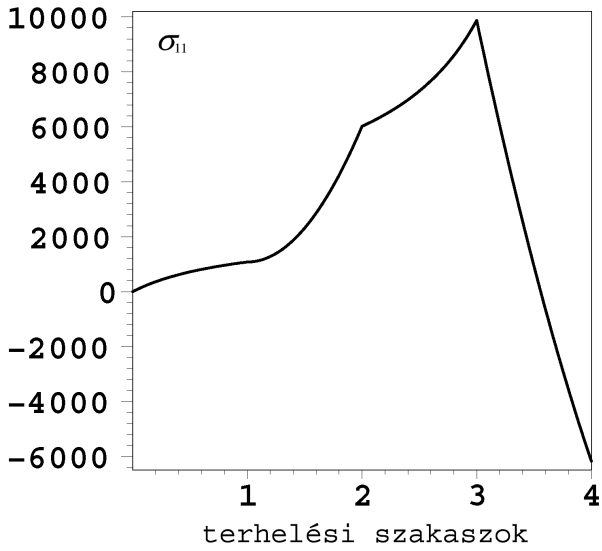
A terhelési paraméterek $A_{\mathrm{m}} = 2$, $\gamma_{\mathrm{m}} = 2$-nek lettek választva. Ebben az esetben kialakuló deformációt szemlélteti a 23. ábra:



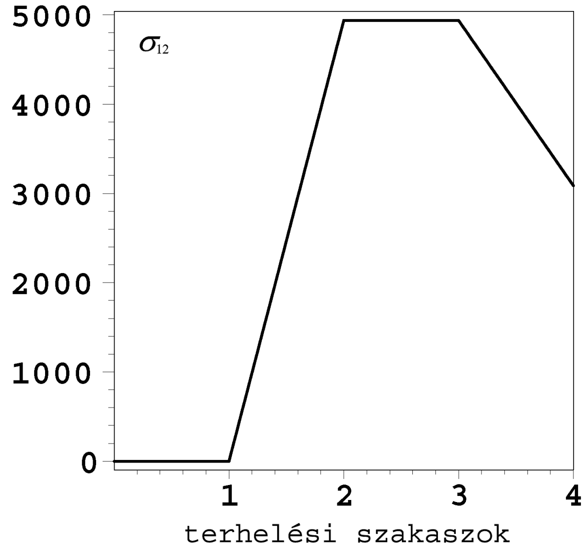
23. ábra: Deformáció a terhelés különböző szakaszaiban.

A 24.-47. ábrák a különböző feszültség-sebességek alkalmazása esetén az analitikusan számított *Cauchy*-féle feszültség komponenseket tartalmazzák.

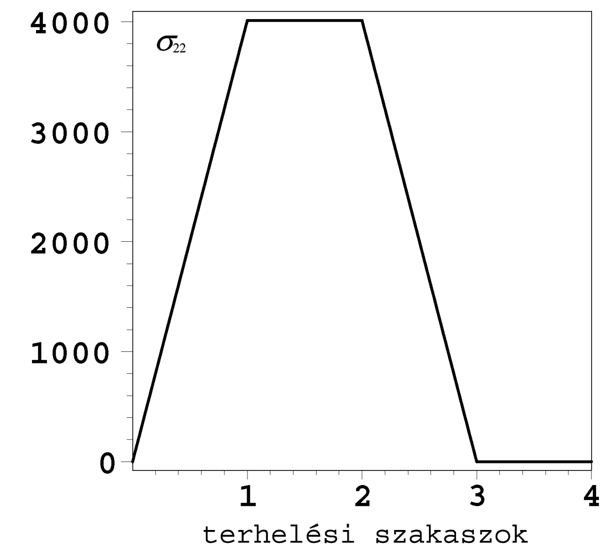
Truesdell-féle feszültség-sebesség:



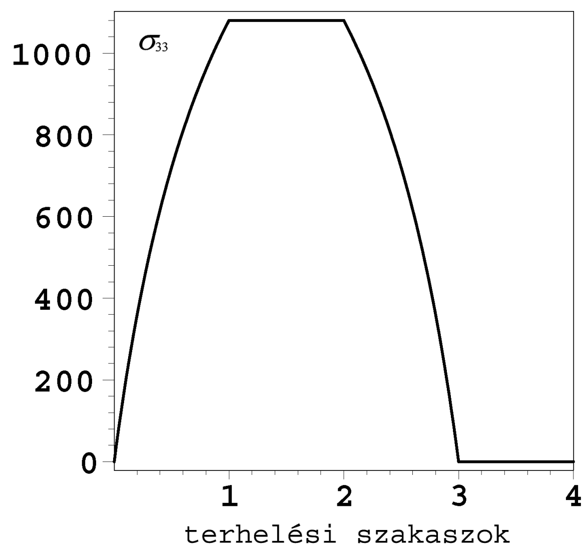
24. ábra: σ_{11} feszültségkomponens az Truesdell-féle feszültség-sebesség használata esetén.



25. ábra: σ_{12} feszültségkomponens az Truesdell-féle feszültség-sebesség használata esetén.

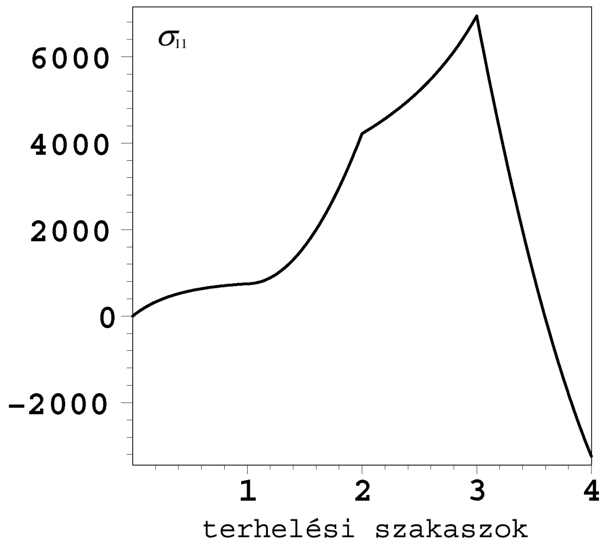


26. ábra: σ_{22} feszültségkomponens az Truesdell-féle feszültség-sebesség használata esetén.

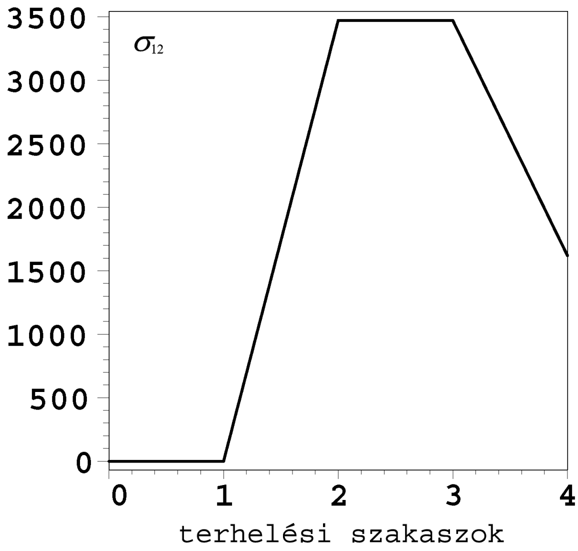


27. ábra: σ_{33} feszültségkomponens az Truesdell-féle feszültség-sebesség használata esetén.

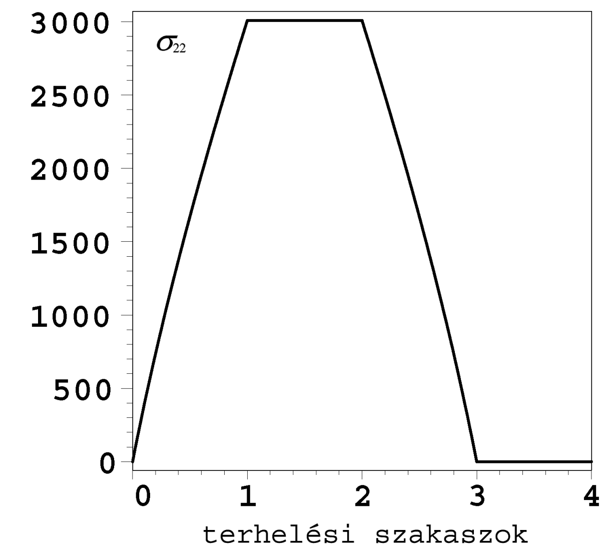
***Oldroyd*-féle feszültség-sebesség:**



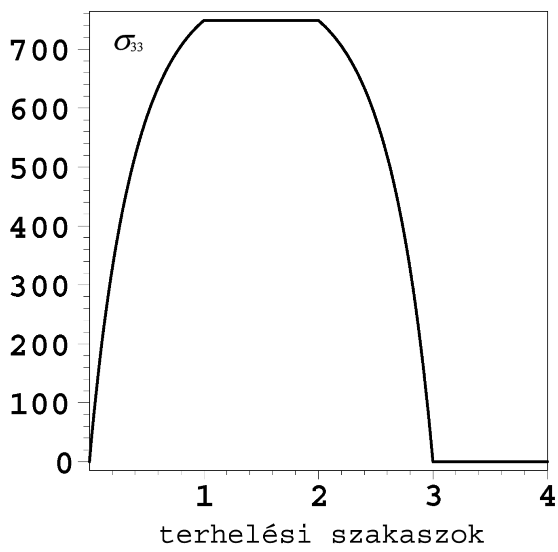
28. ábra: σ_{11} feszültségkomponens az Oldroyd-féle feszültség-sebesség használata esetén.



29. ábra: σ_{12} feszültségkomponens az Oldroyd-féle feszültség-sebesség használata esetén.

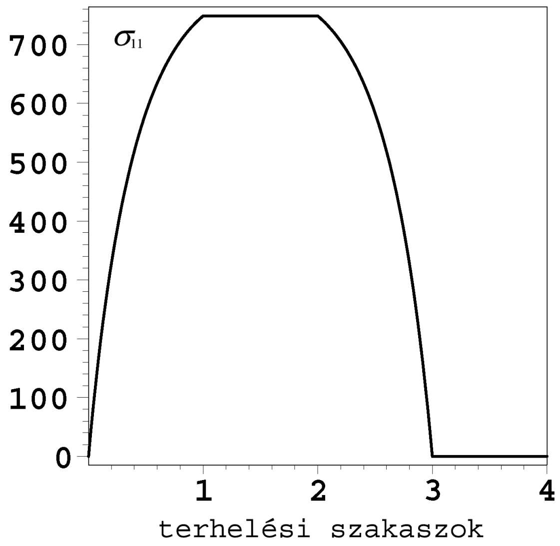


30. ábra: σ_{22} feszültségkomponens az Oldroyd-féle feszültség-sebesség használata esetén.

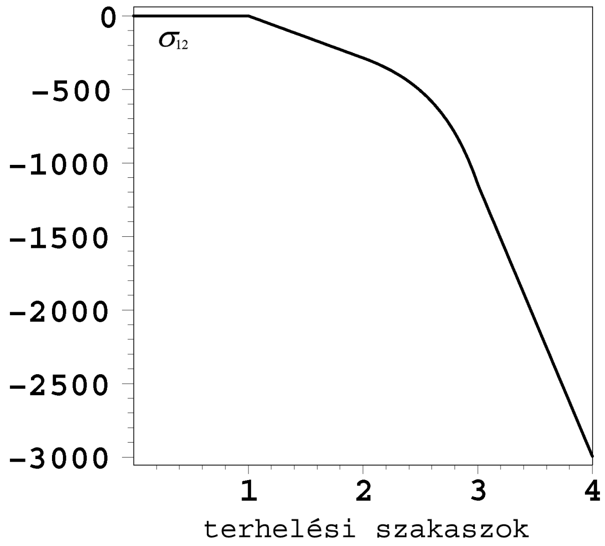


31. ábra: σ_{33} feszültségkomponens az Oldroyd-féle feszültség-sebesség használata esetén.

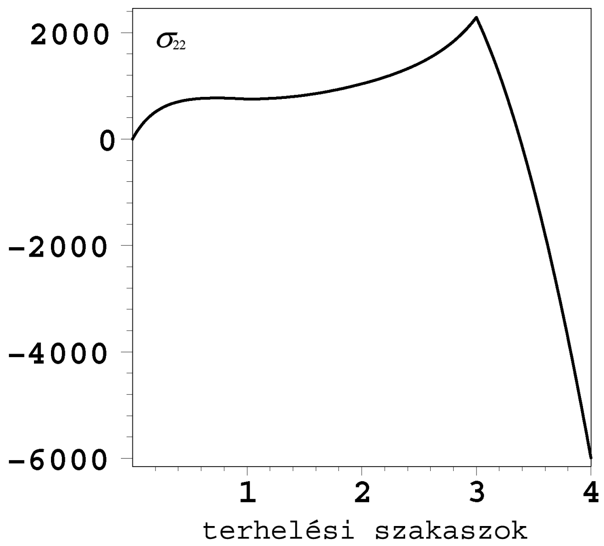
***Cotter-Rivlin*-féle feszültség-sebesség:**



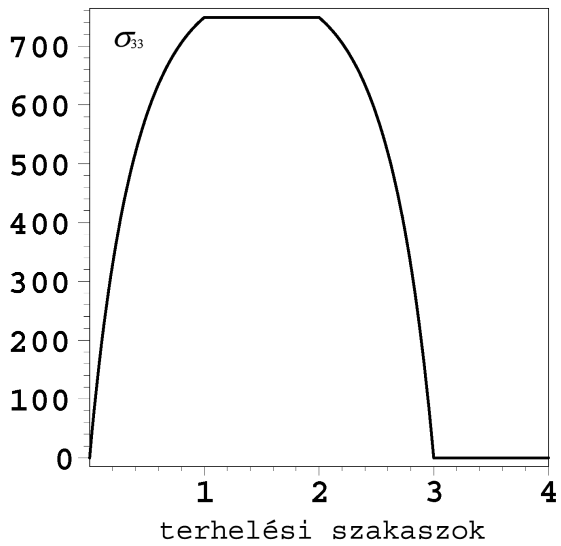
32. ábra: σ_{11} feszültségkomponens a Cotter-Rivlin-féle feszültség-sebesség használata esetén.



33. ábra: σ_{12} feszültségkomponens a Cotter-Rivlin-féle feszültség-sebesség használata esetén.

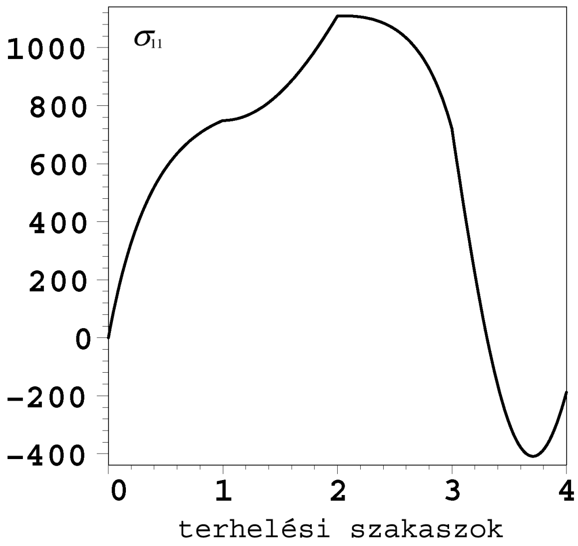


34. ábra: σ_{22} feszültségkomponens a Cotter-Rivlin-féle feszültség-sebesség használata esetén.

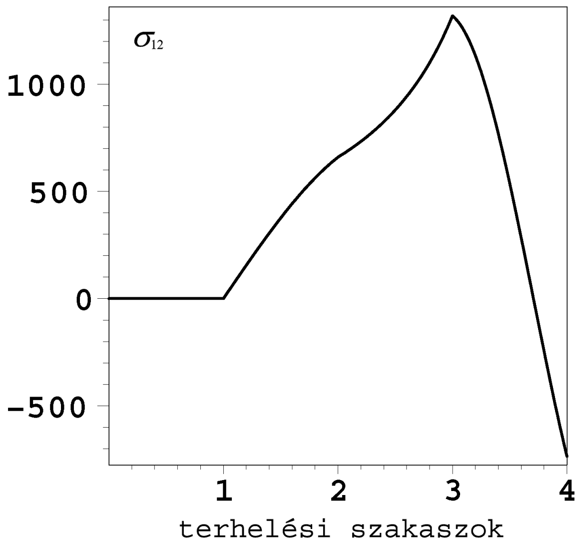


35. ábra: σ_{33} feszültségkomponens a Cotter-Rivlin-féle feszültség-sebesség használata esetén.

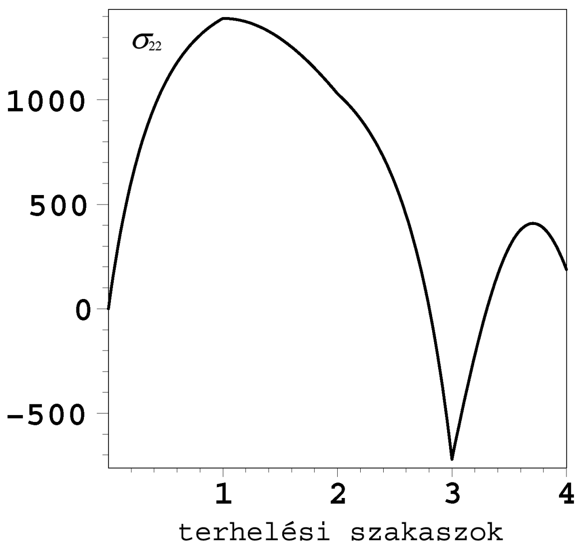
***Zaremba-Jaumann-Noll*-féle feszültség-sebesség:**



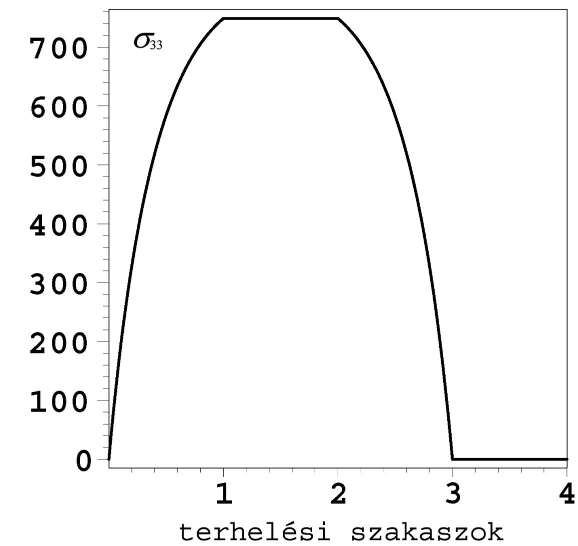
36. ábra: σ_{11} feszültségkomponens a Zaremba-Jaumann-Noll-féle feszültség-sebesség használata esetén.



37. ábra: σ_{12} feszültségkomponens a Zaremba-Jaumann-Noll-féle feszültség-sebesség használata esetén.

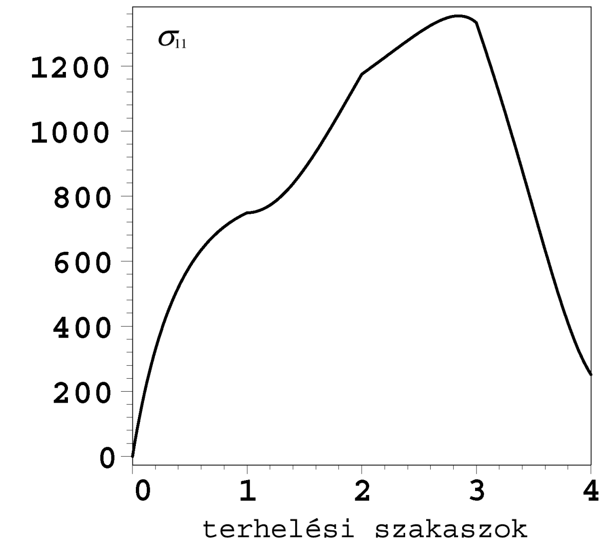


38. ábra: σ_{22} feszültségkomponens a Zaremba-Jaumann-Noll-féle feszültség-sebesség használata esetén.

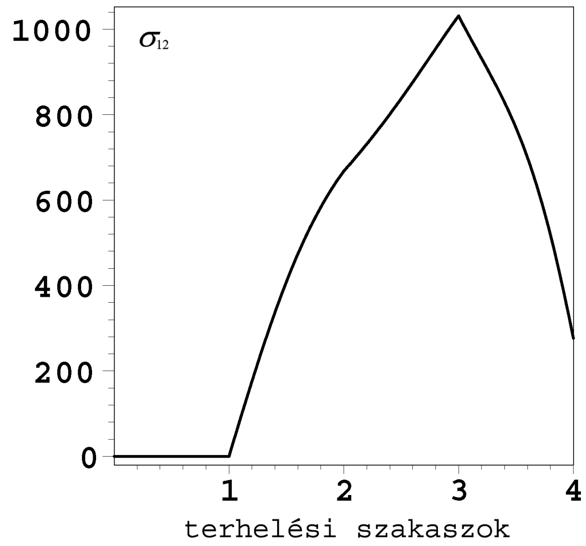


39. ábra: σ_{33} feszültségkomponens a Zaremba-Jaumann-Noll-féle feszültség-sebesség használata esetén.

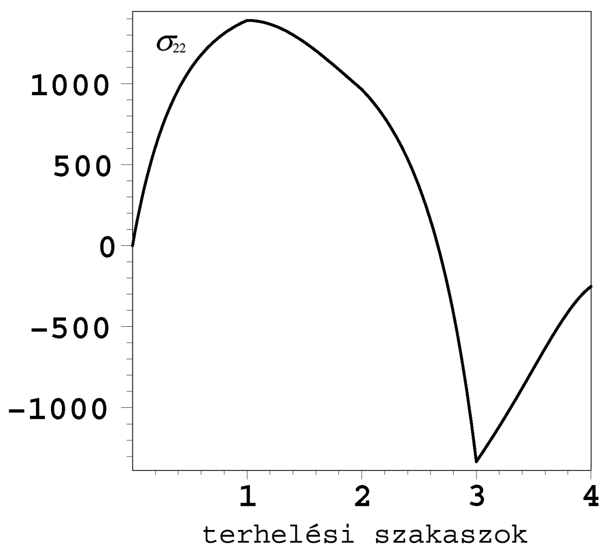
***Green-McInnis-Naghdi*-féle feszültség-sebesség:**



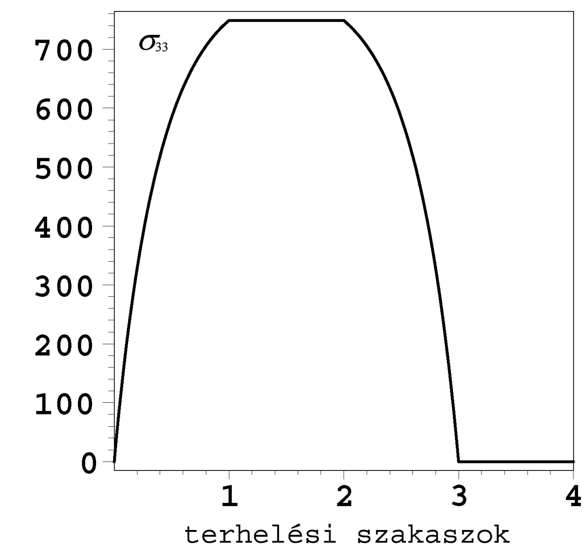
40. ábra: σ_{11} feszültségkomponens a Green-McInnis-Naghdi-féle feszültség-sebesség használata esetén.



41. ábra: σ_{12} feszültségkomponens a Green-McInnis-Naghdi-féle feszültség-sebesség használata esetén.

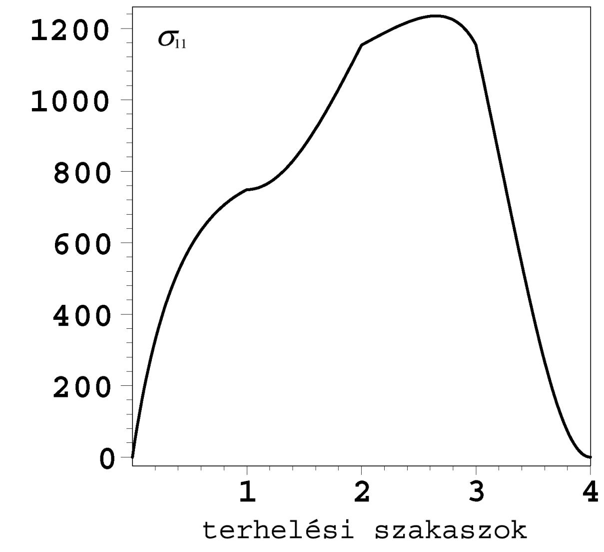


42. ábra: σ_{22} feszültségkomponens a Green-McInnis-Naghdi-féle feszültség-sebesség használata esetén.

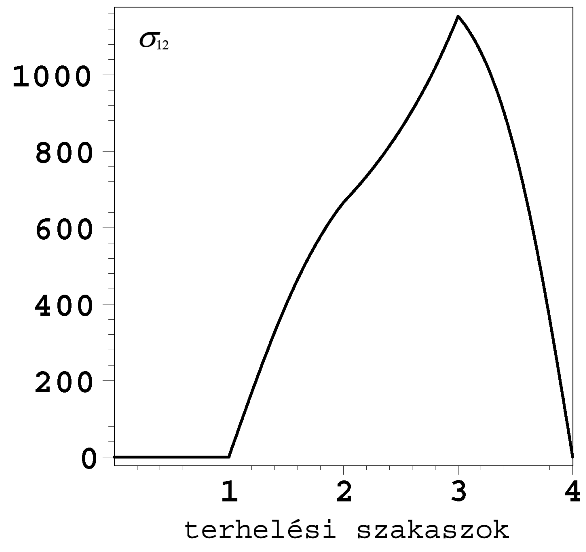


43. ábra: σ_{33} feszültségkomponens a Green-McInnis-Naghdi-féle feszültség-sebesség használata esetén.

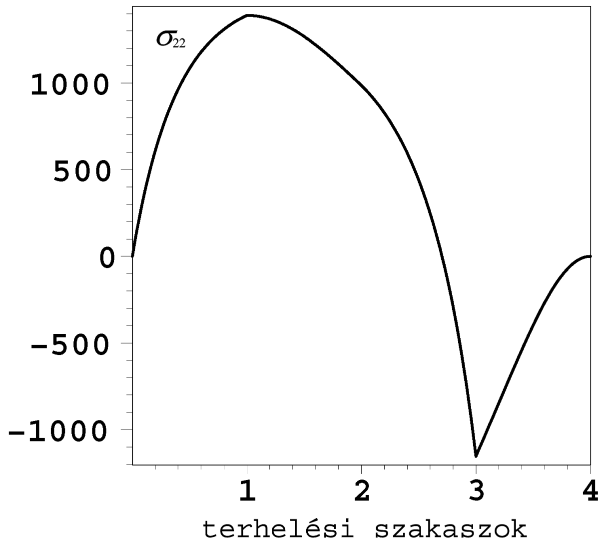
Logaritmikus feszültség-sebesség:



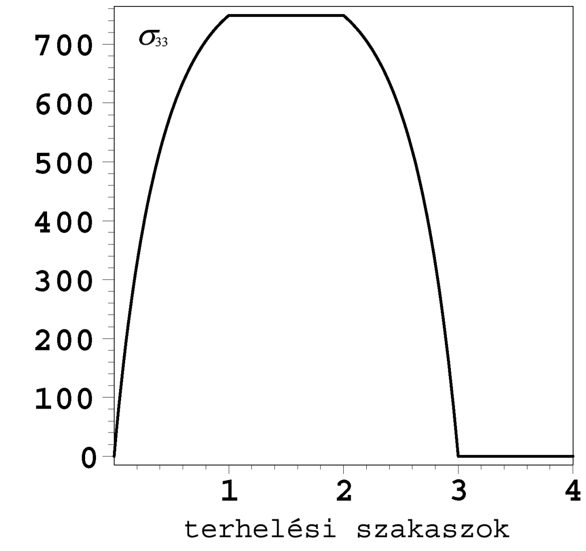
44. ábra: σ_{11} feszültségkomponens a logaritmikus feszültség-sebesség használata esetén.



45. ábra: σ_{12} feszültségkomponens a logaritmikus feszültség-sebesség használata esetén.

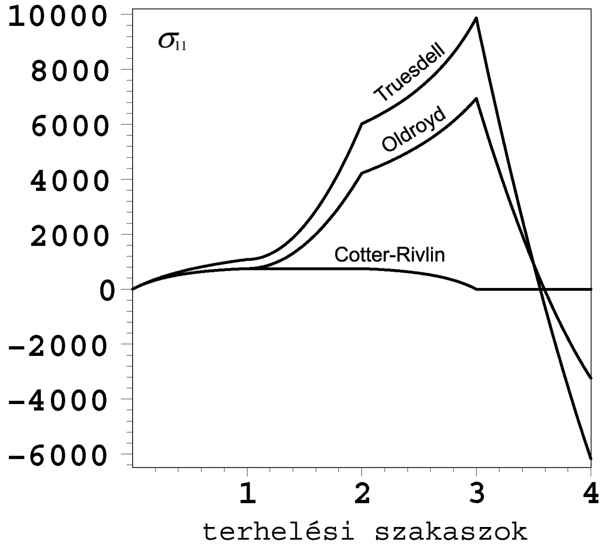


46. ábra: σ_{22} feszültségkomponens a logaritmikus feszültség-sebesség használata esetén.

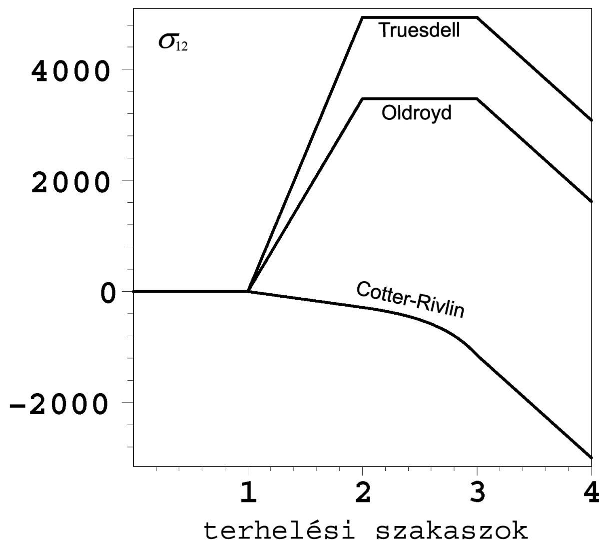


47. ábra: σ_{33} feszültségkomponens a logaritmikus feszültség-sebesség használata esetén.

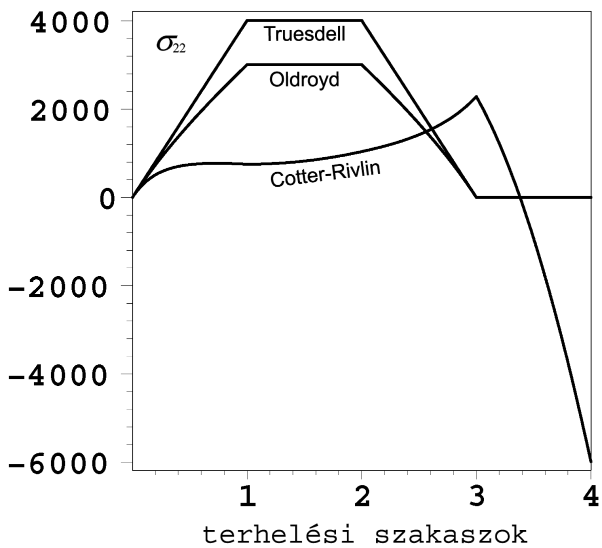
A 48.-51. ábrák a nem együttforgó feszültség-sebességek esetén számított analitikus megoldásokat szemléltetik a terhelési folyamat során.



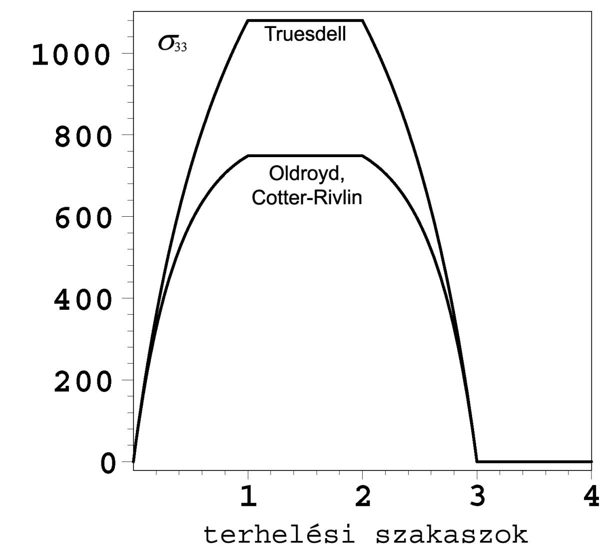
48. ábra: σ_{11} feszültségkomponensek nem együttforgó feszültség-sebességek alkalmazása esetén.



