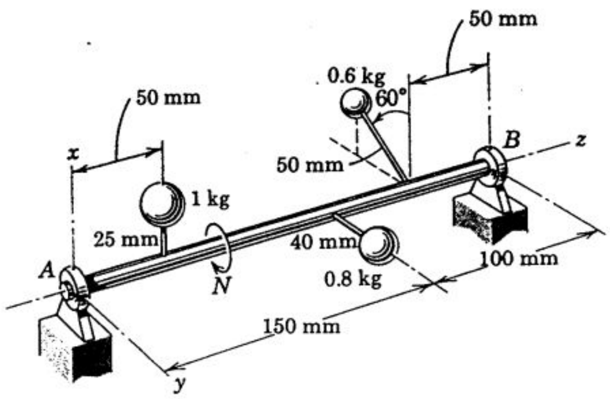
HÁZI FELADAT
Merev test kinetika, 3D
Kiegyensúlyozatlan forgórész csapreakcióinak számítása – bütykös tengely

Egy vízszintes helyzetű bütykös tengelyen három bütyöktárcsa van, melyeket a súlypontjukba redukált koncentrált tömegekkel helyettesítünk. (m_1 = 1 kg, m_2 = 0,8 kg, m_3 = 0,6 kg). Elhelyezkedésük az ábra szerinti.
A tengelyt merevnek tekintjük, és tömegét elhanyagoljuk a bütyöktárcsák tömege mellett.
A tengely állandó fordulatszámmal forog, n = 3600 ford/min



Határozzuk meg az A és B csapágyakat terhelő erőket.

A megoldás során a következő lépéseket kövessük:

1. Számítsuk ki a három tömegből álló rendszer súlypontjának helyét, $\underline{\boldsymbol{r}}_{AS}$ = ?
2. Számítsuk ki az excentricitást, vagyis a súlypont távolságát az *AB* forgástengelytől, *e* = ?
3. Soroljuk fel a dinamika alaptételének felírásához szükséges kinematikai mennyiségeket. (***Csak felsorolás***)
4. Adjuk meg ezeket számszerűen, ***indoklással***.
5. Határozzuk meg a három tömegből álló rendszer tehetetlenségi mátrixát,

$$\underset{x,y,z}{\underline{\underline{\Theta}}_A} = \begin{bmatrix} \Theta_x & -D_{xy} & -D_{xz} \\ -D_{xy} & \Theta_y & -D_{yz} \\ -D_{xz} & -D_{yz} & \Theta_z \end{bmatrix} = ?$$

(*segítségül:*
a tehetetlenségi mátrix elemeit definiáló integrálok pontszerű tömeg esetén szorzássá egyszerűsödnek,

$$pl.\ \Theta_x = \int (y^2 + z^2)\, dm = \sum_{i=1}^{3} (y_i^2 + z_i^2) \cdot m_i \quad stb.)$$

6. Írjuk fel a dinamika alaptételének egyenleteit.
7. Oldjuk meg az egyenletrendszert. $\underline{\boldsymbol{A}}$ = ?, $\underline{\boldsymbol{B}}$ = ?
8. Mit jelent a következő két fogalom: „*statikus kiegyensúlyozatlanság*”, és „*dinamikus kiegyensúlyozatlanság*” ?

MEGOLDÁS:

1. $$\underline{r}_{AS}=\begin{bmatrix}x_S\\ y_S\\ z_S\end{bmatrix}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{3} m_i\cdot\underline{r}_{Ai}}{\sum\limits_{i=1}^{3} m_i}=\frac{1\cdot\begin{bmatrix}25\\ 0\\ 50\end{bmatrix}+0,8\cdot\begin{bmatrix}0\\ 40\\ 150\end{bmatrix}+0,6\cdot\begin{bmatrix}50\cdot\sin(30^\circ)\\ -50\cdot\cos(30^\circ)\\ 200\end{bmatrix}}{1+0,8+0,6}=\begin{bmatrix}16,67\\ 2,51\\ 120,83\end{bmatrix}mm$$

