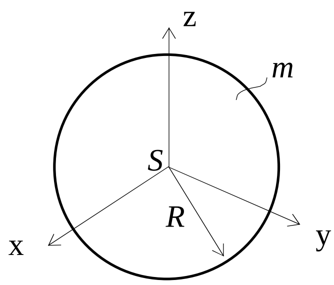
GYAKORLÓ FELADATOK
Tehetetlenségi nyomaték számítása

Néhány szabályos test tehetetlenségi nyomatékainak számítása:

I.) **1**.) Határozzuk meg az

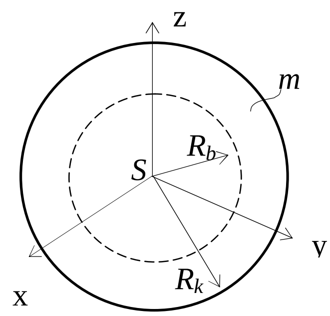
R sugarú,
ρ sűrűségű,
m tömegű,
homogén tömegeloszlású



gömb súlypontjához rendelt $\underline{\underline{\Theta}}_S$ tehetetlenségi nyomatéki mátrixát!

2.) Határozzuk meg az

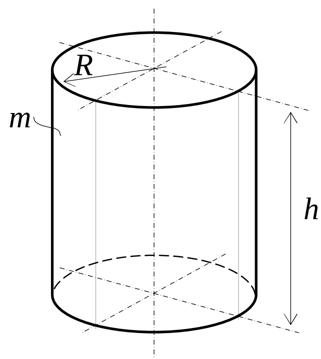
R_k *külső* és
R_b *belső* sugarú,
ρ sűrűségű,
m tömegű,
homogén tömegeloszlású



gömbhéj súlypontjához rendelt $\underline{\underline{\Theta}}_S$ tehetetlenségi nyomatéki mátrixát!

II.) **1**.) Az ábrán látható ρ sűrűségű, m tömegű, homogén tömegeloszlású egyenes körhenger magassága: h, alapkörének sugara: R.

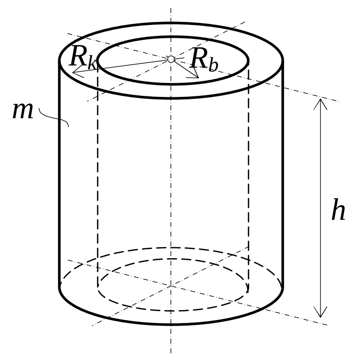
Határozzuk meg a henger súlypontjához rendelt $\underline{\underline{\Theta}}_S$ tehetetlenségi nyomatéki mátrixát!



2.) Az ábrán látható ρ sűrűségű, m tömegű, homogén tömegeloszlású cső (üreges henger) alapgyűrűjének

külső sugara: R_k,
belső sugara: R_b,
magassága: h.

Határozzuk meg a cső súlypontjához rendelt $\underline{\underline{\Theta}}_S$ tehetetlenségi nyomatéki mátrixát!



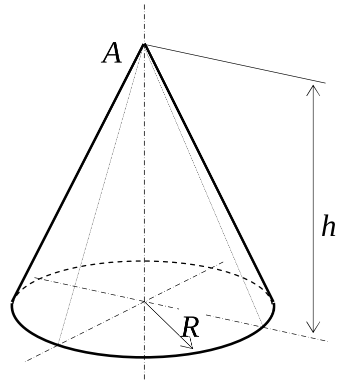
III.) Az ábrán látható ρ sűrűségű, m tömegű, homogén tömegeloszlású egyenes körkúp magassága: h, alapkörének sugara: R.

Határozzuk meg a kúp

a.) „S” súlypontjához rendelt $\underline{\underline{\Theta}}_S$, és

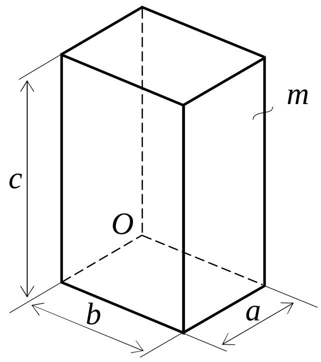
b.) „A” pontjához rendelt $\underline{\underline{\Theta}}_A$

tehetetlenségi nyomatéki mátrixát!



