**„Mérnöki közelítés" pörgettyűmozgást végző merev test perdületderiváltjának a kiszámítására**

**A dinamika alaptétele merev testre, általános, térbeli mozgás esetén:**

$$\left[\dot{\underline{I}}, \dot{\underline{\Pi}}_S\right]_S = \left[\underline{F}, \underline{M}_S\right]_S$$

$$\dot{\underline{I}} = m \cdot \underline{a}_S \quad \rightarrow \quad \boxed{m \cdot \underline{a}_S = \underline{F}}$$

$$\dot{\underline{\Pi}}_S = \ ? \quad \rightarrow \quad \boxed{\ ? \ = \underline{M}_S}$$

Merev test perdülete: $\underline{\Pi}_S = \underline{\underline{\theta}}_S \cdot \underline{\omega}$

$$\dot{\underline{\Pi}}_S = \left(\underline{\underline{\theta}}_S \cdot \underline{\omega}\right)^{\bullet} = ?$$

$$\left(\underline{\underline{\theta}}_S \cdot \underline{\omega}\right)^{\bullet} = \underline{\underline{\theta}}_S \cdot \dot{\underline{\omega}} + \dot{\underline{\underline{\theta}}}_S \cdot \underline{\omega}$$

A perdületvektor idő szerinti deriválását inerciarendszerben kell elvégezni.
A $\underline{\underline{\theta}}_S$ mátrix inerciarendszerben való deriválása nagyon nehézkes lenne, mert elemei csak a testtel együtt mozgó vonatkoztatási rendszerben állandók, inerciarendszerben nem állandók. Azonban elkerülhető a perdület inerciarendszerben való közvetlen deriválása, ha felhasználjuk valamely vektormennyiség két, egymáshoz képest mozgó vonatkoztatási rendszerben elvégzett idő szerinti deriváltjainak kapcsolatát. Az egyik vonatkoztatási rendszer inerciarendszer, az állónak tekintett környezet, a másik vonatkoztatási rendszer a testtel együtt mozog, vagyis benne a test nyugalomban van.

$$\dot{\underline{\Pi}}_S = \overset{*}{\underline{\Pi}}_S + \underline{\omega} \times \underline{\Pi}_S$$

$\left(\ \right)^{\bullet}$: idő szerinti deriválás inerciarendszerben

$\uparrow$

$\left(\ \right)^{*}$: idő szerinti deriválás a testhez kötött vonatkoztatási rendszerben

$$\overset{*}{\underline{\Pi}}_S = \underline{\underline{\theta}}_S \cdot \overset{*}{\underline{\omega}} + \cancel{\overset{*}{\underline{\underline{\theta}}}_S} \cdot \underline{\omega}$$

$\uparrow$

$$\overset{*}{\underline{\omega}} = ?$$

Az $\underline{\omega}$ szögsebességvektor inerciarendszerhez képesti, „abszolút" mennyiség. Alkalmazzuk rá az idő szerinti deriváltak kapcsolatát, inerciarendszerben deriválva, és a testtel együtt mozgó vonatkoztatási rendszerben deriválva:

$$\left.\begin{array}{l} \dot{\underline{\omega}} = \overset{*}{\underline{\omega}} + \underline{\omega} \times \underline{\omega} \quad \rightarrow \quad \dot{\underline{\omega}} = \overset{*}{\underline{\omega}} \\ \text{másrészt a szöggyorsulás definíció szerint: } \underline{\varepsilon} = \dot{\underline{\omega}} \end{array}\right\} \Rightarrow \ \overset{*}{\underline{\omega}} = \underline{\varepsilon}$$

Ezzel:

$$\dot{\underline{\Pi}}_S = \underline{\underline{\theta}}_S \cdot \underline{\varepsilon} + \underline{\omega} \times \underline{\Pi}_S \quad \rightarrow \quad \boxed{\underline{\underline{\theta}}_S \cdot \underline{\varepsilon} + \underline{\omega} \times \underline{\Pi}_S = \underline{M}_S}$$