2. $e=\sqrt{x_S{}^2+y_S{}^2}=16,854\,mm=0,0168\,m$

3. A dinamika alaptétele két vektoregyenletének a baloldalán:

$$I.\quad \dot{\underline{I}}=\underline{F}$$
$$II.\quad \dot{\underline{\pi}}_A=\underline{M}_A$$

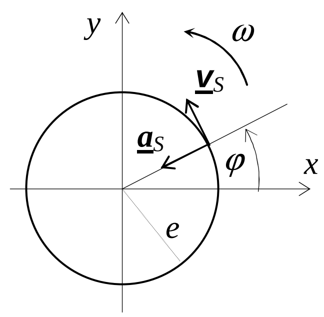
az $\dot{\underline{I}}=m\cdot\underline{a}_S$ impulzusderiváltban: $\underline{a}_S$, a $\dot{\underline{\pi}}_A=\underline{\underline{\theta}}_A\cdot\underline{\varepsilon}+\underline{\omega}\times(\underline{\underline{\theta}}_A\cdot\underline{\omega})$ perdületderiváltban: $\underline{\omega}$ és $\underline{\varepsilon}$

A szükséges kinematikai mennyiségek: a test gyorsulásállapotát megadó vektorok: $\underline{a}_S$, $\underline{\omega}$ és $\underline{\varepsilon}$

4.

$|\underline{v}_S|=e\cdot\omega$ állandó $\rightarrow$ $\underline{a}_S=\underline{a}_{S\,norm}$ $\rightarrow$ $|\underline{a}_S|=\dfrac{v_S{}^2}{e}=e\cdot\omega^2$

segédábra:



a. $$\underline{a}_S=\begin{bmatrix}-e\cdot\omega^2\cdot\cos(\varphi)\\ -e\cdot\omega^2\cdot\sin(\varphi)\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2368,74\\ -356,66\\ 0\end{bmatrix}m/s^2 \qquad \varphi=\arctan(\frac{y_S}{x_S})=8,563^\circ$$

b. $$3600\,\frac{ford}{perc}=3600\,\frac{2\pi\ rad}{60\ másodperc}=377\,\frac{rad}{s}\quad\rightarrow\quad\underline{\omega}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 377\end{bmatrix}\frac{rad}{s}$$

c. $\underline{\varepsilon}=\underline{0}$ mert $\underline{\omega}$ állandó.

5.

$$\theta_x=\int(y^2+z^2)dm=m_1\cdot 50^2+m_2\cdot(40^2+150^2)+m_3\cdot(50^2\cdot\cos^2(30^\circ)+200^2)=46905\ kgmm^2$$
$$\theta_y=\int(x^2+z^2)dm=m_1\cdot(25^2+50^2)+m_2\cdot 150^2+m_3\cdot(25^2+200^2)=45500\ kgmm^2$$
$$\theta_z=\int(y^2+x^2)dm=m_1\cdot 25^2+m_2\cdot 40^2+m_3\cdot(50^2\cdot\sin^2(30^\circ)+50^2\cdot\cos^2(30^\circ))=3405\ kgmm^2$$
$$D_{xy}=\int xy\,dm=m_1\cdot 0+m_2\cdot 0+m_3\cdot(-50\cdot\sin(30^\circ)\cdot 50\cdot\cos(30^\circ))=-649,52\ kgmm^2$$
$$D_{yz}=\int yz\,dm=m_1\cdot 0+m_2\cdot 40\cdot 150+m_3\cdot(-50\cdot\cos(30^\circ)\cdot 200)=-396,15\ kgmm^2$$
$$D_{xz}=\int xz\,dm=m_1\cdot 25\cdot 50+m_2\cdot 0+m_3\cdot 50\cdot\sin(30^\circ)\cdot 200=4250\ kgmm^2$$

$$\underline{\underline{\theta}}_A=\begin{bmatrix}46905 & 649,52 & -4250\\ 649,52 & 45500 & 396,15\\ -4250 & 396,15 & 3405\end{bmatrix}\cdot 10^{-6}\,kgm^2$$