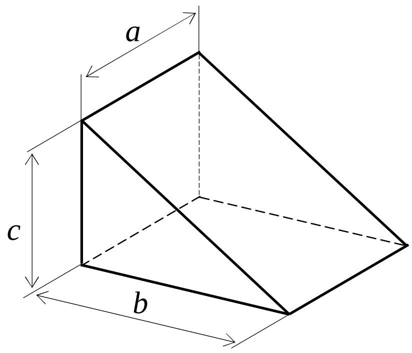
IV.) Az ábrán látható ρ sűrűségű, m tömegű, homogén tömegeloszlású egyenes téglalap alapú hasáb oldalélei: a, b és c.

Határozzuk meg a hasáb súlypontjához rendelt $\underline{\underline{\Theta}}_S$ tehetetlenségi nyomatéki mátrixát!



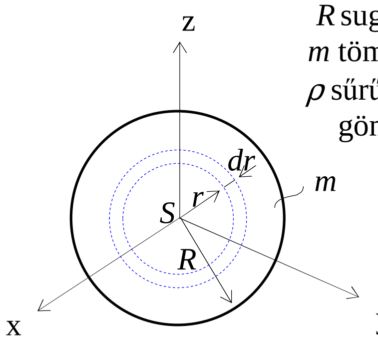
V.) Az ábrán látható ρ sűrűségű, m tömegű, homogén tömegeloszlású egyenes háromszög alapú hasáb ismert oldalélei: a, b és c.

Határozzuk meg a hasáb súlypontjához rendelt $\underline{\underline{\Theta}}_S$ tehetetlenségi nyomatéki mátrixát!



Megoldás:

I.) 1.) <u>Gömb</u>:



R sugarú, *m* tömegű, *ρ* sűrűségű gömb

Mivel mindhárom koordináta-tengely szimmetria-tengely, – tehát főtengely is, – így a deviációs nyomatékok értéke zérus. A test tömegközéppontjához (és az *S* súlypontjához) rendelt tehetetlenségi nyomatéki mátrixa:

$$\underline{\underline{\Theta}}_S = \begin{bmatrix} \Theta_x & 0 & 0 \\ 0 & \Theta_y & 0 \\ 0 & 0 & \Theta_z \end{bmatrix},$$

ahol a koordináta tengelyekre számított tehetetlenségi nyomatékok definíció alapján:

$$\Theta_x = \int_{(m)} \left(y^2 + z^2\right) dm$$

$$\Theta_y = \int_{(m)} \left(x^2 + z^2\right) dm$$

$$\Theta_z = \int_{(m)} \left(x^2 + y^2\right) dm$$

$$\boxed{dm = \rho dV = 4r^2 \pi dr},$$

ahol dV az „*r*” belső sugarú, *dr* vastagságú gömbhéj (elemi) térfogata

A gömbi szimmetria figyelembevételével: $\Theta_x = \Theta_y = \Theta_z = \Theta_s$

ahol „*s*” az „*S*” súlyponton átmenő tetszőleges tengely.

Ennek számítását a következő kapcsolat segítségével könnyen elvégezhetjük:

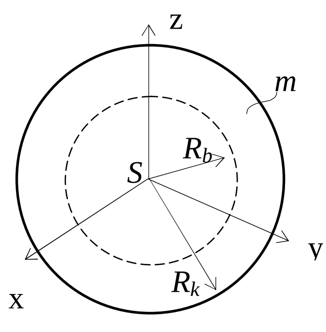
$$\Theta_S = \int_{(m)} r^2 dm = \int_{(m)} \left(x^2 + y^2 + z^2\right) dm = \frac{1}{2}\left(\Theta_x + \Theta_y + \Theta_z\right) = \frac{3}{2}\Theta_s,$$

