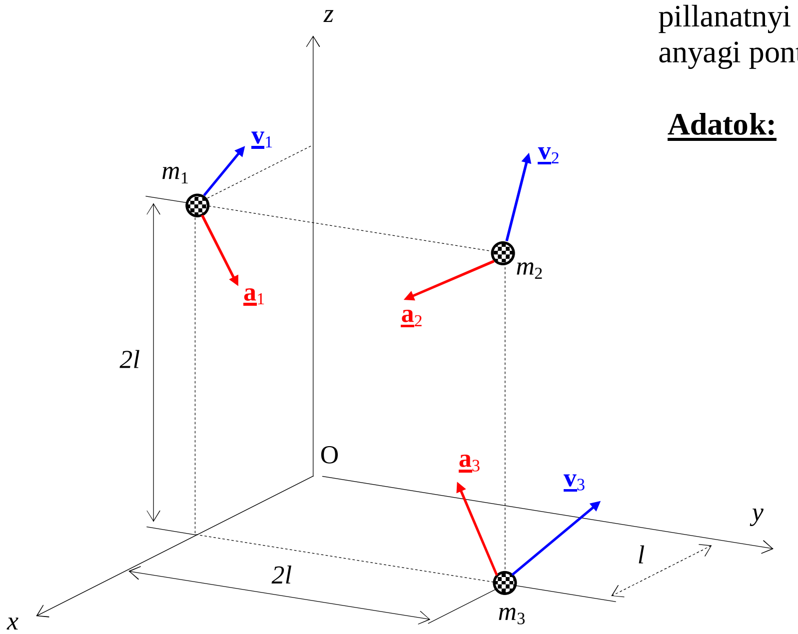

A három anyagi pontból álló mechanikai rendszer pillanatnyi helyzetét szemlélteti az ábra. Ismerjük az anyagi pontok pillanatnyi sebességét és gyorsulását.

Adatok: $l = 0{,}5$ [m]

$m_1 = 4$ [kg]
$m_2 = 2$ [kg]
$m_3 = 2$ [kg]

$$\underline{\mathbf{v}}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \left[\frac{\text{m}}{\text{s}}\right]; \qquad \underline{\mathbf{a}}_1 = \begin{bmatrix} 6 \\ 7{,}5 \\ -5 \end{bmatrix} \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right];$$

$$\underline{\mathbf{v}}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} \left[\frac{\text{m}}{\text{s}}\right]; \qquad \underline{\mathbf{a}}_2 = \begin{bmatrix} 6 \\ -8{,}5 \\ -3 \end{bmatrix} \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right];$$

$$\underline{\mathbf{v}}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix} \left[\frac{\text{m}}{\text{s}}\right]; \qquad \underline{\mathbf{a}}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -6{,}5 \\ 13 \end{bmatrix} \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right]$$

Feladat: 1.) Határozzuk meg az adott pillanatban (vázolt helyzet) az anyagi pontrendszer súlypontjának (tömegközéppontjának)

a.) helyvektorát ($\underline{\mathbf{r}}_{OS} = \underline{\mathbf{r}}_S = ?$),
b.) sebességvektorát ($\underline{\mathbf{v}}_S = ?$) és
c.) gyorsulásvektorát ($\underline{\mathbf{a}}_S = ?$)!

2.) Számítsuk ki az anyagi pontrendszer impulzus-vektorrendszerének

a.) a súlypontba redukált vektorkettősét ($[\, \underline{\mathbf{I}} \,;\, \underline{\mathbf{\Pi}}_S]_S$; $\underline{\mathbf{I}} = ?$; $\underline{\mathbf{\Pi}}_S = ?$), valamint
b.) az origóba redukált vektorkettősét ($[\, \underline{\mathbf{I}} \,;\, \underline{\mathbf{\Pi}}_O]_O$; $\underline{\mathbf{I}} = ?$; $\underline{\mathbf{\Pi}}_O = ?$)!

3.) Határozzuk meg az anyagi pontrendszer kinetikai vektorrendszerének

a.) a súlypontba redukált vektorkettősét ($[\, \dot{\underline{\mathbf{I}}} \,;\, \underline{\mathbf{D}}_S \,]_S$; $\dot{\underline{\mathbf{I}}} = ?$; $\underline{\mathbf{D}}_S = ?$), valamint
b.) az origóba redukált vektorkettősét ($[\, \dot{\underline{\mathbf{I}}} \,;\, \underline{\mathbf{D}}_O \,]_O$; $\dot{\underline{\mathbf{I}}} = ?$; $\underline{\mathbf{D}}_O = ?$)!

