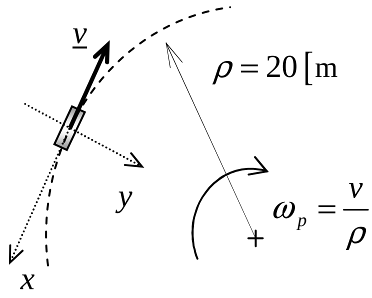
**Pörgettyűs elfordulásjelző - megoldás:**

1.

$$\omega_r = n\cdot\frac{2\cdot\pi}{60} = 1146\cdot\frac{2\cdot\pi}{60} = 120\left[\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}\right]$$




2.

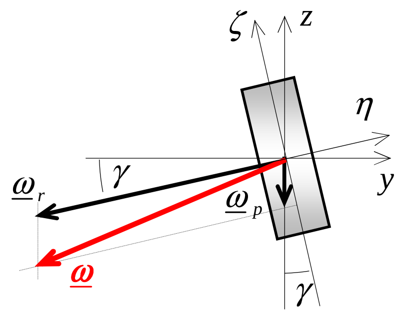
$$v = 720\left[\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}\right] = \frac{720}{3{,}6}\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right] = 200\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right]$$

$$\omega_p = \frac{v}{\rho} = \frac{200}{20} = 10\left[\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}\right]$$

3.

$$\underline{\omega} = \underline{\omega}_r + \underline{\omega}_p == \begin{bmatrix} 0 \\ -\omega_r \\ 0 \end{bmatrix}_{\xi,\eta,\zeta} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\omega_p\cdot\sin\gamma \\ -\omega_p\cdot\cos\gamma \end{bmatrix}_{\xi,\eta,\zeta}$$

$$\underline{\omega} = \begin{bmatrix} 0 \\ -(\omega_r + \omega_p\cdot\sin\gamma) \\ -\omega_p\cdot\cos\gamma \end{bmatrix}_{\xi,\eta,\zeta}$$




4.

$$\underline{\varepsilon} = \underline{\omega}_p \times \underline{\omega} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\omega_p\cdot\sin\gamma \\ -\omega_p\cdot\cos\gamma \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ -(\omega_r + \omega_p\cdot\sin\gamma) \\ -\omega_p\cdot\cos\gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\omega_p\cdot\omega_r\cdot\cos\gamma \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{\xi,\eta,\zeta}$$

5.

$$\underline{\Pi}_S = \underline{\underline{\theta}}_S\cdot\underline{\omega} = \begin{bmatrix} \theta_\xi & 0 & 0 \\ 0 & \theta_\eta & 0 \\ 0 & 0 & \theta_\zeta \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 0 \\ -(\omega_r + \omega_p\cdot\sin\gamma) \\ -\omega_p\cdot\cos\gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\theta_\eta\cdot(\omega_r + \omega_p\cdot\sin\gamma) \\ -\theta_\zeta\cdot\omega_p\cdot\cos\gamma \end{bmatrix}_{\xi,\eta,\zeta}$$

6.

$$\theta_\xi = \theta_\zeta = \frac{1}{4}m\cdot R^2 + \frac{1}{12}m\cdot h^2, \qquad \theta_\eta = \frac{1}{2}m\cdot R^2$$

$\eta$ a forgásszimmetrikus rotor szimmetriatengelye

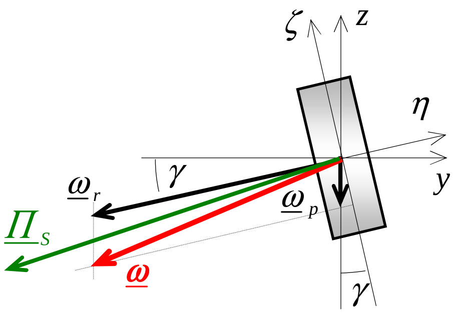
ha $\theta_\xi = \theta_\zeta < \theta_\eta$ akkor a forgórész lapos:

$$\frac{1}{4}m\cdot R^2 + \frac{1}{12}m\cdot h^2 < \frac{1}{2}m\cdot R^2$$

$$\frac{1}{12}\cancel{m}\cdot h^2 < \frac{1}{4}\cancel{m}\cdot R^2$$

$$h^2 < 3\cdot R^2$$

$$\boxed{h < \sqrt{3}\cdot R \quad \text{esetén lapos a forgórész}}$$




A forgórész lapos $\rightarrow$ $\theta_\zeta < \theta_\eta$ $\Rightarrow$ 5. miatt a $\underline{\Pi}_S$ perdületvekor $\underline{\omega}$ és $\underline{\omega}_r$ közé esik az $y, z$ - vagy ami ugyanaz, az $\eta,\zeta$ - síkban.

7.

$$\dot{\underline{\Pi}}_S = \underline{M}_S$$

$$\dot{\underline{\Pi}}_S = \underline{\underline{\theta}}_S \cdot \underline{\varepsilon} + \underline{\omega} \times \underline{\Pi}_S$$

$$\underline{\underline{\theta}}_S \cdot \underline{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \theta_\xi & 0 & 0 \\ 0 & \theta_\eta & 0 \\ 0 & 0 & \theta_\zeta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\omega_r \cdot \omega_p \cdot \cos\gamma \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cancel{-\theta_\xi} \cdot \omega_r \cdot \omega_p \cdot \cos\gamma \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\omega} \times \underline{\Pi}_S = \begin{bmatrix} 0 \\ -(\omega_r + \omega_p \cdot \sin\gamma) \\ -\omega_p \cdot \cos\gamma \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ -\theta_\eta \cdot (\omega_r + \omega_p \cdot \sin\gamma) \\ -\theta_\zeta \cdot \omega_p \cdot \cos\gamma \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \left(\theta_\zeta - \theta_\eta\right) \cdot \omega_p^2 \cdot \cos\gamma \cdot \sin\gamma + \left(\cancel{\theta_\zeta} - \theta_\eta\right) \cdot \omega_p \cdot \omega_r \cdot \cos\gamma \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{\xi,\eta,\zeta}$$

$$\dot{\underline{\Pi}}_S = \underline{\underline{\theta}}_S \cdot \underline{\varepsilon} + \underline{\omega} \times \underline{\Pi}_S = \begin{bmatrix} \left(\theta_\zeta - \theta_\eta\right) \cdot \omega_p^2 \cdot \cos\gamma \cdot \sin\gamma - \theta_\eta \cdot \omega_p \cdot \omega_r \cdot \cos\gamma \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{\xi,\eta,\zeta}$$

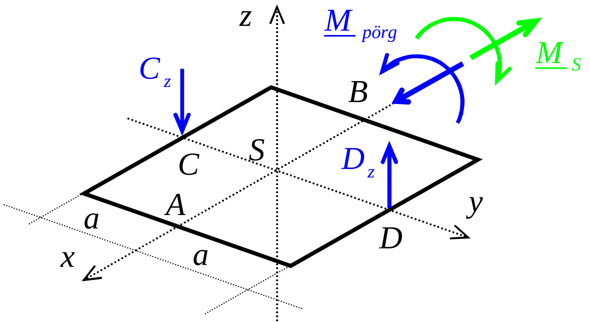
A forgásszimmetria miatt $\theta_\xi = \theta_\zeta$, ezért esnek ki a fenti egyenletben.

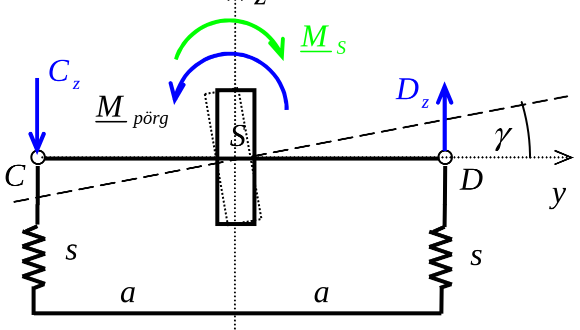
$\dot{\underline{\Pi}}_S = \underline{M}_S$, a rotor**ra** ható erők nyomatékának összege.