**A dinamika alaptétele merev testre:** $\boxed{m \cdot \underline{a}_S = \underline{F}}$ $\quad I.$

$$\boxed{\underline{\underline{\theta}}_S \cdot \underline{\varepsilon} + \underline{\omega} \times \left(\underline{\underline{\theta}}_S \cdot \underline{\omega}\right) = \underline{M}_S} \quad II.$$

**Ha a pörgettyűmozgásra alkalmazzuk a dinamika alaptételét, akkor a *II*. egyenlet baloldalán álló kifejezés (a perdületderivált) bizonyos feltételek teljesülése esetén egyszerűbben is kiszámítható.**

Ezek a feltételek a következők:

1. A test forgásszimmetrikus
2. $\underline{\omega} = \underline{\omega}_p + \underline{\omega}_r \quad (\underline{\omega}_n = \underline{0})$
3. $\omega_p$ állandó, $\omega_r$ állandó
4. $\underline{\omega}_r \perp \underline{\omega}_p$

Ekkor $\dot{\underline{\Pi}}_S = \underline{\omega}_p \times \left( \underline{\underline{\theta}}_S \cdot \underline{\omega}_r \right)$

***Ugyanis:***

A testtel együtt mozgó vonatkoztatási rendszer fölvételére a perdületderivált meghatározásakor azért volt szükség, hogy a tehetetlenségi mátrix elemei abban konstansok legyenek, és így a deriváltjuk nulla legyen. Forgásszimmetrikus test esetén (1. feltétel) ez a kívánalom teljesül akkor is, ha a mozgó vonatkoztatási rendszer nem mozog teljesen együtt a testtel, hanem csak a test precessziójával forog.

$\underline{\Pi}_S = \underline{\underline{\theta}}_S \cdot \underline{\omega}$

$\dot{\underline{\Pi}}_S = \overset{\smile}{\underline{\Pi}}_S + \underline{\omega}_p \times \underline{\Pi}_S \qquad \left(\overset{\smile}{\ }\right)$: idő szerinti deriválás a precesszióval mozgó vonatkoztatási rendszerben

$\uparrow$

$$\left.\begin{array}{l} \overset{\smile}{\underline{\Pi}}_S = \cancel{\overset{\smile}{\underline{\underline{\theta}}}_S} \cdot \underline{\omega} + \underline{\underline{\theta}}_S \cdot \overset{\smile}{\underline{\omega}} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \uparrow \\ \overset{\smile}{\underline{\omega}} = \underline{0} \text{ mert a precesszióval forgó vonatkoztatási rendszerben} \\ \text{a 2. és 3. feltétel miatt } \underline{\omega} \text{ irány és nagyság szerint állandó} \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\smile}{\underline{\Pi}}_S = \underline{0}$$

Ez azt jelenti, hogy a perdületvektor irány és nagyság szerint állandó a precesszióval mozgó vonatkoztatási rendszerben.

$$\dot{\underline{\Pi}}_S = \underline{\omega}_p \times \underline{\Pi}_S = \underline{\omega}_p \times \left( \underline{\underline{\theta}}_S \cdot \underline{\omega} \right) = \underline{\omega}_p \times \left( \underline{\underline{\theta}}_S \cdot \left( \underline{\omega}_p + \underline{\omega}_r \right) \right) = \cancel{\underline{\omega}_p \times \left( \underline{\underline{\theta}}_S \cdot \underline{\omega}_p \right)} + \underline{\omega}_p \times \left( \underline{\underline{\theta}}_S \cdot \underline{\omega}_r \right)$$

$\uparrow$ $\qquad\qquad$ $\uparrow$

2. feltétel: $\underline{\omega} = \underline{\omega}_p + \underline{\omega}_r$ $\qquad$ 4. feltétel