49. ábra: σ_{12} feszültségkomponensek nem együttforgó feszültség-sebességek alkalmazása esetén.

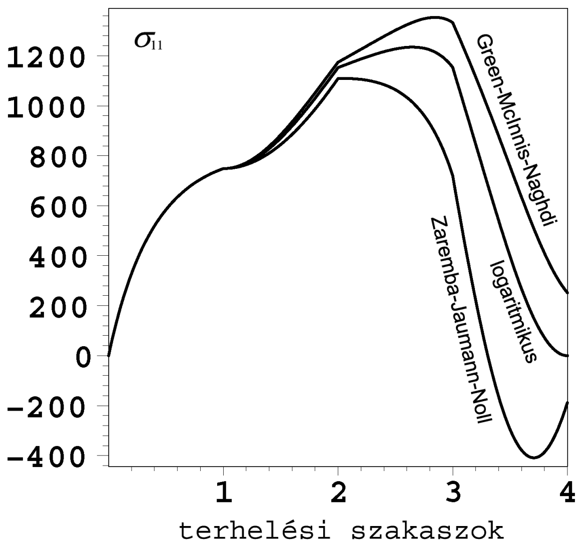


50. ábra: σ_{22} feszültségkomponensek nem együttforgó feszültség-sebességek alkalmazása esetén.

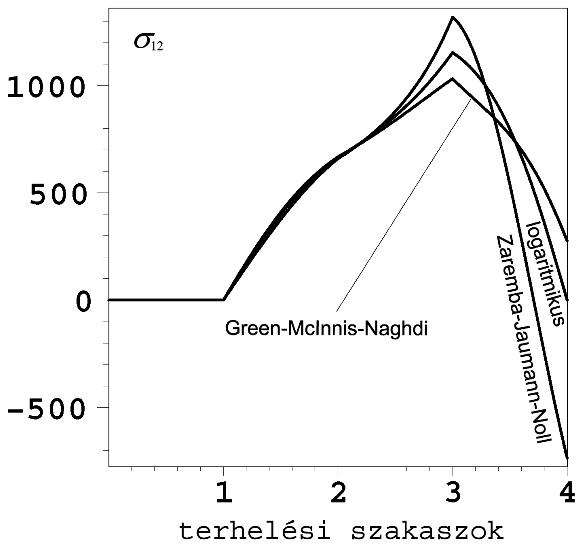


51. ábra: σ_{33} feszültségkomponensek nem együttforgó feszültség-sebességek alkalmazása esetén.

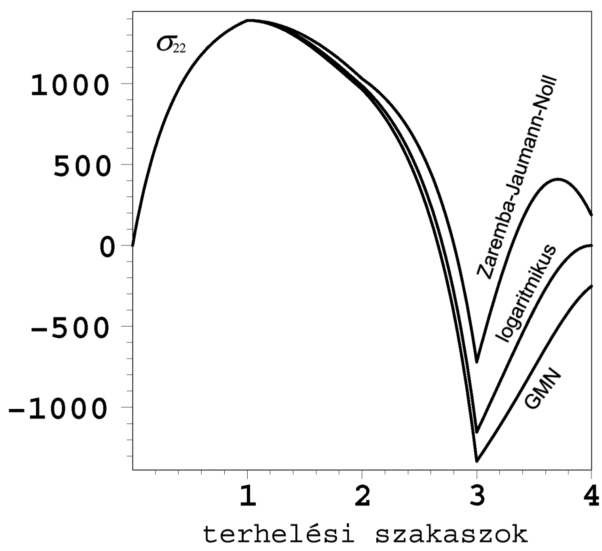
A 52.-55. ábrák az együttforgó feszültség-sebességek esetén számított analitikus megoldásokat szemléltetik a terhelési folyamat során.



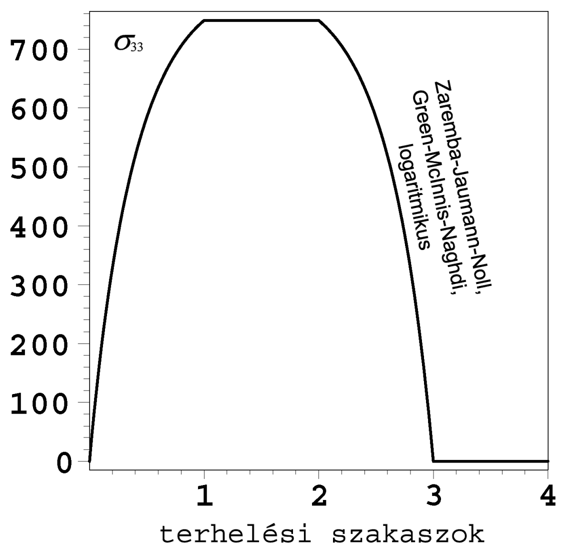
52. ábra: σ_{11} feszültségkomponensek együttforgó feszültség-sebességek alkalmazása esetén.



53. ábra: σ_{12} feszültségkomponensek együttforgó feszültség-sebességek alkalmazása esetén.



54. ábra: σ_{22} feszültségkomponensek együttforgó feszültség-sebességek alkalmazása esetén.

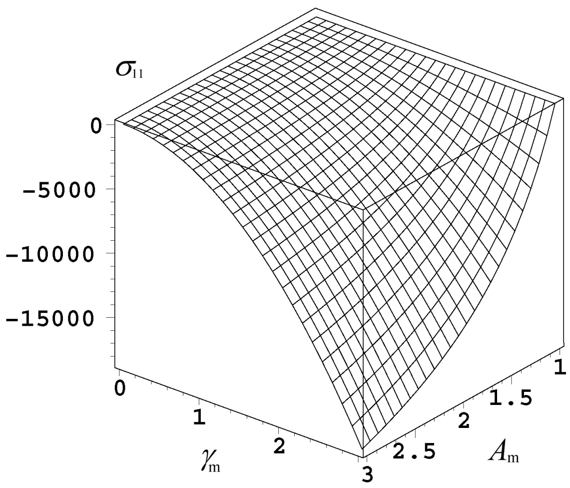


55. ábra: σ_{33} feszültségkomponensek együttforgó feszültség-sebességek alkalmazása esetén.

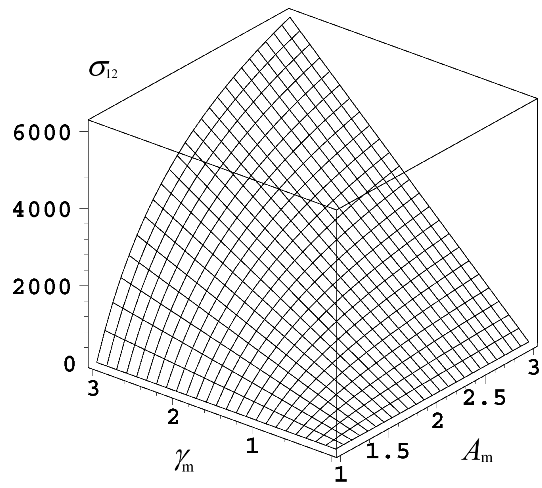
A *Truesdell*-féle és *Oldroyd*-féle feszültség-sebességek esetén az analitikus megoldásokban hasonlóság tapasztalható. Ettől a *Cotter-Rivlin*-féle feszültség-sebesség esetén számított megoldások jellegben eltérnek.

Az együttforgó feszültség-sebességek esetén meghatározott feszültségkomponensek jellegüket tekintve hasonlóak, a deformáció előrehaladtával azonban a közöttük tapasztalható eltérés fokozatosan növekszik.

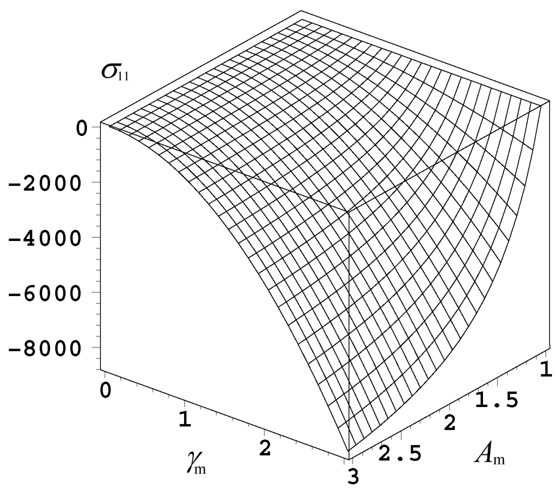
Mivel tisztán rugalmas anyagtörvény vizsgálata történt, emiatt elvárás, hogy a terhelési folyamat végén (amikor a vizsgált test visszatér a feszültségmentes kiindulási állapotába) maradó feszültségek ne keletkezzenek. A logaritmikus feszültség-sebesség kivételével minden esetben tapasztalható valamelyik feszültségkomponensben maradó érték. A terhelési folyamat végén a σ_{33} feszültségkomponens értéke minden esetben zérus. A maradó feszültségeknek a terhelési paraméterektől ($A_\mathrm{m}, \gamma_\mathrm{m}$) függő jellegét szemléltetik az 56.-67. ábrák.



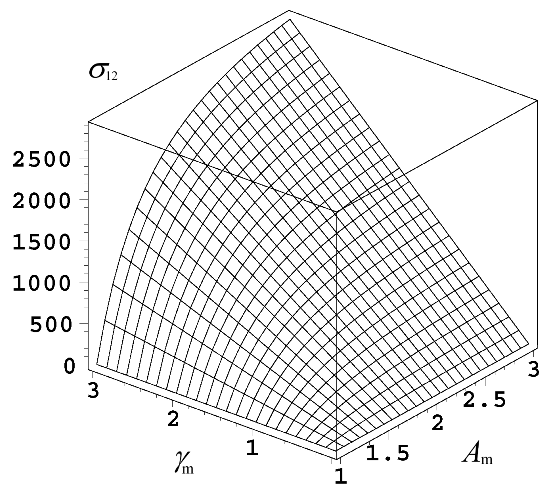
56. ábra: Maradó σ_{11} feszültség a Truesdell-féle feszültség-sebesség esetén.



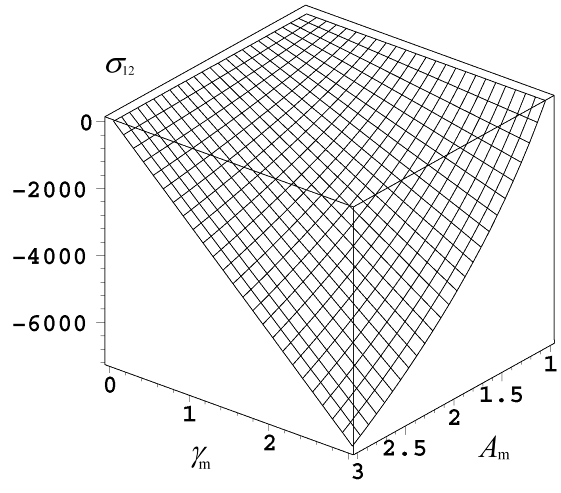
57. ábra: Maradó σ_{12} feszültség a Truesdell-féle feszültség-sebesség esetén.



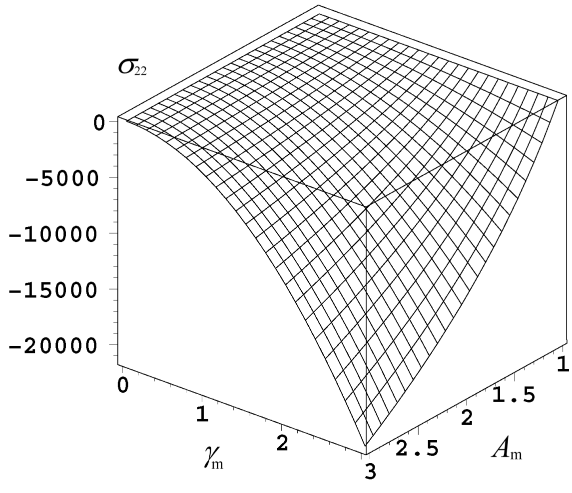
58. ábra: Maradó σ_{11} feszültség az Oldroyd-féle feszültség-sebesség esetén.



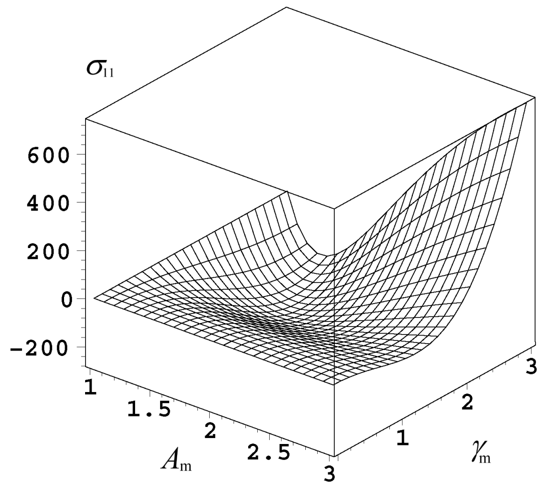
59. ábra: Maradó σ_{12} feszültség az Oldroyd-féle feszültség-sebesség esetén.



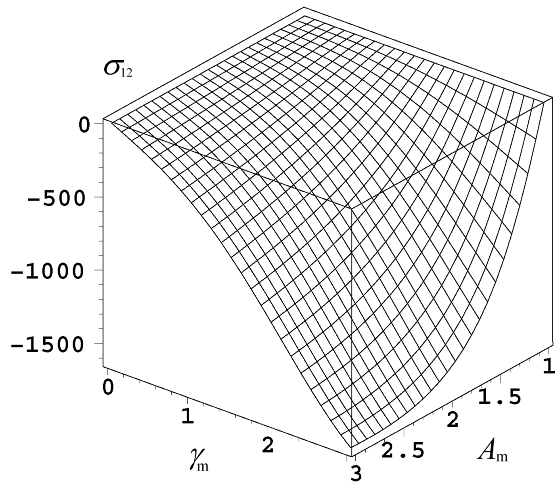
60. ábra: Maradó σ_{12} feszültség a Cotter-Rivlin-féle feszültség-sebesség esetén.



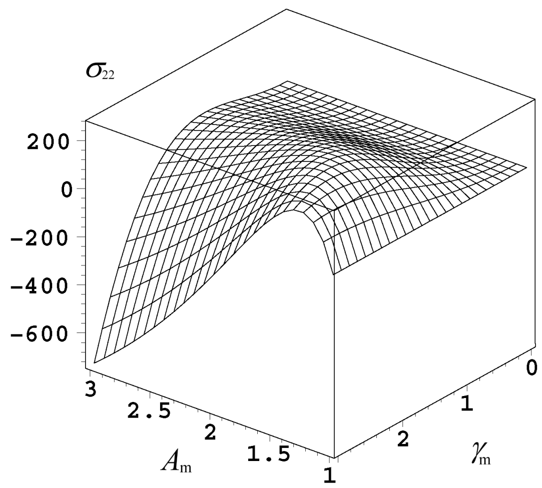
61. ábra: Maradó σ_{22} feszültség a Cotter-Rivlin-féle feszültség-sebesség esetén.



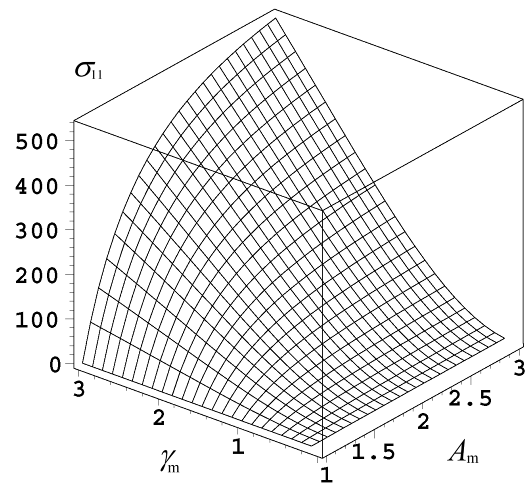
62. ábra: Maradó σ_{11} feszültség a Zaremba-Jaumann-Noll-féle feszültség-sebesség esetén.



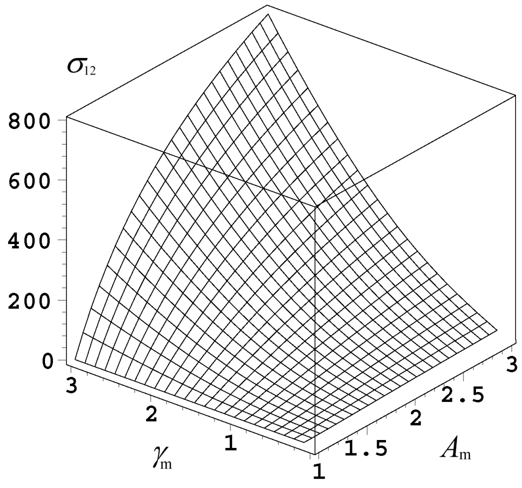
63. ábra: Maradó σ_{12} feszültség a Zaremba-Jaumann-Noll-féle feszültség-sebesség esetén.



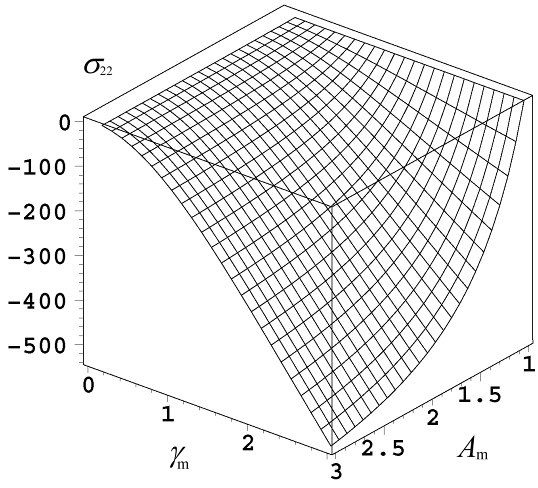
64. ábra: Maradó σ_{22} feszültség a Zaremba-Jaumann-Noll-féle feszültség-sebesség esetén.



65. ábra: Maradó σ_{11} feszültség a Green-McInnis-Naghdi-féle feszültség-sebesség esetén.



66. ábra: Maradó σ_{12} feszültség a Green-McInnis-Naghdi-féle feszültség-sebesség esetén.



67. ábra: Maradó σ_{22} feszültség a Green-McInnis-Naghdi-féle feszültség-sebesség esetén.

Megállapítható, hogy a vizsgált zárt terhelési folyamat esetén az együttforgó feszültség-sebességeknél a maradó feszültségek lényegesen kisebbek, mint a nem együttforgó feszültség-sebességek esetén kapott értékek.

7. NUMERIKUS SZÁMÍTÁSOK

7.1. NUMERIKUS INTEGRÁLÁSI ALGORITMUS EGYÜTTFORGÓ DERIVÁLTAK ESETÉN

A növekményes alakú (4.5) szerinti hipoelasztikus konstitutív egyenlet az ismert objektív deriváltak közül egyedül a logaritmikus feszültség-sebesség alkalmazása esetén integrálható [16]. A többi feszültség-sebesség alkalmazása esetén a feszültségkomponensek meghatározásához a konstitutív egyenlet numerikus integrálása szükséges. Fontos megjegyezni, hogy a megoldások a feszültség-komponensekre adódó differenciálegyenlet-rendszerek numerikus megoldásával is előállíthatóak.

A numerikus integrálás során a pillanatnyi t_{n} időpontban a Ω_{n} pillanatnyi konfiguráció kinematikai mennyiségei, valamint az ehhez a konfigurációhoz tartozó $\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{n}}$ feszültségállapot ismert. A későbbi $t_{\mathrm{n+1}} = t_{\mathrm{n}} + \Delta t$ időpillanatban a test által elfoglalt $\Omega_{\mathrm{n+1}}$ konfiguráció szintén ismert, de az ehhez tartozó $\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{n+1}}$ feszültségállapot nem. A numerikus integrálás célja a $\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{n+1}}$ meghatározása. Mivel $\Omega_{\mathrm{n+1}}$ ismert, így az ehhez tartozó kinematikai mennyiségek meghatározhatóak.

Az $\Omega_{\mathrm{n+1}}$ állapotban az anyagi pontok térbeli helyzete:

$$\boldsymbol{\varphi}_{\mathrm{n+1}}(\mathbf{X}) = \boldsymbol{\varphi}_{\mathrm{n}}(\mathbf{X}) + \mathbf{U}(\mathbf{X}) = \boldsymbol{\varphi}_{\mathrm{n}}(\mathbf{X}) + \mathbf{u}\left[\boldsymbol{\varphi}_{\mathrm{n}}(\mathbf{X})\right], \tag{7.1}$$

ahol $\mathbf{u}$ az ismert elmozdulás érték. A t_{n} és $t_{\mathrm{n+1}}$ időpontok között érvényes konfigurációra történő leképzés közelítése lineáris interpolációval történik:

$$\boldsymbol{\varphi}_{\mathrm{n}+\alpha} = \alpha\boldsymbol{\varphi}_{\mathrm{n+1}} + (1-\alpha)\boldsymbol{\varphi}_{\mathrm{n}}, \qquad \alpha \in [0,1]. \tag{7.2}$$

A t_{α} időpillanatban az alakváltozási gradiens számítása (3.4) szerint:

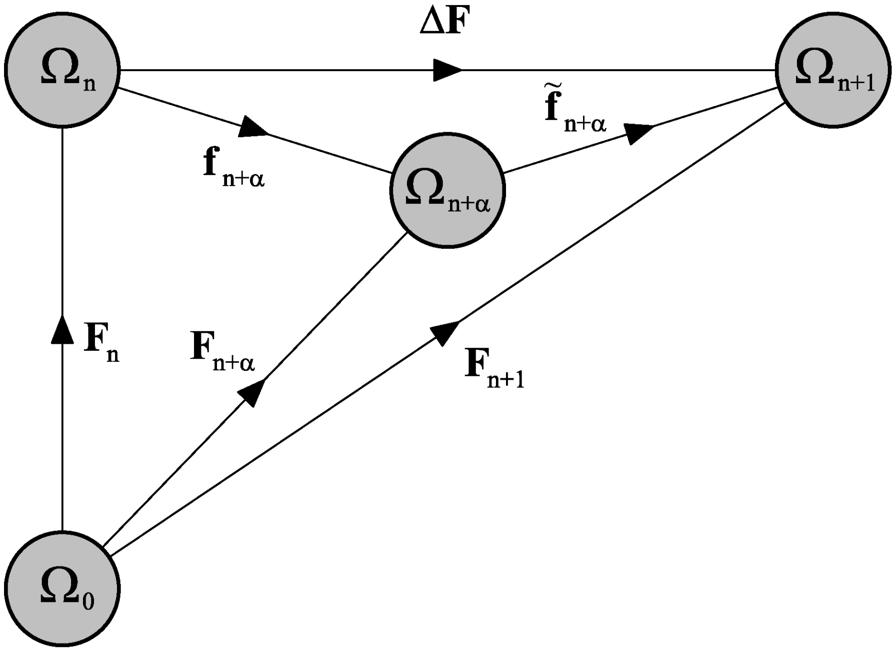
$$\mathbf{F}_{\mathrm{n}+\alpha} = \frac{\partial\boldsymbol{\varphi}_{\mathrm{n}+\alpha}}{\partial\mathbf{X}}. \tag{7.3}$$

Felhasználva (7.2)-t az alakváltozási gradiens közelítése:

$$\mathbf{F}_{\mathrm{n}+\alpha} = \alpha\mathbf{F}_{\mathrm{n+1}} + (1-\alpha)\mathbf{F}_{\mathrm{n}}. \tag{7.4}$$

A különböző konfigurációk között érvényes alakváltozási gradiensek számítása:

$$\begin{aligned}
\Delta\mathbf{F} &= \mathbf{F}_{\mathrm{n+1}}\mathbf{F}_{\mathrm{n}}^{-1} \\
\mathbf{f}_{\mathrm{n}+\alpha} &= \mathbf{F}_{\mathrm{n}+\alpha}\mathbf{F}_{\mathrm{n}}^{-1}, \\
\tilde{\mathbf{f}}_{\mathrm{n}+\alpha} &= \Delta\mathbf{F}\mathbf{f}_{\mathrm{n}+\alpha}^{-1} = \mathbf{F}_{\mathrm{n+1}}\mathbf{F}_{\mathrm{n}+\alpha}^{-1}.
\end{aligned} \tag{7.5}$$



68. ábra: Alakváltozási gradiensek értelmezése a különböző konfigurációk között.

Az elmozdulás növekmény gradiense $\mathbf{x}_{n+\alpha} = \boldsymbol{\varphi}_{n+\alpha}(\mathbf{X})$-re vonatkozólag:

$$\mathbf{g}_{n+\alpha}(\mathbf{x}_{n+\alpha}) = \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}_{n+\alpha})}{\partial \mathbf{x}_{n+\alpha}} = \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{X}} \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}_{n+\alpha}} = \operatorname{Grad}(\mathbf{U}) \mathbf{F}_{n+\alpha}^{-1}, \tag{7.6}$$

$$\operatorname{Grad}(\mathbf{U}) = \mathbf{F}_{n+1} - \mathbf{F}_{n}, \tag{7.7}$$

ahol $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}_{n+\alpha})$ az elmozdulás növekmény az $\Omega_{n+\alpha}$ konfigurációban felírva.

Az *Euler*-féle sebességmező gradiens számítása az $\Omega_{n+\alpha}$ konfigurációban:

$$\mathbf{l}_{n+\alpha} = \dot{\mathbf{F}}_{n+\alpha} \mathbf{F}_{n+\alpha}^{-1}, \quad \text{ahol} \quad \dot{\mathbf{F}}_{n+\alpha} = \frac{1}{\Delta t}(\mathbf{F}_{n+1} - \mathbf{F}_{n}) = \frac{1}{\Delta t} \operatorname{Grad}(\mathbf{U}). \tag{7.8}$$

Figyelembe véve (7.6)-t:

$$\mathbf{l}_{n+\alpha} = \frac{1}{\Delta t} \mathbf{g}_{n+\alpha}. \tag{7.9}$$

Az alakváltozási gradiens felírható (3.42) és (3.43) segítségével:

$$\mathbf{d}_{n+\alpha} = \frac{1}{2} \mathbf{F}_{n+\alpha}^{-T} \dot{\mathbf{C}}_{n+\alpha} \mathbf{F}_{n+\alpha}^{-1}, \tag{7.10}$$

ahol $\dot{\mathbf{C}}_{n+\alpha}$ számítása a középpont-szabály segítségével:

$$\dot{\mathbf{C}}_{n+\alpha}=\frac{1}{\Delta t}\left(\mathbf{C}_{n+1}-\mathbf{C}_{n}\right)=\frac{1}{\Delta t}\left(\mathbf{F}_{n+1}^{T}\mathbf{F}_{n+1}-\mathbf{F}_{n}^{T}\mathbf{F}_{n}\right). \tag{7.11}$$

Visszaírva (7.11)-t (7.10)-be, majd felhasználva (7.4)-t, illetve (7.6)-t, megkapjuk az alakváltozási gradiens számítására szolgáló összefüggést:

$$\mathbf{d}_{n+\alpha}=\frac{1}{2\Delta t}\left[\mathbf{g}_{n+\alpha}+\mathbf{g}_{n+\alpha}^{T}+\left(1-2\alpha\right)\mathbf{g}_{n+\alpha}^{T}\mathbf{g}_{n+\alpha}\right]. \tag{7.12}$$

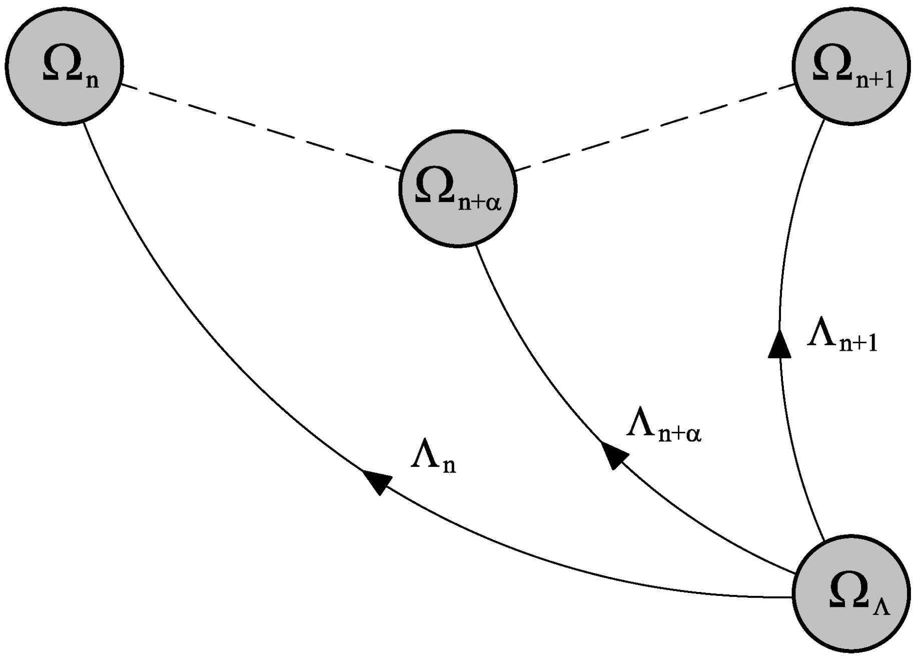
Az örvénytenzor számítása az $\Omega_{n+\alpha}$ konfigurációban (3.25) felhasználásával:

$$\begin{aligned}\mathbf{w}_{n+\alpha}&=\mathbf{l}_{n+\alpha}-\mathbf{d}_{n+\alpha}=\frac{1}{\Delta t}\mathbf{g}_{n+\alpha}-\frac{1}{2\Delta t}\left[\mathbf{g}_{n+\alpha}+\mathbf{g}_{n+\alpha}^{T}+\left(1-2\alpha\right)\mathbf{g}_{n+\alpha}^{T}\mathbf{g}_{n+\alpha}\right],\\ \mathbf{w}_{n+\alpha}&=\frac{1}{2\Delta t}\left[\mathbf{g}_{n+\alpha}-\mathbf{g}_{n+\alpha}^{T}-\left(1-2\alpha\right)\mathbf{g}_{n+\alpha}^{T}\mathbf{g}_{n+\alpha}\right].\end{aligned} \tag{7.13}$$

A *Kirchhoff*-féle feszültségre felírt objektív együttforgó feszültség-sebességeknél a pillanatnyi konfiguráción értelmezett *Kirchhoff*-féle feszültség Ω_{Λ} -ra történő transzformálása után az együtt-forgó konfiguráción történik az idő szerinti deriválás, majd a kapott mennyiség visszatranszfor-málása történik Ω_t -re.

Jelölje az Ω_n, $\Omega_{n+\alpha}$ és Ω_{n+1} konfiguráción értelmezett $\boldsymbol{\tau}_n$, $\boldsymbol{\tau}_{n+\alpha}$ és $\boldsymbol{\tau}_{n+1}$ *Kirchhoff*-féle feszültségek Ω_{Λ} konfigurációra történő forgatásával nyert megfelelőjét:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Sigma}_{n}&=\boldsymbol{\Lambda}_{n}^{T}\boldsymbol{\tau}_{n}\boldsymbol{\Lambda}_{n},\\ \boldsymbol{\Sigma}_{n+\alpha}&=\boldsymbol{\Lambda}_{n+\alpha}^{T}\boldsymbol{\tau}_{n+\alpha}\boldsymbol{\Lambda}_{n+\alpha},\\ \boldsymbol{\Sigma}_{n+1}&=\boldsymbol{\Lambda}_{n+1}^{T}\boldsymbol{\tau}_{n+1}\boldsymbol{\Lambda}_{n+1}.\end{aligned} \tag{7.14}$$



69. ábra: Az együttforgó konfigurációba forgató ortogonális tenzorok értelmezése.

