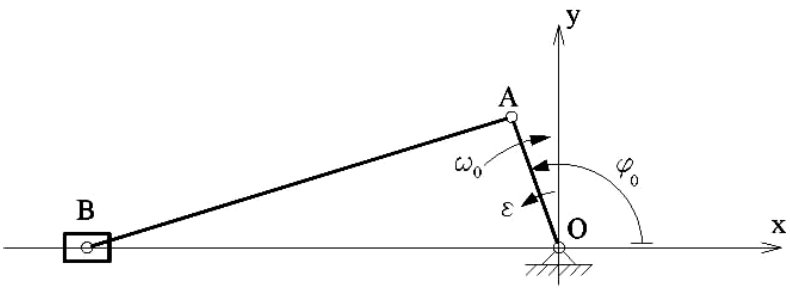
Pontkinematika – pont mozgása körpályán
Forgattyús-dugattyús mechanizmus 1. rész

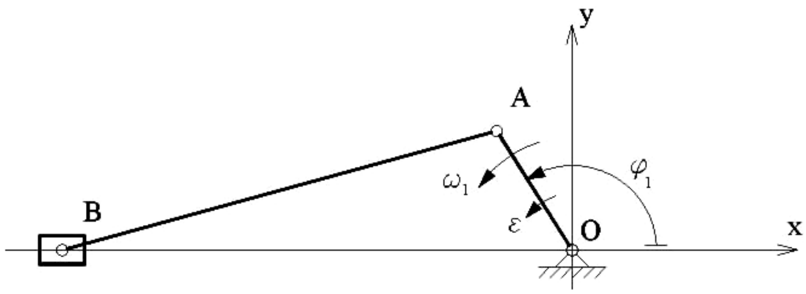
1.

t = 0 [sec] időpillanatban:



$$\varphi(t=0)=\varphi_0=110°=1{,}92\,[\text{rad}]$$
$$\omega(t=0)=\omega_0=-40\,[\text{rad}/\text{s}]$$
$$\varepsilon=5\,[\text{rad}/\text{s}]$$

t_1=15 [sec] időpillanatban:



$$\varphi(t)=\varepsilon\cdot\frac{t^2}{2}+\omega_0\cdot t+\varphi_0$$
$$\varphi(t_1=15)=\varphi_1=5\cdot\frac{15^2}{2}-40\cdot 15+1{,}192=-35{,}58\,[\text{rad}]$$
$$\varphi_1=-35{,}58\,[\text{rad}]=-5{,}66\cdot 2\pi=-5\cdot 2\pi-0{,}66\cdot 2\pi$$

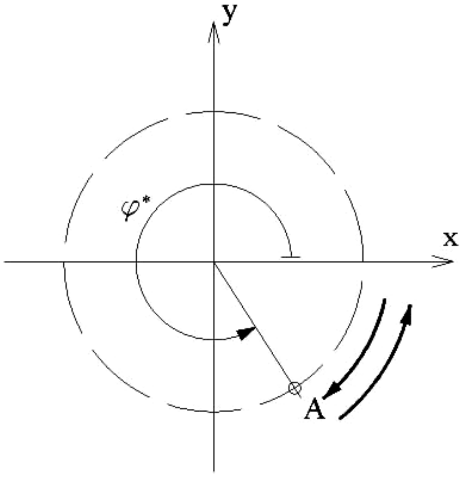
Az $5\cdot 2\pi\,[\text{rad}]$ 5 egész körbefordulást jelent, ezzel

$$\underline{\underline{\varphi_1}}=-0{,}66\cdot 2\pi=4{,}147\,[\text{rad}]=-237{,}6°=\underline{\underline{122{,}4°}}$$

$$\omega(t)=\varepsilon\cdot t+\omega_0$$
$$\omega(t_1=15)=\underline{\underline{\omega_1}}=5\cdot 15-40=\underline{\underline{35\,[\text{rad}/\text{s}]}}$$

2.

A forgásirányváltás pillanatában a szögsebesség zérus:



$$\omega(t^*) = 0 = 5 \cdot t^* - 40 \Rightarrow t^* = 8\,[\mathrm{sec}]$$

$$\varphi(t^*) = 5 \cdot \frac{8^2}{2} - 40 \cdot 8 + 1{,}92 = 158\,[\mathrm{rad}]$$

$$\underline{\underline{\varphi^*}} = -158\,[\mathrm{rad}] = -25{,}16 \cdot 2\pi =$$

$$= -0{,}16 \cdot 2\pi \cong -1\,[\mathrm{rad}] = -57{,}3° = \underline{\underline{302{,}7°}}$$

3.