4.) Számítsuk ki – az ábrán fel nem tüntetett – külső erőrendszernek

a.) a súlypontba redukált vektorkettősét ($[\, \underline{\mathbf{F}} \,;\, \underline{\mathbf{M}}_S]_S$; $\underline{\mathbf{F}} = ?$; $\underline{\mathbf{M}}_S = ?$), valamint
b.) az origóba redukált vektorkettősét ($[\, \underline{\mathbf{F}} \,;\, \underline{\mathbf{M}}_O]_O$; $\underline{\mathbf{F}} = ?$; $\underline{\mathbf{M}}_O = ?$)!

5.) Határozzuk meg az anyagi pontrendszer mozgási (kinetikai) energiáját! ($T = E_{kin} = ?$)

Megoldás:

1.) a.) $\underline{\mathbf{r}}_S = \dfrac{1}{\sum_{i=1}^{3} m_i} \sum_{i=1}^{3} m_i \, \underline{\mathbf{r}}_i$; $\sum_{i=1}^{3} m_i = m_1 + m_2 + m_3 = m = 8$ [kg]

Az ábrából leolvasható az egyes anyagi pontok helyvektora (figyelembe véve, hogy $\underline{\mathbf{r}}_{Oi} = \underline{\mathbf{r}}_i$):

$$\underline{\mathbf{r}}_1 = \begin{bmatrix} l \\ 0 \\ 2l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [\mathrm{m}]; \qquad \underline{\mathbf{r}}_2 = \begin{bmatrix} l \\ 2l \\ 2l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} [\mathrm{m}]; \qquad \underline{\mathbf{r}}_3 = \begin{bmatrix} l \\ 2l \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} [\mathrm{m}]$$

Így:

$$\left.\begin{aligned} x_S &= \frac{(m_1 + m_2 + m_3) l}{m_1 + m_2 + m_3} = l = 0{,}5\,[\mathrm{m}] \\ y_S &= \frac{m_1 \cdot 0 + (m_2 + m_3) 2l}{m_1 + m_2 + m_3} = 0{,}5\,[\mathrm{m}] \\ y_S &= \frac{(m_1 + m_2) 2l + m_3 \cdot 0}{m_1 + m_2 + m_3} = 0{,}75\,[\mathrm{m}] \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \underline{\mathbf{r}}_S = \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}5 \\ 0{,}75 \end{bmatrix} [\mathrm{m}]$$

1.) b.) $\underline{\mathbf{v}}_S = \dfrac{1}{\sum_{i=1}^{3} m_i} \sum_{i=1}^{3} m_i \, \underline{\mathbf{v}}_i$

$$\underline{\mathbf{v}}_S = \begin{bmatrix} v_{Sx} \\ v_{Sy} \\ v_{Sz} \end{bmatrix} = \frac{1}{m} \left\{ m_1 \begin{bmatrix} v_{1x} \\ v_{1y} \\ v_{1z} \end{bmatrix} + m_2 \begin{bmatrix} v_{2x} \\ v_{2y} \\ v_{2z} \end{bmatrix} + m_3 \begin{bmatrix} v_{3x} \\ v_{3y} \\ v_{3z} \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \right]$$

1.) c.) $\underline{\mathbf{a}}_S = \dfrac{1}{\sum_{i=1}^{3} m_i} \sum_{i=1}^{3} m_i \, \underline{\mathbf{a}}_i$

$$\underline{\mathbf{a}}_S = \begin{bmatrix} a_{Sx} \\ a_{Sy} \\ a_{Sz} \end{bmatrix} = \frac{1}{m} \left\{ m_1 \begin{bmatrix} a_{1x} \\ a_{1y} \\ a_{1z} \end{bmatrix} + m_2 \begin{bmatrix} a_{2x} \\ a_{2y} \\ a_{2z} \end{bmatrix} + m_3 \begin{bmatrix} a_{3x} \\ a_{3y} \\ a_{3z} \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \right]$$