Ebben az esetben az együttforgó konfiguráción a numerikus integrálás a középpont-szabály felhasználásával:

$$\boldsymbol{\Sigma}_{n+1} - \boldsymbol{\Sigma}_{n} = \Delta t\, \dot{\boldsymbol{\Sigma}}_{n+\alpha}\,, \tag{7.15}$$

ahol (3.114) felhasználásával:

$$\dot{\boldsymbol{\Sigma}}_{n+\alpha} = \overline{\left(\boldsymbol{\Lambda}^{T}_{n+\alpha}\boldsymbol{\tau}_{n+\alpha}\boldsymbol{\Lambda}_{n+\alpha}\right)}^{\bullet} = \boldsymbol{\Lambda}^{T}_{n+\alpha}\, \overset{o}{\boldsymbol{\tau}}{}^{*}_{n+\alpha}\boldsymbol{\Lambda}_{n+\alpha}\,. \tag{7.16}$$

Visszahelyettesítve (7.15)-be megkapjuk az (n+1) állapotban érvényes $\boldsymbol{\Sigma}_{n+1}$ feszültséget:

$$\boldsymbol{\Sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\Sigma}_{n} + \Delta t\, \dot{\boldsymbol{\Sigma}}_{n+\alpha} = \boldsymbol{\Sigma}_{n} + \Delta t \boldsymbol{\Lambda}^{T}_{n+\alpha}\, \overset{o}{\boldsymbol{\tau}}{}^{*}_{n+\alpha}\boldsymbol{\Lambda}_{n+\alpha}\,. \tag{7.17}$$

(7.14) felhasználásával felírható az Ω_{n+1} konfiguráción keresett *Kirchhoff*-féle feszültség:

$$\boldsymbol{\Lambda}^{T}_{n+1}\boldsymbol{\tau}_{n+1}\boldsymbol{\Lambda}_{n+1} = \boldsymbol{\Lambda}^{T}_{n}\boldsymbol{\tau}_{n}\boldsymbol{\Lambda}_{n} + \Delta t \boldsymbol{\Lambda}^{T}_{n+\alpha}\, \overset{o}{\boldsymbol{\tau}}{}^{*}_{n+\alpha}\boldsymbol{\Lambda}_{n+\alpha}\,, \tag{7.18}$$

ahonnan

$$\boldsymbol{\tau}_{n+1} = \boldsymbol{\Lambda}_{n+1}\left[\boldsymbol{\Lambda}^{T}_{n}\boldsymbol{\tau}_{n}\boldsymbol{\Lambda}_{n} + \Delta t \boldsymbol{\Lambda}^{T}_{n+\alpha}\, \overset{o}{\boldsymbol{\tau}}{}^{*}_{n+\alpha}\boldsymbol{\Lambda}_{n+\alpha}\right]\boldsymbol{\Lambda}^{T}_{n+1}\,. \tag{7.19}$$

Nulladrendű hipoelasztikus anyagtörvény alkalmazása esetén (4.2) és (4.3) felhasználásával:

$$\boldsymbol{\tau}_{n+1} = \boldsymbol{\Lambda}_{n+1}\left[\boldsymbol{\Lambda}^{T}_{n}\boldsymbol{\tau}_{n}\boldsymbol{\Lambda}_{n} + \Delta t \boldsymbol{\Lambda}^{T}_{n+\alpha}\left(\mathscr{C} : \mathbf{d}_{n+\alpha}\right)\boldsymbol{\Lambda}_{n+\alpha}\right]\boldsymbol{\Lambda}^{T}_{n+1}\,, \tag{7.20}$$

$$\boldsymbol{\tau}_{n+1} = \boldsymbol{\Lambda}_{n+1}\left[\boldsymbol{\Lambda}^{T}_{n}\boldsymbol{\tau}_{n}\boldsymbol{\Lambda}_{n} + \Delta t \boldsymbol{\Lambda}^{T}_{n+\alpha}\left(\lambda \operatorname{tr}\left(\mathbf{d}_{n+\alpha}\right)\boldsymbol{\delta} + 2\mu \mathbf{d}_{n+\alpha}\right)\boldsymbol{\Lambda}_{n+\alpha}\right]\boldsymbol{\Lambda}^{T}_{n+1}\,. \tag{7.21}$$

A (7.21) szereplő ortogonális forgató tenzorok meghatározására szolgáló numerikus algoritmus a középpont-szabály, valamint (3.130), (3.131) és (3.132) figyelembevételével a következő:

$$\boldsymbol{\Lambda}_{n+1} = \exp\left(\Delta t \boldsymbol{\Omega}^{*}_{n+\alpha}\right)\boldsymbol{\Lambda}_{n}\,, \qquad \boldsymbol{\Lambda}_{0} = \boldsymbol{\delta}\,, \tag{7.22}$$

$$\boldsymbol{\Lambda}_{n+\alpha} = \exp\left[\left(1-\alpha\right)\Delta t \boldsymbol{\Omega}^{*}_{n+\alpha}\right]\boldsymbol{\Lambda}_{n}\,, \qquad \boldsymbol{\Lambda}_{0} = \boldsymbol{\delta}\,, \tag{7.23}$$

ahol $\boldsymbol{\Omega}^{*}_{n+\alpha}$ jelenti az $\Omega_{n+\alpha}$ konfigurációban érvényes spintenzort, melynek számítása (3.116) felhasználásával:

$$\boldsymbol{\Omega}^{*}_{n+\alpha} = \mathbf{w}_{n+\alpha} + \sum_{\alpha=1,\beta=1,\alpha\neq\beta}^{m} f^{*}\left(\frac{\chi_{\alpha}}{\chi_{\beta}}\right)\mathbf{p}_{\alpha,n+\alpha}\mathbf{d}_{\alpha,n+\alpha}\mathbf{p}_{\beta,n+\alpha}\,. \tag{7.24}$$

(3.124)-nek megfelelően $\overline{\boldsymbol{\Omega}}{}^{L}_{n+\alpha}$ számításakor a (7.24) összefüggésből a $\mathbf{w}_{n+\alpha}$ elmarad. Az exponenciális leképzés számítási lépéseit a 4. Táblázat foglalja össze [51].

4. Táblázat: Exponenciális leképzés algoritmusa.

1. A ferdén szimmetrikus $\Delta t\boldsymbol{\Omega}^*_{\mathrm{n}+\alpha}$ tenzor és a hozzá tartozó $\boldsymbol{\omega}^*_{\mathrm{n}+\alpha}$ szögsebesség vektor számítása: $$\mathbf{W}^*_{\mathrm{n}+\alpha}=\Delta t\boldsymbol{\Omega}^*_{\mathrm{n}+\alpha}=\begin{bmatrix}0 & -\omega_3 & \omega_2\\ \omega_3 & 0 & -\omega_1\\ -\omega_2 & \omega_1 & 0\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{\omega}^*_{\mathrm{n}+\alpha}=\begin{bmatrix}\omega_1\\ \omega_2\\ \omega_3\end{bmatrix},$$ $$\omega_{\mathrm{n}+\alpha}=\left\Vert\boldsymbol{\omega}^*_{\mathrm{n}+\alpha}\right\Vert=\left(\omega_1^2+\omega_2^2+\omega_3^2\right)^{1/2}.$$
2. Egy új szögsebesség vektor $\boldsymbol{\rho}_{\mathrm{n}+\alpha}$ megadása és a hozzá tartozó $\hat{\mathbf{q}}_{\mathrm{n}+\alpha}$ ferdén szimmetrikus tenzor számítása: Legyen $q_0=\cos\left(\frac{\omega_{\mathrm{n}+\alpha}}{2}\right)$, $q'=\sin\left(\frac{\omega_{\mathrm{n}+\alpha}}{2}\right)$. IF: $\lvert q'\rvert>\varepsilon$, ahol ε a tolerancia, THEN: $$q'=\frac{1}{2}\frac{\sin\left(\omega_{\mathrm{n}+\alpha}/2\right)}{\omega_{\mathrm{n}+\alpha}/2}$$ ELSE: $$q'=\frac{1}{2}\left[1-\frac{\omega^2_{\mathrm{n}+\alpha}}{24}+\frac{\omega^4_{\mathrm{n}+\alpha}}{1920}+\dots\right]$$ ENDIF. $$\boldsymbol{\rho}_{\mathrm{n}+\alpha}=q'\boldsymbol{\omega}^*_{\mathrm{n}+\alpha}=\begin{bmatrix}q_1\\ q_2\\ q_3\end{bmatrix},\qquad \hat{\mathbf{q}}_{\mathrm{n}+\alpha}=\begin{bmatrix}0 & -q_3 & q_2\\ q_3 & 0 & -q_1\\ -q_2 & q_1 & 0\end{bmatrix}.$$
3. Az exponenciális leképzés számítása: $$\mathbf{q}_{\mathrm{n}+\alpha}=\exp\left(\mathbf{W}_{\mathrm{n}+\alpha}\right)=2\left(q_0^2-\frac{1}{2}\right)\boldsymbol{\delta}+2q_0\hat{\mathbf{q}}_{\mathrm{n}+\alpha}+2\boldsymbol{\rho}_{\mathrm{n}+\alpha}\boldsymbol{\rho}^{\mathrm{T}}_{\mathrm{n}+\alpha},$$ $$\mathbf{q}_{\mathrm{n}+\alpha}=\exp\left(\mathbf{W}_{\mathrm{n}+\alpha}\right)=2\begin{bmatrix}q_0^2+q_1^2-\frac{1}{2} & q_1q_2-q_3q_0 & q_1q_3+q_2q_0\\ q_1q_2+q_3q_0 & q_0^2+q_2^2-\frac{1}{2} & q_2q_3-q_1q_0\\ q_1q_3-q_2q_0 & q_2q_3+q_1q_0 & q_0^2+q_3^2-\frac{1}{2}\end{bmatrix}.$$

$\alpha=\frac{1}{2}$ választása során a kinematikai összefüggések közül az alábbi egyszerűsítések elvégezhetők:

$$\mathbf{F}_{\mathrm{n}+\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\left(\mathbf{F}_{\mathrm{n}}+\mathbf{F}_{\mathrm{n}+1}\right),\qquad (7.25)$$

$$\mathbf{d}_{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\Delta t}\left[\mathbf{g}_{n+\frac{1}{2}} + \mathbf{g}^{T}_{n+\frac{1}{2}}\right], \tag{7.26}$$

$$\mathbf{w}_{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\Delta t}\left[\mathbf{g}_{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{g}^{T}_{n+\frac{1}{2}}\right] = \frac{1}{\Delta t}\mathbf{g}_{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{d}_{n+\frac{1}{2}}, \tag{7.27}$$

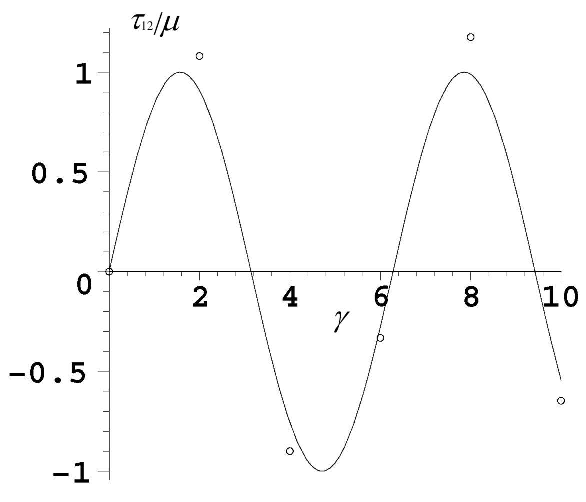
$$\mathbf{\Lambda}_{n+\alpha} = \exp\left[\tfrac{1}{2}\Delta t\mathbf{\Omega}^{*}_{n+\alpha}\right]\mathbf{\Lambda}_{n}, \qquad \mathbf{\Lambda}_0 = \mathbf{\delta}\,. \tag{7.28}$$

7.2. ALGORITMUS TESZTELÉSE MAPLE-BEN

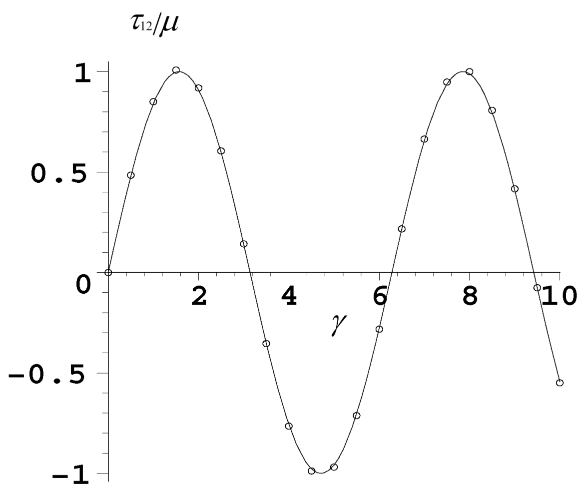
A FORTRAN szubrutin megírása előtt a 7.1 fejezetben tárgyalt numerikus integrálási algoritmus tesztelése történik MAPLESOFT MAPLE 9.01 szimbolikus matematikai szoftverrel. A vizsgált konstitutív egyenlet továbbra is a (4.4) szerinti nulladrendű hipoelasztikus anyagtörvény. Az egyszerű nyírás példáján a *Zaremba-Jaumann-Noll*-féle, a *Green-McInnis-Naghdi*-féle, az *Euler*-féle triád spintenzorán alapuló és a logaritmikus feszültség-sebesség alkalmazása esetén számított analitikus megoldás összehasonlítása történik a numerikus algoritmus segítségével kapott értékekkel. A feszültségkomponensek közül a nyírófeszültségre kapott értékek összehasonlítására kerül sor. A vizsgált deformációs intervallum: $0 \le \gamma \le 10$.

A numerikus integrálás pontossága Δt nagyságának megválasztásától függ a legjobban. A kapott eredmények összehasonlítása két különböző Δt értékre történik. Először a vizsgált tartomány 5, majd 20 egyenlő részre történő felosztásával $\left(\Delta\gamma = 2, \text{illetve } \Delta\gamma = 0.5\right)$ nyert eredmények összehasonlítására kerül sor.

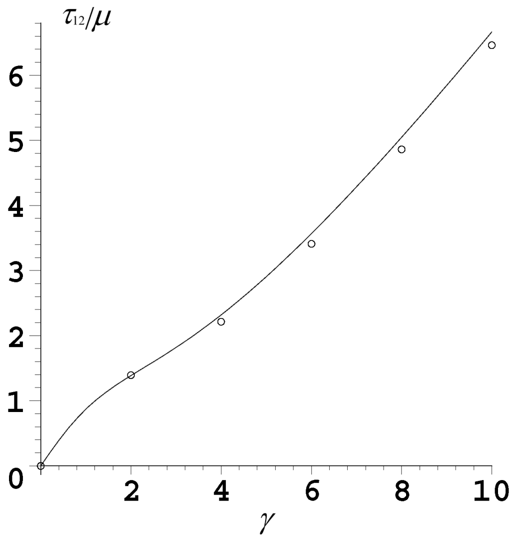
A 70.-77. ábrák a vizsgált feszültség-sebességek esetén a numerikus eljárás útján nyert nyírófeszültség értékeket tartalmazzák, feltűntetve az analitikus megoldást.



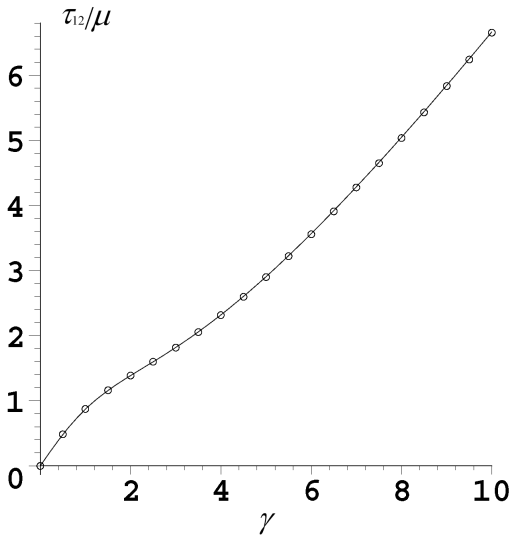
70. ábra: Zaremba-Jaumann-Noll-féle feszültségsebesség alkalmazása estén számított analitikus és numerikus megoldás összehasonlítása $\Delta\gamma$=2 esetén.



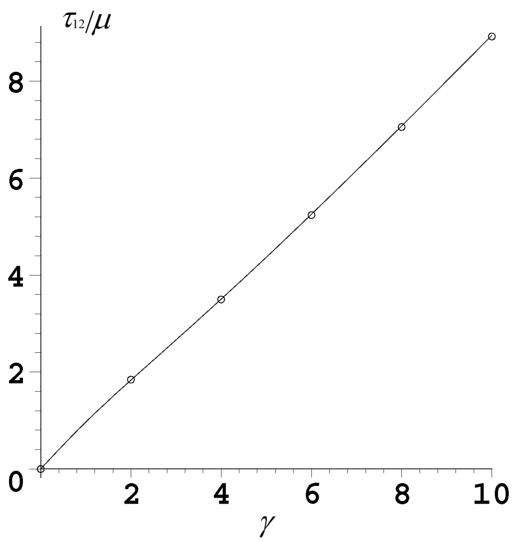
71. ábra: Zaremba-Jaumann-Noll-féle feszültségsebesség alkalmazása estén számított analitikus és numerikus megoldás összehasonlítása $\Delta\gamma$=0,5 esetén.



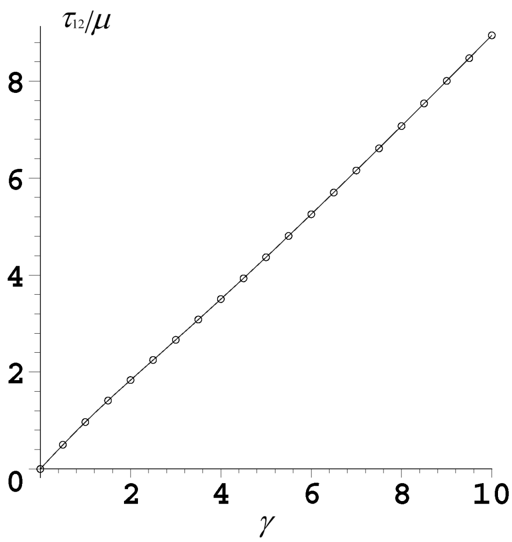
72. ábra: Green-McInnis-Noll-féle feszültségsebesség alkalmazása estén számított analitikus és numerikus megoldás összehasonlítása $\Delta\gamma$=2 esetén.



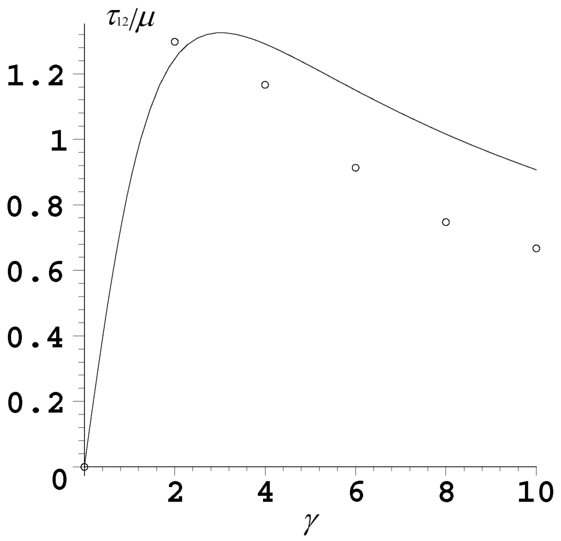
73. ábra: Green-McInnis-Noll-féle feszültségsebesség alkalmazása estén számított analitikus és numerikus megoldás összehasonlítása $\Delta\gamma$=0,5 esetén.



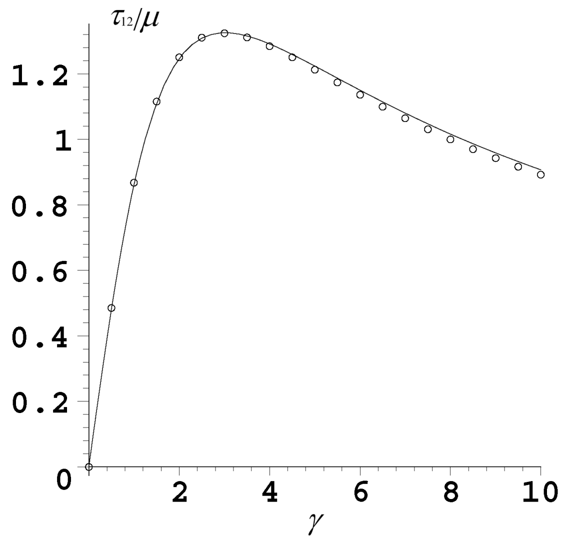
74. ábra: Euler-féle triád spintenzorán alapuló feszültségsebesség alkalmazása estén számított analitikus és numerikus megoldás összehasonlítása $\Delta\gamma$=2 esetén.



75. ábra: Euler-féle triád spintenzorán alapuló feszültségsebesség alkalmazása estén számított analitikus és numerikus megoldás összehasonlítása $\Delta\gamma$=0,5 esetén.



76. ábra: Logaritmikus feszültségsebesség alkalmazása estén számított analitikus és numerikus megoldás összehasonlítása $\Delta\gamma$=2 esetén.



77. ábra: Logaritmikus feszültségsebesség alkalmazása estén számított analitikus és numerikus megoldás összehasonlítása $\Delta\gamma$=0,5 esetén.

Az eredményekből jól látható, hogy a felosztás „finomsága” mennyire befolyásolja számítás pontosságát. Példaként a logaritmikus feszültség-sebesség alkalmazása esetén a vizsgált tartomány végén az analitikus és a numerikus eredmény közötti eltérés $\Delta\gamma = 2$ esetén (a tartomány öt részre történő felosztása) 26,48%, míg $\Delta\gamma = 0,5$ esetén (a tartomány húsz részre történő felosztása) 1,67%.

7.3. VÉGES ALAKVÁLTOZÁSOK AZ ABAQUS-BAN

Az ABAQUS/CAE programrendszer használatát bemutató részletes ismertetés helyett a dolgozatban csak a felhasználói szubrutinnal szorosan kapcsolatban álló kérdések tisztázására kerül sor.

Véges alakváltozások esetén az ABAQUS/Standard által használt tisztán rugalmas konstitutív modell feltárásában [22] nyújt segítséget a felhasználói kézikönyv mellett. A geometriai nemlinearitások figyelembevétele az NLGEOM kapcsolóval történik, amit a STEP modulban találunk meg [1]. Mindaddig, amíg az NLGEOM kapcsoló inaktív, addig az alakváltozás linearizált elméletét használja a program. Az NLGEOM kapcsoló aktiválásával egy együttforgó deriváltra épülő hipoelasztikus anyagmodell használata történik, ahol az együttforgó konfigurációhoz tartozó forgató tenzor számítása az örvénytenzor $(\mathbf{w})$ segítségével történik.

Az ABAQUS-ban használt számítási algoritmus a 7.1 pontban tárgyalt algoritmustól eltér. Ez okozza azt, hogy annak ellenére, hogy a $\mathbf{w}$ -t használja a forgató tenzorok előállításához, a számítási eredmények mégsem egyeznek meg a 7.1 fejezet szerinti algoritmussal előállított értékekkel a *Zaremba-Jaumann-Noll*-féle feszültség-sebesség esetén. A következőkben az ABAQUS által használt számítási algoritmus bemutatása történik.

A *Cauchy*-feszültségre felírt (7.20) szerinti nulladrendű hipoelasztikus anyagtörvény $\alpha = \frac{1}{2}$ esetén:

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\Lambda}_{n+1}\left[\boldsymbol{\Lambda}_n^T\boldsymbol{\sigma}_n\boldsymbol{\Lambda}_n + \Delta t\boldsymbol{\Lambda}_{n+\frac{1}{2}}^T\left(\mathscr{C}:\mathbf{d}_{n+\frac{1}{2}}\right)\boldsymbol{\Lambda}_{n+\frac{1}{2}}\right]\boldsymbol{\Lambda}_{n+1}^T. \tag{7.29}$$

Amennyiben az $\boldsymbol{\Lambda}_{n+\frac{1}{2}}$ ortogonális forgató tenzort implicit módon közelítjük az Ω_{n+1} konfigurációhoz tartozó forgató tenzorral (vagyis $\boldsymbol{\Lambda}_{n+\frac{1}{2}} := \boldsymbol{\Lambda}_{n+1}$), akkor a (7.29) szerinti konstitutív egyenlet az alábbi alakra egyszerűsödik:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}_{n+1} &= \boldsymbol{\Lambda}_{n+1}\boldsymbol{\Lambda}_n^T\boldsymbol{\sigma}_n\boldsymbol{\Lambda}_n\boldsymbol{\Lambda}_{n+1}^T + \Delta t\left(\mathscr{C}:\mathbf{d}_{n+\frac{1}{2}}\right),\\ \boldsymbol{\sigma}_{n+1} &= \Delta\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\sigma}_n\Delta\boldsymbol{\Lambda}^T + \Delta t\left(\mathscr{C}:\mathbf{d}_{n+\frac{1}{2}}\right),\end{aligned} \tag{7.30}$$

ahol $\Delta\boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{\Lambda}_{n+1}\boldsymbol{\Lambda}_n^T$ az Ω_n és az Ω_{n+1} konfigurációkhoz tartozó forgató tenzorok közötti kapcsolatot megadó forgató tenzor. $\Delta\boldsymbol{\Lambda}$ számítása történhet az exponenciális leképzés felhasználásával, de az ABAQUS az alábbi közelítést alkalmazza [25], [26], [22]:

$$\Delta\boldsymbol{\Lambda} = \left(\boldsymbol{\delta} - \frac{\Delta t}{2}\mathbf{w}_{n+\frac{1}{2}}\right)^{-1}\left(\boldsymbol{\delta} + \frac{\Delta t}{2}\mathbf{w}_{n+\frac{1}{2}}\right), \tag{7.31}$$

ahol az $\Omega_{n+\frac{1}{2}}$ konfigurációban érvényes örvénytenzor $\left(\mathbf{w}_{n+\frac{1}{2}}\right)$ számítása (7.27) szerint történik.

7.4. ABAQUS UMAT SZUBRUTIN BEMUTATÁSA

Az ABAQUS/CAE 6.4-1 programrendszer lehetőséget kínál a felhasználóknak, hogy a programba épített anyagtörvényeken kívül egyéni anyagtörvényeket (konstitutív egyenletet) definiáljunk. A felhasználói anyagtörvényeket (`user material` ≡ `UMAT`) a szoftver által kínált számítási folyamatok mindegyikében felhasználhatjuk.

Az eljárás lényege az, hogy a program által szolgáltatott bemenő változók, illetve a felhasználó által megadott állapotváltozók és anyagjellemzők alapján a deformáció folyamán az új feszültségértékeket (`stress update`), a konzisztens érintő merevségi mátrixot (`material Jacobian matrix`) és a megoldásfüggő állapotváltozókat (`solution-dependent state variables`) definiáljuk.

A felhasználói szubrutin megírását FORTRAN 77 program-környezetben kell elvégezni.

Az UMAT szubrutin által kínált lehetőségek a tetszőleges konstitutív egyenlet definiálásának lehetőségét célozzák meg, emiatt a minden opciót bemutató teljes részletezés helyett a dolgozat folyamán a dolgozat témájához kapcsolódó konstitutív egyenlet kapcsán felmerülő részletek bemutatására kerül sor.

Az 5. Táblázat az UMAT szubrutin felépítését mutatja.

5. Táblázat: ABAQUS UMAT szubrutin szegmens felépítése.

```
      SUBROUTINE UMAT(STRESS,STATEV,DDSDDE,SSE,SPD,SCD,
     1 RPL,DDSDDT,DRPLDE,DRPLDT,
     2 STRAN,DSTRAN,TIME,DTIME,TEMP,DTEMP,PREDEF,DPRED,CMNAME,
     3 NDI,NSHR,NTENS,NSTATV,PROPS,NPROPS,COORDS,DROT,PNEWDT,
     4 CELENT,DFGRD0,DFGRD1,NOEL,NPT,LAYER,KSPT,KSTEP,KINC)
C
       INCLUDE 'ABA_PARAM.INC'
C
       CHARACTER*80 CMNAME
       DIMENSION STRESS(NTENS),STATEV(NSTATV),
     1 DDSDDE(NTENS,NTENS),DDSDDT(NTENS),DRPLDE(NTENS),
     2 STRAN(NTENS),DSTRAN(NTENS),TIME(2),PREDEF(1),DPRED(1),
     3 PROPS(NPROPS),COORDS(3),DROT(3,3),DFGRD0(3,3),DFGRD1(3,3)


       a konstitutív egyenlet és a szükséges változók megadása


       RETURN
       END
```

A szubrutin szegmens paraméterlistája egyaránt tartalmaz bemenő és kimenő paramétereket, melyek közül a dolgozatban közlésre kerülő szubrutinban felhasznált paraméterek a következők:

`DDSDDE(NTENS,NTENS)`

A konzisztens érintő tenzor elemeit tartalmazó tömb. Általános esetben a tömb mérete 6x6-os. `DDSDDE` $= \partial\Delta\boldsymbol{\sigma}/\partial\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$.

`STRESS(NTENS)`

A *Cauchy*-féle feszültségtenzor elemeit tartalmazó tömb, amely a növekmény elején ismert és a szubrutin során cél a növekmény végén érvényes érték megadása. A tömb mérete általános esetben 6x1-es. Véges alakváltozás esetén (NLGEOM kapcsoló aktív) a (7.31) szerinti forgató tenzorral a feszültség el van forgatva.

`STATEV(NSTATV)`

A felhasználó által meghatározott állapotváltozókat tartalmazó tömb, amit a megoldás során folyamatosan újra kell definiálni. A tömb méretét (a felhasználó számára szükséges komponensek száma) a DEPVAR opcióban kell megadni, ami megtalálható az anyagmodell megadására szolgáló ablakban.

`STRAN(NTENS)`

A növekmény elején érvényes, a teljes alakváltozás elemeit tartalmazó tömb. Véges alakváltozás esetén (NLGEOM kapcsoló aktív) a (7.31) szerinti forgató tenzorral elforgatott megfelelőjét szolgáltatja a program, illetve a *Hencky*-féle alakváltozási tenzor közelítése.

`DSTRAN(NTENS)`

Az alakváltozás-növekmény elemeit tartalmazó tömb.

`TIME(1)`

Az adott terhelési lépéshez tartozó idő a növekmény elején.

`TIME(2)`

A teljes terhelési folyamathoz tartozó időérték a növekmény elején.

`DTIME`

Az időlépés (Δt).

`NTENS`

A feszültség- és alakváltozás-komponensek száma.

`NSTATV`

A felhasználó által a DEPVAR opcióban megadott, megoldás-függő állapotváltozók száma.

`PROPS(NPROPS)`

A felhasználó által a USER MATERIAL opcióban megadott anyagjellemzőket tartalmazó tömb, ahol `NPROPS` a felhasználói anyagjellemzők száma.

`DROT(3,3)`

A (7.31) szerinti forgató tenzor elemeit tartalmazó tömb. A feszültség- és alakváltozás-komponenseket tartalmazó tömbök a DROT-nak megfelelő forgatótenzor segítségével a növekmény elején el vannak forgatva.

`DFGRD0(3,3)`

A növekmény elején érvényes konfigurációhoz tartozó alakváltozási gradiens $(\mathbf{F}_\mathrm{n})$ elemeit tartalmazó tömb.

`DFGRD1(3,3)`

A növekmény végén érvényes konfigurációhoz tartozó alakváltozási gradiens $(\mathbf{F}_\mathrm{n+1})$ elemeit tartalmazó tömb.

`KSTEP`

A pillanatnyi terhelési lépésszám.

`KINC`

A terhelési növekmény száma.

7.5. ABAQUS UMAT SZUBRUTINOK EGYÜTTFORGÓ DERIVÁLTRA ÉPÜLŐ NULLADRENDŰ HIPOELASZTIKUS ANYAGMODELLHEZ

A dolgozat fő célkitűzése a (4.4) szerinti nulladrendű hipoelasztikus konstitutív egyenlet implementálása az ABAQUS programrendszer számára UMAT szubrutin formájában, a logaritmikus feszültség-sebesség alkalmazása esetén. Ezen felül ismertetésre kerül a *Zaremba-Jaumann-Noll*-féle, *Green-McInnis-Naghdi*-féle és az *Euler*-féle triád spintenzorára épülő feszültség-sebességek használata esetén érvényes konstitutív egyenlet UMAT szubrutinja is.

A szubrutinok közötti különbség a 7.1 fejezetben közölt numerikus algoritmus alkalmazásakor a megfelelő ortogonális forgató tenzor számításakor mutatkozik. Attól függően, hogy az együttforgó konfigurációhoz tartozó forgató tenzort melyik spintenzorból származtatjuk kapunk más és más feszültség-sebességekre érvényes anyagtörvényt.

A szubrutinok megírásánál tett megfontolások, sajátosságok:

- Amennyiben a (4.4) szerinti nulladrendű hipoelasztikus konstitutív egyenletnél a logaritmikus feszültség-sebesség alkalmazott, akkor a konzisztens érintő tenzor azonos a (4.3) szerinti – konstans elemeket tartalmazó – hipoelasztikus érintő tenzorral, ugyanis $\overset{\circ}{\boldsymbol{\tau}}{}^{\log}$ és $\mathbf{d}$ megegyezik $\boldsymbol{\tau}$ és $\mathbf{h}$ (a pillanatnyi konfiguráción értelmezett *Hencky*-féle alakváltozási tenzor) logaritmikus deriváltjával. Más feszültség-sebesség esetén már nem áll fenn az azonosság, de továbbra is alkalmazható konzisztens érintő tenzorként a hipoelasztikus érintő tenzor, ami általában nem vezet konvergencia problémákhoz.
- A szubrutin számára szükséges anyagjellemzők a rugalmassági modulus (E) és a Poisson-tényező (ν), így `NPROPS=2`, `PROPS(1)=` E, `PROPS(2)=` ν.
- A megoldásfüggő állapotváltozók száma: `NSTATV=9`. Ezek a változók az (n+1) állapotban az aktuális ortogonális forgató tenzor $\left(\boldsymbol{\Lambda}_{\mathrm{n+1}}\right)$ elemei, amiket minden egyes növekménynél újra kell definiálni (7.22) szerint.
- Az ABAQUS biztosít mátrixok skalár invariánsainak, sajátértékeinek, sajátvektorainak számítására szolgáló, valamint forgatást végző szubrutint, de ezek helyett saját szubrutinok alkalmazása történik. A program által kínált `XIT` szubrutin a számítás megszakítását végzi.
- Lehetőség van a program által használt „message" file-ba üzenetet kiíratni a 7-es periféria azonosító felhasználásával: `write(7,*)`.