4. feltétel $\Rightarrow$ $\underline{\omega}_p \times \left( \underline{\underline{\theta}}_S \cdot \underline{\omega}_p \right) = \underline{0}$, mert a rotáció tengelye mindig tehetetlenségi főirány,

és ha $\underline{\omega}_r \perp \underline{\omega}_p$, akkor a precesszió tengelye is tehetetlenségi főirány, ezért $\underline{\omega}_p \parallel \left( \underline{\underline{\theta}}_S \cdot \underline{\omega}_p \right)$.

$$\boxed{\dot{\underline{\Pi}}_S = \underline{\omega}_p \times \left( \underline{\underline{\theta}}_S \cdot \underline{\omega}_r \right)}$$

***Ezzel az állítást igazoltuk***.

**Megjegyzések:**

**1. A pörgettyű gyakorlati alkalmazásaiban** rendszerint a precesszió sokkal lassúbb, mint a rotáció: $\omega_p << \omega_r$, ezért a perdületvektor kifejezésében elhanyagolják a precessziót. Ekkor a perdületvektor beleesik a forgásszimmetrikus rotor szimmetriatengelyébe.

$$\underline{\Pi}_S \approx \underline{\hat{\Pi}}_S = \underline{\underline{\theta}}_S \cdot \underline{\omega}_r$$

$$\dot{\underline{\hat{\Pi}}}_S = \breve{\underline{\hat{\Pi}}}_S + \underline{\omega}_p \times \underline{\hat{\Pi}}_S$$

$$\uparrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \breve{\underline{\hat{\Pi}}}_S = \underline{\underline{\theta}}_S \cdot \breve{\underline{\omega}}_r + \cancel{\breve{\underline{\underline{\theta}}}_S} \cdot \underline{\omega}_r \\ \qquad\quad \uparrow \\ \qquad\quad \breve{\underline{\omega}}_r = \underline{0} \ \text{ ha } \left|\underline{\omega}_r\right| \ \text{ állandó} \end{array}\right\} \Rightarrow \breve{\underline{\hat{\Pi}}}_S = \underline{0}$$

$$\dot{\underline{\hat{\Pi}}}_S = \underline{\omega}_p \times \underline{\hat{\Pi}}_S = \underline{\omega}_p \times \left(\underline{\underline{\theta}}_S \cdot \underline{\omega}_r\right)$$

**2.** Ha a fenti négy feltétel teljesül, akkor a dinamika alaptételének *II*. egyenlete helyett felírt, ún. **mérnöki közelítésként ismert képlet**

$$\underline{\omega}_p \times \left(\underline{\underline{\theta}}_S \cdot \underline{\omega}_r\right) = \underline{M}_S$$

pontos eredményt ad, vagyis azonos az inerciarendszerben felírt perdületderiválttal.

**3. Ezt az egyszerűbb alakot olyankor is alkalmazzák, amikor a fenti négy feltétel nem mindegyike teljesül**. Ekkor a perdületderivált nem pontos, ezért hívják a perdületderiváltnak ezt az alakját mérnöki közelítésnek.

**Illusztratív példa:**

Kanyarodó jármű kerekének dinamikai vizsgálatára szolgáló modell az egyenes körkúp alapköre. A kúpot alátéten görgetjük olymódon, hogy a csúcsa helyben marad.