A pörgettyűhatás nyomatéka ennek (–1)-szerese, ami Newton 3. axiómája miatt (kölcsönhatás a rotor *CD* tengelye és a keret *C* és *D* pontja között) a rotor hatása a keret**re** *C*-nél és *D*-nél:

$$\underline{M}_{\text{pörg}} = -\underline{M}_S = \begin{bmatrix} -\left(\theta_\zeta - \theta_\eta\right) \cdot \omega_p^2 \cdot \cos\gamma \cdot \sin\gamma + \theta_\eta \cdot \omega_p \cdot \omega_r \cdot \cos\gamma \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{\xi,\eta,\zeta}$$

Mivel a rotor lapos $\left(\theta_\zeta < \theta_\eta\right)$, a pörgettyűhatás nyomatékának az egyetlen nem nulla koordinátája pozitív, vagyis $\underline{M}_{\text{pörg}}$ az $x = \xi$ tengely pozitív iránya felé néz, vagyis a jármű haladási irányával ellentétesen, amint az alábbi ábra mutatja:



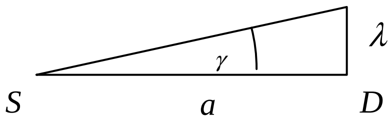
Ebből meg lehet határozni, hogy merre fordul el a keret. E szerint a *C*-nél levő rugó összenyomódik, a *D*-nél levő pedig megnyúlik.

8.

$C_z = D_z$ erőpár terheli a keretet. Nyomatéka: $M_{CD} = 2 \cdot a \cdot C_z$.

$$\left.\begin{array}{l} M_{CD} = -M_S \\ M_{pörg} = -M_S \end{array}\right\} \quad -\left(\theta_\zeta - \theta_\eta\right) \cdot \omega_p^2 \cdot \cos\gamma \cdot \sin\gamma + \theta_\eta \cdot \omega_p \cdot \omega_r \cdot \cos\gamma = 2 \cdot a \cdot C_z$$

A rugóerő: $C_z = s \cdot \lambda = s \cdot a \cdot \tan\gamma \qquad \tan\gamma = \dfrac{\lambda}{a} \;\rightarrow\; \lambda = a \cdot \tan\gamma$




$$\theta_\eta = \frac{1}{2} m \cdot R^2 = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 0{,}1^2 = 0{,}06 \left[\mathrm{kgm}^2\right]$$

$$\theta_\xi = \theta_\zeta = \frac{1}{4} m \cdot R^2 + \frac{1}{12} m \cdot h^2 = \frac{1}{4} \cdot 12 \cdot 0{,}1^2 + \frac{1}{12} \cdot 12 \cdot 0{,}05^2 = 0{,}0325 \left[\mathrm{kgm}^2\right]$$

$$-\left(\theta_\zeta - \theta_\eta\right) \cdot \omega_p^2 \cdot \cos\gamma \cdot \sin\gamma + \theta_\eta \cdot \omega_p \cdot \omega_r \cdot \cos\gamma = 2 \cdot a \cdot s \cdot a \cdot \tan\gamma \quad \rightarrow \quad \gamma = 0{,}0897 \left[\mathrm{rad}\right]$$

$\gamma = 5{,}1^\circ$ a berajzolt irányban.

9.

$$M_{pörg} = -\left(\theta_\zeta - \theta_\eta\right) \cdot \omega_p^2 \cdot \cos\gamma \cdot \sin\gamma + \theta_\eta \cdot \omega_p \cdot \omega_r \cdot \cos\gamma = 71{,}95 \left[\mathrm{Nm}\right]$$

$$M_{pörg} = M_{CD} = 2 \cdot a \cdot C_z$$

$$C_z = \frac{M_{pörg}}{2 \cdot a} = \frac{71{,}95}{2 \cdot 0{,}2} = 179{,}89 \left[\mathrm{N}\right] \quad \downarrow$$

$$D_z = 179{,}89 \left[\mathrm{N}\right] \quad \uparrow$$

11.

