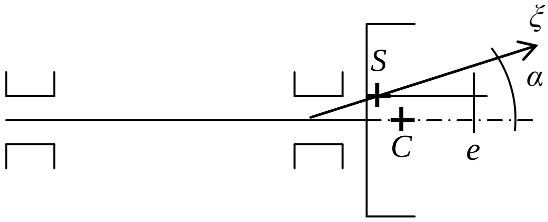
HÁZI FELADAT – MEGOLDÁSI SEGÉDLET
Kiegyensúlyozatlan forgórész
Keverőtengely, 2. rész

1.–2.

A dinamika alaptételét kell felírni:



I. $m \cdot \mathbf{a}_S = \mathbf{G} + \mathbf{A} + \mathbf{B}$

$$\mathbf{a}_S = \mathbf{a}_C + \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}_{CS} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{CS})$$

C: a forgástengelyen levő azon pont, ahova a fej súlypontja esne, ha nem lenne ferdén és excentrikusan felékelve. $\mathbf{a}_C = \mathbf{0}$.

$$\mathbf{a}_S = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -e \cdot \tan\alpha \\ 0 \\ e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \left(\begin{bmatrix} \omega \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -e \cdot \tan\alpha \\ 0 \\ e \end{bmatrix} \right)$$

$$\underset{(x,y,z)}{\mathbf{a}_S} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\varepsilon \cdot e \\ -\omega^2 \cdot e \end{bmatrix}$$

$$m \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -\varepsilon \cdot e \\ -\omega^2 \cdot e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -m \cdot g \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix}$$

$$0 = A_x + B_x \qquad (1)$$

$$-m \cdot \varepsilon \cdot e = A_y + B_y \qquad (2)$$

$$-m \cdot \omega^2 \cdot e = -m \cdot g + A_z + B_z \qquad (3)$$

II. $\mathbf{D}_S = \mathbf{M}_0 + \mathbf{r}_{SA} \times \mathbf{A} + \mathbf{r}_{SB} \times \mathbf{B}$, ahol $\mathbf{D}_S = \dot{\mathbf{\Pi}}_S = \mathbf{\Theta}_S \cdot \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{\Pi}_S$

Az **A**, **B**, $\mathbf{M}_0$ mennyiségeket az (*x*, *y*, *z*) koordinátarendszerben szeretnénk megkapni. Az egyenlet baloldalán (kinetikai nyomaték) szereplő mennyiségeket a (*ξ*, *η*, *ζ*) koordinátarendszerben lehet kényelmesen kiszámítani. Meghatározzuk tehát a kinetikai nyomatékot a tehetetlenségi főtengelyek koordinátarendszerében, majd transzformáljuk az (*x*, *y*, *z*) koordinátarendszerbe.

1. lépés: $\mathbf{D}_S = \mathbf{\Theta}_S \cdot \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{\Pi}_S$ számítása. Ehhez **ε**-t és **ω**-t ki kell fejezni a (ξ, η, ζ) koordinátarendszerben:

$$\underset{(\xi,\eta,\zeta)}{\boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \varepsilon \cdot \cos\alpha \\ 0 \\ -\varepsilon \cdot \sin\alpha \end{bmatrix} \qquad \underset{(\xi,\eta,\zeta)}{\boldsymbol{\omega}} = \begin{bmatrix} \omega \cdot \cos\alpha \\ 0 \\ -\omega \cdot \sin\alpha \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{\Theta}_S \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \Theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \Theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \Theta_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon \cdot \cos\alpha \\ 0 \\ -\varepsilon \cdot \sin\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Theta_1 \cdot \varepsilon \cdot \cos\alpha \\ 0 \\ -\Theta_2 \cdot \varepsilon \cdot \sin\alpha \end{bmatrix}$$

($\Theta_\xi = \Theta_1, \Theta_\eta = \Theta_\zeta = \Theta_2$ jelölések alkalmazásával)

$$\mathbf{\Pi}_S = \mathbf{\Theta}_S \cdot \boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} \Theta_1 \cdot \omega \cdot \cos\alpha \\ 0 \\ -\Theta_2 \cdot \omega \cdot \sin\alpha \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{\Pi}_S = \begin{bmatrix} \omega \cdot \cos\alpha \\ 0 \\ -\omega \cdot \sin\alpha \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \Theta_1 \cdot \omega \cdot \cos\alpha \\ 0 \\ -\Theta_2 \cdot \omega \cdot \sin\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ (\Theta_2 - \Theta_1) \cdot \omega^2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha \\ 0 \end{bmatrix}$$