2.) a.) $[\underline{\mathbf{I}}\,;\,\underline{\mathbf{\Pi}}_S]_S$; $\underline{\mathbf{I}} = m\underline{\mathbf{v}}_S = 8\begin{bmatrix}0\\2\\3\end{bmatrix}\left[kg\frac{m}{s}\right] = \begin{bmatrix}0\\16\\24\end{bmatrix}[Ns]$

$$\underline{\mathbf{\Pi}}_S = \sum_{i=1}^{3} m_i\,(\,\underline{\mathbf{r}}_{Si} \times \underline{\mathbf{v}}_i\,) = 4\begin{vmatrix}\underline{i} & \underline{j} & \underline{k}\\ 0 & -0{,}5 & 0{,}25\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix}\underline{i} & \underline{j} & \underline{k}\\ 0 & 0{,}5 & 0{,}25\\ 0 & 1 & 5\end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix}\underline{i} & \underline{j} & \underline{k}\\ 0 & 0{,}5 & -0{,}75\\ 0 & 5 & 5\end{vmatrix} = \begin{bmatrix}14\\0\\0\end{bmatrix}[Nms],$$

ahol $\underline{\mathbf{r}}_{Si} = \underline{\mathbf{r}}_i - \underline{\mathbf{r}}_S$ (a súlypontból az i-dik anyagi ponthoz mutató helyvektor)

2.) b.) $[\underline{\mathbf{I}}\,;\,\underline{\mathbf{\Pi}}_O]_O$

$$\underline{\mathbf{I}} = m\underline{\mathbf{v}}_S = \begin{bmatrix}0\\16\\24\end{bmatrix}[Ns]$$

$$\underline{\mathbf{\Pi}}_O = \underline{\mathbf{\Pi}}_S + \underline{\mathbf{r}}_{OS} \times \underline{\mathbf{I}} = \underline{\mathbf{\Pi}}_S + \underline{\mathbf{r}}_S \times \underline{\mathbf{I}} = \begin{bmatrix}14\\0\\0\end{bmatrix} + \begin{vmatrix}\underline{i} & \underline{j} & \underline{k}\\ 0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}75\\ 0 & 16 & 24\end{vmatrix} = \begin{bmatrix}14\\-12\\8\end{bmatrix}[Nms]$$

Ell.: $\underline{\mathbf{\Pi}}_O = \sum_{i=1}^{3} m_i\,(\,\underline{\mathbf{r}}_{Oi} \times \underline{\mathbf{v}}_i\,) = \sum_{i=1}^{3} m_i\,(\,\underline{\mathbf{r}}_i \times \underline{\mathbf{v}}_i\,)$

$$\underline{\mathbf{\Pi}}_O = \sum_{i=1}^{3} m_i\,(\,\underline{\mathbf{r}}_i \times \underline{\mathbf{v}}_i\,) = 4\begin{vmatrix}\underline{i} & \underline{j} & \underline{k}\\ 0{,}5 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix}\underline{i} & \underline{j} & \underline{k}\\ 0{,}5 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 5\end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix}\underline{i} & \underline{j} & \underline{k}\\ 0{,}5 & 1 & 0\\ 0 & 5 & 5\end{vmatrix} = \begin{bmatrix}14\\-12\\8\end{bmatrix}[Nms]$$

3.) a.) $[\,\dot{\underline{\mathbf{I}}}\,;\,\underline{\mathbf{D}}_S\,]_S$;

$$\dot{\underline{\mathbf{I}}} = m\underline{\mathbf{a}}_S = 8\begin{bmatrix}5\\0\\0\end{bmatrix}\left[kg\frac{m}{s^2}\right] = \begin{bmatrix}40\\0\\0\end{bmatrix}[N]$$

$$\underline{\mathbf{D}}_S = \sum_{i=1}^{3} m_i\,(\,\underline{\mathbf{r}}_{Si} \times \underline{\mathbf{a}}_i\,) = 4\begin{vmatrix}\underline{i} & \underline{j} & \underline{k}\\ 0 & -0{,}5 & 0{,}25\\ 6 & 7{,}5 & -5\end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix}\underline{i} & \underline{j} & \underline{k}\\ 0 & 0{,}5 & 0{,}25\\ 6 & -8{,}5 & -3\end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix}\underline{i} & \underline{j} & \underline{k}\\ 0 & 0{,}5 & -0{,}75\\ 2 & -6{,}5 & 13\end{vmatrix} = \begin{bmatrix}7\\6\\4\end{bmatrix}[Nm]$$