Az ún. mérnöki közelítéssel számítva a perdületderiváltat:

$$\underline{\dot{\Pi}}_S = \underline{\omega}_p \times \left(\underline{\underline{\theta}}_S \cdot \underline{\omega}_r\right)$$

$$\underline{\underline{\theta}}_S \cdot \underline{\omega}_r = \begin{bmatrix} \theta_\xi & 0 & 0 \\ 0 & \theta_\eta & 0 \\ 0 & 0 & \theta_\zeta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -\omega_r \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\theta_\eta \cdot \omega_r \\ 0 \end{bmatrix}_{\xi,\eta,\zeta}$$

$$\underline{\omega}_p \times \underline{\underline{\theta}}_S \cdot \underline{\omega}_r = \begin{bmatrix} 0 \\ -\omega_p \cdot \sin\gamma \\ -\omega_p \cdot \cos\gamma \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ -\theta_\eta \cdot \omega_r \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\theta_\eta \cdot \omega_p \cdot \omega_r \cdot \cos\gamma \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{\xi,\eta,\zeta}$$

$$2 \cdot a^2 \cdot s \cdot \tan\gamma = \theta_\eta \cdot \omega_p \cdot \omega_r \cdot \cos\gamma \quad \rightarrow \quad \gamma = 0{,}0894$$

Gyakorlatilag ugyanazt az eredményt kaptuk, mint az előbb.

Általában is igaz, hogy ha

- a test forgásszimmetrikus,
- nincs nutáció,
- a precessziós és a rotációs szögsebesség nagysága állandó,
- a precesszió és a nutáció merőlegesek egymásra,

akkor

- a mérnöki közelítéssel számított perdületderivált is pontos.

A példában a precesszió és a rotáció olyan kis mértékben tér el a derékszögtől, hogy a kétféleképpen számított eredmény közötti különbség gyakorlatilag elhanyagolható.
Jól látszik ez a pörgettyűhatás nyomatéka (illetve a perdületderivált) egyetlen nem nulla koordinátájának a képletében:

$$\cos\gamma \approx 1,\ \ \sin\gamma \approx 0 \quad \text{miatt}$$

$$-\left(\theta_\zeta - \theta_\eta\right)\cdot\omega_p^2\cdot\cos\gamma\cdot\sin\gamma + \theta_\eta\cdot\omega_p\cdot\omega_r\cdot\cos\gamma \approx \theta_\eta\cdot\omega_p\cdot\omega_r\cdot\cos\gamma$$

Megjegyzés:
úgy is eljárhattunk volna, hogy a rugókat kihagyva, mereven ágyazott keretet képzelve kiszámítjuk a keretet *C*-nél és *D*-nél terhelő erőket, majd az erőkből meghatározzuk a rugók megnyúlását, abból pedig a keret elfordulásának a szögét. Ezt persze csak akkor lehet megtenni, ha tudjuk előre, hogy a keret elfordulása tényleg kicsi, annyira kicsi, hogy a $\cos\gamma \approx 1,\ \sin\gamma \approx 0$ közelítés megengedhető.

12.

Hogy a kanyarodási ív állandó, azt jelenti, hogy a keret *AB* körüli elfordulási szöge, $\gamma$, állandó. Ugyanezt jelenti az a megszorítás is, hogy a keret nem végez torziós rezgéseket *AB* körül.
A keret elfordulási szögének, $\gamma$-nak az időbeli változása a nutációt jelenti. A mondott feltételek tehát azt jelentik, hogy a nutációs szögsebesség nulla.

Ha a nutációs szögsebesség nem lenne nulla, akkor a fent ismertetett módon nem lehetne megoldani a feladatot, hiszen a szögsebességnek lenne egy harmadik komponense, és a szöggyorsulás meghatározása is bonyolultabb lenne.

Az olyan feladatok, amelyekben nutációt is végez a pörgettyűtest, meghaladják a ***Dinamika*** c. tárgy kereteit. Jóval több időt igényel, mint amennyi a tárgyban rendelkezésre áll, valamint mélyebb és szélesebb matematikai háttér szükséges hozzá.