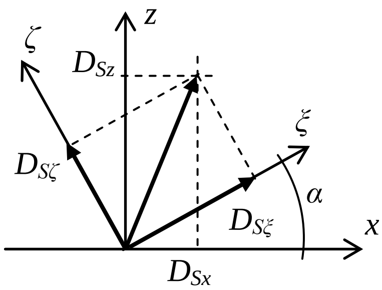
$$\underset{(\xi,\eta,\zeta)}{\mathbf{D}_S} = \begin{bmatrix} \Theta_1 \cdot \varepsilon \cdot \cos\alpha \\ (\Theta_2 - \Theta_1) \cdot \omega^2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha \\ -\Theta_2 \cdot \varepsilon \cdot \sin\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{S\xi} \\ D_{S\eta} \\ D_{S\zeta} \end{bmatrix}$$

2. lépés: $\mathbf{D}_S$ transzformálása az (x, y, z) koordinátarendszerbe:

1. módszer: mivel az η tengely helyben marad, (η = y) a koordináták közvetlenül leolvashatók:

$$\underset{(x,y,z)}{\mathbf{D}_S} = \begin{bmatrix} D_{S\xi} \cdot \cos\alpha - D_{S\zeta} \cdot \sin\alpha \\ D_{S\eta} \\ D_{S\xi} \cdot \sin\alpha + D_{S\zeta} \cdot \cos\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{Sx} \\ D_{Sy} \\ D_{Sz} \end{bmatrix}$$

$$\underset{(x,y,z)}{\mathrm{D}_S} = \begin{bmatrix} \Theta_1 \cdot \varepsilon \cdot \cos^2\alpha + \Theta_2 \cdot \varepsilon \cdot \sin^2\alpha \\ (\Theta_2 - \Theta_1) \cdot \omega^2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha \\ (\Theta_1 - \Theta_2) \cdot \varepsilon \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha \end{bmatrix}$$



2. módszer: lineáris transzformációval:

$\underset{(x,y,z)}{\mathbf{D}_S} = \mathbf{T} \cdot \underset{(\xi,\eta,\zeta)}{\mathbf{D}_S}$, ahol $\mathbf{T}$ a transzformációs mátrix: oszlopvektorok, melyek az új bázisvektorok koordinátái a régi bázisban leolvasva, majd transzponálva az így kapott mátrixot.

$$[\mathbf{i} \quad \mathbf{j} \quad \mathbf{k}] = \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix} \quad \to \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & -\sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

$$\underset{(x,y,z)}{\mathbf{D}_S} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & -\sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Theta_1 \cdot \varepsilon \cdot \cos\alpha \\ (\Theta_2 - \Theta_1) \cdot \omega^2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha \\ -\Theta_2 \cdot \varepsilon \cdot \sin\alpha \end{bmatrix}$$

$$\underset{(x,y,z)}{\mathrm{D}_S} = \begin{bmatrix} \Theta_1 \cdot \varepsilon \cdot \cos^2\alpha + \Theta_2 \cdot \varepsilon \cdot \sin^2\alpha \\ (\Theta_2 - \Theta_1) \cdot \omega^2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha \\ (\Theta_1 - \Theta_2) \cdot \varepsilon \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha \end{bmatrix} \qquad \text{(ugyanaz)}$$