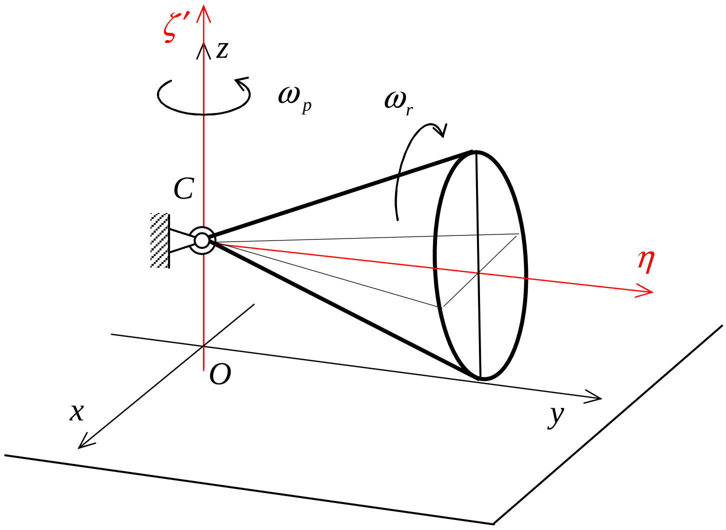
Ha a kúp szimmetriatengelye vízszintes helyzetű, akkor a kúp alapköre csúszásmentesen gördül egy kör alakú pályán. Ha a kúp egyenletesen jár körbe, akkor mind a négy feltétel teljesül ahhoz, hogy a mérnöki közelítéssel kiszámított perdületderivált megegyezzen a pontos perdületderiválttal.

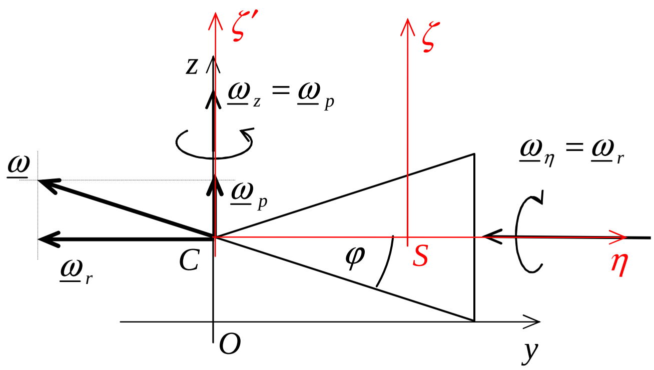
Ha a kúp a palástján gördülve jár körbe, akkor a precesszió nem merőleges a rotációra, a mérnöki közelítés nem alkalmazható a perdületderivált kiszámítására.

Mindkét esetben meghatározzuk a perdületderiváltat a pontos képlettel is és a mérnöki közelítéssel is, és összehasonlítjuk a kapott eredményeket.

**1. Vízszintes helyzetű tengellyel körbe járó kúp**

Egy egyenes körkúp a függőleges térfix *z* tengely körül állandó fordulatszámmal jár körbe, miközben tengelye párhuzamos helyzetű az alátéthez képest, és alapkörlapja csúszásmentesen gördül az alátéten (*x*, *y* sík). A kúp *C* csúcsa helyben marad.




**Vonatkoztatási rendszerek és koordinátarendszerek**:

$\{O; x, y, z\}$ térfix

$\{C; \xi', \eta' = \eta, \zeta'\}$ $\underline{\omega}_p$-vel forog a térfix *z* tengely körül

$\{S; \xi, \eta, \zeta\}$ $\underline{\omega}_p$-vel forog a térfix *z* tengely körül, origója a test súlypontja. Ebben a rendszerben a test tehetetlenségi mátrixa diagonális, és a főátlóban álló elemek a fő tehetetlenségi nyomatékok.

**Kiszámítjuk a perdületderiváltat** a $\dot{\underline{\Pi}}_S = \underline{\underline{\theta}}_S \cdot \underline{\varepsilon} + \underline{\omega} \times \underline{\Pi}_S$ összefüggéssel:

$$\underline{\omega} = \underline{\omega}_p + \underline{\omega}_r = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\omega_r \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\omega_r \\ \omega_p \end{bmatrix}$$

$$\underline{\varepsilon} = \underline{\omega}_p \times \underline{\omega} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_p \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ -\omega_r \\ \omega_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_p \cdot \omega_r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{\xi,\eta,\zeta}$$