Az ABAQUS a 3x3-as feszültségtenzort és az alakváltozási tenzort vektoros formában kezeli. Emiatt a negyedrendű konzisztens érintő tenzort 6x6-os mátrix formájában kell megadni.

A feszültségkomponenseket tartalmazó `STRESS` tömb és az alakváltozási komponenseket tartalmazó `STRAN` tömb elemei a következők:

$$\begin{bmatrix} \mathrm{STRESS}(1) \\ \mathrm{STRESS}(2) \\ \mathrm{STRESS}(3) \\ \mathrm{STRESS}(4) \\ \mathrm{STRESS}(5) \\ \mathrm{STRESS}(6) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{\mathrm{xx}} \\ \sigma_{\mathrm{yy}} \\ \sigma_{\mathrm{zz}} \\ \sigma_{\mathrm{xy}} \\ \sigma_{\mathrm{xz}} \\ \sigma_{\mathrm{yz}} \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} \mathrm{STRAN}(1) \\ \mathrm{STRAN}(2) \\ \mathrm{STRAN}(3) \\ \mathrm{STRAN}(4) \\ \mathrm{STRAN}(5) \\ \mathrm{STRAN}(6) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{\mathrm{xx}} \\ \varepsilon_{\mathrm{yy}} \\ \varepsilon_{\mathrm{zz}} \\ \gamma_{\mathrm{xy}} \\ \gamma_{\mathrm{xz}} \\ \gamma_{\mathrm{yz}} \end{bmatrix}. \tag{7.32}$$

A 6x6-os mátrix formájában felírt konzisztens érintő tenzor elemeit a lineárisan rugalmas, izotrop test anyagtörvényének a segítségével számítjuk:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{E}{1+v}\left[\boldsymbol{\varepsilon} + \frac{v}{1-2v}\varepsilon_I \boldsymbol{\delta}\right], \tag{7.33}$$

ahonnan a komponensekre kifejezett egyenletek a következők:

$$\begin{aligned}
\sigma_{\mathrm{xx}} &= \frac{E(v-1)}{(2v-1)(v+1)}\varepsilon_{\mathrm{xx}} - \frac{Ev}{(2v-1)(v+1)}\left(\varepsilon_{\mathrm{yy}} + \varepsilon_{\mathrm{zz}}\right), \\
\sigma_{\mathrm{yy}} &= \frac{E(v-1)}{(2v-1)(v+1)}\varepsilon_{\mathrm{yy}} - \frac{Ev}{(2v-1)(v+1)}\left(\varepsilon_{\mathrm{xx}} + \varepsilon_{\mathrm{zz}}\right), \\
\sigma_{\mathrm{zz}} &= \frac{E(v-1)}{(2v-1)(v+1)}\varepsilon_{\mathrm{zz}} - \frac{Ev}{(2v-1)(v+1)}\left(\varepsilon_{\mathrm{xx}} + \varepsilon_{\mathrm{yy}}\right), \\
\sigma_{\mathrm{xy}} &= \mathrm{G}\gamma_{\mathrm{xy}}, \\
\sigma_{\mathrm{xz}} &= \mathrm{G}\gamma_{\mathrm{xz}}, \\
\sigma_{\mathrm{yz}} &= \mathrm{G}\gamma_{\mathrm{yz}}.
\end{aligned} \tag{7.34}$$

Mátrixos alakban felírva megkapjuk a 6x6-os konzisztens érintő tenzor mátrixát:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{\mathrm{xx}} \\ \sigma_{\mathrm{yy}} \\ \sigma_{\mathrm{zz}} \\ \sigma_{\mathrm{xy}} \\ \sigma_{\mathrm{xz}} \\ \sigma_{\mathrm{yz}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E(v-1)}{(2v-1)(v+1)} & -\frac{Ev}{(2v-1)(v+1)} & -\frac{Ev}{(2v-1)(v+1)} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{Ev}{(2v-1)(v+1)} & \frac{E(v-1)}{(2v-1)(v+1)} & -\frac{Ev}{(2v-1)(v+1)} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{Ev}{(2v-1)(v+1)} & -\frac{Ev}{(2v-1)(v+1)} & \frac{E(v-1)}{(2v-1)(v+1)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{\mathrm{xx}} \\ \varepsilon_{\mathrm{yy}} \\ \varepsilon_{\mathrm{zz}} \\ \gamma_{\mathrm{xy}} \\ \gamma_{\mathrm{xz}} \\ \gamma_{\mathrm{yz}} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{\mathrm{xx}} \\ \sigma_{\mathrm{yy}} \\ \sigma_{\mathrm{zz}} \\ \sigma_{\mathrm{xy}} \\ \sigma_{\mathrm{xz}} \\ \sigma_{\mathrm{yz}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K1 & K2 & K2 & 0 & 0 & 0 \\ K2 & K1 & K2 & 0 & 0 & 0 \\ K2 & K2 & K1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{\mathrm{xx}} \\ \varepsilon_{\mathrm{yy}} \\ \varepsilon_{\mathrm{zz}} \\ \gamma_{\mathrm{xy}} \\ \gamma_{\mathrm{xz}} \\ \gamma_{\mathrm{yz}} \end{bmatrix}, \tag{7.35}$$

ahol

$$K1 = \frac{E(v-1)}{(2v-1)(v+1)}, \qquad K2 = -\frac{Ev}{(2v-1)(v+1)}. \tag{7.36}$$

A következőkben az UMAT szubrutin során felhasznált további szubrutinok ismertetése következik

XDET: 3x3-as mátrix determinánsát számító szubrutin

```
      SUBROUTINE XDET(XM,DETXM)
      INCLUDE 'ABA_PARAM.INC'
      DIMENSION XM(3,3)

      DETXM=XM(1,1)*(XM(2,2)*XM(3,3)-XM(2,3)*XM(3,2))
     1     -XM(1,2)*(XM(2,1)*XM(3,3)-XM(2,3)*XM(3,1))
     2     +XM(1,3)*(XM(2,1)*XM(3,2)-XM(2,2)*XM(3,1))

      RETURN
      END
```

A szubrutin a 3x3-as `XM` mátrix determinánsát számítja. A kimenő változó `DETXM`.

XTRA: 3x3-as mátrixra vonatkozó ( )-( )^T műveletet elvégző szubrutin

```
      SUBROUTINE XTRA(XM,XMZ)
      INCLUDE 'ABA_PARAM.INC'
      DIMENSION XM(3,3),XMZ(3,3)

      DO I=1,3
           DO J=1,3
                 XMZ(I,J)=XM(I,J)-XM(J,I)
           END DO
      END DO

      RETURN
      END
```

A szubrutin a 3x3-as `XM` mátrixra vonatkozó (`XM`)-(`XM`)^T művelet elvégzését végzi, ami a spintenzorok (3.118) szerinti megadásánál fordul elő $\mathbf{N}^*$ számításánál. A kimenő változó a 3x3-as `XMZ` mátrix.

XDOT: 3x3-as mátrixok szorzását végző szubrutin

```
      SUBROUTINE XDOT(XM1,XM2,XM)
      INCLUDE 'ABA_PARAM.INC'
      DIMENSION XM1(3,3),XM2(3,3),XM(3,3)

      DO I=1,3
           DO J=1,3
                 XM(I,J)=0
                 DO K=1,3
                       XM(I,J)= XM(I,J)+XM1(I,K)*XM2(K,J)
                 END DO
           END DO
      END DO

      RETURN
      END
```

A szubrutin a 3x3-as `XM1` és `XM2` mátrixok szorzását végzi. A kimenő változó a 3x3-as `XM`.

`XSCAL`: 3x3-as szimmetrikus mátrix skalár invariánsainak számítása

```
      SUBROUTINE XSCAL(XM,XSI,XSII,XSIII)
      INCLUDE 'ABA_PARAM.INC'
      DIMENSION XM(3,3)
      DATA Y0,Y2/0.D0,2.D0/

      XSI=Y0
      DO I=1,3
           XSI=XM(I,I)+XSI
      END DO

      TRXM2=XM(1,1)*XM(1,1)+XM(2,2)*XM(2,2)+XM(3,3)*XM(3,3)+
     1      Y2*(XM(1,2)*XM(1,2)+XM(1,3)*XM(1,3)+XM(2,3)*XM(2,3))

      XSII=(XSI*XSI-TRXM2)/Y2

      XSIII=XM(1,1)*(XM(2,2)*XM(3,3)-XM(2,3)*XM(3,2))
     1     -XM(1,2)*(XM(2,1)*XM(3,3)-XM(2,3)*XM(3,1))
     2     +XM(1,3)*(XM(2,1)*XM(3,2)-XM(2,2)*XM(3,1))

      RETURN
      END
```

A szubrutin a 3x3-as szimmetrikus `XM` mátrix skalár invariánsait számítja (3.12)-nek megfelelően. A kimenő változók az `XSI`, `XSII` és `XSIII` skalár invariánsok.

`XINV`: 3x3-as mátrix inverzének számítása

```
      SUBROUTINE XINV(XM,XMINV)
      INCLUDE 'ABA_PARAM.INC'
      DIMENSION XM(3,3),XMADJT(3,3),XMINV(3,3)

      DETXM=XM(1,1)*(XM(2,2)*XM(3,3)-XM(2,3)*XM(3,2))
     1      -XM(1,2)*(XM(2,1)*XM(3,3)-XM(2,3)*XM(3,1))
     2      +XM(1,3)*(XM(2,1)*XM(3,2)-XM(2,2)*XM(3,1))

      XMADJT(1,1)=XM(2,2)*XM(3,3)-XM(2,3)*XM(3,2)
      XMADJT(1,2)=XM(2,3)*XM(3,1)-XM(2,1)*XM(3,3)
      XMADJT(1,3)=XM(2,1)*XM(3,2)-XM(2,2)*XM(3,1)
      XMADJT(2,1)=XM(1,3)*XM(3,2)-XM(1,2)*XM(3,3)
      XMADJT(2,2)=XM(1,1)*XM(3,3)-XM(1,3)*XM(3,1)
      XMADJT(2,3)=XM(1,2)*XM(3,1)-XM(1,1)*XM(3,2)
      XMADJT(3,1)=XM(1,2)*XM(2,3)-XM(1,3)*XM(2,2)
      XMADJT(3,2)=XM(1,3)*XM(2,1)-XM(1,1)*XM(2,3)
      XMADJT(3,3)=XM(1,1)*XM(2,2)-XM(1,2)*XM(2,1)

      DO I=1,3
           DO J=1,3
                 XMINV(I,J)=XMADJT(J,I)/DETXM
           END DO
      END DO

      RETURN
      END
```

A szubrutin a 3x3-as `XM` mátrix inverzét számítja. A kimenő változó a 3x3-as `XMINV` mátrix.

`XEIGEN`: 3x3-as szimmetrikus mátrix sajátértékeinek számítása

```
      SUBROUTINE XEIGEN(XM,XMEIG)
      INCLUDE 'ABA_PARAM.INC'
      DIMENSION XM(3,3),XMEIG(3)
      DATA Y0,Y0E5,Y0E3,Y1E5,Y2,Y3,Y4,Y6,Y9,Y27,PI,Y1/0.D0,0.5D0,
     1 0.333333333333D0,1.5D0,2.D0,3.D0,4.D0,6.D0,9.D0,27.D0,
     2 3.14159265358979D0,1.D0/

      XMI=Y0
      DO I=1,3
           XMI=XM(I,I)+XMI
      END DO

      TRXM2=XM(1,1)*XM(1,1)+XM(2,2)*XM(2,2)+XM(3,3)*XM(3,3)+
     1      Y2*(XM(1,2)*XM(1,2)+XM(1,3)*XM(1,3)+XM(2,3)*XM(2,3))

      XMII=(XMI*XMI-TRXM2)/Y2

      XMIII=XM(1,1)*(XM(2,2)*XM(3,3)-XM(2,3)*XM(3,2))
     1      -XM(1,2)*(XM(2,1)*XM(3,3)-XM(2,3)*XM(3,1))
     2      +XM(1,3)*(XM(2,1)*XM(3,2)-XM(2,2)*XM(3,1))

      IF ((XMI*XMI-Y3*XMII).LT.1.D-10) THEN
           DO I=1,3
                 XMEIG(I)=XMI/Y3
           END DO
      ELSE
           ARG=(Y2*XMI*XMI*XMI-Y9*XMI*XMII+Y27*XMIII)/
     1         (Y2*(XMI*XMI-Y3*XMII)**(Y1E5))

           IF (ARG.GT.Y1) THEN
                 XMPHI=Y0
           ELSEIF (ARG.LT.Y0) THEN
                 XMPHI=PI
           ELSE
                 XMPHI=DACOS(ARG)
           END IF

           XMEIG(1)=Y0E3*(XMI+Y2*((XMI*XMI-Y3*XMII)**(Y0E5))
     1              *DCOS((XMPHI-Y2*PI)/Y3))

           XMEIG(2)=Y0E3*(XMI+Y2*((XMI*XMI-Y3*XMII)**(Y0E5))
     1              *DCOS((XMPHI-Y4*PI)/Y3))

           XMEIG(3)=Y0E3*(XMI+Y2*((XMI*XMI-Y3*XMII)**(Y0E5))
     1              *DCOS((XMPHI-Y6*PI)/Y3))

      END IF

      RETURN
      END
```

A szubrutin a 3x3-as szimmetrikus `XM` mátrix sajátértékeit számítja (3.11)-nek megfelelően. A kimenő változó a sajátértékeket tartalmazó 3x1-es `XMEIG`.

`XEXP`: Ferdén szimmetrikus 3x3-as mátrix exponenciális leképzése

```
      SUBROUTINE XEXP(XM,XMEXP)
      INCLUDE 'ABA_PARAM.INC'
      DIMENSION XM(3,3),XOM(3),XQ(3),XMEXP(3,3)
      DATA Y1,Y0,Y0E5,Y2/1.D0,0.D0,0.5D0,2.D0/

      XMNORM=Y0
      DO I=1,3
           DO J=1,3
                 XMNORM=XMNORM+DABS(XM(I,J))
           END DO
      END DO

      IF (XMNORM.LT.1.D-20) THEN
           DO I=1,3
           DO J=1,3
                 IF(I.EQ.J) THEN
                       XMEXP(I,J)=Y1
                 ELSE
                       XMEXP(I,J)=Y0
                 END IF
           END DO
      END DO
      ELSE
           XOM(1)=-XM(2,3)
           XOM(2)=XM(1,3)
           XOM(3)=-XM(1,2)

           XOMNORM=(XOM(1)*XOM(1)+XOM(2)*XOM(2)+XOM(3)*XOM(3))**(Y0E5)

           XQ0=DCOS(XOMNORM/Y2)
           XQA=DSIN(XOMNORM/Y2)/XOMNORM

           XQ(1)=XQA*XOM(1)
           XQ(2)=XQA*XOM(2)
           XQ(3)=XQA*XOM(3)

           XMEXP(1,1)=Y2*(XQ0*XQ0+XQ(1)*XQ(1)-Y0E5)
           XMEXP(1,2)=Y2*(XQ(1)*XQ(2)-XQ(3)*XQ0)
           XMEXP(1,3)=Y2*(XQ(1)*XQ(3)+XQ(2)*XQ0)
           XMEXP(2,2)=Y2*(XQ0*XQ0+XQ(2)*XQ(2)-Y0E5)
           XMEXP(2,3)=Y2*(XQ(2)*XQ(3)-XQ(1)*XQ0)
           XMEXP(3,3)=Y2*(XQ0*XQ0+XQ(3)*XQ(3)-Y0E5)
           XMEXP(2,1)=Y2*(XQ(1)*XQ(2)+XQ(3)*XQ0)
           XMEXP(3,1)=Y2*(XQ(1)*XQ(3)-XQ(2)*XQ0)
           XMEXP(3,2)=Y2*(XQ(2)*XQ(3)+XQ(1)*XQ0)
      END IF

      RETURN
      END
```

A szubrutin a 3x3-as ferdén szimmetrikus `XM` tenzor exponenciális leképzését végzi a 4. Táblázatnak megfelelően. A kimenő változó a 3x3-as `XMEXP`.

`XFORG`: Forgatást végző szubrutin

```
      SUBROUTINE XFORG(XM,XQ,N,XMFORG)
      INCLUDE 'ABA_PARAM.INC'
      DIMENSION XM(3,3),XQ(3,3),XQT(3,3),XQ1(3,3),XMFORG(3,3)
      DATA Y0,Y0E5,Y2/0.D0,0.5D0,2.D0/

      DO I=1,3
          DO J=1,3
                XQT(I,J)=XQ(J,I)
          END DO
      END DO

      IF(N.EQ.1) THEN
          DO I=1,3
                DO J=1,3
                      XQ1(I,J)=Y0
                      DO K=1,3
                            XQ1(I,J)= XQ1(I,J)+XQT(I,K)*XM(K,J)
                      END DO
                END DO
          END DO
          DO I=1,3
                DO J=1,3
                      XMFORG(I,J)=Y0
                      DO K=1,3
                            XMFORG(I,J)= XMFORG(I,J)+XQ1(I,K)*XQ(K,J)
                      END DO
                END DO
          END DO
      ELSEIF(N.EQ.2) THEN
          DO I=1,3
                DO J=1,3
                      XQ1(I,J)=Y0
                      DO K=1,3
                            XQ1(I,J)= XQ1(I,J)+XQ(I,K)*XM(K,J)
                      END DO
                END DO
          END DO
          DO I=1,3
                DO J=1,3
                      XMFORG(I,J)=Y0
                      DO K=1,3
                            XMFORG(I,J)= XMFORG(I,J)+XQ1(I,K)*XQT(K,J)
                      END DO
                END DO
          END DO
      END IF

      RETURN
      END
```

A szubrutin a 3x3-as `XM` tenzort forgatja el az `XQ` ortogonális tenzorral. Az `N` kapcsoló értékétől függően az alábbi forgatások számítása történik:

$$\mathtt{N}=1 \quad \Rightarrow \quad (\mathtt{XMFORG})=(\mathtt{XQ})^{\mathrm{T}}(\mathtt{XM})(\mathtt{XQ}),$$

$$\mathtt{N}=2 \quad \Rightarrow \quad (\mathtt{XMFORG})=(\mathtt{XQ})(\mathtt{XM})(\mathtt{XQ})^{\mathrm{T}}.$$

`OLOGM2`: Logaritmikus spintenzorhoz N^{log} számítása m=2 esetén

```
      SUBROUTINE OLOGM2(XEIG,XB,XD,XN)
      INCLUDE 'ABA_PARAM.INC'
      DIMENSION XEIG(3),XB(3,3),XD(3,3),XN(3,3),XBD(3,3),XBDZ(3,3)
      DATA Y0,Y1,Y2/0.D0,1.D0,2.D0/

      DZ=XEIG(1)/XEIG(2)

      XNU=(Y1/XEIG(2)/(DZ-Y1))*((Y1+DZ)/(Y1-DZ)+Y2/(DLOG(DZ)))

      DO I=1,3
           DO J=1,3
                 XBD(I,J)=Y0
                 DO K=1,3
                       XBD(I,J)= XBD(I,J)+XB(I,K)*XD(K,J)
                 END DO
           END DO
      END DO

      DO I=1,3
           DO J=1,3
                 XBDZ(I,J)=XBD(I,J)-XBD(J,I)
           END DO
      END DO

      DO I=1,3
           DO J=1,3
                 XN(I,J)=XNU*XBDZ(I,J)
           END DO
      END DO

      RETURN
      END
```

A szubrutin a $(3.118)_2$-nek megfelelően számítja $\mathbf{N}^{log}$ értékét, figyelembe véve a logaritmikus spintenzor esetén érvényes $(3.125)_1$ szerinti spinfüggvényt. A 3x1-es `XEIG` első két eleme tartalmazza a két különböző sajátértéket. A kimenő változó a 3x3-as `XN`.

`OLOGM3`: Logaritmikus spintenzorhoz N^{log} számítása m=3 esetén

```
      SUBROUTINE OLOGM3(XEIG,XB,XD,XN)
      INCLUDE 'ABA_PARAM.INC'
      DIMENSION XNU(3),XDZ(3),XEIG(3),XB(3,3),XD(3,3),XN(3,3),XBD(3,3),
     1 XBDZ(3,3),XB2D(3,3),XB2DZ(3,3),XB2DB(3,3),XB2DBZ(3,3)
      DATA Y0,Y1,Y2/0.D0,1.D0,2.D0/

      XDZ(1)=XEIG(2)/XEIG(3)
      XDZ(2)=XEIG(3)/XEIG(1)
      XDZ(3)=XEIG(1)/XEIG(2)

      DELTA=(XEIG(1)-XEIG(2))*(XEIG(2)-XEIG(3))*(XEIG(3)-XEIG(1))

      DO K=1,3
           XNU(K)=Y0
           DO I=1,3
                 XNU(K)=XNU(K)+((Y1+XDZ(I))/(Y1-XDZ(I))+2/(DLOG(XDZ(I))))*
     1                      ((-XEIG(I))**(3-K))/(-DELTA)
           END DO
      END DO

      DO I=1,3
           DO J=1,3
```

```
              XBD(I,J)=Y0
              DO K=1,3
                    XBD(I,J)= XBD(I,J)+XB(I,K)*XD(K,J)
              END DO
        END DO
   END DO

   DO I=1,3
        DO J=1,3
              XBDZ(I,J)=XBD(I,J)-XBD(J,I)
        END DO
   END DO

   DO I=1,3
        DO J=1,3
              XB2D(I,J)=Y0
              DO K=1,3
                    XB2D(I,J)= XB2D(I,J)+XB(I,K)*XBD(K,J)
              END DO
        END DO
   END DO

   DO I=1,3
        DO J=1,3
              XB2DZ(I,J)=XB2D(I,J)-XB2D(J,I)
        END DO
   END DO

   DO I=1,3
        DO J=1,3
              XB2DB(I,J)=Y0
              DO K=1,3
                    XB2DB(I,J)= XB2DB(I,J)+XB2D(I,K)*XB(K,J)
              END DO
        END DO
   END DO

   DO I=1,3
        DO J=1,3
              XB2DBZ(I,J)=XB2DB(I,J)-XB2DB(J,I)
        END DO
   END DO

   DO I=1,3
        DO J=1,3
              XN(I,J)=XNU(1)*XBDZ(I,J)+XNU(2)*XB2DZ(I,J)+
  1                   XNU(3)*XB2DBZ(I,J)
        END DO
   END DO

   RETURN
   END
```

A szubrutin a $(3.118)_3$-nak megfelelően számítja $\mathbf{N}^{\log}$ értékét, figyelembe véve a logaritmikus spintenzor esetén érvényes $(3.125)_1$ szerinti spinfüggvényt. A 3x1-es `XEIG` tartalmazza a három különböző sajátértéket. A kimenő változó a 3x3-as `XN`.

`XPOL`: Poláris felbontás

```
   SUBROUTINE XPOL(XF,XR,XU,XV)
   INCLUDE 'ABA_PARAM.INC'
   DIMENSION XF(3,3),XR(3,3),XU(3,3),XV(3,3),XB(3,3),XC(3,3),XBE(3),
  1 XCE(3),XC2(3,3),EGYS(3,3),XUI(3,3),XRT(3,3),XFT(3,3),PS(3)
```

```
      DATA Y0,Y1,Y2/0.D0,1.D0,2.D0/

      DO I=1,3
           DO J=1,3
                 IF(I.EQ.J) THEN
                       EGYS(I,J)=Y1
                 ELSE
                       EGYS(I,J)=Y0
                 END IF
           END DO
      END DO

      DO I=1,3
           DO J=1,3
                 XFT(I,J)=XF(J,I)
           END DO
      END DO

      CALL XDOT(XFT,XF,XC)
      CALL XDOT(XF,XFT,XB)

      CALL XEIGEN(XC,XCE)
      CALL XEIGEN(XB,XBE)

      DO I=1,3
           PS(I)=DSQRT(XCE(I))
      END DO

      XI1=PS(1)+PS(2)+PS(3)
      XI2=PS(1)*PS(2)+PS(1)*PS(3)+PS(2)*PS(3)
      XI3=PS(1)*PS(2)*PS(3)

      XD=XI1*XI2-XI3

      CALL XDOT(XC,XC,XC2)

      DO I=1,3
           DO J=1,3
                 XU(I,J)=(Y1/XD)*(-XC2(I,J)+(XI1*XI1-XI2)*XC(I,J)+
     1                   XI1*XI3*EGYS(I,J))
           END DO
      END DO

      DO I=1,3
           DO J=1,3
                 XUI(I,J)=(Y1/XI3)*(XC(I,J)-XI1*XU(I,J)+XI2*EGYS(I,J))
           END DO
      END DO

      CALL XDOT(XF,XUI,XR)

      DO I=1,3
           DO J=1,3
                 XRT(I,J)=XR(J,I)
           END DO
      END DO

      CALL XDOT(XF,XRT,XV)

      RETURN
      END
```

A szubrutin *Simo* & *Hughes* által közölt algoritmus alapján számítja a poláris felbontást [51.], BOX 7.1.

`OEUM2`: Euler-féle triád spintenzorához N^E számítása m=2 esetén

```
      SUBROUTINE OEUM2(XEIG,XB,XD,XN)
      INCLUDE 'ABA_PARAM.INC'
      DIMENSION XEIG(3),XB(3,3),XD(3,3),XN(3,3),XBD(3,3),XBDZ(3,3)
      DATA Y1,Y2/1.D0,2.D0/

      XNU=-(XEIG(1)+XEIG(2))/((XEIG(1)+XEIG(2))**Y2)

      DO I=1,3
           DO J=1,3
                 XBD(I,J)=0
                 DO K=1,3
                       XBD(I,J)= XBD(I,J)+XB(I,K)*XD(K,J)
                 END DO
           END DO
      END DO

      DO I=1,3
           DO J=1,3
                 XBDZ(I,J)=XBD(I,J)-XBD(J,I)
           END DO
      END DO

      DO I=1,3
           DO J=1,3
                 XN(I,J)=XNU*XBDZ(I,J)
           END DO
      END DO

      RETURN
      END
```

A szubrutin a $(3.118)_2$-nek megfelelően számítja $\mathbf{N}^E$ értékét, figyelembe véve az *Euler*-féle triád spintenzora esetén érvényes $(3.123)_1$ szerinti spinfüggvényt. A 3x1-es `XEIG` első két eleme tartalmazza a két különböző sajátértéket. A kimenő változó a 3x3-as `XN`.

`OEUM3`: Euler-féle triád spintenzorához N^E számítása m=3 esetén

```
      SUBROUTINE OEUM3(XEIG,XB,XD,XN)
      INCLUDE 'ABA_PARAM.INC'
      DIMENSION XNU(3),XEIG(3),XB(3,3),XD(3,3),XN(3,3),XBD(3,3),
     1 XBDZ(3,3),XB2D(3,3),XB2DZ(3,3),XB2DB(3,3),XB2DBZ(3,3)
      DATA Y1,Y2/1.D0,2.D0/

      DELTA=(XEIG(1)-XEIG(2))*(XEIG(2)-XEIG(3))*(XEIG(3)-XEIG(1))


      XNU(1)=-(((XEIG(1)**(Y2))*(XEIG(3)+XEIG(2))/(XEIG(3)-XEIG(2)))+
     1        ((XEIG(2)**(Y2))*(XEIG(1)+XEIG(3))/(XEIG(1)-XEIG(3)))+
     2        ((XEIG(3)**(Y2))*(XEIG(2)+XEIG(1))/(XEIG(2)-XEIG(1))))/
     3        DELTA

      XNU(2)=(((XEIG(1))*(XEIG(3)+XEIG(2))/(XEIG(3)-XEIG(2)))+
     1       ((XEIG(2))*(XEIG(1)+XEIG(3))/(XEIG(1)-XEIG(3)))+
     2       ((XEIG(3))*(XEIG(2)+XEIG(1))/(XEIG(2)-XEIG(1))))/
     3       DELTA

      XNU(3)=-(((Y1)*(XEIG(3)+XEIG(2))/(XEIG(3)-XEIG(2)))+
     1        ((Y1)*(XEIG(1)+XEIG(3))/(XEIG(1)-XEIG(3)))+
     2        ((Y1)*(XEIG(2)+XEIG(1))/(XEIG(2)-XEIG(1))))/
     3        DELTA
```

```
      DO I=1,3
           DO J=1,3
                 XBD(I,J)=0
                 DO K=1,3
                       XBD(I,J)= XBD(I,J)+XB(I,K)*XD(K,J)
                 END DO
           END DO
      END DO

      DO I=1,3
           DO J=1,3
                 XBDZ(I,J)=XBD(I,J)-XBD(J,I)
           END DO
      END DO

      DO I=1,3
           DO J=1,3
                 XB2D(I,J)=0
                 DO K=1,3
                       XB2D(I,J)= XB2D(I,J)+XB(I,K)*XBD(K,J)
                 END DO
           END DO
      END DO

      DO I=1,3
           DO J=1,3
                 XB2DZ(I,J)=XB2D(I,J)-XB2D(J,I)
           END DO
      END DO

      DO I=1,3
           DO J=1,3
                 XB2DB(I,J)=0
                 DO K=1,3
                       XB2DB(I,J)= XB2DB(I,J)+XB2D(I,K)*XB(K,J)
                 END DO
           END DO
      END DO

      DO I=1,3
           DO J=1,3
                 XB2DBZ(I,J)=XB2DB(I,J)-XB2DB(J,I)
           END DO
      END DO

      DO I=1,3
           DO J=1,3
                 XN(I,J)=XNU(1)*XBDZ(I,J)+XNU(2)*XB2DZ(I,J)+
     1                   XNU(3)*XB2DBZ(I,J)
           END DO
      END DO
      RETURN
      END
```

A szubrutin a $(3.118)_3$-nak megfelelően számítja $\mathbf{N}^{E}$ értékét, figyelembe véve az *Euler*-féle triád spintenzora esetén érvényes $(3.123)_1$ szerinti spinfüggvényt. A 3x1-es `XEIG` tartalmazza a három különböző sajátértéket. A kimenő változó a 3x3-as `XN`.