3.) b.) $[\,\dot{\underline{\mathbf{I}}}\,;\,\underline{\mathbf{D}}_O\,]_O$; $\dot{\underline{\mathbf{I}}} = m\underline{\mathbf{a}}_S = \begin{bmatrix}40\\0\\0\end{bmatrix}[N]$

$$\underline{\mathbf{D}}_O = \underline{\mathbf{D}}_S + \underline{\mathbf{r}}_{OS} \times \dot{\underline{\mathbf{I}}} = \underline{\mathbf{D}}_O + \underline{\mathbf{r}}_S \times \dot{\underline{\mathbf{I}}} = \begin{bmatrix}7\\6\\4\end{bmatrix} + \begin{vmatrix}\underline{i} & \underline{j} & \underline{k}\\ 0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}75\\ 40 & 0 & 0\end{vmatrix} = \begin{bmatrix}7\\36\\-16\end{bmatrix}[Nm]$$

Ell.: $$\underline{\mathbf{D}}_O = \sum_{i=1}^{3} m_i\,(\,\underline{\mathbf{r}}_{Oi} \times \underline{\mathbf{a}}_i\,) = 4\begin{vmatrix}\underline{i} & \underline{j} & \underline{k}\\ 0{,}5 & 0 & 1\\ 6 & 7{,}5 & -5\end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix}\underline{i} & \underline{j} & \underline{k}\\ 0{,}5 & 1 & 1\\ 6 & -8{,}5 & -3\end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix}\underline{i} & \underline{j} & \underline{k}\\ 0{,}5 & 1 & 0\\ 2 & -6{,}5 & 13\end{vmatrix} = \begin{bmatrix}7\\36\\-16\end{bmatrix}[Nm]$$

4.) a.) Írjuk fel a dinamika alaptételét:

$$[\dot{\underline{\mathbf{I}}}\ ;\ \underline{\mathbf{D}}_S\ ]_S = [\ \underline{\mathbf{F}}\ ;\ \underline{\mathbf{M}}_S]_S$$

$$\dot{\underline{\mathbf{I}}} = \underline{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} 40 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [\mathrm{N}]\ ; \qquad \underline{\mathbf{D}}_S = \underline{\mathbf{M}}_S = \begin{bmatrix} 7 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix} [\mathrm{Nm}]$$

4.) b.)

$$[\dot{\underline{\mathbf{I}}}\ ;\ \underline{\mathbf{D}}_O\ ]_O = [\ \underline{\mathbf{F}}\ ;\ \underline{\mathbf{M}}_O]_O$$

$$\dot{\underline{\mathbf{I}}} = \underline{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} 40 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [\mathrm{N}]\ ; \qquad \underline{\mathbf{D}}_O = \underline{\mathbf{M}}_O = \begin{bmatrix} 7 \\ 36 \\ -16 \end{bmatrix} [\mathrm{Nm}]$$

A feladatkiírásban ugyan nem szerepel, de nézzük meg, hogyan határoznánk meg az impulzus-derivált vektorrendszer vektorkettőseit:

a.) $[\dot{\underline{\mathbf{I}}}\ ;\dot{\underline{\mathbf{\Pi}}}_S]_S$; $\quad \dot{\underline{\mathbf{I}}} = \begin{bmatrix} 40 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [\mathrm{N}]$;

$$\dot{\underline{\mathbf{\Pi}}}_S = \frac{d}{dt}\underline{\mathbf{\Pi}}_S = \sum_{i=1}^{3} m_i \left(\frac{d}{dt}\underline{\mathbf{r}}_{Si} \times \underline{\mathbf{v}}_i\right) + \sum_{i=1}^{3} m_i \left(\underline{\mathbf{r}}_{Si} \times \frac{d}{dt}\underline{\mathbf{v}}_i\right) = \sum_{i=1}^{3} m_i (\underline{\mathbf{v}}_{Si} \times \underline{\mathbf{v}}_i) + \sum_{i=1}^{3} m_i (\underline{\mathbf{r}}_{Si} \times \underline{\mathbf{a}}_i)$$