$$\underline{\Pi}_S = \underline{\underline{\theta}}_S \cdot \underline{\omega} = \begin{bmatrix} \theta_\xi & 0 & 0 \\ 0 & \theta_\eta & 0 \\ 0 & 0 & \theta_\zeta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -\omega_r \\ \omega_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\theta_\eta \cdot \omega_r \\ \theta_\zeta \cdot \omega_p \end{bmatrix}_{\xi,\eta,\zeta}$$

$$\dot{\underline{\Pi}}_S = \underline{\underline{\theta}}_S \cdot \underline{\varepsilon} + \underline{\omega} \times \underline{\Pi}_S = \underbrace{\begin{bmatrix} \theta_\xi & 0 & 0 \\ 0 & \theta_\eta & 0 \\ 0 & 0 & \theta_\zeta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega_r \cdot \omega_p \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} \cancel{\theta_\xi \cdot \omega_r \cdot \omega_p} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -\omega_r \\ \omega_p \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ -\theta_\eta \cdot \omega_r \\ \theta_\zeta \cdot \omega_p \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} \theta_\eta \cdot \omega_r \cdot \omega_p - \cancel{\theta_\zeta \cdot \omega_r \cdot \omega_p} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} \theta_\eta \cdot \omega_r \cdot \omega_p \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{\xi,\eta,\zeta}$$

$$\dot{\underline{\Pi}}_S = \begin{bmatrix} \theta_\eta \cdot \omega_r \cdot \omega_p \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{\xi,\eta,\zeta}$$

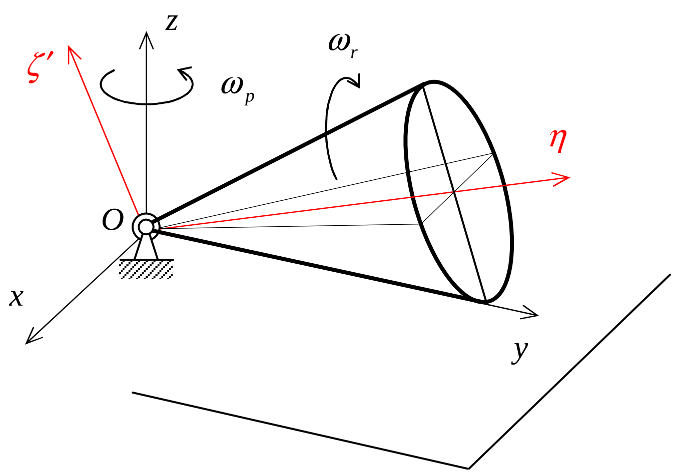
**A mérnöki közelítéssel is kiszámítjuk a perdületderiváltat,** ugyanabban a koordinátarendszerben, mint az előbb:

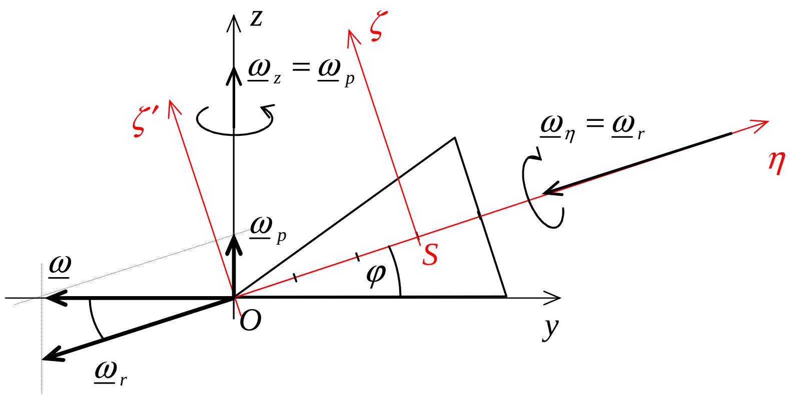
$$\dot{\underline{\Pi}}_S = \underline{\omega}_p \times \left( \underline{\underline{\theta}}_S \cdot \underline{\omega}_r \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_p \end{bmatrix} \times \underbrace{\left( \begin{bmatrix} \theta_\xi & 0 & 0 \\ 0 & \theta_\eta & 0 \\ 0 & 0 & \theta_\zeta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -\omega_r \\ 0 \end{bmatrix} \right)}_{\begin{bmatrix} 0 \\ -\theta_\eta \cdot \omega_r \\ 0 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} \theta_\eta \cdot \omega_r \cdot \omega_p \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{\xi,\eta,\zeta}$$