Ebből:

$$\Theta_s = \frac{2}{3}\Theta_S = \frac{2}{3}\int_{(m)} r^2 dm = \frac{2}{3}\rho 4\pi \int_0^R r^4 dr = \frac{2}{3}\frac{4}{5}\rho\pi R^5 = \frac{2}{5}\rho\left(\frac{4}{3}R^3\pi\right)R^2 = \frac{2}{5}\rho V R^2 = \frac{2}{5} m R^2$$

$$\boxed{\Theta_s = \frac{2}{5} m R^2}$$

2.) <u>Gömbhéj</u> :



$$\Theta_s = \frac{2}{5}\left(m_k R_k^2 - m_b R_b^2\right) = \frac{2}{5}\rho\frac{4}{3}\pi\left(R_k^3 R_k^2 - R_b^3 R_b^2\right)$$

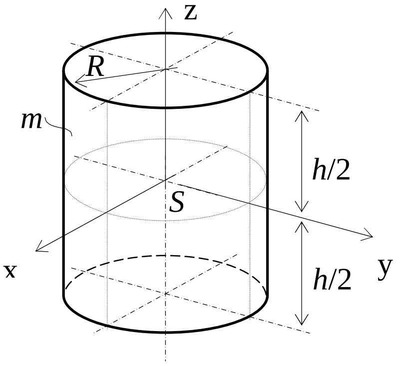
$$\boxed{\Theta_s = \frac{8}{15}\rho\pi\left(R_k^5 - R_b^5\right)},$$

illetve az $m = m_k - m_b = \rho\frac{4}{3}\pi\left(R_k^3 - R_b^3\right)$ tömeggel kifejezve:

$$\Theta_s = \frac{2}{5}\rho\frac{4}{3}\pi\left(R_k^5 - R_b^5\right) = \frac{2}{5}\left(\rho\frac{4}{3}\pi\left(R_k^3 - R_b^3\right)\right)\frac{R_k^5 - R_b^5}{R_k^3 - R_b^3}$$

$$\boxed{\Theta_s = \frac{2}{5} m \frac{R_k^5 - R_b^5}{R_k^3 - R_b^3}}$$

II.) 1.) **Henger:**

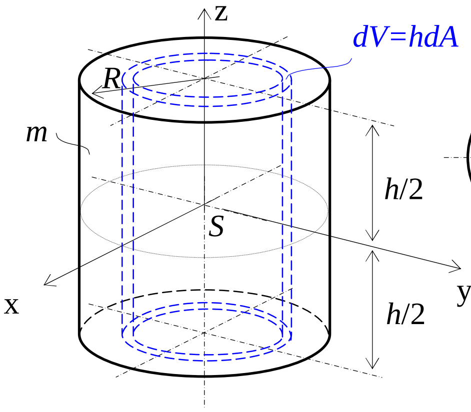


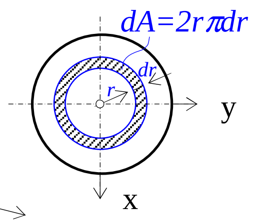
Mivel mindhárom koordináta-tengely szimmetriatengely, – tehát főtengely is, – így a deviációs nyomatékok értéke zérus.
A test tömegközéppontjához (és az S súlypontjához) rendelt tehetetlenségi nyomatéki mátrixa:

$$\underline{\underline{\Theta}}_S = \begin{bmatrix} \Theta_x & 0 & 0 \\ 0 & \Theta_y & 0 \\ 0 & 0 & \Theta_z \end{bmatrix},$$

$$\Theta_x = \int_{(m)} \left(y^2 + z^2\right) dm = \int_{(m)} y^2 dm + \int_{(m)} z^2 dm$$

$$\Theta_y = \int_{(m)} \left(x^2 + z^2\right) dm = \int_{(m)} x^2 dm + \int_{(m)} z^2 dm$$





$$\Theta_z = \int_{(m)} \left(x^2 + y^2\right) dm = \int_{(m)} r^2 dm = \rho \int_{(V)} r^2 dV = \rho h \int_{(A)} r^2 dA =$$

