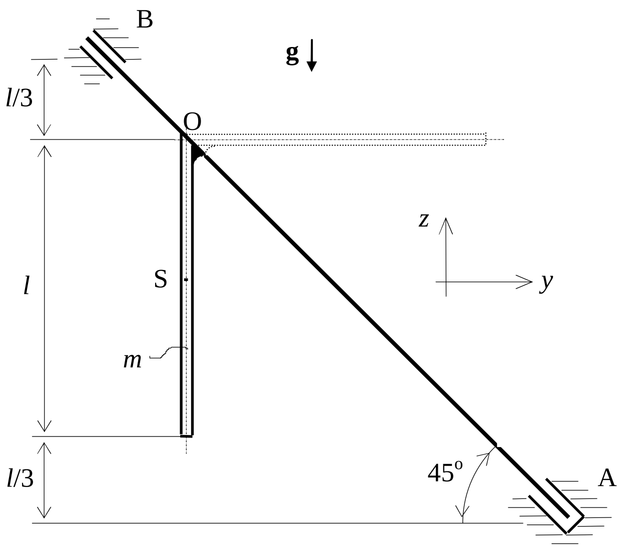
HÁZI FELADAT
Csapreakciók számítása (Merev test kinetika, 3D)



Az AB elhanyagolható tömegű merev rúdhoz (tengelyhez) mereven rögzített m tömegű, l hosszúságú homogén prizmatikus merev rúd a felső (vízszintes) nyugalmi - instabil egyensúlyi - helyzetéből elhanyagolható nagyságú szögsebességgel ($\underline{\boldsymbol{\omega}}_o \approx \underline{\mathbf{0}}$) kimozdul, majd a nehézségi erő hatására folytatja mozgását.
A csapágyak simának, súrlódásmentesnek tekinthetőek.

Adatok: m = 8 [kg]
l = 1,5 [kg]
g ≈ 9,81 [m/s^2]

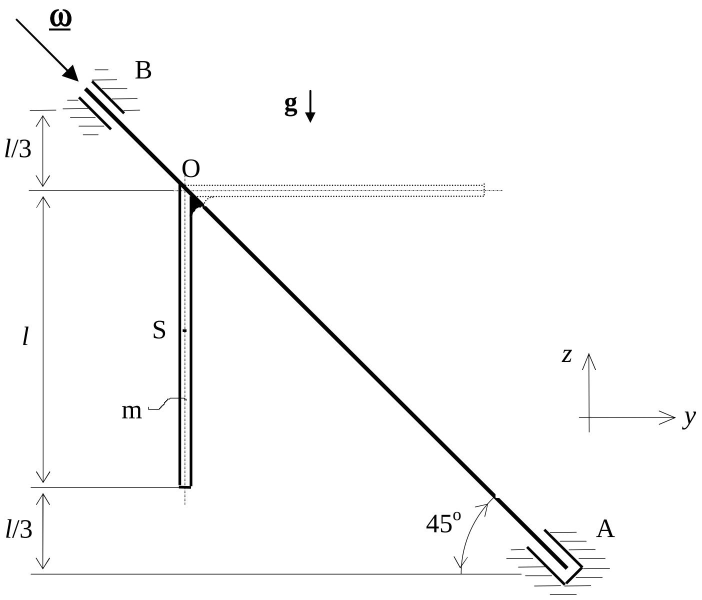
Feladat:

Határozzuk meg a függőleges (alsó) helyzet elérésekor

1.) a rúd szögsebességét, ($\underline{\boldsymbol{\omega}}$ = ?)
2.) a rúd súlypontjának gyorsulását, ($\underline{\mathbf{a}}_S$ = ?)
3.) az A és B csapágyakat terhelő erőket,
($\underline{\mathbf{A}}_{cs}$ = ?, $\underline{\mathbf{B}}_{cs}$ = ?)