A kettő ugyanaz.
Teljesül mind a négy feltétel, amely biztosítja, hogy a mérnöki közelítés pontosan a perdületderiváltat adja.

## 2. A palástján gördülő kúp

Egy egyenes körkúp a függőleges térfix $z$ tengely körül állandó fordulatszámmal jár körbe, miközben egy alkotója állandóan rajta van az alátéten ($x$, $y$ sík) úgy, hogy az alkotó és az alátét érintkezése csúszásmentes. A kúp csúcsa helyben marad.




**Vonatkoztatási rendszerek és koordinátarendszerek**:

$\{O; x, y, z\}$ térfix

$\{O; \xi', \eta' = \eta, \zeta'\}$ $\underline{\omega}_p$-vel forog a térfix $z$ tengely körül

$\{S; \xi, \eta, \zeta\}$ $\underline{\omega}_p$-vel forog a térfix $z$ tengely körül, origója a test súlypontja. Ebben a rendszerben a test tehetetlenségi mátrixa diagonális, és a főátlóban álló elemek a fő tehetetlenségi nyomatékok.

**Először kiszámítjuk a perdületderiváltat** a $\dot{\underline{\Pi}}_S = \underline{\underline{\theta}}_S \cdot \underline{\varepsilon} + \underline{\omega} \times \underline{\Pi}_S$ képlettel:

$$\underline{\omega} = \underline{\omega}_p + \underline{\omega}_r = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_p \cdot \sin\varphi \\ \omega_p \cdot \cos\varphi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\omega_r \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_p \cdot \sin\varphi - \omega_r \\ \omega_p \cdot \cos\varphi \end{bmatrix}_{\xi,\eta,\zeta}$$

$$\underline{\varepsilon} = \underline{\omega}_p \times \underline{\omega} = \underline{\omega}_p \times \left(\underline{\omega}_p + \underline{\omega}_r\right) = \underline{\omega}_p \times \underline{\omega}_r = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_p \cdot \sin\varphi \\ \omega_p \cdot \cos\varphi \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ -\omega_r \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_p \cdot \omega_r \cdot \cos\varphi \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{\xi,\eta,\zeta}$$

$$\underline{\Pi}_S = \underline{\underline{\theta}}_S \cdot \underline{\omega} = \begin{bmatrix} \theta_\xi & 0 & 0 \\ 0 & \theta_\eta & 0 \\ 0 & 0 & \theta_\zeta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_p \cdot \sin\varphi - \omega_r \\ \omega_p \cdot \cos\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \theta_\eta \cdot \left(\omega_p \cdot \sin\varphi - \omega_r\right) \\ \theta_\zeta \cdot \omega_p \cdot \cos\varphi \end{bmatrix}_{\xi,\eta,\zeta}$$

$$\underline{\omega} \times \underline{\Pi}_S = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_p \cdot \sin\varphi - \omega_r \\ \omega_p \cdot \cos\varphi \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ \theta_\eta \cdot \left(\omega_p \cdot \sin\varphi - \omega_r\right) \\ \theta_\zeta \cdot \omega_p \cdot \cos\varphi \end{bmatrix}$$