$$\sum_{i=1}^{3} m_i (\underline{\mathbf{v}}_{Si} \times \underline{\mathbf{v}}_i) = \sum_{i=1}^{3} m_i (\underline{\mathbf{v}}_i - \underline{\mathbf{v}}_S) \times \underline{\mathbf{v}}_i = -\sum_{i=1}^{3} m_i (\underline{\mathbf{v}}_S \times \underline{\mathbf{v}}_i) = -\underline{\mathbf{v}}_S \times \sum_{i=1}^{3} m_i \underline{\mathbf{v}}_i = -\underline{\mathbf{v}}_S \times m\,\underline{\mathbf{v}}_S = \underline{\mathbf{0}}$$

$$\sum_{i=1}^{3} m_i (\underline{\mathbf{r}}_{Si} \times \underline{\mathbf{a}}_i) = \underline{\mathbf{D}}_S$$

$$\dot{\underline{\mathbf{\Pi}}}_S = \underline{\mathbf{D}}_S = \begin{bmatrix} 7 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix} [\mathrm{Nm}]$$

b.) $[\dot{\underline{\mathbf{I}}}\ ;\dot{\underline{\mathbf{\Pi}}}_O]_O$; $\quad \dot{\underline{\mathbf{I}}} = \begin{bmatrix} 40 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [\mathrm{N}]$;

$$\dot{\underline{\mathbf{\Pi}}}_O = \frac{d}{dt}\underline{\mathbf{\Pi}}_O = \sum_{i=1}^{3} m_i \left(\frac{d}{dt}\underline{\mathbf{r}}_{Oi} \times \underline{\mathbf{v}}_i\right) + \sum_{i=1}^{3} m_i \left(\underline{\mathbf{r}}_{Oi} \times \frac{d}{dt}\underline{\mathbf{v}}_i\right) = \sum_{i=1}^{3} m_i (\underline{\mathbf{v}}_{Oi} \times \underline{\mathbf{v}}_i) + \sum_{i=1}^{3} m_i (\underline{\mathbf{r}}_{Oi} \times \underline{\mathbf{a}}_i)$$

$$\sum_{i=1}^{3} m_i (\underline{\mathbf{v}}_{Oi} \times \underline{\mathbf{v}}_i) = \sum_{i=1}^{3} m_i (\underline{\mathbf{v}}_i - \underline{\mathbf{v}}_O) \times \underline{\mathbf{v}}_i = -\sum_{i=1}^{3} m_i (\underline{\mathbf{v}}_O \times \underline{\mathbf{v}}_i) = -\underline{\mathbf{v}}_O \times \sum_{i=1}^{3} m_i \underline{\mathbf{v}}_i = -\underline{\mathbf{v}}_O \times m\,\underline{\mathbf{v}}_S = -\underline{\mathbf{v}}_O \times \underline{\mathbf{I}}$$

$$\sum_{i=1}^{3} m_i (\underline{\mathbf{r}}_{Oi} \times \underline{\mathbf{a}}_i) = \underline{\mathbf{D}}_O$$

$\dot{\underline{\mathbf{\Pi}}}_O = \underline{\mathbf{D}}_O - \underline{\mathbf{v}}_O \times \underline{\mathbf{I}}$ (FIGYELEM! A perdület-derivált vektor csak akkor egyezik meg a kinetikai nyomaték vektorával, ha $\underline{\mathbf{v}}_O \times \underline{\mathbf{I}} = \underline{\mathbf{0}}$, azaz ha a

- súlypontra számítjuk ($O \equiv S$), vagy
- $\underline{\mathbf{v}}_O \parallel \underline{\mathbf{I}}$, azaz $\underline{\mathbf{v}}_O \parallel \underline{\mathbf{v}}_S$, illetve
- $\underline{\mathbf{v}}_O = \underline{\mathbf{0}}$, vagy $\underline{\mathbf{v}}_S = \underline{\mathbf{0}}$.)

5.) $T = E_{kin} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} m_i \, \underline{\mathbf{v}}_i^{\,2} = \frac{1}{2}\left(m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 + m_3 v_3^2\right)$

$$v_1^2 = \left(v_{1x}^2 + v_{1y}^2 + v_{1z}^2\right) = 2\left[\frac{m}{s}\right]^2$$

$$v_2^2 = \left(v_{2x}^2 + v_{2y}^2 + v_{2z}^2\right) = 26\left[\frac{m}{s}\right]^2$$

$$v_3^2 = \left(v_{3x}^2 + v_{3y}^2 + v_{3z}^2\right) = 50\left[\frac{m}{s}\right]^2$$

$$T = E_{kin} = \frac{1}{2}\,(8 + 52 + 100) = 80\ [J]$$