Megoldás:

1) A kezdeti (vízszintes) instabil egyensúlyi helyzetből két irányban is kimozdulhat a vizsgált rúd súlypontja: az x tengellyel párhuzamosan $\underline{\mathbf{i}}$ illetve $-\underline{\mathbf{i}}$ irányban (a rajz síkjából kifelé illetve befelé). Tegyük fel, hogy az egyensúlyi helyzetet megzavaró hatás az $\underline{\mathbf{i}}$ egységvektorral megegyező értelemben indítja meg a rúd mozgását! Ekkor a szögsebesség az alsó helyzetben:



$$\underline{\boldsymbol{\omega}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega\cos 45^\circ \\ -\omega \sin 45^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{\omega}{\sqrt{2}} \\ -\dfrac{\omega}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}_{(x,y,z)}$$

Az alsó (függőleges) helyzetben a szögsebesség nagysága a munkatétellel határozható meg:
$T_{alul} - T_{felül} = W_{súly}$. Mivel nyugalomból indul a rúd, $T_{felül} = 0$. Tehát - kihasználva, hogy az O álló pont:

$$\frac{1}{2}\underline{\boldsymbol{\omega}}^{\mathrm{T}} \cdot \underbrace{\underline{\underline{\boldsymbol{\Theta}}}_{\mathrm{O}} \cdot \underline{\boldsymbol{\omega}}}_{\underline{\boldsymbol{\Pi}}_{\mathrm{O}}} = mg\frac{l}{2}.$$

Az O pontra felírt tehetetlenségi nyomatéki mátrix: $\underline{\underline{\boldsymbol{\Theta}}}_{\mathrm{O}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}ml^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}ml^2 & 0 \\ 0 & 0 & \approx 0 \end{bmatrix}_{(x,y,z)}$

$$\underline{\boldsymbol{\Pi}}_{\mathrm{O}} = \underline{\underline{\boldsymbol{\Theta}}}_{\mathrm{O}} \cdot \underline{\boldsymbol{\omega}} = \frac{1}{3}ml^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(x,y,z)} \cdot \frac{\omega}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}_{(x,y,z)} = \frac{1}{3}ml^2 \frac{\omega}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

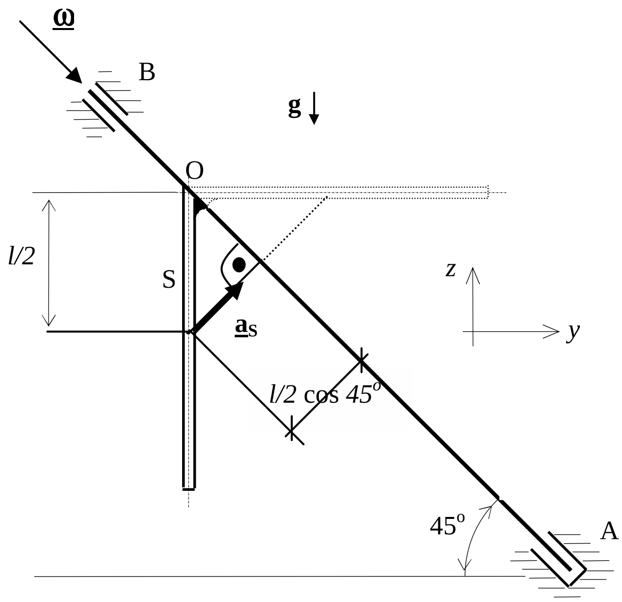
$$\underline{\boldsymbol{\omega}}^{\mathrm{T}} \cdot \underline{\boldsymbol{\Pi}}_{\mathrm{O}} = \frac{\omega}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{3}ml^2 \frac{\omega}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{6}ml^2\omega^2$$

$$T_{alul} = \frac{1}{2}\underline{\boldsymbol{\omega}}^{\mathrm{T}} \cdot \underline{\boldsymbol{\Pi}}_{\mathrm{O}} = \frac{1}{12}ml^2\omega^2$$

A munkatétel értelmében: $\frac{1}{12}ml^2\omega^2 = mg\frac{l}{2} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{6g}{l}} = 6.26\left[\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right]$, tehát

$$\underline{\boldsymbol{\omega}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4{,}43 \\ -4.43 \end{bmatrix}_{(x,y,z)} \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right]$$

2) A rúd súlypontja körpályán mozog az AB-re merőleges síkban. A körpálya sugara $\frac{l}{2}\cos 45^\circ = \frac{l}{2\sqrt{2}}$.