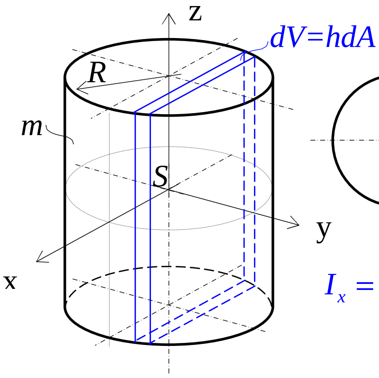
$$= \rho h \int_0^R r^2 \left(2r\pi dr\right) = 2\rho h \pi \int_0^R r^3 dr = 2\rho h \pi \frac{R^4}{4} = \left(\rho h \pi R^2\right) \frac{R^2}{2}$$

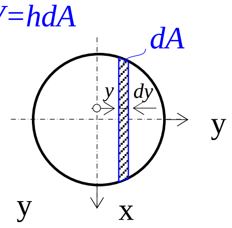
$$\boxed{\Theta_z = \frac{1}{2} mR^2}$$

$$I_p = \int_{(A)} r^2 dA = \int_{(A)} \left(x^2 + y^2\right) dA = \int_{(A)} x^2 dA + \int_{(A)} y^2 dA = I_y + I_x$$

$$\boxed{I_x = I_y = \frac{1}{2} I_p = \frac{1}{4} R^4 \pi}$$

A körszimmetria figyelembe vételével: $\boxed{\int_{(m)} x^2 dm = \int_{(m)} y^2 dm = \frac{1}{2} \int_{(m)} r^2 dm = \frac{1}{4} mR^2}$



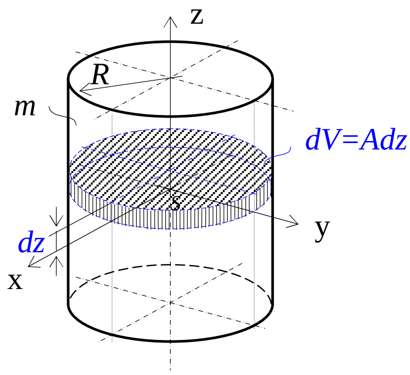


$$I_x = \int_{(A)} y^2 dA$$

Vagy:

$$\int_{(m)} y^2 dm = \rho \int_{(V)} y^2 dV = \rho h \left(\int_{(A)} y^2 dA \right) = \rho h I_x = \rho h \frac{R^4 \pi}{4} = \rho \left(h R^2 \pi\right) \frac{R^2}{4} = \rho V \frac{R^2}{4}$$

$\boxed{\int_{(m)} y^2 dm = \frac{1}{4} mR^2}$ A körszimmetria figyelembe vételével: $\boxed{\int_{(m)} x^2 dm = \frac{1}{4} mR^2}$



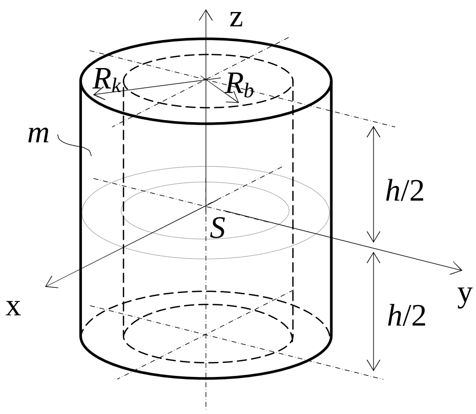
$$\int_{(m)} z^2 dm = \rho \int_{(V)} z^2 dV = \rho A \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 dz = \rho A \left[\frac{z^3}{3} \right]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = \rho A \frac{2}{3} \frac{h^3}{8} = \frac{1}{12} \left(\rho A h\right) h^2$$

$$\boxed{\int_{(m)} z^2 dm = \frac{1}{12} mh^2}$$

$$\Theta_x = \int_{(m)} \left(y^2 + z^2\right) dm = \int_{(m)} y^2 dm + \int_{(m)} z^2 dm = \frac{1}{4} mR^2 + \frac{1}{12} mh^2$$

$$\boxed{\boxed{\Theta_x = \Theta_y = \frac{1}{4} mR^2 + \frac{1}{12} mh^2}}$$

2.) <u>Cső</u> (üreges henger):



$$m = m_k - m_b = \rho\pi h\left(R_k^2 - R_b^2\right)$$
$$m_k = \rho\pi h R_k^2$$
$$m_b = \rho\pi h R_b^2$$