A $t \in [t_1, t_2]$ intervallumban a szöggyorsulás értéke zérus:

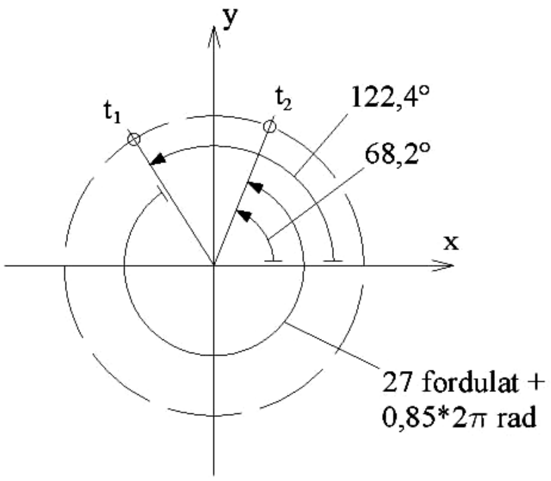
$$\varphi(t) = \omega_1 \cdot (t - t_1) + \varphi_1$$

$$\varphi(t_2 = 20) = \varphi_2 = 35 \cdot 5 - 35{,}58 = 139{,}42\,[\mathrm{rad}]$$

$$\underline{\underline{\varphi_2}} = 22{,}19 \cdot 2\pi = 0{,}19 \cdot 2\pi = 1{,}2\,[\mathrm{rad}] = \underline{\underline{68{,}2°}}$$

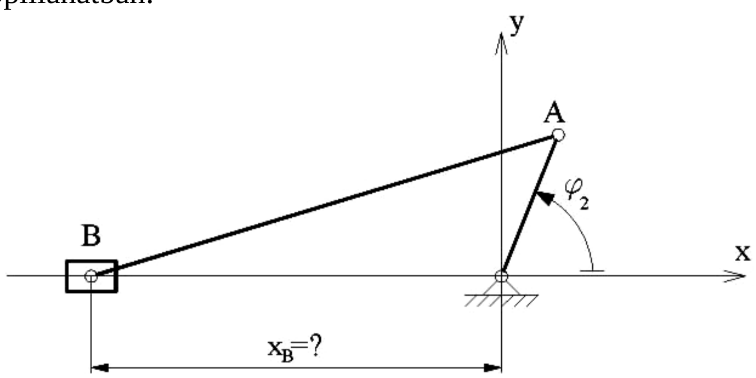
<u>Megjegyzés</u>: a szöghelyzet meghatározásához a $\varphi_1 = 2{,}14\,[\mathrm{rad}] = 122{,}4°$ kezdeti feltétel is felhasználható, azaz

$$\varphi_2 = 35 \cdot 5 + 2{,}14 = 177{,}14\ [\mathrm{rad}] = 28 \cdot 2\pi + 0{,}19 \cdot 2\pi = 68{,}2° \text{ ugyanaz.}$$

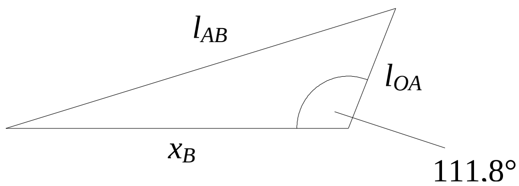


A t_1-beli helyzethez képest $\Delta\varphi = \omega \cdot (t_2 - t_1) = 35 \cdot 5 = 175\,[\mathrm{rad}]$ fordult el, $175\,[\mathrm{rad}] = 27{,}85 \cdot 2\pi = 27 \cdot 2\pi + 0{,}85 \cdot 2\pi$, vagyis <u>27 egész fordulatot tett meg</u> t_1 és t_2 között a forgattyú, az óramutató járásával ellentétes irányban forogva.

t_2 = 20 [sec] időpillanatban:



A cosinus-tétel segítségével:



$$l_{AB}^2 = l_{OA}^2 + x_B^2 - 2 \cdot l_{OA} \cdot x_B \cdot \cos 111{,}8°$$
$$0 = x_B^2 + 0{,}1857 \cdot x_B - 0{,}5775$$

$$\Rightarrow x_{B_1} = -0{,}858$$
$$x_{B_2} = 0{,}673$$

A negatív megoldás nem értelmezett, mert a cosinus-tételben az x_B távolságot jelent, azaz

$\underline{\underline{x_B = 0{,}67\ [\mathrm{m}]}}$

4.