6.

$$I. \quad m\cdot \underline{a}_S = \underline{F} \quad \rightarrow \quad m\cdot \underline{a}_S = \underline{A}+\underline{G}+\underline{B} \qquad \text{ahol } m=\sum_{i=1}^{3} m_i = 2,4\ kg$$

$$II. \quad \underline{\dot{\pi}}_A = \underline{M}_A \quad \rightarrow \quad \underline{\omega}\times(\underline{\underline{\theta}}_A\cdot\underline{\omega}) = \underline{r}_{AB}\times\underline{B}+\underline{r}_{AS}\times\underline{G}+\underline{M}_h$$

Megjegyzés: az állandó fordulatszám biztosításához időben változó nyomatékra van szükség, ez az ismeretlen M_h. Az egyenletrendszerből kiszámítható érték ($M_h = -0,0591\ [\mathrm{Nm}]$) ennek a nyomatéknak az értéke az adott helyzetben.

$$I. \qquad 2,4\cdot\begin{bmatrix} -2368,74 \\ -356,66 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2,4\cdot g \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix}$$

$$\underline{\pi}_A = \underline{\underline{\theta}}_A\cdot\underline{\omega} = \begin{bmatrix} 46905 & 649,52 & -4250 \\ 649,52 & 45500 & 396,15 \\ -4250 & 396,15 & 3405 \end{bmatrix}\cdot 10^{-6}\cdot\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 377 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1,602 \\ 0,149 \\ 1,284 \end{bmatrix}\frac{kgm^2}{s}$$

$$\underline{\dot{\pi}}_A = \underline{\omega}\times\underline{\pi}_A = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 377 \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} -1,602 \\ 0,149 \\ 1,284 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -56,304 \\ -604,048 \\ 0 \end{bmatrix} Nm$$

$$\underline{M}_A = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 250\cdot 10^{-3} \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 16,67\cdot 10^{-3} \\ 2,51\cdot 10^{-3} \\ 120,83\cdot 10^{-3} \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} -2,4\cdot 9,81 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -250\cdot 10^{-3}\cdot B_y \\ 250\cdot 10^{-3}\cdot B_x - 2,845 \\ 0,0591+M_h \end{bmatrix} Nm$$

$$II. \qquad \begin{bmatrix} -56,304 \\ -604,048 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -250\cdot 10^{-3}\cdot B_y \\ 250\cdot 10^{-3}\cdot B_x - 2,845 \\ 0,0591+M_h \end{bmatrix}$$

7.

$II.-$ből: $\quad B_y = 225,2\ N \quad$ és $\quad B_x = -2404,8\ N, \qquad |\underline{B}| = 2415\ N$

$I.-$ből: $\quad A_x = -3256,6\ N \quad$ és $\quad A_y = -1081,2\ N, \qquad |\underline{A}| = 3431,4\ N$

A csapágyakat terhelő erők Newton 3. axiómája miatt (erő – ellenerő) a fenti erők (–1)-szerese:

$$\underline{A}_{csapágyRA} = \begin{bmatrix} 3256,6 \\ 1081,2 \\ 0 \end{bmatrix} N, \qquad \underline{B}_{csapágyRA} = \begin{bmatrix} 2404,8 \\ -225,2 \\ 0 \end{bmatrix} N$$

8. *Statikus kiegyensúlyozatlanság*: a test súlypontja a forgástengelyen kívülre esik. (A forgórész *excentrikusan* van felszerelve a tengelyre.)
Dinamikus kiegyensúlyozatlanság: egyik tehetetlenségi főtengely sem esik egybe a forgástengellyel. (A forgórész *ferdén* van felszerelve a tengelyre.)