$$\Theta_z = \Theta_{z(\text{külső})} - \Theta_{z(\text{belső})}$$

$$\Theta_z = \frac{1}{2}\left(m_k R_k^2 - m_b R_b^2\right) = \frac{1}{2}\rho\pi h\left(R_k^2 R_k^2 - R_b^2 R_b^2\right) = \frac{1}{2}\rho\pi h\left(R_k^4 - R_b^4\right)$$

$$\boxed{\Theta_z = \frac{1}{2}\rho\pi h\left(R_k^4 - R_b^4\right)},$$

illetve az „*m*" tömeggel kifejezve:

$$\Theta_z = \frac{1}{2}\rho\pi h\left(R_k^4 - R_b^4\right) = \frac{1}{2}\left(\rho\pi h\left(R_k^2 - R_b^2\right)\right)\left(R_k^2 + R_b^2\right) = \frac{1}{2}m\left(R_k^2 + R_b^2\right)$$

$$\boxed{\Theta_z = \frac{1}{2}m\left(R_k^2 + R_b^2\right)}$$

$$\int\limits_{(m)} x^2 dm = \int\limits_{(m)} y^2 dm = \frac{1}{2}\int\limits_{(m)} r^2 dm = \frac{1}{4}\left(m_k R_k^2 - m_b R_b^2\right) = \frac{1}{4}m\left(R_k^2 + R_b^2\right)$$

$$\int\limits_{(m)} z^2 dm = \rho A_{\text{gyűrű}} \int\limits_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 dz = \frac{1}{12}\left(\rho A_{\text{gyűrű}} h\right)h^2 = \frac{1}{12}mh^2$$

$$\boxed{\Theta_x = \Theta_y = \frac{1}{4}m\left(R_k^2 + R_b^2\right) + \frac{1}{12}mh^2}$$

III.) <u>Kúp</u>:

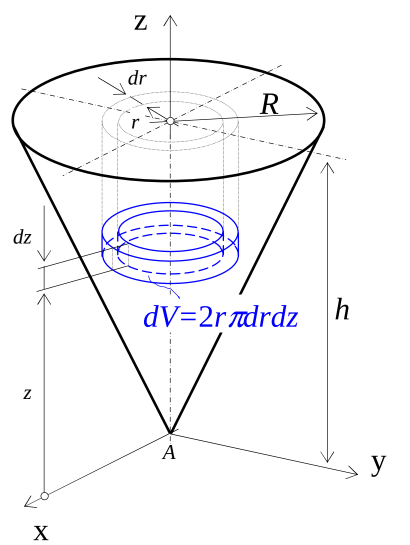
Mivel „z" szimmetriatengely, egyben főtengely is. Az „x" és „y" tengelyek pedig a forgásszimmetria miatt – tetszőlegesen elforgatva is – főtengelyek, így a deviációs nyomatékok értéke zérus.
Tehát a test „A" pontjához rendelt tehetetlenségi nyomatéki mátrixa:

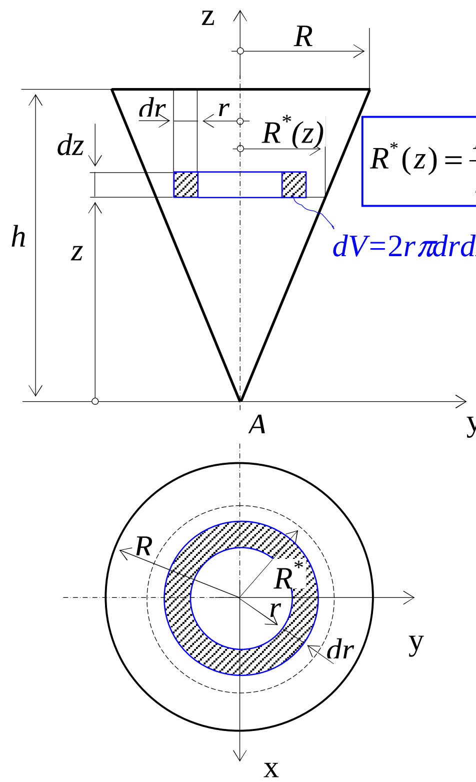
$$\underline{\underline{\Theta}}_A = \begin{bmatrix} \Theta_x & 0 & 0 \\ 0 & \Theta_y & 0 \\ 0 & 0 & \Theta_z \end{bmatrix}$$