7.5.1. ZAREMBA-JAUMANN-NOLL-FÉLE FESZÜLTSÉG-SEBESSÉGRE ÉPÜLŐ SZUBRUTIN

```
      SUBROUTINE UMAT(STRESS,STATEV,DDSDDE,SSE,SPD,SCD,
     1 RPL,DDSDDT,DRPLDE,DRPLDT,STRAN,DSTRAN,
     2 TIME,DTIME,TEMP,DTEMP,PREDEF,DPRED,MATERL,NDI,NSHR,NTENS,
     3 NSTATV,PROPS,NPROPS,COORDS,DROT,PNEWDT,CELENT,
     4 DFGRD0,DFGRD1,NOEL,NPT,KSLAY,KSPT,KSTEP,KINC)
C
       INCLUDE 'ABA_PARAM.INC'
C
      CHARACTER*80 MATERL
C
      DIMENSION STRESS(NTENS),STATEV(NSTATV),
     1 DDSDDE(NTENS,NTENS),DDSDDT(NTENS),DRPLDE(NTENS),
     2 STRAN(NTENS),DSTRAN(NTENS),TIME(2),PREDEF(1),DPRED(1),
     3 PROPS(NPROPS),COORDS(3),DROT(3,3),EP(3),BNU(3),
     4 DFGRD0(3,3),DFGRD1(3,3)
C
C ---------------------------------------------------------------
C     Zaremba-Jaumann-Noll-féle feszültség-sebességre
C      épülő nulladrendű hipoelasztikus anyagmodell
C ---------------------------------------------------------------
C
      DIMENSION DFGRD0INV(3,3),F(3,3),FI(3,3),FT(3,3),DELTF(3,3),
     1 GRADU(3,3),G(3,3),D(3,3),W(3,3),B(3,3),BE(3),EGYS(3,3),
     2 OJAU(3,3),ARGN1(3,3),ARGNA(3,3),ARGN1EXP(3,3),ARGNAEXP(3,3),
     3 QN(3,3),QNA(3,3),QN1(3,3),SIGMNR(3,3),SIGMN(3,3),SIGMN1(3,3),
     4 TRATE(3,3),TRATEQ(3,3),TN(3,3),TNQ(3,3),TN1(3,3),TN1Q(3,3)

      DATA Y0,Y0E5,Y1,Y2,Y3/0.D0,0.5D0,1.D0,2.D0,3.D0/
C
C Jacobi-determinánsok számítása
C
      CALL XDET(DFGRD0,DETF0)
      CALL XDET(DFGRD1,DETF1)
C
C Anyagjellemzők megadása
C
      RUG=PROPS(1)
      PO=PROPS(2)

      XLAM1=RUG*PO/(Y1+PO)/(Y1-Y2*PO)
      XLAM2=RUG/Y2/(Y1+PO)

      CSUSZ=RUG/Y2/(Y1+PO)
      P1=RUG*(PO-Y1)/(Y2*PO-Y1)/(PO+Y1)
      P2=-RUG*PO/(Y2*PO-Y1)/(PO+Y1)
C
C A konzisztens érintő tenzor megadása
C
      DO I=1,6
            DO J=1,6
                  DDSDDE(I,J)=Y0
            END DO
      END DO

      DDSDDE(1,1)=P1
      DDSDDE(1,2)=P2
      DDSDDE(1,3)=P2
      DDSDDE(2,1)=P2
      DDSDDE(2,2)=P1
```

```
      DDSDDE(2,3)=P2
      DDSDDE(3,1)=P2
      DDSDDE(3,2)=P2
      DDSDDE(3,3)=P1

      DO I=4,6
            DDSDDE(I,I)=CSUSZ
      ENDDO
C
C STATEV megadása t=0 időpontban
C
      IF (KINC.EQ.1) THEN
            STATEV(1)=Y1
            STATEV(2)=Y1
            STATEV(3)=Y1
            STATEV(4)=Y0
            STATEV(5)=Y0
            STATEV(6)=Y0
            STATEV(7)=Y0
            STATEV(8)=Y0
            STATEV(9)=Y0
      END IF
C
C Az alakváltozási gradiens növekmény
C
      CALL XINV(DFGRD0,DFGRD0INV)

      CALL XDOT(DFGRD1,DFGRD0INV,DELTF)
C
C Az elmozdulás gradiense
C
      DO I=1,3
            DO J=1,3
                  GRADU(I,J)=DFGRD1(I,J)-DFGRD0(I,J)
            END DO
      END DO
C
C Alakváltozási gradiens a lépés közepén
C
      DO I=1,3
            DO J=1,3
                  F(I,J)=Y0E5*(DFGRD1(I,J)+DFGRD0(I,J))
            END DO
      END DO
C
C Alakváltozási gradiens inverze a lépés közepén
C
      CALL XINV(F,FI)
C
C A baloldali Cauchy-Green deformációs tenzor
C a lépés közepén
C
      DO I=1,3
            DO J=1,3
                  FT(I,J)=F(J,I)
            END DO
      END DO

      CALL XDOT(F,FT,B)
C
C A baloldali Cauchy-Green deformációs tenzor
C sajátértékei
C
      CALL XEIGEN(B,BE)
```

```
C
C Az elmozdulás növekmény gradiens
C
      CALL XDOT(GRADU,FI,G)
C
C Az alakvaltozasi sebessegtenzor a lépés közepén
C
      DO I=1,3
            DO J=1,3
                  D(I,J)=(Y0E5/DTIME)*(G(I,J)+G(J,I))
            END DO
      END DO
C
C Az örvénytenzor a lépés közepén
C
      DO I=1,3
            DO J=1,3
                  W(I,J)=G(I,J)/DTIME-D(I,J)
            END DO
      END DO
C
C Egységmátrix definiálása
C
      DO I=1,3
            DO J=1,3
                  IF(I.EQ.J) THEN
                        EGYS(I,J)=Y1
                  ELSE
                        EGYS(I,J)=Y0
                  END IF
            END DO
      END DO
C
C Spintenzor megadása
C
      DO I=1,3
            DO J=1,3
                  OJAU(I,J)=W(I,J)
            END DO
      END DO
C
C Az ortogonális forgatótenzorok számítása
C
      QN(1,1)=STATEV(1)
      QN(2,2)=STATEV(2)
      QN(3,3)=STATEV(3)
      QN(1,2)=STATEV(4)
      QN(1,3)=STATEV(5)
      QN(2,3)=STATEV(6)
      QN(2,1)=STATEV(7)
      QN(3,1)=STATEV(8)
      QN(3,2)=STATEV(9)

      DO I=1,3
            DO J=1,3
                  ARGN1(I,J)=DTIME*OJAU(I,J)
            END DO
      END DO

      DO I=1,3
            DO J=1,3
                  ARGNA(I,J)=Y0E5*DTIME*OJAU(I,J)
            END DO
      END DO
```

```
      CALL XEXP(ARGN1,ARGN1EXP)
      CALL XEXP(ARGNA,ARGNAEXP)

      CALL XDOT(ARGN1EXP,QN,QN1)
      CALL XDOT(ARGNAEXP,QN,QNA)
C
C STATEV Update
C
      STATEV(1)=QN1(1,1)
      STATEV(2)=QN1(2,2)
      STATEV(3)=QN1(3,3)
      STATEV(4)=QN1(1,2)
      STATEV(5)=QN1(1,3)
      STATEV(6)=QN1(2,3)
      STATEV(7)=QN1(2,1)
      STATEV(8)=QN1(3,1)
      STATEV(9)=QN1(3,2)
C
C A Kirchhoff feszültség objektív deriváltjának
C számítása a lépés közepén
C
      TRD=D(1,1)+D(2,2)+D(3,3)

      DO I=1,3
            DO J=1,3
                  TRATE(I,J)=XLAM1*TRD*EGYS(I,J)+Y2*XLAM2*D(I,J)
            END DO
      END DO
C
C A Kirchhoff feszültség objektív deriváltja
C az együttforgó konfigurációban a lépés közepén
C
      CALL XFORG(TRATE,QNA,1,TRATEQ)

C
C (n)-be visszaforgatott Cauchy feszültség
C
      SIGMNR(1,1)=STRESS(1)
      SIGMNR(2,2)=STRESS(2)
      SIGMNR(3,3)=STRESS(3)
      SIGMNR(1,2)=STRESS(4)
      SIGMNR(1,3)=STRESS(5)
      SIGMNR(2,3)=STRESS(6)
      SIGMNR(2,1)=STRESS(4)
      SIGMNR(3,1)=STRESS(5)
      SIGMNR(3,2)=STRESS(6)

      CALL XFORG(SIGMNR,DROT,1,SIGMN)
C
C Kirchhoff-feszültség (n)-ben
C
      DO I=1,3
            DO J=1,3
                  TN(I,J)=DETF0*SIGMN(I,J)
            END DO
      END DO
C
C Az (n) állapotban érvényes Kirchhoff feszültség az
C együttforgó konfigurációban
C
      CALL XFORG(TN,QN,1,TNQ)
C
C Az (n+1) állapotban érvényes Kirchhoff feszültség az
```

```
C együttforgó konfigurációban
C
      DO I=1,3
            DO J=1,3
                  TN1Q(I,J)=TNQ(I,J)+DTIME*TRATEQ(I,J)
            END DO
      END DO
C
C Az (n+1) állapotban érvényes Kirchhoff feszültség
C
      CALL XFORG(TN1Q,QN1,2,TN1)
C
C Az (n+1) állapotban érvényes Cauchy feszültség
C
      DO I=1,3
            DO J=1,3
                  SIGMN1(I,J)=TN1(I,J)/DETF1
            END DO
      END DO

      STRESS(1)=SIGMN1(1,1)
      STRESS(2)=SIGMN1(2,2)
      STRESS(3)=SIGMN1(3,3)
      STRESS(4)=SIGMN1(1,2)
      STRESS(5)=SIGMN1(1,3)
      STRESS(6)=SIGMN1(2,3)

      RETURN
      END
```

7.5.2. Green-McInnis-Naghdi-féle feszültség-sebességre épülő szubrutin

```
      SUBROUTINE UMAT(STRESS,STATEV,DDSDDE,SSE,SPD,SCD,
     1 RPL,DDSDDT,DRPLDE,DRPLDT,STRAN,DSTRAN,
     2 TIME,DTIME,TEMP,DTEMP,PREDEF,DPRED,MATERL,NDI,NSHR,NTENS,
     3 NSTATV,PROPS,NPROPS,COORDS,DROT,PNEWDT,CELENT,
     4 DFGRD0,DFGRD1,NOEL,NPT,KSLAY,KSPT,KSTEP,KINC)
C
       INCLUDE 'ABA_PARAM.INC'
C
      CHARACTER*80 MATERL
C
      DIMENSION STRESS(NTENS),STATEV(NSTATV),
     1 DDSDDE(NTENS,NTENS),DDSDDT(NTENS),DRPLDE(NTENS),
     2 STRAN(NTENS),DSTRAN(NTENS),TIME(2),PREDEF(1),DPRED(1),
     3 PROPS(NPROPS),COORDS(3),DROT(3,3),EP(3),BNU(3),
     4 DFGRD0(3,3),DFGRD1(3,3)
C
C ---------------------------------------------------------------
C     Green-McInnis-Naghdi-féle feszültség-sebességre
C      épülő nulladrendű hipoelasztikus anyagmodell
C ---------------------------------------------------------------
C
      DIMENSION DFGRD0INV(3,3),F(3,3),FI(3,3),FT(3,3),DELTF(3,3),
     1 GRADU(3,3),G(3,3),D(3,3),W(3,3),B(3,3),BE(3),EGYS(3,3),
     2 QN(3,3),QNA(3,3),QN1(3,3),SIGMNR(3,3),SIGMN(3,3),SIGMN1(3,3),
     3 TRATE(3,3),TRATEQ(3,3),TN(3,3),TNQ(3,3),TN1(3,3),TN1Q(3,3),
     4 U0(3,3),V0(3,3),U1(3,3),V1(3,3),UA(3,3),VA(3,3)

      DATA Y0,Y0E5,Y1,Y2,Y3/0.D0,0.5D0,1.D0,2.D0,3.D0/
```

```
C
C Jacobi-determinánsok számítása
C
      CALL XDET(DFGRD0,DETF0)
      CALL XDET(DFGRD1,DETF1)
C
C Anyagjellemzők megadása
C
      RUG=PROPS(1)
      PO=PROPS(2)

      XLAM1=RUG*PO/(Y1+PO)/(Y1-Y2*PO)
      XLAM2=RUG/Y2/(Y1+PO)

      CSUSZ=RUG/Y2/(Y1+PO)
      P1=RUG*(PO-Y1)/(Y2*PO-Y1)/(PO+Y1)
      P2=-RUG*PO/(Y2*PO-Y1)/(PO+Y1)
C
C A konzisztens érintő tenzor megadása
C
      DO I=1,6
            DO J=1,6
                  DDSDDE(I,J)=Y0
            END DO
      END DO

      DDSDDE(1,1)=P1
      DDSDDE(1,2)=P2
      DDSDDE(1,3)=P2
      DDSDDE(2,1)=P2
      DDSDDE(2,2)=P1
      DDSDDE(2,3)=P2
      DDSDDE(3,1)=P2
      DDSDDE(3,2)=P2
      DDSDDE(3,3)=P1

      DO I=4,6
            DDSDDE(I,I)=CSUSZ
      ENDDO
C
C STATEV megadása t=0 időpontban
C
      IF (KINC.EQ.1) THEN
            STATEV(1)=Y1
            STATEV(2)=Y1
            STATEV(3)=Y1
            STATEV(4)=Y0
            STATEV(5)=Y0
            STATEV(6)=Y0
            STATEV(7)=Y0
            STATEV(8)=Y0
            STATEV(9)=Y0
      END IF
C
C Az alakváltozási gradiens növekmény
C
      CALL XINV(DFGRD0,DFGRD0INV)

      CALL XDOT(DFGRD1,DFGRD0INV,DELTF)
C
C Az elmozdulás gradiense
C
      DO I=1,3
            DO J=1,3
```

```
                  GRADU(I,J)=DFGRD1(I,J)-DFGRD0(I,J)
            END DO
      END DO
C
C Alakváltozási gradiens a lépés közepén
C
      DO I=1,3
            DO J=1,3
                  F(I,J)=Y0E5*(DFGRD1(I,J)+DFGRD0(I,J))
            END DO
      END DO
C
C Alakváltozási gradiens inverze a lépés közepén
C
      CALL XINV(F,FI)
C
C A baloldali Cauchy-Green deformációs tenzor
C a lépés közepén
C
      DO I=1,3
            DO J=1,3
                  FT(I,J)=F(J,I)
            END DO
      END DO

      CALL XDOT(F,FT,B)
C
C A baloldali Cauchy-Green deformációs tenzor
C sajátértékei
C
      CALL XEIGEN(B,BE)
C
C Az elmozdulás növekmény gradiens
C
      CALL XDOT(GRADU,FI,G)
C
C Az alakvaltozasi sebessegtenzor a lépés közepén
C
      DO I=1,3
            DO J=1,3
                  D(I,J)=(Y0E5/DTIME)*(G(I,J)+G(J,I))
            END DO
      END DO
C
C Az örvénytenzor a lépés közepén
C
      DO I=1,3
            DO J=1,3
                  W(I,J)=G(I,J)/DTIME-D(I,J)
            END DO
      END DO
C
C Egységmátrix definiálása
C
      DO I=1,3
            DO J=1,3
                  IF(I.EQ.J) THEN
                        EGYS(I,J)=Y1
                  ELSE
                        EGYS(I,J)=Y0
                  END IF
            END DO
      END DO
C
```

```
C Az ortogonális forgatótenzorok számítása
C (Polár felbontások)
C
      CALL XPOL(DFGRD0,QN,U0,V0)
      CALL XPOL(DFGRD1,QN1,U1,V1)
      CALL XPOL(F,QNA,UA,VA)
C
C STATEV Update
C
      STATEV(1)=QN1(1,1)
      STATEV(2)=QN1(2,2)
      STATEV(3)=QN1(3,3)
      STATEV(4)=QN1(1,2)
      STATEV(5)=QN1(1,3)
      STATEV(6)=QN1(2,3)
      STATEV(7)=QN1(2,1)
      STATEV(8)=QN1(3,1)
      STATEV(9)=QN1(3,2)
C
C A Kirchhoff feszültség objektív deriváltjának
C számítása a lépés közepén
C
      TRD=D(1,1)+D(2,2)+D(3,3)

      DO I=1,3
            DO J=1,3
                  TRATE(I,J)=XLAM1*TRD*EGYS(I,J)+Y2*XLAM2*D(I,J)
            END DO
      END DO
C
C A Kirchhoff feszültség objektív deriváltja
C az együttforgó konfigurációban a lépés közepén
C
      CALL XFORG(TRATE,QNA,1,TRATEQ)

C
C (n)-be visszaforgatott Cauchy feszültség
C
      SIGMNR(1,1)=STRESS(1)
      SIGMNR(2,2)=STRESS(2)
      SIGMNR(3,3)=STRESS(3)
      SIGMNR(1,2)=STRESS(4)
      SIGMNR(1,3)=STRESS(5)
      SIGMNR(2,3)=STRESS(6)
      SIGMNR(2,1)=STRESS(4)
      SIGMNR(3,1)=STRESS(5)
      SIGMNR(3,2)=STRESS(6)

      CALL XFORG(SIGMNR,DROT,1,SIGMN)
C
C Kirchhoff-feszültség (n)-ben
C
      DO I=1,3
            DO J=1,3
                  TN(I,J)=DETF0*SIGMN(I,J)
            END DO
      END DO
C
C Az (n) állapotban érvényes Kirchhoff feszültség az
C együttforgó konfigurációban
C
      CALL XFORG(TN,QN,1,TNQ)
C
C Az (n+1) állapotban érvényes Kirchhoff feszültség az
```

```
C együttforgó konfigurációban
C
      DO I=1,3
            DO J=1,3
                  TN1Q(I,J)=TNQ(I,J)+DTIME*TRATEQ(I,J)
            END DO
      END DO
C
C Az (n+1) állapotban érvényes Kirchhoff feszültség
C
      CALL XFORG(TN1Q,QN1,2,TN1)
C
C Az (n+1) állapotban érvényes Cauchy feszültség
C
      DO I=1,3
            DO J=1,3
                  SIGMN1(I,J)=TN1(I,J)/DETF1
            END DO
      END DO

      STRESS(1)=SIGMN1(1,1)
      STRESS(2)=SIGMN1(2,2)
      STRESS(3)=SIGMN1(3,3)
      STRESS(4)=SIGMN1(1,2)
      STRESS(5)=SIGMN1(1,3)
      STRESS(6)=SIGMN1(2,3)

      RETURN
      END
```

7.5.3. EULER-FÉLE TRIÁD SPINTENZORÁN ALAPULÓ FESZÜLTSÉG-SEBESSÉGRE ÉPÜLŐ SZUBRUTIN

```
      SUBROUTINE UMAT(STRESS,STATEV,DDSDDE,SSE,SPD,SCD,
     1 RPL,DDSDDT,DRPLDE,DRPLDT,STRAN,DSTRAN,
     2 TIME,DTIME,TEMP,DTEMP,PREDEF,DPRED,MATERL,NDI,NSHR,NTENS,
     3 NSTATV,PROPS,NPROPS,COORDS,DROT,PNEWDT,CELENT,
     4 DFGRD0,DFGRD1,NOEL,NPT,KSLAY,KSPT,KSTEP,KINC)
C
       INCLUDE 'ABA_PARAM.INC'
C
      CHARACTER*80 MATERL
C
      DIMENSION STRESS(NTENS),STATEV(NSTATV),
     1 DDSDDE(NTENS,NTENS),DDSDDT(NTENS),DRPLDE(NTENS),
     2 STRAN(NTENS),DSTRAN(NTENS),TIME(2),PREDEF(1),DPRED(1),
     3 PROPS(NPROPS),COORDS(3),DROT(3,3),EP(3),BNU(3),
     4 DFGRD0(3,3),DFGRD1(3,3)
C
C ---------------------------------------------------------------
C     Az Euler-féle triád spintenzorán alapuló feszültség-
C     sebességre épülő nulladrendű hipoelasztikus anyagmodell
C ---------------------------------------------------------------
C
      DIMENSION DFGRD0INV(3,3),F(3,3),FI(3,3),FT(3,3),DELTF(3,3),
     1 GRADU(3,3),G(3,3),D(3,3),W(3,3),B(3,3),BE(3),EGYS(3,3),SN(3,3),
     2 OEU(3,3),ARGN1(3,3),ARGNA(3,3),ARGN1EXP(3,3),ARGNAEXP(3,3),
     3 QN(3,3),QNA(3,3),QN1(3,3),SIGMNR(3,3),SIGMN(3,3),SIGMN1(3,3),
     4 TRATE(3,3),TRATEQ(3,3),TN(3,3),TNQ(3,3),TN1(3,3),TN1Q(3,3)
```

```
      DATA Y0,Y0E5,Y1,Y2,Y3/0.D0,0.5D0,1.D0,2.D0,3.D0/
C
C Jacobi-determinánsok számítása
C
      CALL XDET(DFGRD0,DETF0)
      CALL XDET(DFGRD1,DETF1)
C
C Anyagjellemzők megadása
C
      RUG=PROPS(1)
      PO=PROPS(2)

      XLAM1=RUG*PO/(Y1+PO)/(Y1-Y2*PO)
      XLAM2=RUG/Y2/(Y1+PO)

      CSUSZ=RUG/Y2/(Y1+PO)
      P1=RUG*(PO-Y1)/(Y2*PO-Y1)/(PO+Y1)
      P2=-RUG*PO/(Y2*PO-Y1)/(PO+Y1)
C
C A konzisztens érintő tenzor megadása
C
      DO I=1,6
            DO J=1,6
                  DDSDDE(I,J)=Y0
            END DO
      END DO

      DDSDDE(1,1)=P1
      DDSDDE(1,2)=P2
      DDSDDE(1,3)=P2
      DDSDDE(2,1)=P2
      DDSDDE(2,2)=P1
      DDSDDE(2,3)=P2
      DDSDDE(3,1)=P2
      DDSDDE(3,2)=P2
      DDSDDE(3,3)=P1

      DO I=4,6
            DDSDDE(I,I)=CSUSZ
      ENDDO
C
C STATEV megadása t=0 időpontban
C
      IF (KINC.EQ.1) THEN
            STATEV(1)=Y1
            STATEV(2)=Y1
            STATEV(3)=Y1
            STATEV(4)=Y0
            STATEV(5)=Y0
            STATEV(6)=Y0
            STATEV(7)=Y0
            STATEV(8)=Y0
            STATEV(9)=Y0
      END IF
C
C Az alakváltozási gradiens növekmény
C
      CALL XINV(DFGRD0,DFGRD0INV)

      CALL XDOT(DFGRD1,DFGRD0INV,DELTF)
C
C Az elmozdulás gradiense
C
      DO I=1,3
```

```
            DO J=1,3
                  GRADU(I,J)=DFGRD1(I,J)-DFGRD0(I,J)
            END DO
      END DO
C
C Alakváltozási gradiens a lépés közepén
C
      DO I=1,3
            DO J=1,3
                  F(I,J)=Y0E5*(DFGRD1(I,J)+DFGRD0(I,J))
            END DO
      END DO
C
C Alakváltozási gradiens inverze a lépés közepén
C
      CALL XINV(F,FI)
C
C A baloldali Cauchy-Green deformációs tenzor
C a lépés közepén
C
      DO I=1,3
            DO J=1,3
                  FT(I,J)=F(J,I)
            END DO
      END DO

      CALL XDOT(F,FT,B)
C
C A baloldali Cauchy-Green deformációs tenzor
C sajátértékei
C
      CALL XEIGEN(B,BE)
C
C Az elmozdulás növekmény gradiens
C
      CALL XDOT(GRADU,FI,G)
C
C Az alakvaltozasi sebessegtenzor a lépés közepén
C
      DO I=1,3
            DO J=1,3
                  D(I,J)=(Y0E5/DTIME)*(G(I,J)+G(J,I))
            END DO
      END DO
C
C Az örvénytenzor a lépés közepén
C
      DO I=1,3
            DO J=1,3
                  W(I,J)=G(I,J)/DTIME-D(I,J)
            END DO
      END DO
C
C Egységmátrix definiálása
C
      DO I=1,3
            DO J=1,3
                  IF(I.EQ.J) THEN
                        EGYS(I,J)=Y1
                  ELSE
                        EGYS(I,J)=Y0
                  END IF
            END DO
      END DO
```

```
C
C Spintenzor megadása
C
      IF (DABS((BE(1)-BE(2))/BE(1)).LT.1.D-10) THEN
            IF(DABS((BE(2)-BE(3))/BE(2)).LT.1.D-10) THEN
                  M=1
                  GOTO 100
            ELSE
                  BE(1)=BE(1)
                  BE(2)=BE(3)
                  M=2
                  GOTO 100
            END IF
      ELSEIF (DABS((BE(1)-BE(3))/BE(1)).LT.1.D-10) THEN
            M=2
            GOTO 100
      ELSEIF (DABS((BE(2)-BE(3))/BE(2)).LT.1.D-10) THEN
            M=2
            GOTO 100
      ELSE
            M=3
      END IF

100   IF (M.EQ.1) THEN
            DO I=1,3
                  DO J=1,3
                        SN(I,J)=Y0
                  END DO
            END DO
      ELSEIF (M.EQ.2) THEN
            CALL OEUM2(BE,B,D,SN)
      ELSEIF (M.EQ.3) THEN
            CALL OEUM3(BE,B,D,SN)
      END IF

      DO I=1,3
            DO J=1,3
                  OEU(I,J)=W(I,J)+SN(I,J)
            END DO
      END DO
C
C Az ortogonális forgatótenzorok számítása
C
      QN(1,1)=STATEV(1)
      QN(2,2)=STATEV(2)
      QN(3,3)=STATEV(3)
      QN(1,2)=STATEV(4)
      QN(1,3)=STATEV(5)
      QN(2,3)=STATEV(6)
      QN(2,1)=STATEV(7)
      QN(3,1)=STATEV(8)
      QN(3,2)=STATEV(9)

      DO I=1,3
            DO J=1,3
                  ARGN1(I,J)=DTIME*OEU(I,J)
            END DO
      END DO

      DO I=1,3
            DO J=1,3
                  ARGNA(I,J)=Y0E5*DTIME*OEU(I,J)
            END DO
      END DO
```

```
      CALL XEXP(ARGN1,ARGN1EXP)
      CALL XEXP(ARGNA,ARGNAEXP)

      CALL XDOT(ARGN1EXP,QN,QN1)
      CALL XDOT(ARGNAEXP,QN,QNA)
C
C STATEV Update
C
      STATEV(1)=QN1(1,1)
      STATEV(2)=QN1(2,2)
      STATEV(3)=QN1(3,3)
      STATEV(4)=QN1(1,2)
      STATEV(5)=QN1(1,3)
      STATEV(6)=QN1(2,3)
      STATEV(7)=QN1(2,1)
      STATEV(8)=QN1(3,1)
      STATEV(9)=QN1(3,2)
C
C A Kirchhoff feszültség objektív deriváltjának
C számítása a lépés közepén
C
      TRD=D(1,1)+D(2,2)+D(3,3)

      DO I=1,3
            DO J=1,3
                  TRATE(I,J)=XLAM1*TRD*EGYS(I,J)+Y2*XLAM2*D(I,J)
            END DO
      END DO
C
C A Kirchhoff feszültség objektív deriváltja
C az együttforgó konfigurációban a lépés közepén
C
      CALL XFORG(TRATE,QNA,1,TRATEQ)

C
C (n)-be visszaforgatott Cauchy feszültség
C
      SIGMNR(1,1)=STRESS(1)
      SIGMNR(2,2)=STRESS(2)
      SIGMNR(3,3)=STRESS(3)
      SIGMNR(1,2)=STRESS(4)
      SIGMNR(1,3)=STRESS(5)
      SIGMNR(2,3)=STRESS(6)
      SIGMNR(2,1)=STRESS(4)
      SIGMNR(3,1)=STRESS(5)
      SIGMNR(3,2)=STRESS(6)

      CALL XFORG(SIGMNR,DROT,1,SIGMN)
C
C Kirchhoff-feszültség (n)-ben
C
      DO I=1,3
            DO J=1,3
                  TN(I,J)=DETF0*SIGMN(I,J)
            END DO
      END DO
C
C Az (n) állapotban érvényes Kirchhoff feszültség az
C együttforgó konfigurációban
C
      CALL XFORG(TN,QN,1,TNQ)
C
C Az (n+1) állapotban érvényes Kirchhoff feszültség az
```

```
C együttforgó konfigurációban
C
      DO I=1,3
            DO J=1,3
                  TN1Q(I,J)=TNQ(I,J)+DTIME*TRATEQ(I,J)
            END DO
      END DO
C
C Az (n+1) állapotban érvényes Kirchhoff feszültség
C
      CALL XFORG(TN1Q,QN1,2,TN1)
C
C Az (n+1) állapotban érvényes Cauchy feszültség
C
      DO I=1,3
            DO J=1,3
                  SIGMN1(I,J)=TN1(I,J)/DETF1
            END DO
      END DO

      STRESS(1)=SIGMN1(1,1)
      STRESS(2)=SIGMN1(2,2)
      STRESS(3)=SIGMN1(3,3)
      STRESS(4)=SIGMN1(1,2)
      STRESS(5)=SIGMN1(1,3)
      STRESS(6)=SIGMN1(2,3)

      RETURN
      END
```

7.5.4. LOGARITMIKUS FESZÜLTSÉG-SEBESSÉGRE ÉPÜLŐ SZUBRUTIN

```
      SUBROUTINE UMAT(STRESS,STATEV,DDSDDE,SSE,SPD,SCD,
     1 RPL,DDSDDT,DRPLDE,DRPLDT,STRAN,DSTRAN,
     2 TIME,DTIME,TEMP,DTEMP,PREDEF,DPRED,MATERL,NDI,NSHR,NTENS,
     3 NSTATV,PROPS,NPROPS,COORDS,DROT,PNEWDT,CELENT,
     4 DFGRD0,DFGRD1,NOEL,NPT,KSLAY,KSPT,KSTEP,KINC)
C
       INCLUDE 'ABA_PARAM.INC'
C
      CHARACTER*80 MATERL
C
      DIMENSION STRESS(NTENS),STATEV(NSTATV),
     1 DDSDDE(NTENS,NTENS),DDSDDT(NTENS),DRPLDE(NTENS),
     2 STRAN(NTENS),DSTRAN(NTENS),TIME(2),PREDEF(1),DPRED(1),
     3 PROPS(NPROPS),COORDS(3),DROT(3,3),EP(3),BNU(3),
     4 DFGRD0(3,3),DFGRD1(3,3)
C
C ---------------------------------------------------------------
C     Logaritmikus feszültség-sebességre
C     épülő nulladrendű hipoelasztikus anyagmodell
C ---------------------------------------------------------------
C
      DIMENSION DFGRD0INV(3,3),F(3,3),FI(3,3),FT(3,3),DELTF(3,3),
     1 GRADU(3,3),G(3,3),D(3,3),W(3,3),B(3,3),BE(3),EGYS(3,3),SN(3,3),
     2 OLOG(3,3),ARGN1(3,3),ARGNA(3,3),ARGN1EXP(3,3),ARGNAEXP(3,3),
     3 QN(3,3),QNA(3,3),QN1(3,3),SIGMNR(3,3),SIGMN(3,3),SIGMN1(3,3),
     4 TRATE(3,3),TRATEQ(3,3),TN(3,3),TNQ(3,3),TN1(3,3),TN1Q(3,3)

      DATA Y0,Y0E5,Y1,Y2,Y3/0.D0,0.5D0,1.D0,2.D0,3.D0/
C
```

```
C Jacobi-determinánsok számítása
C
      CALL XDET(DFGRD0,DETF0)
      CALL XDET(DFGRD1,DETF1)
C
C Anyagjellemzők megadása
C
      RUG=PROPS(1)
      PO=PROPS(2)

      XLAM1=RUG*PO/(Y1+PO)/(Y1-Y2*PO)
      XLAM2=RUG/Y2/(Y1+PO)

      CSUSZ=RUG/Y2/(Y1+PO)
      P1=RUG*(PO-Y1)/(Y2*PO-Y1)/(PO+Y1)
      P2=-RUG*PO/(Y2*PO-Y1)/(PO+Y1)
C
C A konzisztens érintő tenzor megadása
C
      DO I=1,6
            DO J=1,6
                  DDSDDE(I,J)=Y0
            END DO
      END DO

      DDSDDE(1,1)=P1
      DDSDDE(1,2)=P2
      DDSDDE(1,3)=P2
      DDSDDE(2,1)=P2
      DDSDDE(2,2)=P1
      DDSDDE(2,3)=P2
      DDSDDE(3,1)=P2
      DDSDDE(3,2)=P2
      DDSDDE(3,3)=P1

      DO I=4,6
            DDSDDE(I,I)=CSUSZ
      ENDDO
C
C STATEV megadása t=0 időpontban
C
      IF (KINC.EQ.1) THEN
            STATEV(1)=Y1
            STATEV(2)=Y1
            STATEV(3)=Y1
            STATEV(4)=Y0
            STATEV(5)=Y0
            STATEV(6)=Y0
            STATEV(7)=Y0
            STATEV(8)=Y0
            STATEV(9)=Y0
      END IF
C
C Az alakváltozási gradiens növekmény
C
      CALL XINV(DFGRD0,DFGRD0INV)

      CALL XDOT(DFGRD1,DFGRD0INV,DELTF)
C
C Az elmozdulás gradiense
C
      DO I=1,3
            DO J=1,3
                  GRADU(I,J)=DFGRD1(I,J)-DFGRD0(I,J)
```

```
            END DO
      END DO
C
C Alakváltozási gradiens a lépés közepén
C
      DO I=1,3
            DO J=1,3
                  F(I,J)=Y0E5*(DFGRD1(I,J)+DFGRD0(I,J))
            END DO
      END DO
C
C Alakváltozási gradiens inverze a lépés közepén
C
      CALL XINV(F,FI)
C
C A baloldali Cauchy-Green deformációs tenzor
C a lépés közepén
C
      DO I=1,3
            DO J=1,3
                  FT(I,J)=F(J,I)
            END DO
      END DO

      CALL XDOT(F,FT,B)
C
C A baloldali Cauchy-Green deformációs tenzor
C sajátértékei
C
      CALL XEIGEN(B,BE)
C
C Az elmozdulás növekmény gradiens
C
      CALL XDOT(GRADU,FI,G)
C
C Az alakvaltozasi sebessegtenzor a lépés közepén
C
      DO I=1,3
            DO J=1,3
                  D(I,J)=(Y0E5/DTIME)*(G(I,J)+G(J,I))
            END DO
      END DO
C
C Az örvénytenzor a lépés közepén
C
      DO I=1,3
            DO J=1,3
                  W(I,J)=G(I,J)/DTIME-D(I,J)
            END DO
      END DO
C
C Egységmátrix definiálása
C
      DO I=1,3
            DO J=1,3
                  IF(I.EQ.J) THEN
                        EGYS(I,J)=Y1
                  ELSE
                        EGYS(I,J)=Y0
                  END IF
            END DO
      END DO
C
C Spintenzor megadása
```

```
C
      IF (DABS((BE(1)-BE(2))/BE(1)).LT.1.D-10) THEN
            IF(DABS((BE(2)-BE(3))/BE(2)).LT.1.D-10) THEN
                  M=1
                  GOTO 100
            ELSE
                  BE(1)=BE(1)
                  BE(2)=BE(3)
                  M=2
                  GOTO 100
            END IF
      ELSEIF (DABS((BE(1)-BE(3))/BE(1)).LT.1.D-10) THEN
            M=2
            GOTO 100
      ELSEIF (DABS((BE(2)-BE(3))/BE(2)).LT.1.D-10) THEN
            M=2
            GOTO 100
      ELSE
            M=3
      END IF

100   IF (M.EQ.1) THEN
            DO I=1,3
                  DO J=1,3
                        SN(I,J)=Y0
                  END DO
            END DO
      ELSEIF (M.EQ.2) THEN
            CALL OLOGM2(BE,B,D,SN)
      ELSEIF (M.EQ.3) THEN
            CALL OLOGM3(BE,B,D,SN)
      END IF

      DO I=1,3
            DO J=1,3
                  OLOG(I,J)=W(I,J)+SN(I,J)
            END DO
      END DO
C
C Az ortogonális forgatótenzorok számítása
C
      QN(1,1)=STATEV(1)
      QN(2,2)=STATEV(2)
      QN(3,3)=STATEV(3)
      QN(1,2)=STATEV(4)
      QN(1,3)=STATEV(5)
      QN(2,3)=STATEV(6)
      QN(2,1)=STATEV(7)
      QN(3,1)=STATEV(8)
      QN(3,2)=STATEV(9)

      DO I=1,3
            DO J=1,3
                  ARGN1(I,J)=DTIME*OLOG(I,J)
            END DO
      END DO

      DO I=1,3
            DO J=1,3
                  ARGNA(I,J)=Y0E5*DTIME*OLOG(I,J)
            END DO
      END DO

      CALL XEXP(ARGN1,ARGN1EXP)
```