Ívkoordináta-idő függvény:

$t \in [t_0, t_1] = [0, 15]\,\mathrm{sec}:$

$$s(t) = l_{OA} \cdot \varphi(t) = l_{OA} \cdot \left(\varepsilon \cdot \frac{t^2}{2} + \omega_0 \cdot t + \varphi_0 \right) \text{ másodfokú parabola}$$
$$s(t) = 0{,}625 \cdot t^2 - 10 \cdot t + 0{,}48\,[\mathrm{m}]$$

jellegzetes értékek:

$$s(t_0 = 0) = 0{,}48\,[\mathrm{m}]$$
$$s(t^* = 8) = -39{,}52\,[\mathrm{m}]$$
$$s(t_1 = 15) = -8{,}89\,[\mathrm{m}]$$

$t \in [t_1, t_2] = [15, 20]\,\mathrm{sec}:$

$$s(t) = l_{OA} \cdot \varphi(t) = l_{OA} \cdot (\omega_1 \cdot (t - t_1) + \varphi_1) \text{ lineáris függvény}$$
$$s(t) = 8{,}75 \cdot (t - 15) - 8{,}89\,[\mathrm{m}]$$

jellegzetes értékek:

$$s(t_1 = 15) = -8{,}89\,[\mathrm{m}]$$
$$s(t_2 = 20) = 34{,}86\,[\mathrm{m}]$$

<u>Pályasebesség-idő függvény:</u>

$t \in [t_0, t_1] = [0, 15]\,\mathrm{sec}:$

$$v_{\mathrm{A}}(t) = l_{OA} \cdot \omega(t) = l_{OA} \cdot (\varepsilon \cdot t + \omega_0) = \frac{ds(t)}{dt} \text{ lineáris függvény}$$
$$v_{\mathrm{A}}(t) = 1{,}25 \cdot t - 10\,[\mathrm{m/s}]$$

jellegzetes értékek:

$$v_{\mathrm{A}}(t_0 = 0) = -10\,[\mathrm{m/s}]$$
$$v_{\mathrm{A}}(t^* = 8) = 0\,[\mathrm{m/s}]$$
$$v_{\mathrm{A}}(t_1 = 15) = 8{,}75\,[\mathrm{m/s}]$$

$t \in [t_1, t_2] = [15, 20]\,\mathrm{sec}:$

$$v_{\mathrm{A}}(t) = l_{OA} \cdot \omega_1 = \text{konstans} = 8{,}75\,[\mathrm{m/s}]$$

<u>Pályagyorsulás-idő függvény:</u>

$t \in [t_0, t_1] = [0, 15]\,\mathrm{sec}:$

$$a_{\mathrm{A_t}}(t) = l_{OA} \cdot \varepsilon = 1{,}25\,[\mathrm{m/s^2}] \text{ konstans} = \frac{dv_{\mathrm{A}}(t)}{dt}$$

$t \in [t_1, t_2] = [15, 20]\,\mathrm{sec}:$

$$a_{\mathrm{A_t}}(t) = 0$$

<u>Normális gyorsulás-idő függvény:</u>

$t \in [t_0, t_1] = [0, 15]\,\mathrm{sec}:$

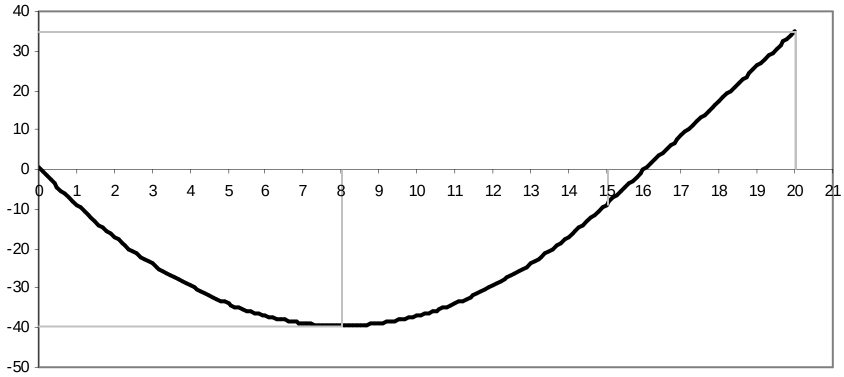
$$a_{\mathrm{A_n}}(t) = \frac{v_{\mathrm{A}}^2(t)}{l_{OA}} = \frac{(1{,}25 \cdot t - 10)^2}{0{,}25} = 6{,}25 \cdot t^2 - 100 \cdot t + 400\,[\mathrm{m/s^2}]$$