$$\Theta_x = \int\limits_{(m)} \left(y^2 + z^2\right) dm = \int\limits_{(m)} y^2 dm + \int\limits_{(m)} z^2 dm$$

$$\Theta_y = \int\limits_{(m)} \left(x^2 + z^2\right) dm = \int\limits_{(m)} x^2 dm + \int\limits_{(m)} z^2 dm$$

$$\Theta_z = \int\limits_{(m)} \left(x^2 + y^2\right) dm = \int\limits_{(m)} r^2 dm = \rho \int\limits_{(V)} r^2 dV$$





$$\boxed{R^*(z) = \frac{R}{h}z}$$

$$\Theta_z = \rho \int\limits_{(V)} r^2 dV = 2\rho\pi \int\limits_0^h \left(\int\limits_0^{\frac{R}{h}z} r^3 dr \right) dz = 2\rho\pi \frac{1}{4}\frac{R^4}{h^4} \int\limits_0^h z^4 dz = \frac{1}{2}\rho\pi \frac{R^4}{h^4}\left[\frac{z^5}{5}\right]_0^h = \frac{1}{10}\rho\pi \frac{R^4}{h^4} h^5 = \frac{3}{10}\left(\frac{1}{3}\rho\pi h R^2\right) R^2$$

$$\boxed{\Theta_z = \frac{3}{10} m R^2}$$

A forgásszimmetriát figyelembe véve: $\boxed{\int\limits_{(m)} x^2 dm = \int\limits_{(m)} y^2 dm = \frac{1}{2}\int\limits_{(m)} r^2 dm = \frac{\Theta_z}{2} = \frac{3}{20} m R^2}$

$$\int\limits_{(m)} z^2 dm = \rho \int\limits_{(V)} z^2 dV = 2\rho\pi \int\limits_0^h z^2 \left(\int\limits_0^{\frac{R}{h}z} r dr \right) dz = 2\rho\pi \int\limits_0^h z^2 \frac{1}{2}\left[r^2\right]_0^{\frac{R}{h}z} dz = \rho\pi \int\limits_0^h z^2 \frac{R^2}{h^2} z^2 dz = \rho\pi \frac{R^2}{h^2}\int\limits_0^h z^4 dz = \frac{1}{5}\rho\pi \frac{R^2}{h^2} h^5 = \frac{1}{5}\rho\pi R^2 h^3 =$$

$$= \frac{3}{5}\left(\frac{1}{3}\rho\pi R^2 h\right) h^2 = \frac{3}{5} m h^2$$

$$\boxed{\int\limits_{(m)} z^2 dm = \frac{3}{5} m h^2}$$

$$\boxed{\Theta_x = \Theta_y = \frac{3}{20} m R^2 + \frac{3}{5} m h^2 = \frac{3}{20} m \left(R^2 + 4h^2\right)}$$

Keressük meg a tömegközéppont (súlypont) helyét: $\underline{\mathbf{r}}_{AS} = \underline{\mathbf{r}}_S = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ z_{AS} \end{bmatrix}$,

$$z_{AS} = \frac{\int\limits_{(m)} z dm}{\int\limits_{(m)} dm} = \frac{\rho \int\limits_{(V)} z dV}{m} = \frac{\int\limits_{(V)} z dV}{V}, \qquad \text{ahol} \qquad V = \frac{1}{3} R^2 \pi h,$$

$$\int\limits_{(V)} z dV = \int\limits_{(V)} z A(z) dz = 2\pi \int\limits_0^h z \left(\int\limits_0^{\frac{R}{h}z} r dr \right) dz = 2\pi \int\limits_0^h z \frac{1}{2}\left[r^2\right]_0^{\frac{R}{h}z} dz = \pi \frac{R^2}{h^2} \int\limits_0^h z^3 dz = \pi \frac{R^2}{h^2}\left[\frac{1}{4} z^4\right]_0^h = \frac{1}{4}\pi R^2 h^2 =$$