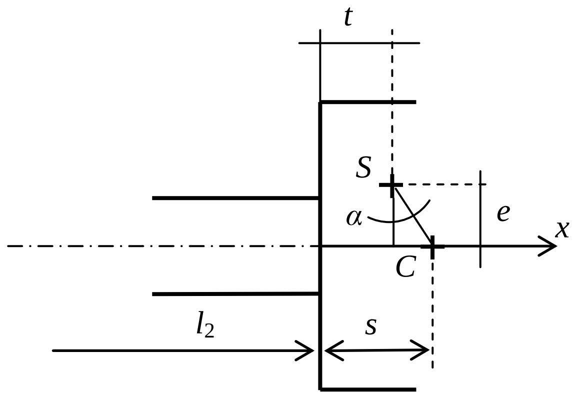
3.lépés: a II. egyenlet jobboldala:

$$\mathbf{M}_S = \mathbf{M}_0 + \mathbf{r}_{SA} \times \mathbf{A} + \mathbf{r}_{SB} \times \mathbf{B}$$

$$\mathbf{M}_S = \begin{bmatrix} M_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -(l_1 + l_2 + t) \\ 0 \\ -e \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -(l_2 + t) \\ 0 \\ -e \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix}$$

$$\underset{(x,y,z)}{\mathbf{M}_S} = \begin{bmatrix} M_0 + e \cdot A_y + e \cdot B_y \\ (l_1 + l_2 + t) \cdot A_z - e \cdot A_x + (l_2 + t) \cdot B_z - e \cdot B_x \\ -(l_1 + l_2 + t) \cdot A_y - (l_2 + t) \cdot B_y \end{bmatrix}$$

ahol $t = s - e \cdot \tan\alpha$



4. lépés: a II. egyenlet összerakása: $\mathbf{D}_S = \mathbf{M}_S$

$$\Theta_1 \cdot \varepsilon \cdot \cos^2\alpha + \Theta_2 \cdot \varepsilon \cdot \sin^2\alpha = M_0 + e \cdot A_y + e \cdot B_y \qquad (4)$$

$$(\Theta_2 - \Theta_1) \cdot \omega^2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha = (l_1 + l_2 + t) \cdot A_z - e \cdot A_x + (l_2 + t) \cdot B_z - e \cdot B_x \qquad (5)$$

$$(\Theta_2 - \Theta_1) \cdot \varepsilon \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha = -(l_1 + l_2 + t) \cdot A_y - (l_2 + t) \cdot B_y \qquad (6)$$

Az (1)…(6) egyenletekből álló egyenletrendszer megoldása:

$$\underline{\underline{\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ -245{,}5 \end{bmatrix} [\mathrm{N}]}} \qquad \underline{\underline{\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1{,}7 \\ 228{,}6 \end{bmatrix} [\mathrm{N}]}} \qquad \underline{\underline{M_0 = 64\ [\mathrm{Nm}]}}$$

Az egyenletekben **A** és **B** a tengelyre ható erőket jelenti. A csapágyakat terhelő erők ennek (–1)-szeresei, Newton III. axiómájának értelmében.

3.

A forgó keverőtengely pillanatnyi mozgási energiája:

$$T = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_S^2 + \frac{1}{2} \cdot \mathbf{\Pi}_S \cdot \boldsymbol{\omega}$$

A munkatétel: $T_0 - T = W_{fék}$ $\qquad T_0 = 0$

$\Rightarrow$ a mozgási energiával egyező nagyságú mechanikai munka árán lehet lefékezni a tengelyt.

$$\mathbf{v}_S = \mathbf{v}_C + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{CS} = \begin{bmatrix} \omega \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -e \cdot \tan\alpha \\ 0 \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\omega \cdot e \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underset{(\xi,\eta,\zeta)}{\mathbf{\Pi}_S} = \mathbf{\Theta}_S \cdot \boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} \Theta_1 \cdot \omega \cdot \cos\alpha \\ 0 \\ -\Theta_2 \cdot \omega \cdot \sin\alpha \end{bmatrix} \qquad \underset{(\xi,\eta,\zeta)}{\boldsymbol{\omega}} = \begin{bmatrix} \omega \cdot \cos\alpha \\ 0 \\ -\omega \cdot \sin\alpha \end{bmatrix}$$

$$v_S^2 = \omega^2 \cdot e^2$$

$$\mathbf{\Pi}_S \cdot \boldsymbol{\omega} = \Theta_1 \cdot \omega^2 \cdot \cos^2\alpha + \Theta_2 \cdot \omega^2 \cdot \sin^2\alpha$$

$$\underline{\underline{W_{fék} = 1800\ [\mathrm{J}]}}$$