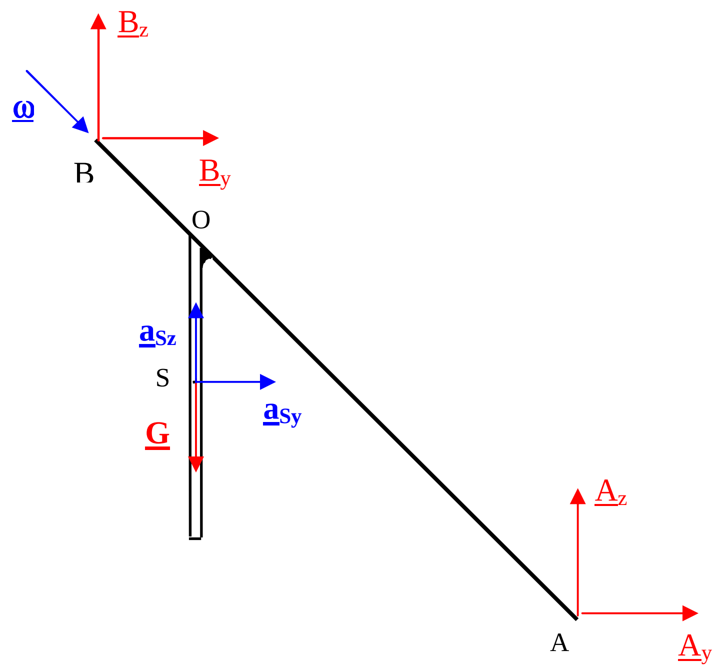


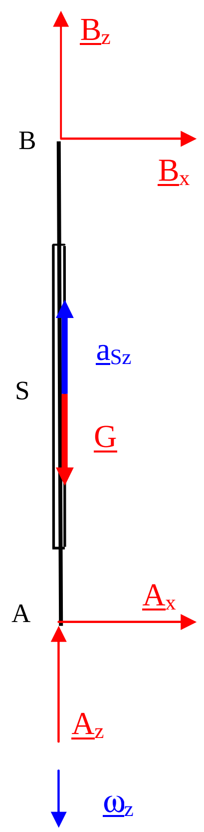
Az alsó helyzetben a súlypont gyorsulásának a_{St} tangenciális komponense nulla, mert a súlypont v_S sebessége ekkor maximális.

$$a_S = a_{Sn} = \omega^2 \frac{l}{2\sqrt{2}} = 20{,}782\left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right]$$

$$\underline{\mathbf{a}}_S = \begin{bmatrix} 0 \\ a_{Sn}\sin 45^\circ \\ a_{Sn}\cos 45^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{l}{4}\omega^2 \\ \frac{l}{4}\omega^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 14.695 \\ 14.695 \end{bmatrix}\left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right]$$

3) A csapágyakat terhelő erők meghatározásához felírjuk a dinamika alaptételét a szerkezetre, ehhez pedig szükség van a szabad test ábrára:





$\underline{\boldsymbol{\omega}}$ iránya állandó, nagysága pedig a vizsgált alsó helyzetben maximális, tehát $\underline{\boldsymbol{\varepsilon}} = \underline{\mathbf{0}}$. Ezért a szabad test ábrán nem is jelöltük a test szöggyorsulását.

Most már felírhatjuk a dinamika alaptételét:

$\dot{\underline{\mathbf{I}}} = \underline{\mathbf{F}}$: $\qquad m\,\underline{a}_S = \underline{A} + \underline{B} + \underline{G}$

Kifejtve:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ m\frac{l}{4}\omega^2 \\ m\frac{l}{4}\omega^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{bmatrix}$$

Az O pont álló pont, ezért $\underline{\mathbf{D}}_O = \dot{\underline{\mathbf{\Pi}}}_O$, tehát a dinamika alaptételének másik vektoregyenlete:

$\dot{\underline{\mathbf{\Pi}}}_O = \underline{\mathbf{M}}_O$: $\qquad \underline{\underline{\mathbf{\Theta}}}_O \cdot \underline{\boldsymbol{\varepsilon}} + \underline{\boldsymbol{\omega}} \times \underline{\mathbf{\Pi}}_O = \underline{\mathbf{M}}_O$. $\qquad \underline{\boldsymbol{\varepsilon}} = \underline{\mathbf{0}}$, ezért $\dot{\underline{\mathbf{\Pi}}}_O = \underline{\boldsymbol{\omega}} \times \underline{\mathbf{\Pi}}_O$, tehát

$$\underline{\boldsymbol{\omega}} \times \underline{\mathbf{\Pi}}_O = \underline{\mathbf{M}}_O$$