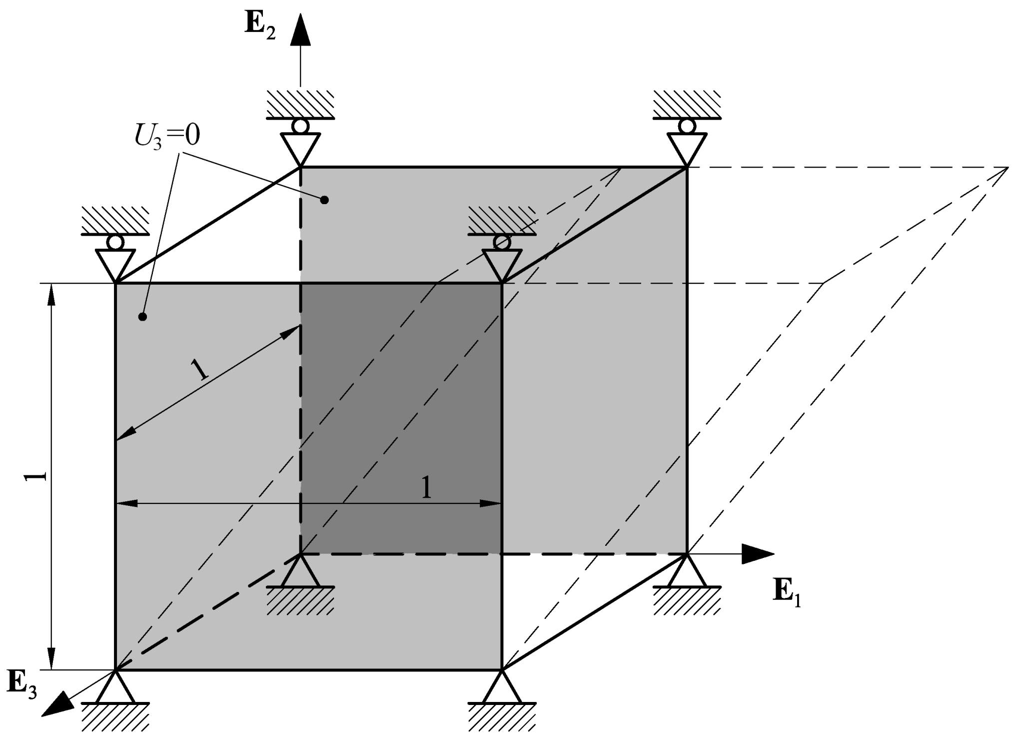
```
      CALL XEXP(ARGNA,ARGNAEXP)

      CALL XDOT(ARGN1EXP,QN,QN1)
      CALL XDOT(ARGNAEXP,QN,QNA)
C
C STATEV Update
C
      STATEV(1)=QN1(1,1)
      STATEV(2)=QN1(2,2)
      STATEV(3)=QN1(3,3)
      STATEV(4)=QN1(1,2)
      STATEV(5)=QN1(1,3)
      STATEV(6)=QN1(2,3)
      STATEV(7)=QN1(2,1)
      STATEV(8)=QN1(3,1)
      STATEV(9)=QN1(3,2)
C
C A Kirchhoff feszültség objektív deriváltjának
C számítása a lépés közepén
C
      TRD=D(1,1)+D(2,2)+D(3,3)

      DO I=1,3
            DO J=1,3
                  TRATE(I,J)=XLAM1*TRD*EGYS(I,J)+Y2*XLAM2*D(I,J)
            END DO
      END DO
C
C A Kirchhoff feszültség objektív deriváltja
C az együttforgó konfigurációban a lépés közepén
C
      CALL XFORG(TRATE,QNA,1,TRATEQ)

C
C (n)-be visszaforgatott Cauchy feszültség
C
      SIGMNR(1,1)=STRESS(1)
      SIGMNR(2,2)=STRESS(2)
      SIGMNR(3,3)=STRESS(3)
      SIGMNR(1,2)=STRESS(4)
      SIGMNR(1,3)=STRESS(5)
      SIGMNR(2,3)=STRESS(6)
      SIGMNR(2,1)=STRESS(4)
      SIGMNR(3,1)=STRESS(5)
      SIGMNR(3,2)=STRESS(6)

      CALL XFORG(SIGMNR,DROT,1,SIGMN)
C
C Kirchhoff-feszültség (n)-ben
C
      DO I=1,3
            DO J=1,3
                  TN(I,J)=DETF0*SIGMN(I,J)
            END DO
      END DO
C
C Az (n) állapotban érvényes Kirchhoff feszültség az
C együttforgó konfigurációban
C
      CALL XFORG(TN,QN,1,TNQ)
C
C Az (n+1) állapotban érvényes Kirchhoff feszültség az
C együttforgó konfigurációban
C
```

```
      DO I=1,3
            DO J=1,3
                  TN1Q(I,J)=TNQ(I,J)+DTIME*TRATEQ(I,J)
            END DO
      END DO
C
C Az (n+1) állapotban érvényes Kirchhoff feszültség
C
      CALL XFORG(TN1Q,QN1,2,TN1)
C
C Az (n+1) állapotban érvényes Cauchy feszültség
C
      DO I=1,3
            DO J=1,3
                  SIGMN1(I,J)=TN1(I,J)/DETF1
            END DO
      END DO

      STRESS(1)=SIGMN1(1,1)
      STRESS(2)=SIGMN1(2,2)
      STRESS(3)=SIGMN1(3,3)
      STRESS(4)=SIGMN1(1,2)
      STRESS(5)=SIGMN1(1,3)
      STRESS(6)=SIGMN1(2,3)

      RETURN
      END
```

7.6. EGYSZERŰ NYÍRÁS MODELLJE ABAQUS-BAN

Ahhoz, hogy az egyszerű nyírás esetére meghatározott analitikus megoldásokkal az UMAT szubrutinokkal számított eredményeket összehasonlíthassuk szükséges, hogy az ABAQUS-ban használt modell illeszkedjen az analitikus számításoknál használt modellhez. Ennek fő meghatározója a kényszerek, illetve terhelések megfelelő megválasztása.

A vizsgált geometriát és az alkalmazott kényszereket mutatja a 78. ábra.



78. ábra: Kényszerek az egyszerű nyírás esetén.

Az alkalmazott elemtípus: C3D8, 8 csomópontos hexagonális, lineáris elem. A modell felosztása egy elemre történik. Az ABAQUS lehetőséget kínál elmozdulás terhelés megadására is, így a felső lapra az 1-es irányban az előírt elmozdulás értéke 10.

A geometriai nemlinearitást figyelembevevő nemlineáris analízis során a számítás pontossága főként a terhelési folyamat felosztásának finomságán múlik. Lehetőség van automatikus felosztás választására, amikor a program próbálja minél kevesebb lépés alatt elvégezni a számítást. Ilyenkor ha a választott lépésköz esetén az iteráció túl lassan konvergál, akkor kisebb növekmény választása következik.

A dolgozatban végzett számítások során a terhelési szakasz 10 egyenlő részre történő felosztása történik.

A számításhoz tartozó ABAQUS input file:

```
*Heading
** Job name: Munka01 Model name: Model-1
*Preprint, echo=NO, model=NO, history=NO, contact=NO
**
** PARTS
**
*Part, name="Kocka (Part)"
*End Part
**
** ASSEMBLY
**
*Assembly, name=Assembly
**
*Instance, name="Kocka (Part)-1", part="Kocka (Part)"
*Node
      1,         0.5,         0.5,           1.
      2,         0.5,        -0.5,           1.
      3,         0.5,         0.5,           0.
      4,         0.5,        -0.5,           0.
      5,        -0.5,         0.5,           1.
      6,        -0.5,        -0.5,           1.
      7,        -0.5,         0.5,           0.
      8,        -0.5,        -0.5,           0.
*Element, type=C3D8
1, 5, 6, 8, 7, 1, 2, 4, 3
** Region: (Section01:Picked)
*Elset, elset=_PickedSet2, internal
 1,
** Section: Section01
*Solid Section, elset=_PickedSet2, material=Anyagmodell
1.,
*End Instance
*Nset, nset=_PickedSet6, internal, instance="Kocka (Part)-1", generate
 2,  8,  2
*Elset, elset=_PickedSet6, internal, instance="Kocka (Part)-1"
 1,
*Nset, nset=_PickedSet7, internal, instance="Kocka (Part)-1"
 1, 2, 5, 6
*Elset, elset=_PickedSet7, internal, instance="Kocka (Part)-1"
 1,
*Nset, nset=_PickedSet8, internal, instance="Kocka (Part)-1"
 3, 4, 7, 8
*Elset, elset=_PickedSet8, internal, instance="Kocka (Part)-1"
 1,
*Nset, nset=_PickedSet9, internal, instance="Kocka (Part)-1", generate
 1,  7,  2
*Elset, elset=_PickedSet9, internal, instance="Kocka (Part)-1"
 1,
*End Assembly
**
** MATERIALS
**
*Material, name=Anyagmodell
*Depvar
      9,
*User Material, constants=2
 2500, 0.35
**
** BOUNDARY CONDITIONS
**
** Name: Also lap megfogas Type: Symmetry/Antisymmetry/Encastre
```

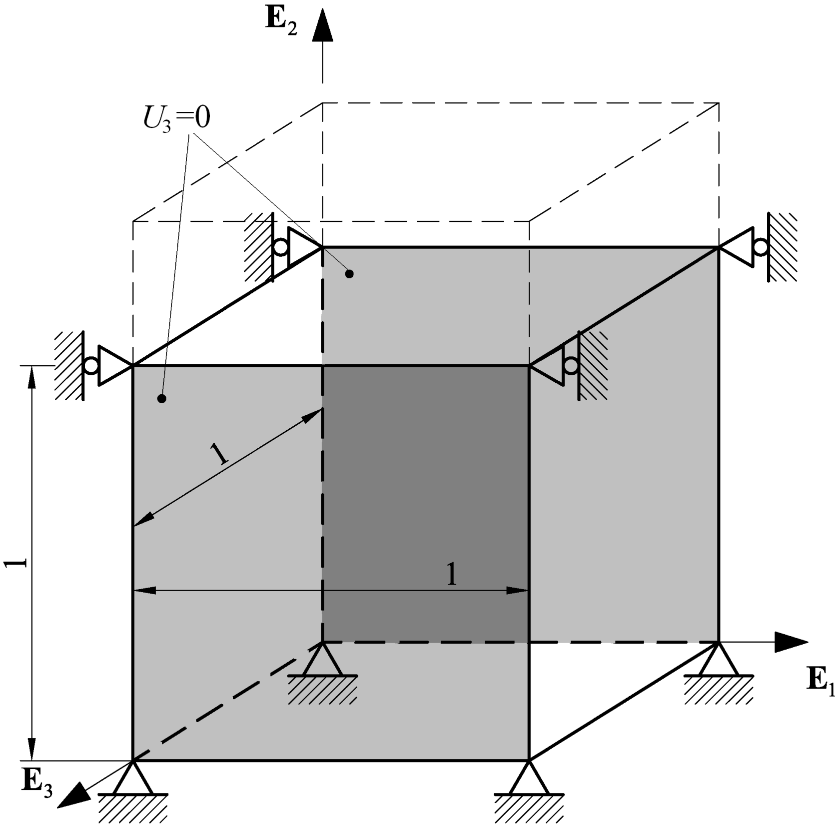
```
*Boundary
_PickedSet6, PINNED
** Name: Oldallap1 Type: Displacement/Rotation
*Boundary
_PickedSet7, 3, 3
** Name: Oldallap2 Type: Displacement/Rotation
*Boundary
_PickedSet8, 3, 3
** Name: Teto Type: Displacement/Rotation
*Boundary
_PickedSet9, 2, 2
** ----------------------------------------------------------------
**
** STEP: Terheles
**
*Step, name=Terheles, nlgeom=YES
*Static, direct
0.1, 1.,
**
** BOUNDARY CONDITIONS
**
** Name: Teto Type: Displacement/Rotation
*Boundary
_PickedSet9, 1, 1, 10.
**
** OUTPUT REQUESTS
**
*Restart, write, frequency=1
**
** FIELD OUTPUT: F-Output-1
**
*Output, field, variable=PRESELECT
**
** HISTORY OUTPUT: H-Output-1
**
*Output, history, variable=PRESELECT
*El Print, freq=999999
*Node Print, freq=999999
*End Step
```

(Az input file futtatása előtt szükséges megadni a FORTRAN szubrutin elérési útját).

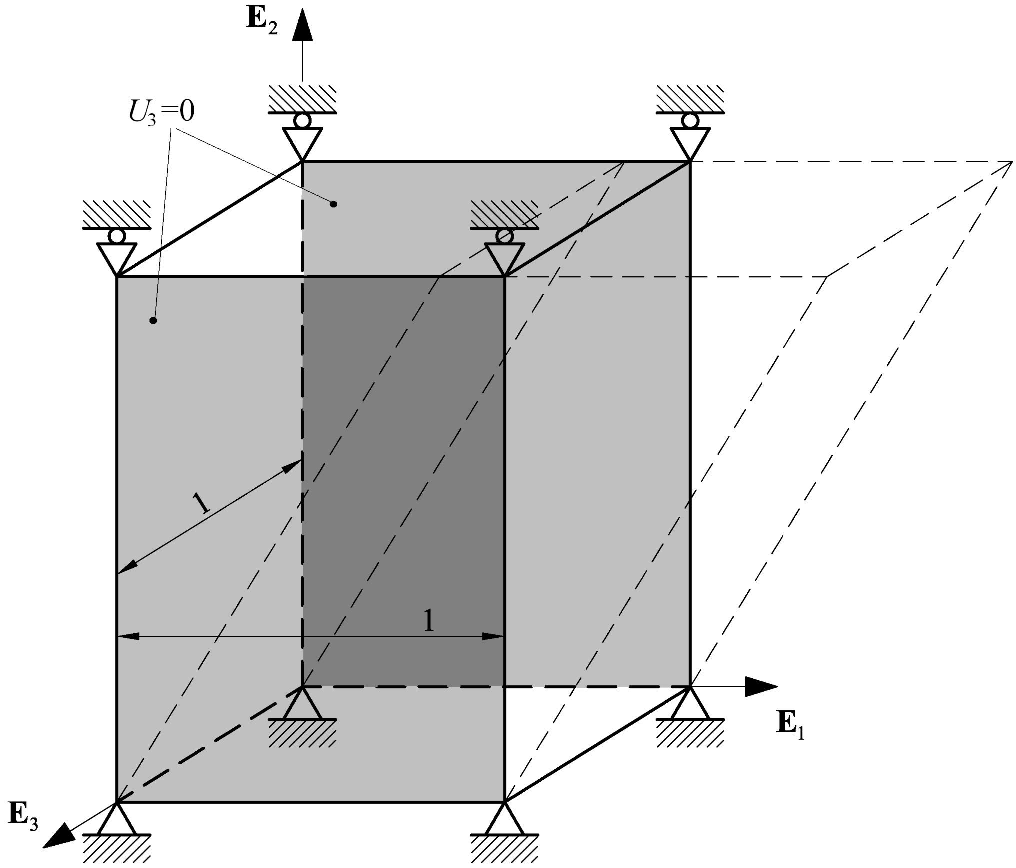
7.7. ZÁRT TERHELÉSI CIKLUSÚ PÉLDA MODELLJE ABAQUS-BAN

Az 6.2 pontban közölt zárt terhelési ciklusú példára vonatkozó kényszereket szemléltetik 79.-82. ábrák. Az egymás után következő terhelési szakaszok során a geometriára előírt kényszerek és terhelések változnak.

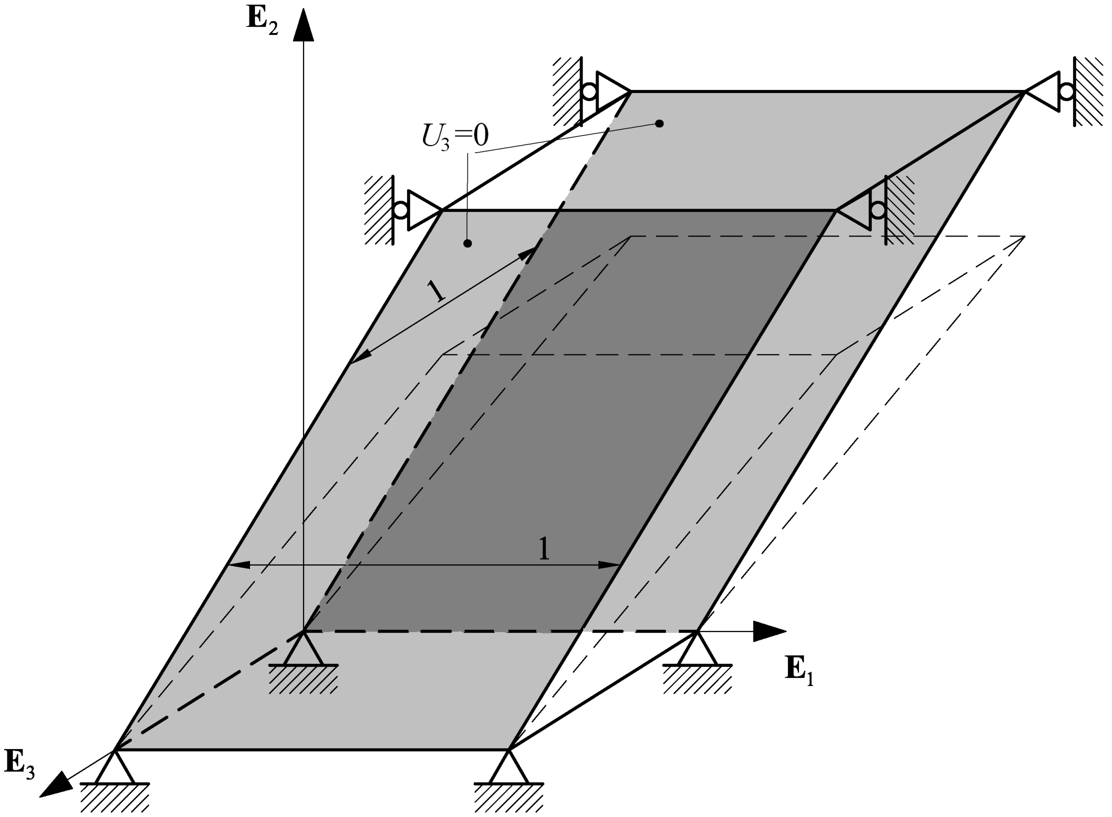
A számításra vonatkozó további paraméterek (elemtípus, felosztás, nemlineáris analízis paraméterei) azonosak az egyszerű nyírás során bemutatott ABAQUS modellnél alkalmazottakkal. Minden egyes terhelési szakasznál a számítás a terhelési folyamat 10 egyenlő részre történő felosztásával történik.



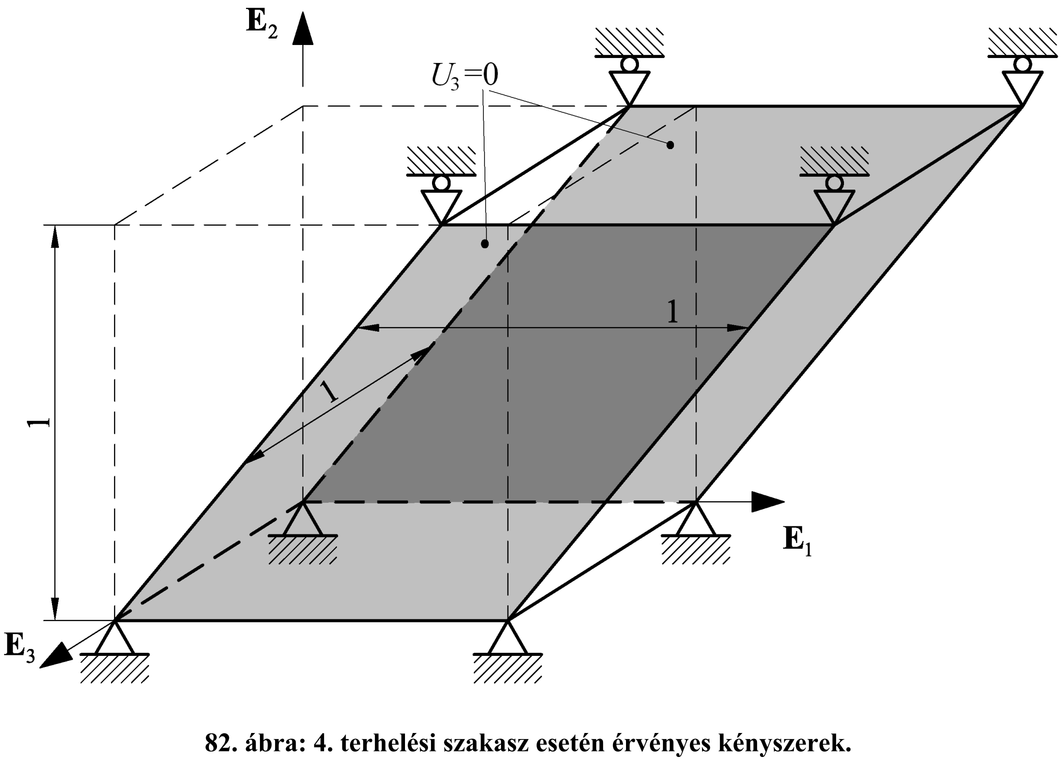
79. ábra: 1. terhelési szakasz esetén érvényes kényszerek.



80. ábra: 2. terhelési szakasz esetén érvényes kényszerek.



81. ábra: 3. terhelési szakasz esetén érvényes kényszerek.



82. ábra: 4. terhelési szakasz esetén érvényes kényszerek.

A számításhoz tartozó ABAQUS input file:

```
*Heading
** Job name: Munka01 Model name: Model-1
*Preprint, echo=NO, model=NO, history=NO, contact=NO
**
** PARTS
**
*Part, name="Kocka (Part)"
*End Part
**
** ASSEMBLY
**
*Assembly, name=Assembly
**
*Instance, name="Kocka (Part)-1", part="Kocka (Part)"
*Node
      1,         0.5,         0.5,          1.
      2,         0.5,        -0.5,          1.
      3,         0.5,         0.5,          0.
      4,         0.5,        -0.5,          0.
      5,        -0.5,         0.5,          1.
      6,        -0.5,        -0.5,          1.
      7,        -0.5,         0.5,          0.
      8,        -0.5,        -0.5,          0.
*Element, type=C3D8
1, 5, 6, 8, 7, 1, 2, 4, 3
** Region: (Section01:Picked)
*Elset, elset=_PickedSet2, internal
 1,
** Section: Section01
*Solid Section, elset=_PickedSet2, material=Anyagmodell
1.,
*End Instance
*Nset, nset=_PickedSet12, internal, instance="Kocka (Part)-1", generate
 2,  8,  2
*Elset, elset=_PickedSet12, internal, instance="Kocka (Part)-1"
 1,
*Nset, nset=_PickedSet14, internal, instance="Kocka (Part)-1"
 3, 4, 7, 8
*Elset, elset=_PickedSet14, internal, instance="Kocka (Part)-1"
 1,
*Nset, nset=_PickedSet15, internal, instance="Kocka (Part)-1"
 1, 2, 5, 6
*Elset, elset=_PickedSet15, internal, instance="Kocka (Part)-1"
 1,
*Nset, nset=_PickedSet16, internal, instance="Kocka (Part)-1", generate
 1,  7,  2
*Elset, elset=_PickedSet16, internal, instance="Kocka (Part)-1"
 1,
*Nset, nset=_PickedSet17, internal, instance="Kocka (Part)-1", generate
 1,  4,  1
*Elset, elset=_PickedSet17, internal, instance="Kocka (Part)-1"
 1,
*Nset, nset=_PickedSet18, internal, instance="Kocka (Part)-1", generate
 5,  8,  1
*Elset, elset=_PickedSet18, internal, instance="Kocka (Part)-1"
 1,
*End Assembly
**
** MATERIALS
**
*Material, name=Anyagmodell
```

```
*Depvar
     9,
*User Material, constants=2
2500., 0.35
**
** BOUNDARY CONDITIONS
**
** Name: Elulso lap Type: Displacement/Rotation
*Boundary
_PickedSet17, 1, 1
** Name: Felso lap Type: Displacement/Rotation
*Boundary
_PickedSet16, 2, 2
** Name: Hatso lap Type: Displacement/Rotation
*Boundary
_PickedSet18, 1, 1
** Name: also lap Type: Symmetry/Antisymmetry/Encastre
*Boundary
_PickedSet12, ENCASTRE
** Name: oldallap2 Type: Displacement/Rotation
*Boundary
_PickedSet15, 3, 3
** Name: oldallapok Type: Displacement/Rotation
*Boundary
_PickedSet14, 3, 3
** ----------------------------------------------------------------
**
** STEP: Terheles 1
**
*Step, name="Terheles 1", nlgeom=YES
*Static, direct
0.1, 1.,
**
** BOUNDARY CONDITIONS
**
** Name: Felso lap Type: Displacement/Rotation
*Boundary
_PickedSet16, 2, 2, 1.
**
** OUTPUT REQUESTS
**
*Restart, write, frequency=1
**
** FIELD OUTPUT: F-Output-1
**
*Output, field, variable=PRESELECT
**
** HISTORY OUTPUT: H-Output-1
**
*Output, history, variable=PRESELECT
*El Print, freq=999999
*Node Print, freq=999999
*End Step
** ----------------------------------------------------------------
**
** STEP: Terheles 2
**
*Step, name="Terheles 2", nlgeom=YES
*Static, direct
0.1, 1.,
**
** BOUNDARY CONDITIONS
**
```

```
** Name: Elulso lap Type: Displacement/Rotation
*Boundary, op=NEW
_PickedSet17, 5, 5
** Name: Felso lap Type: Displacement/Rotation
*Boundary, op=NEW
_PickedSet16, 1, 1, 2.
_PickedSet16, 2, 2, 1.
** Name: Hatso lap Type: Displacement/Rotation
*Boundary, op=NEW
_PickedSet18, 5, 5
** Name: also lap Type: Symmetry/Antisymmetry/Encastre
*Boundary, op=NEW
_PickedSet12, ENCASTRE
** Name: oldallap2 Type: Displacement/Rotation
*Boundary, op=NEW
_PickedSet15, 3, 3
** Name: oldallapok Type: Displacement/Rotation
*Boundary, op=NEW
_PickedSet14, 3, 3
**
** OUTPUT REQUESTS
**
*Restart, write, frequency=1
**
** FIELD OUTPUT: F-Output-1
**
*Output, field, variable=PRESELECT
**
** HISTORY OUTPUT: H-Output-1
**
*Output, history, variable=PRESELECT
*End Step
** ----------------------------------------------------------------
**
** STEP: Terheles 3
**
*Step, name="Terheles 3", nlgeom=YES
*Static, direct
0.1, 1.,
**
** BOUNDARY CONDITIONS
**
** Name: Felso lap Type: Displacement/Rotation
*Boundary
_PickedSet16, 2, 2
**
** OUTPUT REQUESTS
**
*Restart, write, frequency=1
**
** FIELD OUTPUT: F-Output-1
**
*Output, field, variable=PRESELECT
**
** HISTORY OUTPUT: H-Output-1
**
*Output, history, variable=PRESELECT
*End Step
** ----------------------------------------------------------------
**
** STEP: Terheles 4
**
*Step, name="Terheles 4", nlgeom=YES
```

```
*Static, direct
0.1, 1.,
**
** BOUNDARY CONDITIONS
**
** Name: Elulso lap Type: Displacement/Rotation
*Boundary, op=NEW
_PickedSet17, 5, 5
** Name: Felso lap Type: Displacement/Rotation
*Boundary, op=NEW
_PickedSet16, 1, 1
_PickedSet16, 2, 2
** Name: Hatso lap Type: Displacement/Rotation
*Boundary, op=NEW
_PickedSet18, 5, 5
** Name: also lap Type: Symmetry/Antisymmetry/Encastre
*Boundary, op=NEW
_PickedSet12, ENCASTRE
** Name: oldallap2 Type: Displacement/Rotation
*Boundary, op=NEW
_PickedSet15, 3, 3
** Name: oldallapok Type: Displacement/Rotation
*Boundary, op=NEW
_PickedSet14, 3, 3
**
** OUTPUT REQUESTS
**
*Restart, write, frequency=1
**
** FIELD OUTPUT: F-Output-1
**
*Output, field, variable=PRESELECT
**
** HISTORY OUTPUT: H-Output-1
**
*Output, history, variable=PRESELECT
*End Step
```

7.8. A NUMERIKUS ÉS ANALITIKUS EREDMÉNYEK ÖSSZEHASONLÍTÁSA

A következőkben a 7.6. és 7.7. alfejezetben bemutatott ABAQUS modelleken végzett számítások eredménye kerül közlésre a különböző feszültség-sebességre érvényes UMAT szubrutinok alkalmazása esetén. Elsőként az egyszerű nyírás példáján végzett számítások, majd a zárt terhelési ciklusú példa során nyert értékek összehasonlítása történik.

7.8.1. EGYSZERŰ NYÍRÁS

Az egyszerű nyírás során az együttforgó feszültség-sebességek esetén az analitikus számítások szerint minden esetben fennáll a $\sigma_{11} = -\sigma_{22}$, illetve $\sigma_{33} = 0$ egyenlőség, emiatt az ABAQUS által számított értékek közül csak a σ_{11} és σ_{12} komponensek összehasonlítása történik az analitikus eredményekkel. A 6.-7. Táblázatok tartalmazzák a σ_{11} és σ_{12} feszültségkomponensre analitikus és numerikus úton számított eredményeket. A %-ban kifejezett eltérés a numerikus és analitikus értékek közti különbséget viszonyítja a terhelési szakaszban jelentkező maximális és minimális analitikus érték közti különbséghez.