$$\underline{\omega} \times \underline{\Pi}_S = \begin{bmatrix} \theta_\zeta \cdot \omega_p^2 \cdot \cos\varphi \cdot \sin\varphi - \theta_\zeta \cdot \omega_p \cdot \omega_r \cdot \cos\varphi - \theta_\eta \cdot \omega_p^2 \cdot \cos\varphi \cdot \sin\varphi + \theta_\eta \cdot \omega_p \cdot \cos\varphi \cdot \omega_r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\omega} \times \underline{\Pi}_S = \begin{bmatrix} \left(\theta_\zeta - \theta_\eta\right) \cdot \omega_p^2 \cdot \cos\varphi \cdot \sin\varphi - \theta_\zeta \cdot \omega_p \cdot \omega_r \cdot \cos\varphi + \theta_\eta \cdot \omega_p \cdot \omega_r \cos\varphi \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{\theta}}_S \cdot \underline{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \theta_\xi & 0 & 0 \\ 0 & \theta_\eta & 0 \\ 0 & 0 & \theta_\zeta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega_p \cdot \omega_r \cdot \cos\varphi \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_\xi \cdot \omega_p \cdot \omega_r \cdot \cos\varphi \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\dot{\underline{\Pi}}_S = \underline{\underline{\theta}}_S \cdot \underline{\varepsilon} + \underline{\omega} \times \underline{\Pi}_S =$$

$$= \begin{bmatrix} \cancel{\theta_\xi \cdot \omega_p \cdot \omega_r \cdot \cos\varphi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \left(\theta_\zeta - \theta_\eta\right) \cdot \omega_p^2 \cdot \cos\varphi \cdot \sin\varphi \cancel{- \theta_\zeta \cdot \omega_p \cdot \omega_r \cdot \cos\varphi} + \theta_\eta \cdot \omega_p \cdot \omega_r \cos\varphi \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\dot{\underline{\Pi}}_S = \begin{bmatrix} \left(\theta_\zeta - \theta_\eta\right) \cdot \omega_p^2 \cdot \cos\varphi \cdot \sin\varphi + \theta_\eta \cdot \omega_p \cdot \omega_r \cos\varphi \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{\xi,\eta,\zeta}$$

**A mérnöki közelítéssel is kiszámítjuk a perdületderiváltat,** ugyanabban a koordinátarendszerben, mint az előbb:

$$\underline{\dot{\Pi}}_S = \underline{\omega}_p \times \left( \underline{\underline{\theta}}_S \cdot \underline{\omega}_r \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_p \cdot \sin\varphi \\ \omega_p \cdot \cos\varphi \end{bmatrix} \times \underbrace{\left( \begin{bmatrix} \theta_\xi & 0 & 0 \\ 0 & \theta_\eta & 0 \\ 0 & 0 & \theta_\zeta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -\omega_r \\ 0 \end{bmatrix} \right)}_{\begin{bmatrix} 0 \\ -\theta_\eta \cdot \omega_r \\ 0 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} \theta_\eta \cdot \omega_r \cdot \omega_p \cdot \cos\varphi \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{\xi,\eta,\zeta}$$

A kétféleképpen számított perdületderivált nem ugyanaz.
Az eltérés: $\left( \theta_\zeta - \theta_\eta \right) \cdot \omega_p^2 \cdot \cos\varphi \cdot \sin\varphi$.
A négy feltétel közül, - amelyek biztosítják, hogy a mérnöki közelítéssel és a pontos perdületderivált-képlettel kapott eredmény megegyezzen, - a palástján fekvő és körbe járó kúp esetében nem teljesül a negyedik, vagyis a precesszió és a rotáció nem merőlegesek egymásra, hanem $\frac{\pi}{2} - \varphi$ szöget zárnak be egymással. Minél kevésbé tér el a bezárt szög a derékszögtől, vagyis minél kisebb $\varphi$ értéke, annál kisebb az eltérés. Ha $\varphi = 0$ lenne, vagyis a bezárt szög derékszög lenne, akkor ez az eltérés nulla lenne.