Az egyenlet baloldala:

$$\underline{\boldsymbol{\omega}} \times \underline{\mathbf{\Pi}}_O = \frac{\omega}{3\sqrt{2}} m l^2 \begin{vmatrix} \underline{\mathbf{i}} & \underline{\mathbf{j}} & \underline{\mathbf{k}} \\ 0 & \omega/\sqrt{2} & -\omega/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} m l^2 \omega^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Az egyenlet jobboldala:

$$\underline{\mathbf{M}}_O = \underline{\mathbf{r}}_{OA} \times \underline{\mathbf{A}} + \underline{\mathbf{r}}_{OB} \times \underline{\mathbf{B}} + \underline{\mathbf{r}}_{OS} \times \underline{\mathbf{G}}$$

$$\underline{\mathbf{M}}_O = \begin{vmatrix} \underline{\mathbf{i}} & \underline{\mathbf{j}} & \underline{\mathbf{k}} \\ 0 & \frac{4}{3} l & -\frac{4}{3} l \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \underline{\mathbf{i}} & \underline{\mathbf{j}} & \underline{\mathbf{k}} \\ 0 & -\frac{1}{3} l & \frac{1}{3} l \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \underline{\mathbf{i}} & \underline{\mathbf{j}} & \underline{\mathbf{k}} \\ 0 & 0 & -\frac{l}{2} \\ 0 & 0 & -mg \end{vmatrix} = \frac{4}{3} l \begin{bmatrix} A_y + A_z \\ -A_x \\ -A_x \end{bmatrix} + \frac{l}{3} \begin{bmatrix} -B_y - B_z \\ B_x \\ B_x \end{bmatrix}$$

A dinamika alaptételének egyenletei kifejtve:

(1) $$0 = A_x + B_x$$

(2) $$\frac{m l \omega^2}{4} = A_y + B_y$$

(3) $$\frac{m l \omega^2}{4} = A_z + B_z - mg$$

(4) $$\frac{1}{6} m l^2 \omega^2 = \frac{4}{3} l \left(A_y + A_z \right) - \frac{l}{3} \left(B_y + B_z \right)$$

(5) $$0 = -\frac{4}{3} l A_x + \frac{l}{3} B_x$$

(6) $$0 = -\frac{4}{3} l A_x + \frac{l}{3} B_x$$

Látható, hogy az (5) és (6) egyenletek megegyeznek, tehát a fenti egyenletrendszer csak 5 darab független egyenletből áll, viszont **A** és **B** 3-3 komponense 6 ismeretlent jelent. Azonban kihasználhatjuk, hogy a csapágyak simák, tehát a B csapágynál csak az AB rúdra merőleges erők ébredhetnek. Mivel az AB rúd 45°-os szöget zár be a vízszintessel, a (6) egyenlet helyett használhatjuk a

(6') $$B_z = B_y$$

egyenletet.

Az (1) és (5) egyenletekből $A_x = B_x = 0$

A (2)-ből $$A_y = \frac{ml\omega^2}{4} - B_y \qquad (*)$$

(3)-ból, (6') felhasználásával $$A_z = m\frac{l}{4}\omega^2 - B_y + mg \qquad (**)$$

(*), (**) és (6') alapján A_y, A_z és B_z kifejezhetők B_y-nal. Ezeket (4)-be helyettesítve:

$$\frac{1}{6} m l^2 \omega^2 = \frac{4}{3} l \left(2m\frac{l}{4}\omega^2 - 2B_y + mg \right) - \frac{2l}{3} B_y$$

Célszerű behelyettesíteni $\omega^2 = \frac{6g}{l}$ -t. Így az egyenlet megoldása:

$$B_y = \frac{13mg}{10} = 102.024\,[\mathrm{N}]$$

A megfelelő visszahelyettesítések után azt kapjuk, hogy

$$\underline{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{5} mg \\ \frac{6}{5} mg \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 15{,}696 \\ 94{,}176 \end{bmatrix} [\mathrm{N}] \quad \text{és} \quad \underline{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{13}{10} mg \\ \frac{13}{10} mg \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 102{,}024 \\ 102{,}024 \end{bmatrix} [\mathrm{N}].$$

Mivel a dinamika alaptételét a rúdra írtuk fel, ezek a vektorok a rúdra ható erőket adják meg. A csapágyakat terhelő erők ezek (-1)-szeresei: $\underline{\mathbf{A}}_{cs} = -\underline{\mathbf{A}}$, $\underline{\mathbf{B}}_{cs} = -\underline{\mathbf{B}}$