6. Táblázat: σ_{11} feszültségkomponensre számított analitikus és numerikus értékek.

γ	Zaremba-Jaumann-Noll			Green-McInnis-Naghdi			Logaritmikus		
	analitikus	numerikus	eltérés [%]	analitikus	numerikus	eltérés [%]	analitikus	numerikus	eltérés [%]
0	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
1	425,64605	443,91251	0,99135	385,09270	392,15686	0,17818	398,52683	427,83020	0,69784
2	1311,24718	1367,51892	3,05396	1057,03032	1076,25281	0,48486	1154,12091	1213,98718	1,42568
3	1842,58579	1921,66016	4,29149	1635,37397	1662,75488	0,69064	1840,93179	1910,91272	1,66656
4	1531,15162	1596,86060	3,56613	2105,74220	2137,74121	0,80713	2391,16098	2458,51953	1,60411
5	663,27581	691,74017	1,54481	2503,99949	2538,66504	0,87439	2832,25157	2889,97290	1,37460
6	36,87937	38,46203	0,08589	2853,56134	2889,85669	0,91550	3194,68504	3239,12500	1,05831
7	227,86830	237,64719	0,53072	3167,70477	3205,05347	0,94207	3500,16196	3529,77002	0,70510
8	1060,64826	1106,16553	2,47029	3454,38838	3492,45166	0,96009	3763,27746	3777,86353	0,34736
9	1769,56520	1845,50574	4,12141	3718,79447	3757,36279	0,97283	3993,95707	3994,24609	0,00688
10	1702,84415	1775,92114	3,96600	3964,55390	4003,49219	0,98216	4199,13432	4186,46680	-0,30167

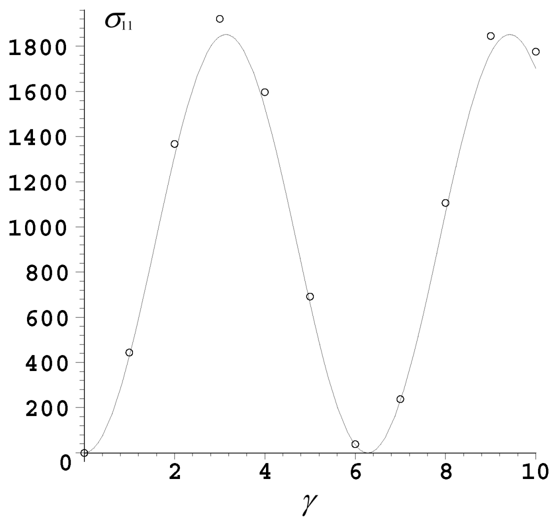
γ	Euler-féle triád spintenzorára épülő		
	analitikus	numerikus	eltérés [%]
0	0,00000	0,00000	0,00000
1	203,02161	215,86021	0,47367
2	611,72601	635,65869	0,88297
3	1016,30246	1043,56860	1,00596
4	1367,48237	1395,47131	1,03263
5	1668,16014	1696,16772	1,03331
6	1928,44006	1956,28699	1,02739
7	2157,05283	2184,70703	1,02028
8	2360,56555	2388,03735	1,01355
9	2543,82817	2571,13892	1,00761
10	2710,46038	2737,62988	1,00239

7. Táblázat: σ_{12} feszültségkomponensre számított analitikus és numerikus értékek.

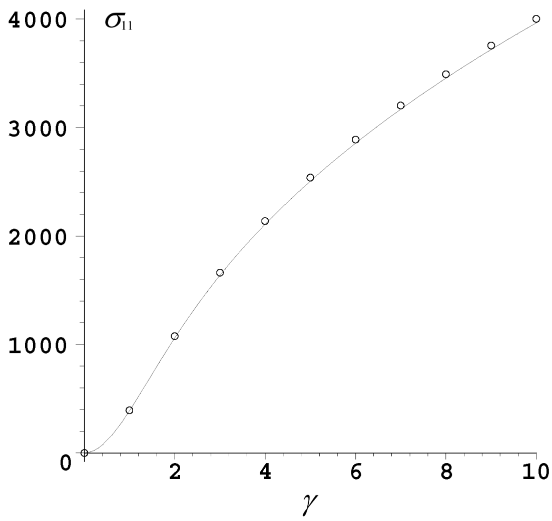
γ	Zaremba-Jaumann-Noll			Green-McInnis-Naghdi			Logaritmikus		
	analitikus	numerikus	eltérés [%]	analitikus	numerikus	eltérés [%]	analitikus	numerikus	eltérés [%]
0	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
1	779,13986	812,57636	1,85350	805,35557	838,78003	0,54153	797,05366	821,15784	1,96402
2	841,94213	878,07391	2,00291	1283,60599	1324,61877	0,66448	1154,12091	1167,85803	1,11931
3	130,66668	136,27420	0,31084	1683,18001	1720,81006	0,60967	1227,28786	1220,57678	-0,54682
4	-700,74311	-730,81537	-1,66701	2146,24437	2178,79639	0,52740	1195,58049	1169,30737	-2,14075
5	-887,89292	-925,99652	-2,11221	2690,15676	2718,20361	0,45441	1132,90063	1091,03088	-3,41157
6	-258,71807	-269,82089	-0,61547	3301,99623	3326,39453	0,39529	1064,89501	1012,10889	-4,30104
7	608,32097	634,42688	1,44714	3966,71001	3988,19531	0,34810	1000,04628	940,88556	-4,82044
8	916,07252	955,38556	2,17926	4672,24186	4691,38330	0,31012	940,81937	879,36804	-5,00708
9	381,59122	397,96713	0,90777	5409,61332	5426,84424	0,27917	887,54602	827,31940	-4,90729
10	-503,72329	-525,34052	-1,19832	6172,20338	6187,85400	0,25357	839,82686	783,74561	-4,56953

γ	Euler-féle triád spintenzorára épülő		
	analitikus	numerikus	eltérés [%]
0	0,00000	0,00000	0,00000
1	894,80627	900,41272	0,06768
2	1696,51580	1700,90039	0,05293
3	2464,23186	2466,90186	0,03223
4	3242,93770	3244,29907	0,01644
5	4043,12921	4043,45093	0,00388
6	4863,62995	4863,09912	-0,00641
7	5700,92823	5699,69336	-0,01491
8	6551,66704	6549,84375	-0,02201
9	7413,12606	7410,80615	-0,02801
10	8283,19658	8280,45605	-0,03309

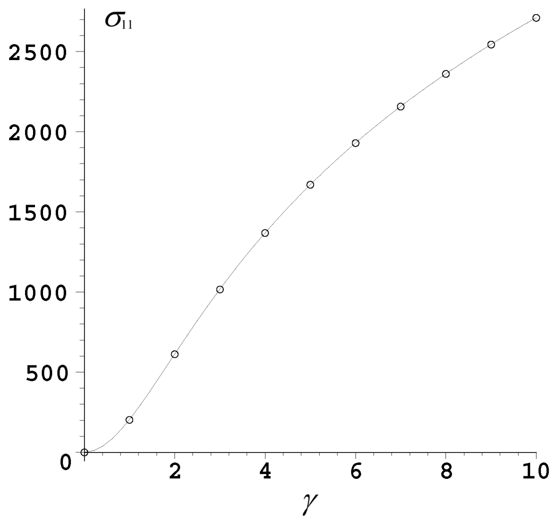
A 83.-90. ábrák az ABAQUS szubrutinnal számított numerikus értékeket ábrázolják, feltűntetve az analitikus úton előállított megoldást.



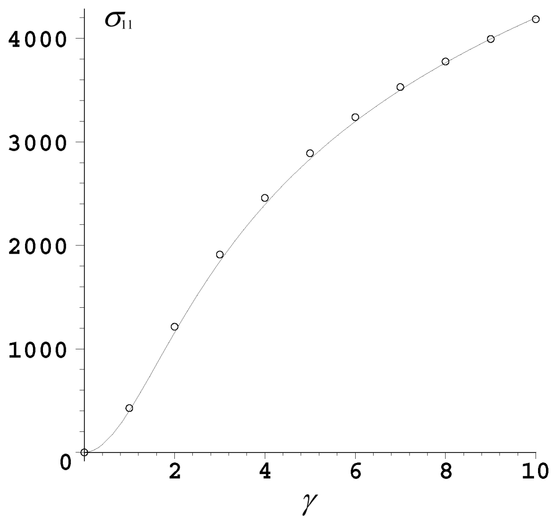
83. ábra: σ_{11} feszültségkomponensre számított analitikus és numerikus eredmények a Zaremba-Jaumann-Noll-féle feszültség-sebesség esetén.



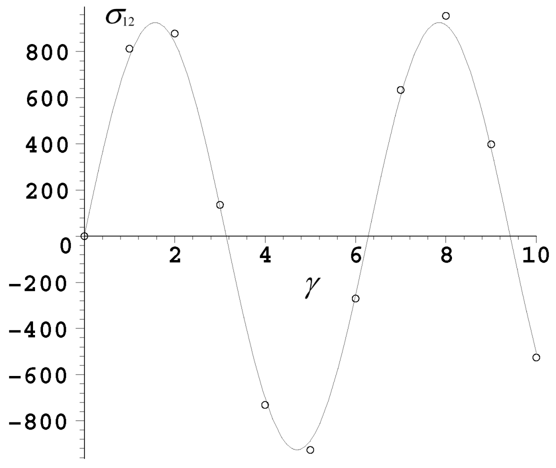
84. ábra: σ_{11} feszültségkomponensre számított analitikus és numerikus eredmények a Green-McInnis-Naghdi-féle feszültség-sebesség esetén.



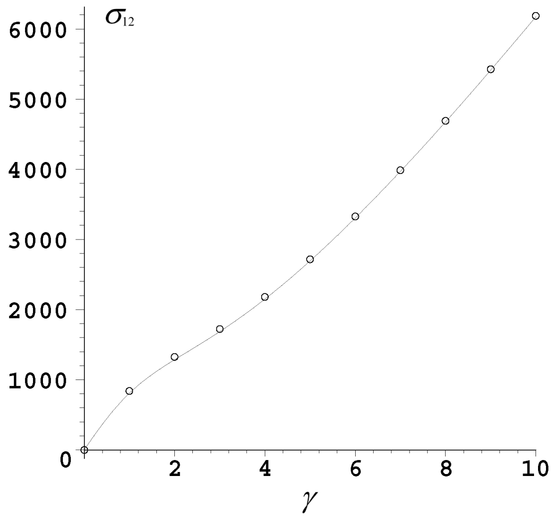
85. ábra: σ_{11} feszültségkomponensre számított analitikus és numerikus eredmények az Euler-féle triád spintenzorára épülő feszültség-sebesség esetén.



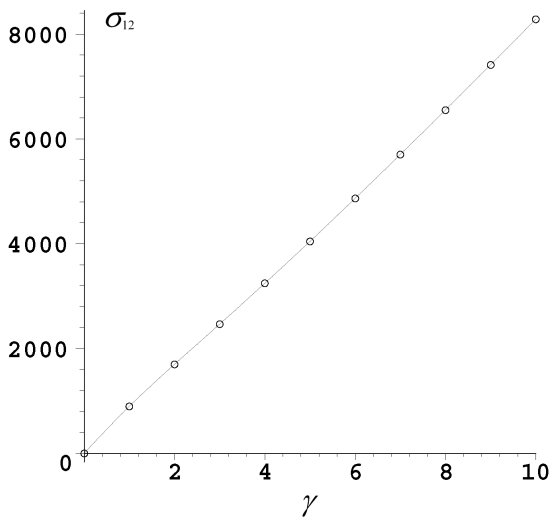
86. ábra: σ_{11} feszültségkomponensre számított analitikus és numerikus eredmények a logaritmikus feszültség-sebesség esetén.



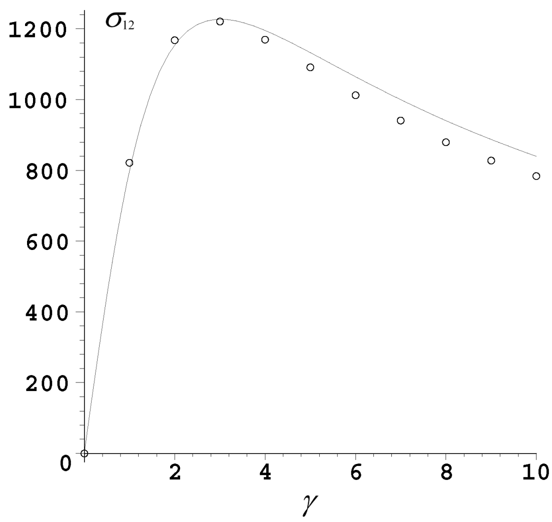
87. ábra: σ_{12} feszültségkomponensre számított analitikus és numerikus eredmények a Zaremba-Jaumann-Noll-féle feszültség-sebesség esetén.



88. ábra: σ_{12} feszültségkomponensre számított analitikus és numerikus eredmények a Green-McInnis-Naghdi-féle feszültség-sebesség esetén.



89. ábra: σ_{12} feszültségkomponensre számított analitikus és numerikus eredmények az Euler-féle triád spintenzorára épülő feszültség-sebesség esetén.



90. ábra: σ_{12} feszültségkomponensre számított analitikus és numerikus eredmények a logaritmikus feszültség-sebesség esetén.

Az összehasonlításból jól látható, hogy a szubrutinok segítségével számított eredmények jól illeszkednek az analitikus megoldásokhoz. A numerikus eredmények pontossága legjobban attól függ, hogy a terhelési szakaszt hány részre osztjuk fel a nemlineáris számítás során. Sűrű felosztással pontosabb eredményeket érhetünk el, de ez a számítási idő rovására megy.

A *Zaremba-Jaumann-Noll*-féle feszültség-sebességnél a maximális eltérések (két tizedesjegyre kerekítve): σ_{11} komponens esetén 4,29%, σ_{12} komponens esetén 2,18%. Az eltérések átlaga: σ_{11} komponens esetén 2,46%, σ_{12} komponens esetén 0,31%.

A *Green-McInnis-Naghdi*-féle feszültség-sebességnél a maximális eltérések (két tizedesjegyre kerekítve): σ_{11} komponens esetén 0,98%, σ_{12} komponens esetén 0,66%. Az eltérések átlaga: σ_{11} komponens esetén 0,78%, σ_{12} komponens esetén 0,44%.

Az *Euler*-féle triád spintenzorára épülő feszültség-sebességnél a maximális eltérések (két tizedesjegyre kerekítve): σ_{11} komponens esetén 1,03%, σ_{12} komponens esetén 0,07%. Az eltérések átlaga: σ_{11} komponens esetén 0,95%, σ_{12} komponens esetén 0,01%.

A logaritmikus feszültség-sebességnél a maximális eltérések (két tizedesjegyre kerekítve): σ_{11} komponens esetén 1,67%, σ_{12} komponens esetén -5,01%. Az eltérések átlaga: σ_{11} komponens esetén 0,86%, σ_{12} komponens esetén -2,66%.

A legnagyobb eltérés a logaritmikus feszültség-sebesség a σ_{12} feszültségkomponensben mutatkozik. A felosztás sűrítésével ez csökkenthető. Példaként a terhelési út 25 részre történő felosztása esetén a terhelés végén az eltérés -0,73%-ra csökken a 10 részre történő felosztásnál adódó 4,57%-ról.

7.8.2. ZÁRT TERHELÉSI CIKLUSÚ PÉLDA

A zárt terhelési ciklusú példa esetén analitikus eredmények együttforgó feszültség-sebességek közül a *Zaremba-Jaumann-Noll*-féle, *Green-McInnis-Naghdi*-féle és logaritmikus feszültség-sebességek esetén lettek előállítva. Az összehasonlítások a σ_{11}, σ_{12}, σ_{22} és σ_{33} feszültségkomponensekre történnek. A σ_{33} esetén mind az analitikus, mind a numerikus úton számított eredmények az alkalmazott feszültség-sebességtől függetlenül azonosak (ez a spintenzorok Ω_{33} elemének azonosságából következik). A 8.-11. Táblázatok az analitikus és numerikus úton előállított értékeket tartalmazzák a különböző feszültség-sebességek esetén.

8. Táblázat: σ_{11} feszültségkomponensre számított analitikus és numerikus értékek.

terhelési szakasz	t	Zaremba-Jaumann-Noll			Green-McInnis-Naghdi			Logaritmikus		
		analitikus	numerikus	eltérés [%]	analitikus	numerikus	eltérés [%]	analitikus	numerikus	eltérés [%]
	0	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
	0,1	187,19734	187,05573	-0,00933	187,19734	187,05573	-0,01047	187,19734	187,05573	-0,01148
	0,2	328,25386	328,02531	-0,01506	328,25386	328,02531	-0,01690	328,25386	328,02531	-0,01852
	0,3	436,02801	435,74605	-0,01858	436,02801	435,74605	-0,02085	436,02801	435,74605	-0,02285
	0,4	519,24732	518,93309	-0,02070	519,24732	518,93309	-0,02323	519,24732	518,93309	-0,02547
1	0,5	584,00329	583,67072	-0,02191	584,00329	583,67072	-0,02459	584,00329	583,67072	-0,02695
	0,6	634,65001	634,30797	-0,02253	634,65001	634,30797	-0,02529	634,65001	634,30797	-0,02772
	0,7	674,36421	674,01869	-0,02276	674,36421	674,01869	-0,02554	674,36421	674,01869	-0,02800
	0,8	705,50531	705,16026	-0,02273	705,50531	705,16026	-0,02551	705,50531	705,16026	-0,02796
	0,9	729,85341	729,51149	-0,02253	729,85341	729,51149	-0,02528	729,85341	729,51149	-0,02771
	1	748,77016	748,43322	-0,02220	748,77016	748,43322	-0,02491	748,77016	748,43322	-0,02731
	1	748,77016	748,43322	-0,02220	748,77016	748,43322	-0,02491	748,77016	748,43322	-0,02731
	1,1	752,68495	752,34963	-0,02209	754,68312	754,34790	-0,02478	753,98932	753,65824	-0,02683
	1,2	764,39020	764,05926	-0,02180	772,13897	771,80909	-0,02439	769,45598	769,14214	-0,02543
	1,3	783,76896	783,44557	-0,02131	800,32425	800,00282	-0,02376	794,61764	794,33075	-0,02325
	1,4	810,62760	810,31456	-0,02062	837,99361	837,68352	-0,02292	828,61615	828,36403	-0,02043
2	1,5	844,69776	844,39789	-0,01976	883,60972	883,31328	-0,02192	870,36884	870,15674	-0,01719
	1,6	885,63901	885,35488	-0,01872	935,49653	935,21568	-0,02076	918,66044	918,49120	-0,01371
	1,7	933,04230	932,77651	-0,01751	991,98045	991,71654	-0,01951	972,23215	972,10675	-0,01016
	1,8	986,43398	986,18874	-0,01616	1051,50162	1051,25574	-0,01818	1029,85715	1029,77459	-0,00669
	1,9	1045,28057	1045,05811	-0,01466	1112,68780	1112,46042	-0,01681	1090,39699	1090,35533	-0,00338
	2	1108,99411	1108,79616	-0,01304	1174,39205	1174,18330	-0,01543	1152,83776	1152,83443	-0,00027
	2	1108,99411	1108,79616	-0,01304	1174,39205	1174,18330	-0,01543	1152,83776	1152,83443	-0,00027
	2,1	1109,03651	1108,84096	-0,01288	1199,95095	1199,75565	-0,01444	1170,36888	1170,38221	0,00108
	2,2	1105,75415	1105,56365	-0,01255	1225,95747	1225,77958	-0,01315	1187,22319	1187,25747	0,00278
	2,3	1098,15709	1097,97504	-0,01199	1252,06683	1251,91168	-0,01147	1202,89386	1202,95450	0,00491
	2,4	1084,92995	1084,76160	-0,01109	1277,74986	1277,62445	-0,00927	1216,66319	1216,75776	0,00766
3	2,5	1064,30189	1064,15469	-0,00970	1302,20440	1302,11866	-0,00634	1227,50851	1227,64698	0,01122
	2,6	1033,85297	1033,73741	-0,00761	1324,21952	1324,18701	-0,00240	1233,95930	1234,15565	0,01591
	2,7	990,21871	990,15059	-0,00449	1341,96304	1342,00256	0,00292	1233,87507	1234,14886	0,02219
	2,8	928,62711	928,63040	0,00022	1352,64099	1352,78042	0,01031	1224,09126	1224,47168	0,03083
	2,9	842,14998	842,26125	0,00733	1351,93552	1352,21645	0,02077	1199,83740	1200,36736	0,04295
	3	720,44790	720,72602	0,01832	1333,04521	1333,53254	0,03603	1153,74697	1154,49370	0,06051
	3	720,44790	720,72602	0,01832	1333,04521	1333,53254	0,03603	1153,74697	1154,49370	0,06051
	3,1	462,53845	462,74666	0,01372	1227,29635	1227,84371	0,04047	1001,71885	1002,34778	0,05097
	3,2	223,09083	223,29437	0,01341	1116,27052	1116,89370	0,04607	847,30736	847,82419	0,04188
	3,3	11,65107	11,91540	0,01741	1000,18464	1000,90131	0,05298	692,88604	693,30074	0,03361
	3,4	-163,35140	-162,96326	0,02557	879,87884	880,70797	0,06130	541,78370	542,11251	0,02665
4	3,5	-294,93977	-294,36973	0,03756	757,11288	758,07264	0,07095	398,39771	398,66646	0,02178
	3,6	-377,86803	-377,06534	0,05288	634,85195	635,95795	0,08177	268,16400	268,41274	0,02016
	3,7	-408,83010	-407,75312	0,07095	517,42103	518,68416	0,09338	157,28427	157,57186	0,02331
	3,8	-386,59162	-385,20979	0,09104	410,36278	411,78611	0,10523	72,13651	72,54330	0,03297
	3,9	-312,03916	-310,33402	0,11234	319,86359	321,44048	0,11658	18,39008	19,01489	0,05063
	4	-188,14490	-186,11086	0,13401	251,76509	253,47886	0,12670	0,00000	0,94909	0,07691

9. Táblázat: σ_{12} feszültségkomponensre számított analitikus és numerikus értékek.

terhelési szakasz	t	Zaremba-Jaumann-Noll			Green-McInnis-Naghdi			Logaritmikus		
		analitikus	numerikus	eltérés [%]	analitikus	numerikus	eltérés [%]	analitikus	numerikus	eltérés [%]
	0	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
	0,1	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
	0,2	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
	0,3	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
	0,4	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
1	0,5	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
	0,6	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
	0,7	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
	0,8	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
	0,9	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
	1	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
	1	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
	1,1	78,23052	78,26072	0,00147	88,72858	88,77236	0,00424	85,29145	85,34043	0,00425
	1,2	155,67938	155,73946	0,00292	175,53838	175,62491	0,00839	169,07702	169,17245	0,00827
	1,3	231,57274	231,66214	0,00435	258,68154	258,80891	0,01235	249,95459	250,09166	0,01188
	1,4	305,15231	305,27008	0,00573	336,72188	336,88730	0,01604	326,71394	326,88637	0,01494
2	1,5	375,68290	375,82797	0,00706	408,62412	408,82445	0,01942	398,39771	398,59824	0,01738
	1,6	442,45979	442,63059	0,00832	473,78399	474,01555	0,02245	464,33000	464,55133	0,01918
	1,7	504,81576	505,01062	0,00949	532,00485	532,26390	0,02512	524,11444	524,34963	0,02039
	1,8	562,12778	562,34470	0,01056	583,43612	583,71917	0,02744	577,60791	577,85107	0,02108
	1,9	613,82321	614,06016	0,01154	628,49138	628,79494	0,02943	624,87912	625,12518	0,02133
	2	659,38552	659,64013	0,01239	667,76266	668,08346	0,03110	666,16054	666,40531	0,02122
	2	659,38552	659,64013	0,01239	667,76266	668,08346	0,03110	666,16054	666,40531	0,02122
	2,1	694,09002	694,35795	0,01304	698,69191	699,01888	0,03170	698,88560	699,13478	0,02160
	2,2	732,65058	732,93344	0,01377	731,16642	731,49882	0,03223	734,13989	734,39322	0,02196
	2,3	775,74767	776,04717	0,01458	765,18385	765,52026	0,03262	772,20304	772,46054	0,02232
	2,4	824,23190	824,55002	0,01549	800,70378	801,04250	0,03284	813,39918	813,66048	0,02265
3	2,5	879,18069	879,51994	0,01652	837,63011	837,96870	0,03283	858,10732	858,37222	0,02296
	2,6	941,97932	942,34298	0,01770	875,78522	876,12038	0,03250	906,77542	907,04294	0,02319
	2,7	1014,43926	1014,83078	0,01906	914,87123	915,19802	0,03168	959,93956	960,20915	0,02337
	2,8	1098,97587	1099,40006	0,02065	954,41087	954,72275	0,03024	1018,25091	1018,52109	0,02342
	2,9	1198,88277	1199,34541	0,02252	993,65399	993,94099	0,02783	1082,51450	1082,78336	0,02330
	3	1318,77104	1319,28026	0,02479	1031,42501	1031,67360	0,02410	1153,74697	1154,01139	0,02292
	3	1318,77104	1319,28026	0,02479	1031,42501	1031,67360	0,02410	1153,74697	1154,01139	0,02292
	3,1	1251,72083	1251,90835	0,00913	980,88388	981,04166	0,01530	1113,02094	1113,15200	0,01136
	3,2	1134,76845	1134,62720	-0,00688	931,80424	931,86573	0,00596	1059,13420	1059,11072	-0,00204
	3,3	972,57644	972,11194	-0,02261	882,09605	882,05670	-0,00381	989,83720	989,63642	-0,01740
	3,4	771,61088	770,84160	-0,03745	829,06417	828,92083	-0,01390	902,97283	902,57101	-0,03483
4	3,5	539,88362	538,84026	-0,05079	769,49698	769,24902	-0,02404	796,79541	796,16877	-0,05431
	3,6	286,63291	285,35709	-0,06211	699,94127	699,59136	-0,03392	670,41000	669,53549	-0,07580
	3,7	21,95505	20,49756	-0,07095	617,20687	616,76269	-0,04306	524,28089	523,14099	-0,09880
	3,8	-243,59809	-245,17909	-0,07697	519,06073	518,53562	-0,05091	360,68254	359,27184	-0,12227
	3,9	-499,43975	-501,08125	-0,07991	404,93494	404,34758	-0,05695	183,90082	182,23469	-0,14441
	4	-735,37031	-737,00685	-0,07967	276,35737	275,73072	-0,06076	0,00000	-1,87747	-0,16273

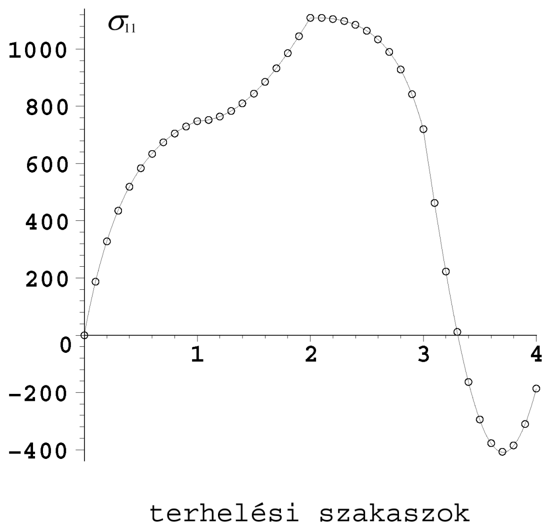
10. Táblázat: σ_{22} feszültségkomponensre számított analitikus és numerikus értékek.

terhelési szakasz	t	Zaremba-Jaumann-Noll			Green-McInnis-Naghdi			Logaritmikus		
		analitikus	numerikus	eltérés [%]	analitikus	numerikus	eltérés [%]	analitikus	numerikus	eltérés [%]
1	0	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
	0,1	347,60021	347,38925	-0,00999	347,60021	347,38925	-0,00775	347,60021	347,38925	-0,00829
	0,2	609,52315	609,18982	-0,01579	609,52315	609,18982	-0,01224	609,52315	609,18982	-0,01310
	0,3	809,64522	809,24262	-0,01907	809,64522	809,24262	-0,01478	809,64522	809,24262	-0,01582
	0,4	964,17225	963,73280	-0,02082	964,17225	963,73280	-0,01614	964,17225	963,73280	-0,01727
	0,5	1084,41535	1083,95981	-0,02158	1084,41535	1083,95981	-0,01673	1084,41535	1083,95981	-0,01791
	0,6	1178,45949	1178,00051	-0,02174	1178,45949	1178,00051	-0,01685	1178,45949	1178,00051	-0,01804
	0,7	1252,20339	1251,74886	-0,02153	1252,20339	1251,74886	-0,01669	1252,20339	1251,74886	-0,01787
	0,8	1310,02822	1309,58349	-0,02107	1310,02822	1309,58349	-0,01633	1310,02822	1309,58349	-0,01748
	0,9	1355,23935	1354,80717	-0,02047	1355,23935	1354,80717	-0,01587	1355,23935	1354,80717	-0,01699
	1	1390,36522	1389,94739	-0,01979	1390,36522	1389,94739	-0,01534	1390,36522	1389,94739	-0,01642
2	1	1390,36522	1389,94739	-0,01979	1390,36521	1389,94739	-0,01534	1390,36521	1389,94739	-0,01642
	1,1	1386,45043	1386,03123	-0,01986	1384,45226	1384,03277	-0,01540	1385,14605	1384,72243	-0,01665
	1,2	1374,74518	1374,32115	-0,02009	1366,99641	1366,57152	-0,01560	1369,67940	1369,23866	-0,01732
	1,3	1355,36642	1354,93504	-0,02044	1338,81113	1338,37811	-0,01590	1344,51774	1344,04979	-0,01839
	1,4	1328,50778	1328,06618	-0,02092	1301,14177	1300,69722	-0,01632	1310,51922	1310,01664	-0,01975
	1,5	1294,43762	1293,98285	-0,02154	1255,52566	1255,06752	-0,01682	1268,76654	1268,22400	-0,02133
	1,6	1253,49636	1253,02579	-0,02229	1203,63884	1203,16506	-0,01740	1220,47494	1219,88941	-0,02302
	1,7	1206,09308	1205,60422	-0,02316	1147,15492	1146,66406	-0,01802	1166,90323	1166,27418	-0,02473
	1,8	1152,70140	1152,19174	-0,02415	1087,63376	1087,12512	-0,01868	1109,27823	1108,60634	-0,02641
	1,9	1093,85480	1093,32250	-0,02522	1026,44757	1025,92019	-0,01936	1048,73838	1048,02515	-0,02803
	2	1030,14126	1029,58445	-0,02638	964,74332	964,19744	-0,02004	986,29762	985,54637	-0,02953
3	2	1030,14126	1029,58445	-0,02638	964,74332	964,19744	-0,02004	986,29762	985,54637	-0,02953
	2,1	976,05624	975,47763	-0,02741	885,14180	884,56314	-0,02125	914,72388	913,93651	-0,03095
	2,2	909,77939	909,18010	-0,02839	789,57607	788,96429	-0,02246	828,31035	827,48608	-0,03240
	2,3	828,41051	827,79245	-0,02928	674,50077	673,85606	-0,02367	723,67374	722,81293	-0,03384
	2,4	728,17955	727,54669	-0,02998	535,35964	534,68390	-0,02481	596,44631	595,55053	-0,03521
	2,5	604,11675	603,47578	-0,03037	366,21424	365,51174	-0,02579	440,91013	439,98342	-0,03643
	2,6	449,56660	448,92870	-0,03022	159,20005	158,47926	-0,02647	249,46027	248,51059	-0,03733
	2,7	255,45453	254,83802	-0,02921	-96,28980	-97,01390	-0,02659	11,79817	10,83971	-0,03767
	2,8	9,14989	8,58480	-0,02677	-414,86398	-415,56534	-0,02575	-286,31425	-287,25645	-0,03703
	2,9	-307,35243	-307,81622	-0,02197	-817,13798	-817,77158	-0,02327	-665,03985	-665,92230	-0,03469
	3	-720,44790	-720,72602	-0,01318	-1333,04521	-1333,53254	-0,01789	-1153,74697	-1154,49370	-0,02935
4	3	-720,44790	-720,72602	-0,01318	-1333,04521	-1333,53254	-0,01789	-1153,74697	-1154,49370	-0,02935
	3,1	-462,53845	-462,74666	-0,00986	-1227,29635	-1227,84371	-0,02010	-1001,71885	-1002,34778	-0,02472
	3,2	-223,09083	-223,29437	-0,00964	-1116,27052	-1116,89370	-0,02288	-847,30736	-847,82419	-0,02031
	3,3	-11,65107	-11,91540	-0,01252	-1000,18464	-1000,90131	-0,02632	-692,88604	-693,30074	-0,01630
	3,4	163,35140	162,96326	-0,01839	-879,87884	-880,70797	-0,03044	-541,78370	-542,11251	-0,01292
	3,5	294,93977	294,36973	-0,02701	-757,11288	-758,07264	-0,03524	-398,39771	-398,66646	-0,01056
	3,6	377,86803	377,06534	-0,03803	-634,85195	-635,95795	-0,04061	-268,16400	-268,41274	-0,00978
	3,7	408,83010	407,75312	-0,05102	-517,42103	-518,68416	-0,04638	-157,28427	-157,57186	-0,01130
	3,8	386,59162	385,20979	-0,06546	-410,36278	-411,78611	-0,05226	-72,13651	-72,54330	-0,01599
	3,9	312,03916	310,33402	-0,08078	-319,86359	-321,44048	-0,05790	-18,39008	-19,01489	-0,02456
	4	188,14490	186,11086	-0,09636	-251,76509	-253,47882	-0,06293	0,00000	-0,94909	-0,03731

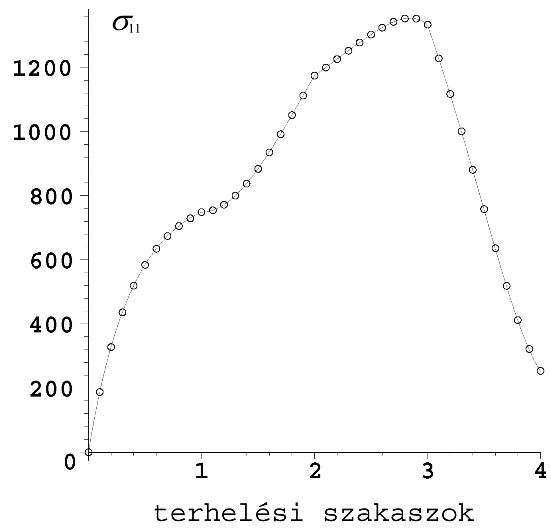
11. Táblázat: σ_{33} feszültségkomponensre számított analitikus és numerikus értékek.

terhelési szakasz	t	Zaremba-Jaumann-Noll, Green-McInnis-Naghdi, logaritmikus		
		analitikus	numerikus	eltérés [%]
1	0	0,00000	0,00000	0,00000
	0,1	187,19734	187,05573	-0,01891
	0,2	328,25386	328,02531	-0,03052
	0,3	436,02801	435,74605	-0,03766
	0,4	519,24732	518,93309	-0,04197
	0,5	584,00329	583,67072	-0,04442
	0,6	634,65001	634,30797	-0,04568
	0,7	674,36421	674,01869	-0,04614
	0,8	705,50531	705,16026	-0,04608
	0,9	729,85341	729,51149	-0,04566
	1	748,77016	748,43322	-0,04500
2	1	748,77016	748,43322	-0,04500
	1,1	748,77016	748,43322	-0,04500
	1,2	748,77016	748,43322	-0,04500
	1,3	748,77016	748,43322	-0,04500
	1,4	748,77016	748,43322	-0,04500
	1,5	748,77016	748,43322	-0,04500
	1,6	748,77016	748,43322	-0,04500
	1,7	748,77016	748,43322	-0,04500
	1,8	748,77016	748,43322	-0,04500
	1,9	748,77016	748,43322	-0,04500
	2	748,77016	748,43322	-0,04500
3	2	748,77016	748,43322	-0,04500
	2,1	729,85341	729,51149	-0,04566
	2,2	705,50531	705,16026	-0,04608
	2,3	674,36421	674,01869	-0,04614
	2,4	634,65001	634,30797	-0,04568
	2,5	584,00329	583,67072	-0,04442
	2,6	519,24732	518,93309	-0,04197
	2,7	436,02801	435,74605	-0,03766
	2,8	328,25386	328,02531	-0,03052
	2,9	187,19734	187,05573	-0,01891
	3	0,00000	0,00000	0,00000
4	3	0,00000	0,00000	0,00000
	3,1	0,00000	0,00000	0,00000
	3,2	0,00000	0,00000	0,00000
	3,3	0,00000	0,00000	0,00000
	3,4	0,00000	0,00000	0,00000
	3,5	0,00000	0,00000	0,00000
	3,6	0,00000	0,00000	0,00000
	3,7	0,00000	0,00000	0,00000
	3,8	0,00000	0,00000	0,00000
	3,9	0,00000	0,00000	0,00000
	4	0,00000	0,00000	0,00000

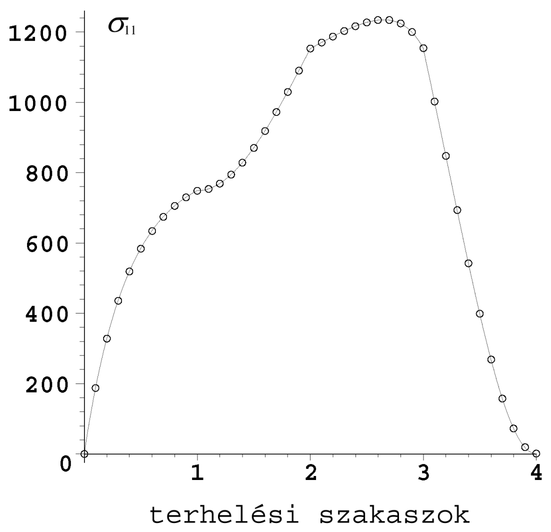
A táblázatban foglalt értékek grafikus ábrázolása a 91.-100. ábrákon található, ahol a folytonos vonal jelöli az analitikus megoldást, és a kis körök mutatják a numerikus úton kapott értékeket.