$$= \frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}\pi R^2 h\right) h = \frac{3}{4} V h$$

$$\boxed{z_{AS} = \frac{3}{4} h}$$

A test tömegközéppontjához (ill. az „S” súlypontjához) rendelt tehetetlenségi nyomatéki mátrixa:

$$\underline{\underline{\Theta}}_S = \begin{bmatrix} \Theta_\xi & 0 & 0 \\ 0 & \Theta_\eta & 0 \\ 0 & 0 & \Theta_\zeta \end{bmatrix}, \qquad \underline{\underline{\Theta}}_S = \underline{\underline{\Theta}}_A - \underline{\underline{\Theta}}_{AS}$$

$$\underline{\underline{\Theta}}_S = \begin{bmatrix} \Theta_\xi & 0 & 0 \\ 0 & \Theta_\eta & 0 \\ 0 & 0 & \Theta_\zeta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Theta_x & 0 & 0 \\ 0 & \Theta_y & 0 \\ 0 & 0 & \Theta_z \end{bmatrix} - m \begin{bmatrix} z_{AS}^2 & 0 & 0 \\ 0 & z_{AS}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ahol ξ, η és ζ az „*S*" súlyponton átmenő, s az x, y, és z tengelyekkel párhuzamos főtengelyek.

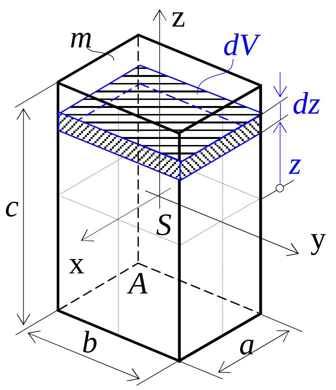
$$\boxed{\Theta_\zeta = \Theta_z = \frac{3}{10} mR^2}$$

$$\Theta_\xi = \Theta_\eta = \Theta_x - m \cdot z_{AS}^2 = \frac{3}{20} mR^2 + \frac{3}{5} mh^2 - \frac{9}{16} mh^2 = \frac{3}{20} mR^2 + \frac{3}{80} mh^2$$

$$\boxed{\Theta_\xi = \Theta_\eta = \frac{3}{80} m\left(4R^2 + h^2\right)}$$

IV.) <u>Téglalap alapú hasáb</u>:

A szimmetriát figyelembe véve megállapíthatjuk, hogy mindhárom tengely főtengely, így:



$$\underline{\underline{\Theta}}_S = \begin{bmatrix} \Theta_x & 0 & 0 \\ 0 & \Theta_y & 0 \\ 0 & 0 & \Theta_z \end{bmatrix}$$

$$\Theta_x = \int_{(m)} \left(y^2 + z^2\right) dm = \int_{(m)} y^2 dm + \int_{(m)} z^2 dm$$

$$\Theta_y = \int_{(m)} \left(x^2 + z^2\right) dm = \int_{(m)} x^2 dm + \int_{(m)} z^2 dm$$

$$\Theta_z = \int_{(m)} \left(x^2 + y^2\right) dm = \int_{(m)} x^2 dm + \int_{(m)} y^2 dm$$

$$\int_{(m)} z^2 dm = \rho \int_{(V)} z^2 dV = \rho A \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} z^2 dz = \frac{1}{3} \rho A \left[z^3 \right]_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} = \frac{1}{3} \rho A \left[\frac{c^3}{8} - \left(-\frac{c^3}{8} \right) \right] = \frac{1}{12} (\rho abc) c^2 = \frac{1}{12} mc^2$$

$$\boxed{\int_{(m)} z^2 dm = \frac{1}{12} mc^2}$$

A másik két integrál analóg módon felírható:

$$\boxed{\int_{(m)} x^2 dm = \frac{1}{12} ma^2}$$

$$\boxed{\int_{(m)} y^2 dm = \frac{1}{12} mb^2}$$

Behelyettesítve:

