Pontszerű test, dinamika
Autó dőlt kanyarban

Egy m tömegű jármű R sugarú, α dőlésszögű dőlt kanyarban állandó nagyságú v sebességgel mozog. A talaj és a jármű között a tapadási tényező μ_0 .

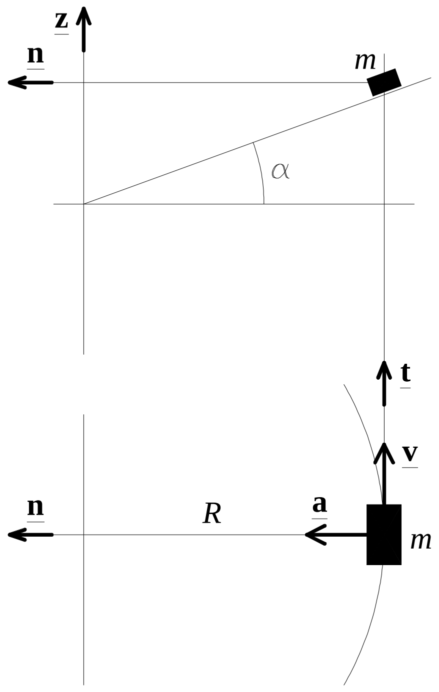
Adatok:

m = 1000 [kg]
R = 18 [m]
α = 20 [°]
μ_0 = 0,15

1. A járművet anyagi pontnak tekintve, határozza meg, hogy milyen tartományban lehet a jármű sebességének nagysága ahhoz, hogy a jármű a kanyarban ne csússzon ki oldalirányban se fölfele, se lefele?
2. Legalább mekkora tapadási tényező szükséges ahhoz, hogy a jármű álló helyzetben megmaradjon a lejtőn?

Megjegyzés:

gumi és aszfalt között a nyugvásbeli súrlódási tényező értéke száraz felületek esetén 0,7 és 1 között van. A példabeli útviszonyok tehát nagyon rosszak.



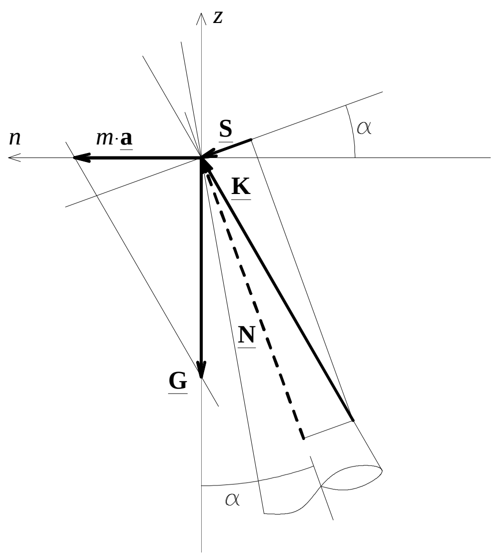
Megoldás:

1.
A dinamika alaptétele pontszerű testre: a test kinetikai vektora egyenlő a testre ható összes erő összegével:

$$m \cdot \underline{a} = \underline{F}$$

A példában $\underline{F} = \underline{G} + \underline{K}$,
ahol

- $\underline{G}$ a súlyerő, a Föld hatása,
- $\underline{K}$ pedig a talajról a testre átadódó kényszererő, a talaj hatása a testre.



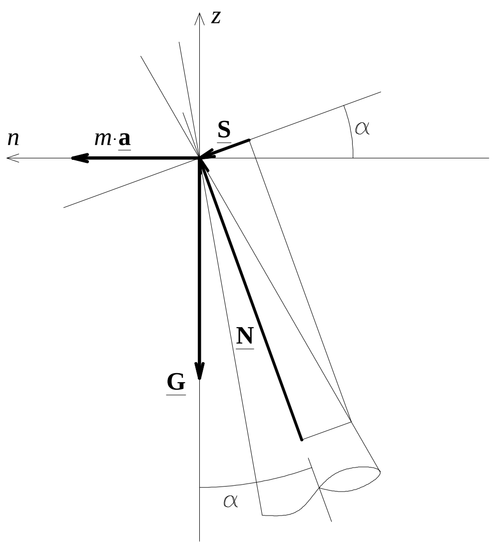
A kényszererő két összetevőre bontható az $\{n, z\}$ síkban:

$$\underline{K} = \underline{S} + \underline{N},$$

ahol

- $\underline{S}$ a nyugvásbeli súrlódóerő vagy tapadóerő, a kényszererőnek az érintkező felületek közös érintősíkjába eső összetevője, (vagyis a lejtő síkjába eső összetevője)
- $\underline{N}$ pedig a normálerő, a kényszererőnek az érintkező felületek közös normálisába eső összetevője, (vagyis a lejtőre merőleges összetevője).

A szabadtest ábra felfelé csúszás határhelyzetében:



A felfelé csúszást lefelé mutató nyugvásbeli súrlódóerő akadályozza meg, ezért a kényszererőnek a lejtővel párhuzamos összetevőjét a szabadtest ábrában „lefelé” irányulónak rajzoltuk. Vagyis a $2\mu_0$ nyílásszögű nyugvásbeli súrlódási kúp „felső” palástján van a kényszererő hatásvonala.

A szabadtest ábra alapján felírjuk a dinamika alaptételének a skaláregyenleteit[1]:

$$n: \quad m \cdot a_n = S \cdot \cos\alpha + N \cdot \sin\alpha \qquad (1)$$
$$k: \quad m \cdot a_z = -S \cdot \sin\alpha + N \cdot \cos\alpha - m \cdot g \qquad (2)$$

$a_n = \dfrac{v^2}{R}$ a gyorsulásnak a pályagörbe görbületi középpontja felé mutató összetevője (normális gyorsulás)

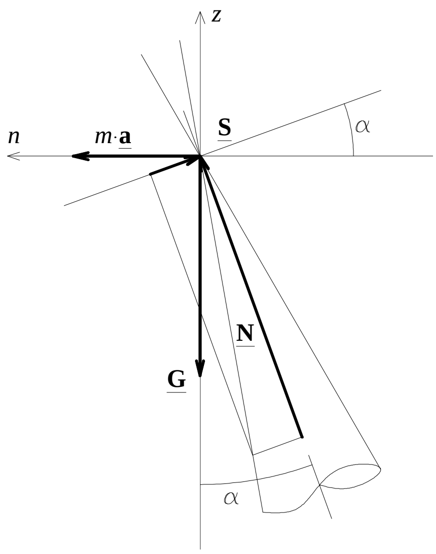
$a_z = 0$ a gyorsulásnak nincsen z irányú összetevője, mert nem csúszik a lejtőn sem fölfelé, sem lefelé sem.

Annak feltétele, hogy a test ne csússzon sugárirányban: $S \le \mu_0 \cdot N$

Az (1)-es és (2)-es egyenletekből S-et és N-et kifejezzük, és beírjuk a „nem megcsúszás” feltételi egyenletébe:

$$S = m \cdot (\frac{v^2}{R} \cdot \cos\alpha - g \cdot \sin\alpha)$$
$$N = m \cdot (\frac{v^2}{R} \cdot \sin\alpha + g \cdot \cos\alpha)$$
$$\frac{v^2}{R} \cdot \cos\alpha - g \cdot \sin\alpha \le \mu_0 \cdot (\frac{v^2}{R} \cdot \sin\alpha + g \cdot \cos\alpha) \Rightarrow v \le \sqrt{R \cdot g \cdot \frac{\tan\alpha + \mu_0}{1 - \mu_0 \cdot \tan\alpha}} = 9,798 \left[\frac{m}{s}\right] = 35,27 \left[\frac{km}{h}\right]$$

A szabadtest ábra a lefelé csúszás határhelyzetében:



Minden ugyanaz, mint az előbb, csak most a tapadóerő nem lefelé, hanem fölfelé mutat, hiszen a lefelé való csúszást kell megakadályoznia. Vagyis most a nyugvásbeli súrlódási kúp „alsó” határán van a kényszererő hatásvonala. Ennek megfelelően S előjele megfordul az előbbihez képest:

[1] *A dinamika alaptételének harmadik egyenletét nem írtuk fel, mert a vizsgált kérdés szempontjából érdektelen. Érdemes azonban meggondolni, hogy fizikailag mit jelent ez a fel nem írt egyenlet.*

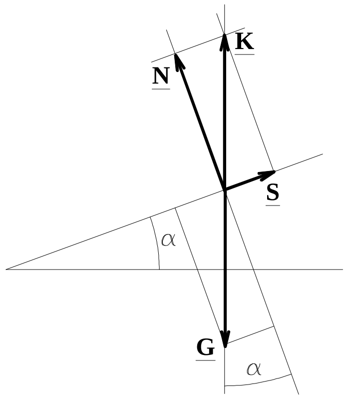
$$S = m \cdot (g \cdot \sin\alpha - \frac{v^2}{R} \cdot \cos\alpha)$$

$$N = m \cdot (\frac{v^2}{R} \cdot \sin\alpha + g \cdot \cos\alpha)$$

$$g \cdot \sin\alpha - \frac{v^2}{R} \cdot \cos\alpha \le \mu_0 \cdot (\frac{v^2}{R} \cdot \sin\alpha + g \cdot \cos\alpha) \Rightarrow v \ge \sqrt{R \cdot g \cdot \frac{\tan\alpha - \mu_0}{1 + \mu_0 \cdot \tan\alpha}} = 5,986 \left[\frac{m}{s}\right] = 21,55 \left[\frac{km}{h}\right]$$

2.
Legalább mekkora μ_0 nyugvásbeli súrlódási tényező szükséges a lejtő és a test között ahhoz, hogy álló helyzetben megmaradjon a lejtőn? (ne csússzon le)

Nyugalom esetén a szabadtest ábra:



$\underline{G} + \underline{K} = \underline{0}$ (statika!)

lejtőirány:

$$m \cdot g \cdot \sin\alpha - S = 0 \quad \Rightarrow \quad S = m \cdot g \cdot \sin\alpha$$

lejtőre merőlegesen:

$$-m \cdot g \cdot \cos\alpha + N = 0 \quad \Rightarrow \quad N = m \cdot g \cdot \cos\alpha$$

$$S \le \mu_0 \cdot N \quad \Rightarrow \quad \tan\alpha = \underline{\underline{0{,}36 \le \mu_0}}$$

Vagyis a nyugalmi helyzetben való megcsúszás határhelyzetében a nyugvásbeli súrlódási kúp félszöge éppen a lejtő hajlásszöge.

Megjegyzések:

1. Nagyobb tapadási tényező kell álló helyzetben a lecsúszás megakadályozásához, mint mozgás esetén. Ez nem meglepő, hiszen a kényszererő nem ugyanaz álló helyzetben, mint mozgás esetén: álló helyzetben a $\underline{G} + \underline{K} = \underline{0}$ egyenletből $\underline{K} = -\underline{G}$, míg ha mozog a test, akkor $\underline{G} + \underline{K} = m \cdot \underline{a}$ miatt $\underline{K} = -\underline{G} + m \cdot \underline{a}$.
2. A lefele csúszás határhelyzetében a minimális pályasebesség kifejezésének nincs értelme, ha $\tan\alpha \prec \mu_0$, vagyis nincs alsó sebességhatára a menet közbeni oldalirányú lefelé csúszásnak, ha elég nagy a tapadási tényező. Vagyis ha legalább akkora, mint amekkora álló helyzetben szükséges a lecsúszás megakadályozásához. Ilyenkor álló helyzetben sem csúszunk le. Az is kiolvasható a képletből, hogy $\tan\alpha = \mu_0$ esetén $v = 0$.
3. Az anyagi pont modellel sok valóságos hatást nem lehet figyelembe venni, ezért az eredmények számértéke csak tájékoztató jellegűnek tekinthető.