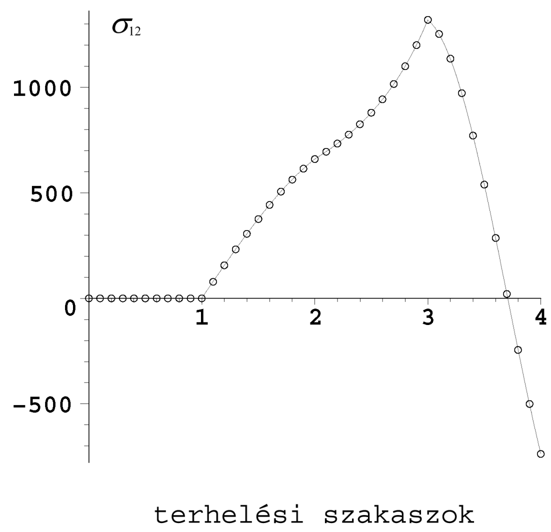
91. ábra: σ_{11} feszültségkomponensre számított analitikus és numerikus eredmények a Zaremba-Jaumann-Noll-féle feszültség-sebesség esetén.



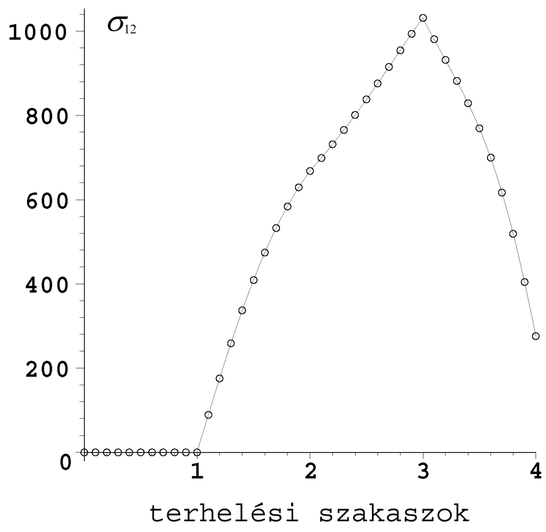
92. ábra: σ_{11} feszültségkomponensre számított analitikus és numerikus eredmények a Green-McInnis-Naghdi-féle feszültség-sebesség esetén.



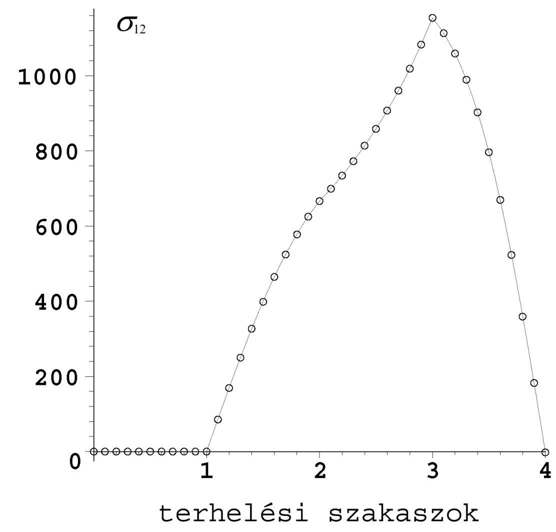
93. ábra: σ_{11} feszültségkomponensre számított analitikus és numerikus eredmények a logaritmikus feszültség-sebesség esetén.



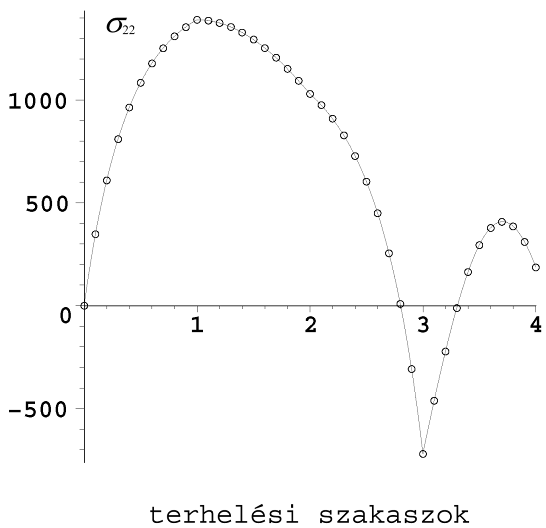
94. ábra: σ_{12} feszültségkomponensre számított analitikus és numerikus eredmények a Zaremba-Jaumann-Noll-féle feszültség-sebesség esetén.



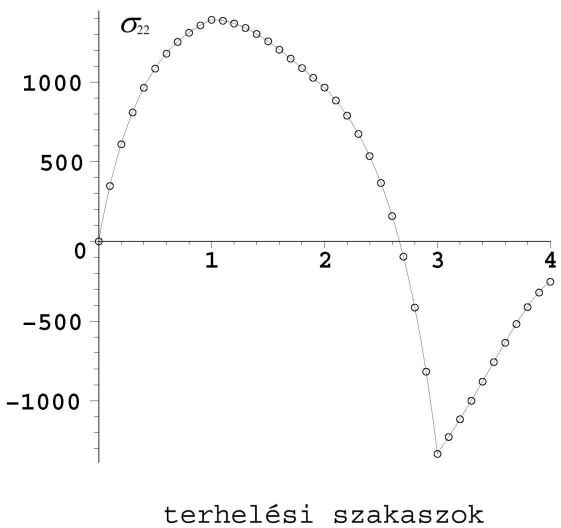
95. ábra: σ_{12} feszültségkomponensre számított analitikus és numerikus eredmények a Green-McInnis-Naghdi-féle feszültség-sebesség esetén.



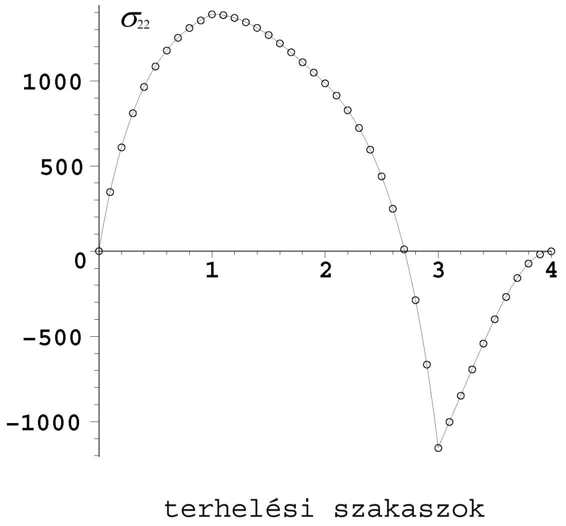
96. ábra: σ_{12} feszültségkomponensre számított analitikus és numerikus eredmények a logaritmikus feszültség-sebesség esetén.



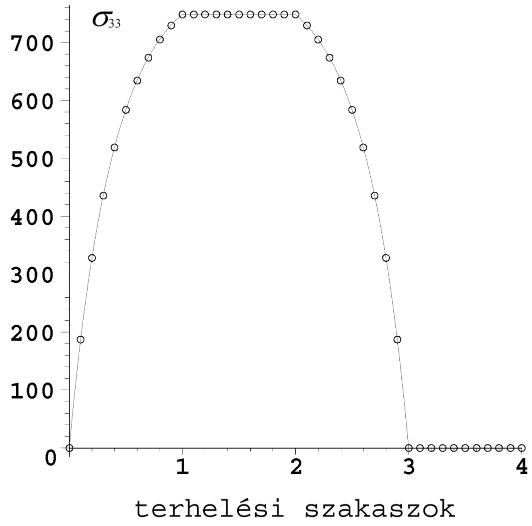
97. ábra: σ_{22} feszültségkomponensre számított analitikus és numerikus eredmények a Zaremba-Jaumann-Noll-féle feszültség-sebesség esetén.



98. ábra: σ_{22} feszültségkomponensre számított analitikus és numerikus eredmények a Green-McInnis-Naghdi-féle feszültség-sebesség esetén.



99. ábra: σ_{22} feszültségkomponensre számított analitikus és numerikus eredmények a logaritmikus feszültség-sebesség esetén.



100. ábra: σ_{33} feszültségkomponensre számított analitikus és numerikus eredmények.

Az ABAQUS UMAT szubrutinnal számított numerikus eredmények és az analitikus megoldás közötti különbség szinte elhanyagolható. A 91.-100. ábrák szerint az eltérés gyakorlatilag a megjelenítési pontosságon belül van.

A *Zaremba-Jaumann-Noll*-féle feszültség-sebességnél a maximális eltérések (két tizedesjegyre kerekítve): σ_{11} komponens esetén 0,13%, σ_{12} komponens esetén -0,08%, σ_{22} komponens esetén -0,10%. Az eltérések átlaga: σ_{11} komponens esetén ~0,00%, σ_{12} komponens esetén ~0,00%, σ_{22} komponens esetén -0,03%.

A *Green-McInnis-Naghdi*-féle feszültség-sebességnél a maximális eltérések (két tizedesjegyre kerekítve): σ_{11} komponens esetén 0,13%, σ_{12} komponens esetén -0,06%, σ_{22} komponens esetén -0,06%. Az eltérések átlaga: σ_{11} komponens esetén 0,01%, σ_{12} komponens esetén -0,01%, σ_{22} komponens esetén -0,02%.

A logaritmikus feszültség-sebességnél a maximális eltérések (két tizedesjegyre kerekítve): σ_{11} komponens esetén 0,08%, σ_{12} komponens esetén -0,16%, σ_{22} komponens esetén -0,04%. Az eltérések átlaga: σ_{11} komponens esetén 0,01%, σ_{12} komponens esetén -0,01%, σ_{22} komponens esetén -0,02%.

A σ_{33} feszültségkomponens esetén a maximális eltérés -0,05%. Az eltérések átlaga -0,03%.

8. ÖSSZEFOGLALÁS

A dolgozatban a fő célkitűzés (logaritmikus deriváltra épülő ABAQUS UMAT szubrutin) megvalósításra került. Ezen túlmenően további három objektív feszültség-sebesség esetén (*Zaremba-Jaumann-Noll*-féle, *Green-McInnis-Naghdi*-féle, *Euler*-féle triád spintenzorán alapuló) érvényes nulladrendű hipoelasztikus anyagmodell UMAT szubrutinjának elkészítése is megtörtént. További célkitűzés volt analitikus számítások elvégzése olyan tesztpéldákon, amelyek az ABAQUS végeselemes szoftverben előállíthatók, és rajtuk a megírt szubrutinok tesztelése (analitikus és numerikus eredmények összehasonlítása) megtörténhet.

Az ismertebb objektív feszültség-sebességek összefoglalása után a nulladrendű hipoelasztikus konstitutív egyenleten végzett analitikus számítások képet adnak a különböző objektív feszültség-sebességek esetén érvényes anyagegyenlet jellegéről. Az egyszerű nyírás példáján viszonylag nagynak mondható deformáció $(\gamma_{\text{max}} = 10)$ vizsgálata történt. Az eredményekből jól látható, hogy növekvő γ értékek esetén a különböző objektív feszültség-sebesség alkalmazása esetén kapott feszültségkomponensekben jelentkező eltérések egyre számottevőbbek. A deformáció kezdeti szakaszában $(\gamma < 1)$ a nyírófeszültségek közel egyezőek. A *Zaremba-Jaumann-Noll*-féle feszültség-sebesség sajátossága, hogy az egyszerű nyírás példáján a feszültségkomponensekben oszcilláló jelleg mutatkozik. A nyírófeszültség a logaritmikus feszültség-sebesség esetén kezdetben nő, majd egy γ érték elérése után $(\gamma_{\text{m}} = 3{,}0177)$ fokozatosan csökken a deformáció előrehaladtával.

Az egyszerű nyírás mellett egy zárt ciklusú terhelés vizsgálata is történt. Ennek a példának a segítségével a deformáció végén maradó feszültségek jellegéről kapunk képet. Mivel a vizsgált konstitutív egyenlet tisztán rugalmas, emiatt elvárás lenne, hogy az alkalmazott feszültség-sebességtől függetlenül a zárt terhelési ciklus végén ne keletkezzenek maradó feszültségek. Ennek ellenére a logaritmikus feszültség-sebesség kivételével minden esetben maradnak feszültségek, így ennél a példánál mutatkozik meg a logaritmikus feszültség-sebesség alkalmazásának egy előnyös tulajdonsága. Az eredményekből megállapítható, hogy az együttforgó feszültség-sebességek esetén kisebb maradó feszültségek keletkeznek.

A dolgozat következő része *Simo* és *Hughes* által közölt [51], együttforgó deriváltakra alkalmazható numerikus integrálási algoritmus bemutatásával foglalkozott. Az algoritmus felhasználja a ferdén szimmetrikus másodrendű tenzorok exponenciális leképzésének zárt alakban történő előállítására szolgáló összefüggést, aminek segítségével az eljárás pontossága növekszik. Az algoritmus tesztelése a szubrutinok megírása előtt MAPLESOFT MAPLE 9.01 szimbolikus matematikai szoftver segítségével történt.

Az ABAQUS végeselemes szoftver nyújtotta lehetőségek közül a UMAT szubrutinok alkalmazásával a felhasználóknak módjuk nyílik olyan egyéni anyagtörvények definiálására, melyeket a program nem tartalmaz. Erre példa a különböző objektív feszültség-sebességek érvényes nulladrendű hipoelasztikus anyagmodell. Bemutatásra került az ABAQUS által véges alakváltozások esetére alkalmazott rugalmas anyagmodell, és az általa használt számítási algoritmus is. Mivel a program a *Zaremba-Jaumann-Noll*-féle feszültség-sebességnél is alkalmazott $\mathbf{w}$ örvénytenzort használja fel, emiatt az egyszerű nyírás példáján itt is oszcilláló jelleg mutatkozik [22].

Az UMAT szubrutinokkal elsőként az egyszerű nyírás példáján végzett számítások eredményei lettek összehasonlítva az analitikus megoldásokkal. A számításhoz minden esetben a terhelési szakasz 10 részre történő felosztása történt. Az így kapott eredmények igen jól illeszkednek az analitikus úton kapott értékekhez. A legnagyobb eltérés a logaritmikus feszültség-sebesség esetén a σ_{12} feszültségkomponensben mutatkozott. A terhelés végén az eltérés a 10 részre történő felosztás során 4,57%, ami a felosztás 25 részre történő felosztásával 0,73%-ra csökken.

Az UMAT szubrutinokkal a zárt terhelési ciklusú példán végzett numerikus számítások az egyes terhelési szakaszok 10 részre történő felosztásával történtek. A numerikus értékek analitikus megoldásokkal való összehasonlítása során az eltérések gyakorlatilag a grafikus megjelenítési pontosságon belül vannak. A legnagyobb átlagos eltérés a σ_{33} feszültségkomponensben (melynek mind az analitikus megoldása, mind a numerikus számítása a négy feszültség-sebességnél megegyező) mutatkozott: -0,03%.

A logaritmikus feszültség-sebességre épülő szubrutint elő lehetett volna állítani a (4.6) szerinti egyenértékű hiperelasztikus konstitutív egyenlet felhasználásával is. Ehhez a pillanatnyi konfiguráción értelmezett *Hencky*-féle alakváltozási tenzor numerikus előállítása szükséges. Érdemes lenne megvizsgálni az így kapott eredmények pontosságát, illetve a számítási időigényét.

Az UMAT szubrutinokat célszerű lenne további tesztpéldákon is ellenőrizni. Vizsgálni olyan összetettebb példákon, melyeknek analitikus megoldása ismert. Ilyen például *Bruhns*, *Xiao* és *Meyers* által [15] négyzet keresztmetszetű rúd hajlítására levezetett analitikus megoldás a logaritmikus feszültség-sebességen alapuló nulladrendű hipoelasztikus anyagegyenletből képzett hiperelasztikus konstitutív egyenletre. Ezenkívül vizsgálni lehetne több elemre felosztott bonyolultabb modellek esetén a számítás időigényét, illetve összehasonlítani a programba épített − véges alakváltozásokra érvényes − anyagmodell alkalmazása során kapott számítási idővel.

Az UMAT szubrutinok által felhasznált további szubrutinok (például: inverz számítás, sajátértékek számítása) optimalizálásával a számítási idő csökkenthető, ez pedig a végeselemes szoftverek esetén döntő jelentőségű, ahol a nemlineáris számítás során az elemek számának növelésével a számítási idő rohamosan nő.

A dolgozatban a nulladrendű hipoelasztikus anyagmodell vizsgálata történt, ahol a hipoelasztikus érintő tenzor elemei konstansok, nem függnek a feszültségi állapottól. Érdemes lenne vizsgálni bonyolultabb hipoelasztikus anyagmodellek esetén a különböző objektív feszültség-sebességek esetén érvényes konstitutív egyenletet az ismert tesztpéldákon, illetve az anyagegyenletek ABAQUS UMAT szubrutinként történő implementálásának lehetőségét. Felmerül a kérdés, hogy vajon a magasabbrendű rugalmas hipoelasztikus modellek esetén sem keletkezik maradó feszültség a logaritmikus feszültség-sebesség alkalmazása esetén zárt terhelési ciklusú példán?

Az objektív deriváltak vizsgálata még további lehetőségeket nyújt magában. Az ismert objektív deriváltakon kívül elképzelhető, hogy található olyan, amelyik a többi előnyös tulajdonságait nagy részben magában foglalja.

IRODALOMJEGYZÉK

[1] **ABAQUS** Online Documentation: Version 6.4-1, [2003].

[2] **Backus**, G., [1997], „Continuum Mechanics”, *Samizdat Press*, (http://www.landau.mines.edu/~samizdat).

[3] **Barta**, R. C., [2000], „Introduction to Continuum Mechanics”, (http://dionysos.univ-lyon2.fr/~dsarrut/bib/phys/www.jwave.vt.edu/crcd/ batra/lectures/esmmse5984/).

[4] **Basar**, Y. & **Weichert**, D., [2000], „Nonlinear Continuum Mechanics of Solids”, *Springer-Verlag*, Berlin.

[5] **Bertram**, A., [2005], „Elasticity and Pasticity of Large Deformations”, *Springer-Verlag*, Berlin.

[6] **Bonet**, J. & **Wood**, R. D., [1997], „Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis”, *Cambridge University Press*, New York, USA.

[7] **Brannon**, R. M., [1998], „Continuum Mechanics Nomenclature Sheet”, (http://www.me.unm.edu/~rmbrann/gobag.html).

[8] **Brannon**, R. M., [2002], „Geometric Insight into Return Mapping Plasticity Algorithms”, (http://www.me.unm.edu/~rmbrann/gobag.html).

[9] **Brannon**, R. M., [2002], „Rotation: A review of useful theorems involving proper orthogonal matrices referenced to three-dimensional physical space”, (http://www.me.unm.edu/~rmbrann/gobag.html).

[10] **Brannon**, R. M., [2003], „Kinematics: The mathematics of deformation”, (http://www.me.unm.edu/~rmbrann/gobag.html).

[11] **Brannon**, R. M., [2004], „Curvilinear Analysis in a Euclidean Space”, (http://www.me.unm.edu/~rmbrann/gobag.html).

[12] **Brannon**, R. M., [2004], „Functional and Structured Tensor Analysis for Engineers”, (http://www.me.unm.edu/~rmbrann/gobag.html).

[13] **Bruhns**, O. T. & **Xiao**, H. & **Meyers**, A., [2001], „A self-consistent Eulerian rate type model for finite deformation elastoplasticity with isotropic damage”, *International Journal of Solids and Structures*, 38, 657-683.

[14] **Bruhns**, O. T. & **Xiao**, H. & **Meyers**, A., [2001], „Large simple shear and torsion problems in kinematic hardening elasto-plasticity with logarithmic rate”, *International Journal of Solids and Structures*, 38, 8701-8722.

[15] **Bruhns**, O. T. & **Xiao**, H. & **Meyers**, A., [2002], „Finite Bending of a Rectangular Block of an Elastic Hencky Material”, *Journal of Elasticity*, 66, 237-256.

[16] **Bruhns**, O. T. & **Xiao**, H. & **Meyers**, A., [2002], „New results for the spin of Eulerian triad and the logarithmic spin and rate”, *Acta Mechanica*, 155, 95-109.

[17] **Desai**, C. S., [2001], „Mechanics of Materials and Interfaces”, *CRC Press LLC*.

[18] **Farahani**, K. & **Bahai**, H., [2004], „Hyper-elastic constitutive equations of conjugate stresses and strain tensors for the Seth-Hill strain measures”, *International Journal of Engineering Science*, 42, 29-41.

[19] **Fish**, J. & **Shek**, K., [1999], „Computational aspects of incrementally objective algorithms for large deformation plasticity”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 44, 839-851.

[20] **Flanagan**, D. P. & **Taylor**, L. M., [1987], „An accurate numerical algorithm for stress integration with finite rotations”, *Computer Methods in Apllied Mechanics and Engineering*, 62, 305-320.

[21] **Gadala**, M. S. & **Wang**, J., [2000], „Computational implementation of stress integration in FE analysis of elasto-plastic large deformation problems”, *Finite Elements in Analysis and Design*, 35, 379-396.

[22] **Gilormini**, P. & **Roudier** Ph., [1993], „ABAQUS and finite strain”, *Rapport Interne LMT n°140*, Paris.

[23] **Gisbert**, S. & **Takó** G., [2002], „Numerikus módszerek I.”, *Typotex Kiadó*, Budapest.

[24] **Govindjee**, S., [1997], „Accuracy and stability for integration of Jaumann stress rate equations in spinning bodies”, *Engineering Computations*, 14, 14-30.

[25] **Hughes**, T. J. R & **Winget**, J., [1980], „Finite rotation effects in numerical integration of rate constitutive equations arising in large-deformation analysis”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 15, 1862-1867.

[26] **Hughes**, T. J. R., [1984], „Numerical Implementation of Constitutive Models: Rate Independent Deviatoric Plasticity”, In: Theoretical Foundation for Large-Scale Computations for Nonlinear Material Behavior (S. Nemat-Nasser, R. J. Asaro and G. A. Hegemier), Chapter II, 29-57, *Martinus Nijhoff Publishers,* Dordrecht, The Netherlands.

[27] **Jávor** A., & **Benkő** Tiborné, [1989], „Számítástechnika alkalmazóknak (Személyi számítógépek programozása BASIC, valamint IBM PC AT/XT FORTRAN ’77 nyelven)”, Kézirat, *Budapest Műszaki Egyetem Mérnöktovábbképző Intézete*.

[28] **Khoei**, A. R. & **Bakhshiani**, A. & **Mofid**, M., [2003], „An implicit algorithm for hypoelasto-plastic and hypoelasto-viscoplastic endochronic theory in finite strain isotropic-kinematic-hardening model”, *International Journal of Solids and Structures*, 40, 3393-3423.

[29] **Kozák** I., [1995], Kontinuummechanika”, *Miskolci Egyetemi Kiadó*.

[30] **Li**, Y. F. & **Nemat-Nasser**, S. [1993], „An explicit integration scheme for finite-eformation plasticity in finite-element methods”, *Finite Elements in Analysis and Design*, 15, 93-102.

[31] **Lin**, R. C. & **Schomburg**, U. & **Kletschkowski**, T., [2003], „Analytical stress solutions of a closed deformation path with stretching and shearing using the hypoelastic formulations”, *European Journal of Mechanics A/Solids*, 22, 443-461.

[32] **Lin**, R. C., [2002], „Viscoelastic and Elastic-viscoelastic-elastoplastic Constitutive Characterizations of Polymers at Finite Strains: Theoretical and Numerical Aspects”, *PhD Thesis, University of the Federal Armed Forces Hamburg*, Germany.

[33] **Lubarda**, V. A., [2002], „Elastoplasticity Theory”, *CRC Press LLC*.

[34] **Marcon**, A. F. & **Bittencourt**, E. & **Creus**, G. J., [1999], „On the integration of stresses in large deformations plasticity”, *Engineering Computations*, 16, 49-69.

[35] **Mase**, G. T. & **Mase**, G. E., [1999], „Continuum Mechanics for Engineers”, *CRC Press LLC*.

[36] **Meyers**, A. & **Xiao**, H. & **Bruhns**, O., [2003], „Elastic Stress Ratchetting and Corotational Stress Rates”, *Technische Mechanik*, 23, 92-102.

[37] **Meyers**, A. & **Xiao**, H. & **Bruhns**, O., [2004], „Choice of objective rate in single parameter hypoelastic strain cycles”, *The 7th International Conference on Engineering Computational Structures Technology*, Lisbon, Portugal, 7-9 September 2004.

[38] **Naghdabadi**, R. & **Yeganeh**, M. & **Saidi**, A. R., [2005], „Application of corotational rates of the logarithmic strain in constitutive modeling of hardening materials at finite deformations”, *International Journal of Plasticity*, 21, 1546-4567.

[39] **Nefussi**, G. & **Dahan**, N., [1996], „An algorithm for integrating the spin on convected bases", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 39, 2973-2985.

[40] **Noels**, L. & **Stainier**, L. & **Ponthot**, J., [2004], „An energy-momentum conserving algorithm for non-linear hypoelastic constitutive models", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 59, 83-114.

[41] **Rashid** Kamel Abu Al-Rub, [2004], „Material Length Scales in Gradient-Dependent Plasticity/Damage and Size Effects: Theory and Computation", *Dissertation, Louisiana State University*.

[42] **Rashid**, M. M. [1993], „Incremental kinematics for finite element applications", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 36, 3937-3956.

[43] **Rashid**, M. M., [1996], „Incremental objectivity in cyclic shearing deformations", *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 12, 863-871.

[44] **Reinhardt**, W. D. & Dubey, R. N., [1995], „Eulerian strain-rate as a rate of logarithmic strain", *Mechanics Research Communications*, 22, 165-170.

[45] **Reinhardt**, W. D. & Dubey, R. N., [1996], „Application of Objective Rates in Mechanical Modelling of Solids", *ASME J. Appl. Mech*., 63, 692-698.

[46] **Reinhardt**, W. D. & Dubey, R. N., [1996], „Coordinate-Independent Representation of Spin sin Continuum Mechanics", *Journal of Elasticity*, 42, 133-144.

[47] **Rodríguez-Ferra**n, A. & **Huerta**, A., [1998], „Comparing Two Algorithms to Add Large Strains to Small-Strain FE Code", *Journal of Engineering Mechanics*, September 1998, 939-948.

[48] **Rodríguez-Ferran**, A. & **Pegon**, P. & **Huerta**, A., [1997], „Two stress update algorithms for large strains: accuracy analysis and numerical implementation", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 40, 4363-4404.

[49] **Rubin**, M. B., [2004], „Introduction to Continuum Mechanics", *University of California*, Berkeley, USA.

[50] **Shieck**, B. & **Stumpf**, H., [1995], „The appropriate corotational rate, exact formula for the plastic spin and constitutive model for finite elastoplasticity", *Int. J. Solids Structures*, 32, 3643-3667.

[51] **Simo**, J. C., & **Hughes**, T. J. R., [1998], „Computational Inelasticity", *Springer-Verlag*, New York.

[52] **Szabó** L. & **Balla** M., [1988], „Comparison of some stress rates", *Int. J. Solids Structures*, 25, 279-297.

[53] **Szabó** L., [2004], „Kontinuummechanikai segédletek", *Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem*, (http://www.mm.bme.hu/~szabol).

[54] **Truesdell**, C. & **Noll**, W., [1965, 1992], „The Non-Linear Field Theories of Mechanics", Second Edition, *Springer-Verlag*, Berlin.

[55] **Xiao**, H. & **Bruhns**, O. T. & **Meyers**, A., [1997], „Logarithmic strain, logarithmic spin and logarithmic rate", *Acta Mechanica*, 124, 89-105.

[56] **Xiao**, H. & **Bruhns**, O. T. & **Meyers**, A., [1997], „Hypo-Elasticity Model Based upon the Logarithmic Stress Rate", *Journal of Elasticity*, 47, 51-68.

[57] **Xiao**, H. & **Bruhns**, O. T. & **Meyers**, A., [1998], „Objective corotational rates and unified work-conjugacy relation between Eulerian and Lagrangean strain and stress measures", *Arch. Mech.*, 50, 1015-1045.

[58] **Xiao**, H. & **Bruhns**, O. T. & **Meyers**, A., [1998], „On objective corotational rates and their defining spin tensors", *Int. J. Solids Structures*, 35, 4001-4014.

[59] **Xiao**, H. & **Bruhns**, O. T. & **Meyers**, A., [1998], „Strain Rates and Material Spins", *Journal of Elasticity*, 52, 1-41.

[60] **Xiao**, H. & **Bruhns**, O. T. & **Meyers**, A., [1999], „A Natural Generalization of Hypoelasticity and Eulerian Rate Type Formulation of Hyperelasticity", *Journal of Elasticity*, 56, 59-93.

[61] **Xiao**, H. & **Bruhns**, O. T. & **Meyers**, A., [1999], „Existence and uniqueness of the integrable-exactly hypoelastic equation $\overset{\circ}{\boldsymbol{\tau}}{}^{*} = \lambda\left(\mathrm{tr}\boldsymbol{D}\right)\boldsymbol{I} + 2\mu\boldsymbol{D}$ and its significance to finite inelasticity theories", *Acta Mechanica*, 138, 31-50.

[62] **Xiao**, H. & **Bruhns**, O. T. & **Meyers**, A., [2000], „A consistent finite elastoplasticity theory combining additive and multiplicative decomposition of the stretching and the deformation gradient", *International Journal of Plasticity*, 16, 143-177.

[63] **Xiao**, H. & **Bruhns**, O. T. & **Meyers**, A., [2000], „The choice of objective rates in finite elastoplasticity: general results on the uniqueness of the logarithmic rate", *Proc. R. Soc. Lond. A*, 456, 1865-1882.

[64] **Xiao**, H. & **Bruhns**, O. T. & **Meyers**, A., [2004], „Explicit dual stress-strain and strain-stress relations of incompressible isotropic hyperelastic solids via deviatoric Hencky strain and Cauchy stress”, *Acta Mechanica*, 168, 21-33.

[65] **Xiao**, H. & **Bruhns**, O. T. & **Meyers**, A., [2005], „Objective stress rates, path-dependence properties and non-integrability problems”, *Acta Mechanica*, Megjelenés alatt.

[66] **Zhou**, X. & **Tamma**, K. K., [2003], „Ont he applicability and stress update formulations for corotational stress rate hypoelasticity constitutive models”, *Finite Elements in Analysis and Design*, 39, 783-816.