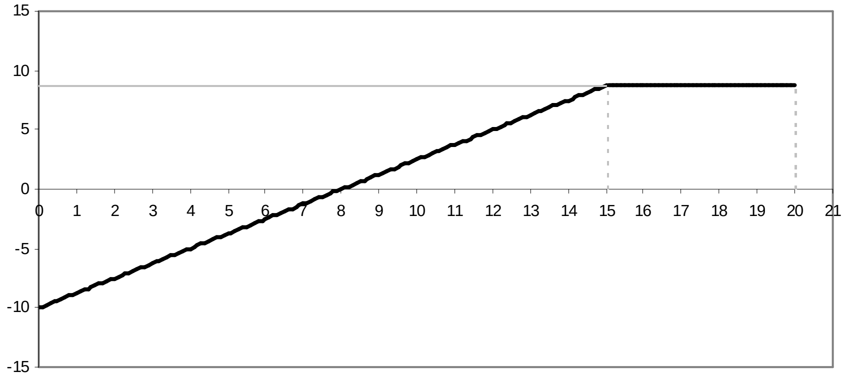
jellegzetes értékek:

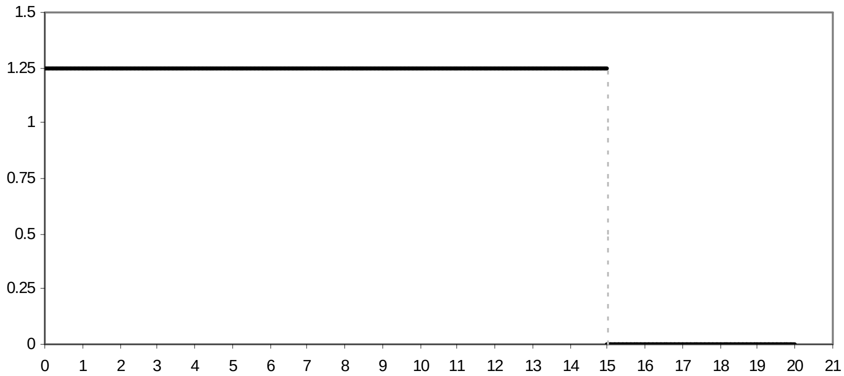
$$a_{\mathrm{A_n}}(t_0 = 0) = 400\,[\mathrm{m/s^2}]$$
$$a_{\mathrm{A_n}}(t^* = 8) = 0\,[\mathrm{m/s^2}]$$
$$a_{\mathrm{A_n}}(t_1 = 15) = 306{,}25\,[\mathrm{m/s^2}]$$

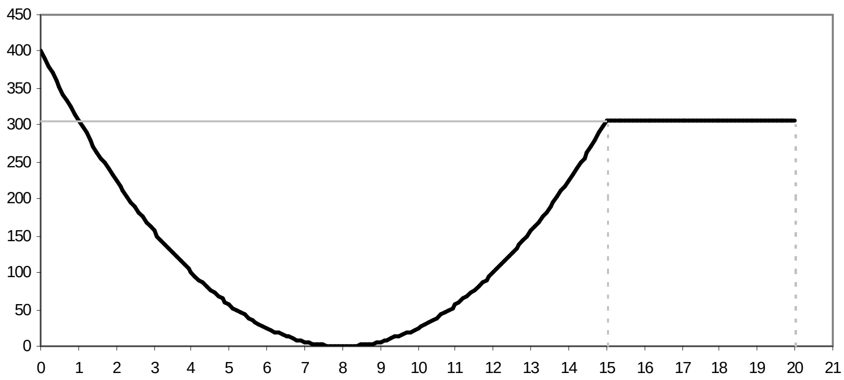
$t \in [t_1, t_2] = [15, 20]\,\mathrm{sec}:$

$$a_{\mathrm{A_n}}(t) = \frac{v_{\mathrm{A}}^2(t)}{l_{OA}} = \frac{8{,}75^2}{0{,}25} = 306{,}25\,[\mathrm{m/s^2}] \text{ konstans}$$


