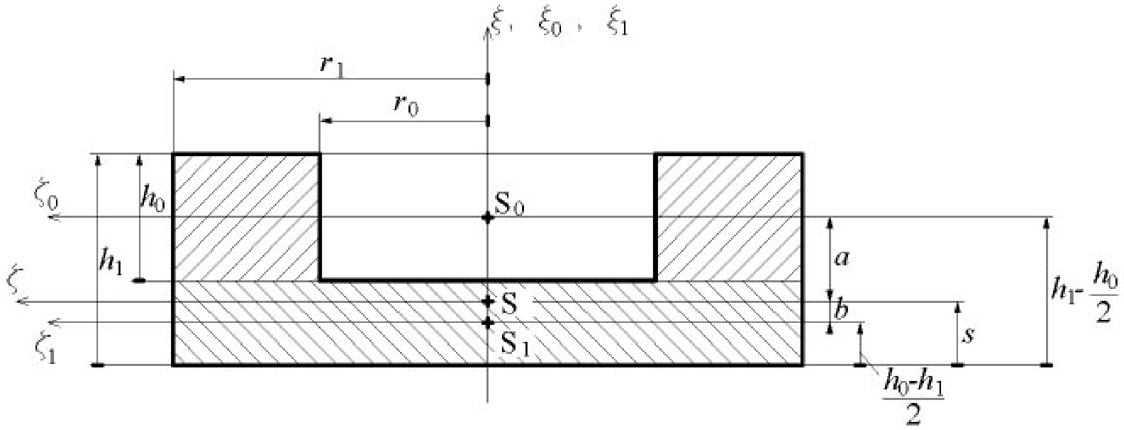
HÁZI FELADAT – MEGOLDÁSI SEGÉDLET
Merev test tehetetlenségi nyomatéka
Keverőtengely, 1. rész

1.



Két részre bontjuk:

1: h_1-h_0 magasságú henger

0: h_0 magasságú gyűrű

$$\frac{a}{b} = \frac{m_1}{m_0} = \frac{V_1}{V_0} = \frac{r_1^2 \cdot \pi \cdot (h_1 - h_0)}{r_1^2 \cdot \pi \cdot h_0 - r_0^2 \cdot \pi \cdot h_0} = \frac{r_1^2 \cdot (h_1 - h_0)}{(r_1^2 - r_0^2) \cdot h_0} := \lambda$$

$$a + b = \frac{h_1}{2}$$

$$\left.\begin{aligned} a &= b \cdot \lambda \\ b \cdot (1+\lambda) &= \frac{h_1}{2} \end{aligned}\right\} \quad \rightarrow \quad b = \frac{h_1}{2 \cdot (1+\lambda)} \qquad s = \frac{h_1 - h_0}{2} + b$$

2.

$$m = m_1 + m_0 = r_1^2 \cdot \pi \cdot (h_1 - h_0) \cdot \rho + (r_1^2 \cdot \pi \cdot h_0 - r_0^2 \cdot \pi \cdot h_0) \cdot \rho =$$
$$= r_1^2 \cdot \pi \cdot h_1 \cdot \rho - r_1^2 \cdot \pi \cdot h_0 \cdot \rho + r_1^2 \cdot \pi \cdot h_0 \cdot \rho - r_0^2 \cdot \pi \cdot h_0 \cdot \rho$$

$$\underline{\underline{m = (r_1^2 \cdot h_1 - r_0^2 \cdot h_0) \cdot \rho \cdot \pi}}$$

3.

A részek tehetetlenségi nyomatéki mátrixai külön-külön a saját súlyponti főtengely-koordinátarendszerükben:

- Gyűrű

$$\underset{(\xi_0,\eta_0,\zeta_0)}{\mathbf{\Theta}_{S0}} = \frac{m_0}{12}\cdot\begin{bmatrix} 6\cdot\left(r_1^2+r_0^2\right) & 0 & 0 \\ 0 & 3\cdot\left(r_1^2+r_0^2\right)+h_0^2 & 0 \\ 0 & 0 & 3\cdot\left(r_1^2+r_0^2\right)+h_0^2 \end{bmatrix}$$

- Henger

$$\underset{(\xi_1,\eta_1,\zeta_1)}{\mathbf{\Theta}_{S1}} = \frac{m_1}{12}\cdot\begin{bmatrix} 6\cdot r_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & 3\cdot r_1^2+\left(h_1-h_0\right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 3\cdot r_1^2+\left(h_1-h_0\right)^2 \end{bmatrix}$$

Steiner-tétellel ezeket átszámítjuk a fej S súlypontjához tartozó főtengely-koordinátarendszerbe:

- Gyűrű: $\mathbf{\Theta}_S^0 = \mathbf{\Theta}_{S0} + \mathbf{\Theta}_{SS0}$

$$\Theta_{SS0} = m_0\cdot\begin{bmatrix} y_{S0}^2+z_{S0}^2 & -x_{S0}\cdot y_{S0} & -x_{S0}\cdot z_{S0} \\ -y_{S0}\cdot x_{S0} & x_{S0}^2+z_{S0}^2 & -y_{S0}\cdot z_{S0} \\ -z_{S0}\cdot x_{S0} & -z_{S0}\cdot y_{S0} & x_{S0}^2+y_{S0}^2 \end{bmatrix} \qquad \text{– általános alak}$$

$$\mathbf{r}_{SS0} = \begin{bmatrix} x_{S0} \\ y_{S0} \\ z_{S0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{ezzel:} \qquad \Theta_{SS0} = m_0\cdot\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 \end{bmatrix}$$

- Henger: $\mathbf{\Theta}_S^1 = \mathbf{\Theta}_{S1} + \mathbf{\Theta}_{SS1}$

$$\mathbf{r}_{SS1} = \begin{bmatrix} x_{S1} \\ y_{S1} \\ z_{S1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{ezzel:} \qquad \Theta_{SS1} = m_1\cdot\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & b^2 \end{bmatrix}$$

Végül összeadjuk a két résznek a közös súlypontra átszámított tehetetlenségi nyomatéki mátrixát:

$$\underset{(\xi,\eta,\zeta)}{\mathbf{\Theta}_S} = \mathbf{\Theta}_S^0 + \mathbf{\Theta}_S^1 = \mathbf{\Theta}_{S0} + \mathbf{\Theta}_{SS0} + \mathbf{\Theta}_{S1} + \mathbf{\Theta}_{SS1} = \begin{bmatrix} \Theta_\xi & 0 & 0 \\ 0 & \Theta_\eta & 0 \\ 0 & 0 & \Theta_\zeta \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{\Theta_\xi}} = \frac{m_0}{2}\cdot\left(r_1^2+r_0^2\right)+\frac{m_1}{2}\cdot r_1^2 = \underline{\underline{0{,}1605\ [\mathrm{kgm}^2]}}$$

$$\underline{\underline{\Theta_\eta = \Theta_\zeta}} = \frac{m_0}{12}\cdot\left(3\cdot\left(r_1^2+r_0^2\right)+h_0^2\right)+\frac{m_1}{12}\cdot\left(3\cdot r_1^2+\left(h_1-h_0\right)^2\right)+m_0\cdot a^2+m_1\cdot b^2 = \underline{\underline{0{,}0811\ [\mathrm{kgm}^2]}}$$