40
30
20
10
0
-10
-20
-30
-40
-50
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21

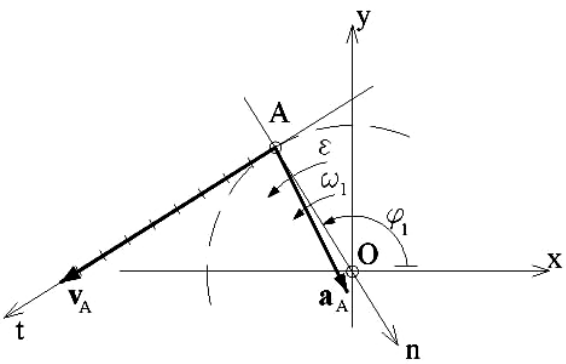

15
10
5
0
-5
-10
-15
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21


1.5
1.25
1
0.75
0.5
0.25
0
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21


450
400
350
300
250
200
150
100
50
0
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21

5.

t_1 = 15 [sec]:



$$\varphi_1 = 122{,}4°$$
$$\omega_1 = 35\,[\text{rad/s}] = \frac{d\varphi_1}{dt}$$
$$\varepsilon = 5\,[\text{rad/s}^2] = \frac{d^2\varphi_1}{dt^2}$$

természetes koordináta-rendszer egységvektorai:

$$\mathbf{e}_n = \begin{bmatrix} -\cos\varphi_1 \\ -\sin\varphi_1 \end{bmatrix};\ \mathbf{e}_t = \begin{bmatrix} -\sin\varphi_1 \\ \cos\varphi_1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{r}_{OA} = \begin{bmatrix} l_{OA}\cdot\cos\varphi_1 \\ l_{OA}\cdot\sin\varphi_1 \end{bmatrix} = -l_{OA}\cdot\mathbf{e}_n$$

$$\mathbf{v}_A = \dot{\mathbf{r}}_{OA} = \begin{bmatrix} -l_{OA}\cdot\sin\varphi_1\cdot\dot\varphi_1 \\ l_{OA}\cdot\cos\varphi_1\cdot\dot\varphi_1 \end{bmatrix} = l_{OA}\cdot\dot\varphi_1\cdot\mathbf{e}_t = 8{,}75\cdot\begin{bmatrix} -0{,}8443 \\ -0{,}5358 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v}_A = \begin{bmatrix} -7{,}388 \\ -4{,}688 \end{bmatrix}[\text{m/s}]\ \text{DDKR - ben}$$

$$\mathbf{v}_A = 8{,}75\cdot\mathbf{e}_t\ [\text{m/s}]\ \text{természetes KR - ben}$$

$$\mathbf{a}_A = \dot{\mathbf{v}}_A = \begin{bmatrix} -l_{OA}\cdot\cos\varphi_1\cdot\dot\varphi_1^2 - l_{OA}\cdot\sin\varphi_1\cdot\ddot\varphi_1 \\ -l_{OA}\cdot\sin\varphi_1\cdot\dot\varphi_1^2 + l_{OA}\cdot\cos\varphi_1\cdot\ddot\varphi_1 \end{bmatrix} =$$

$$= l_{OA}\cdot\dot\varphi_1^2\cdot\begin{bmatrix} -\cos\varphi_1 \\ -\sin\varphi_1 \end{bmatrix} + l_{OA}\cdot\ddot\varphi_1\cdot\begin{bmatrix} -\sin\varphi_1 \\ -\cos\varphi_1 \end{bmatrix} = a_{A_n}\cdot\mathbf{e}_n + a_{A_t}\cdot\mathbf{e}_t$$

$$\mathbf{a}_A = 306{,}25\cdot\begin{bmatrix} 0{,}5358 \\ -0{,}8443 \end{bmatrix} + 1{,}25\cdot\begin{bmatrix} -0{,}8443 \\ -0{,}5358 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 163{,}04 \\ -259{,}25 \end{bmatrix}[\text{m/s}^2]\ \text{DDKR - ben}$$

$$\mathbf{a}_A = 306{,}25\cdot\mathbf{e}_n + 1{,}25\cdot\mathbf{e}_t\ [\text{m/s}^2]\ \text{természetes KR - ben}$$

Célszerű léptékek az ábrázoláshoz:

Hosszlépték: 1 cm ~ 0,1 [m]
Sebességlépték: 1 cm ~ 2 [m / s]
Gyorsuláslépték: 1 cm ~ 100 [m / s^2]