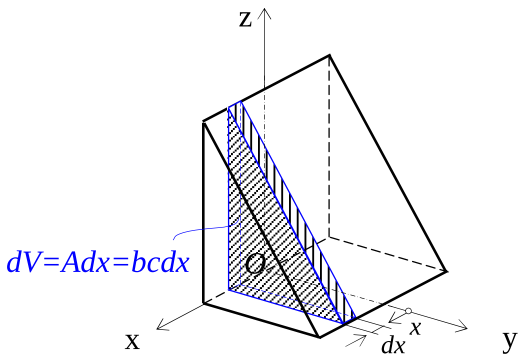
$$\Theta_x = \int_{(m)} y^2 dm + \int_{(m)} z^2 dm = \frac{1}{12} mb^2 + \frac{1}{12} mc^2 = \frac{1}{12} m\left(b^2 + c^2\right)$$

$$\boxed{\Theta_x = \frac{1}{12} m\left(b^2 + c^2\right)} \qquad \boxed{\Theta_y = \frac{1}{12} m\left(a^2 + c^2\right)} \qquad \boxed{\Theta_z = \frac{1}{12} m\left(a^2 + b^2\right)}$$

V.) **<u>Háromszög alapú hasáb</u>**:

Mivel az (yz) sík szimmetria sík, az „x" tengely főtengely. Ezt figyelembe véve a test „O" pontjához rendelt tehetetlenségi nyomatéki mátrixa:

$$\underline{\underline{\Theta}}_O = \begin{bmatrix} \Theta_x & 0 & 0 \\ 0 & \Theta_y & -D_{yz} \\ 0 & -D_{zy} & \Theta_z \end{bmatrix}$$



$$\Theta_x = \int_{(m)} \left(y^2+z^2\right) dm = \int_{(m)} y^2 dm + \int_{(m)} z^2 dm$$

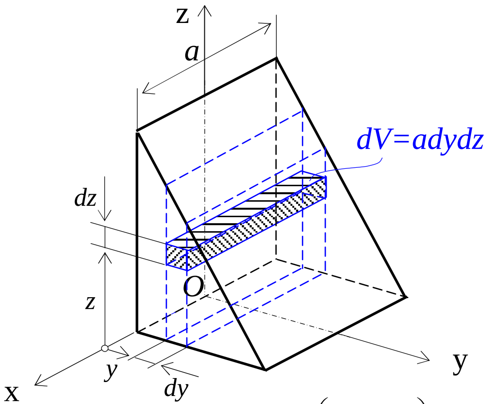
$$\Theta_y = \int_{(m)} \left(x^2+z^2\right) dm = \int_{(m)} x^2 dm + \int_{(m)} z^2 dm$$

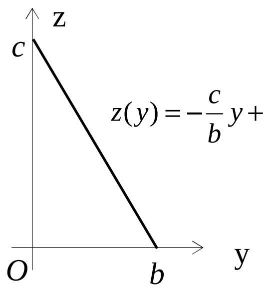
$$\Theta_z = \int_{(m)} \left(x^2+y^2\right) dm = \int_{(m)} x^2 dm + \int_{(m)} y^2 dm$$

$$D_{yz} = D_{zy} = \int_{(m)} yz\, dm$$

$$\int_{(m)} x^2 dm = \rho \int_{(V)} x^2 dV = \rho \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} x^2 A\, dx = \frac{1}{2}\rho bc \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} x^2 dx = \frac{1}{6}\rho bc \left[x^3\right]_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} = \frac{1}{6}\rho bc \frac{1}{8}\left(a^3-(-a)^3\right) = \frac{1}{24}\rho bca^3 = \frac{1}{12}\left(\frac{1}{2}\rho abc\right)a^2 = \frac{1}{12}ma^2$$

$$\boxed{\int_{(m)} x^2 dm = \frac{1}{12}ma^2}$$





$$z(y) = -\frac{c}{b}y + c = \frac{c}{b}(b-y)$$

$$y(z) = -\frac{b}{c}z + b = \frac{b}{c}(c-z)$$

$$\int_{(m)} y^2 dm = \rho \int_{(V)} y^2 dV = \rho a \int_0^b y^2 \left(\int_0^{\frac{c}{b}(b-y)} dz \right) dy = \rho a \frac{c}{b} \int_0^b (b-y)\, y^2 dy = \rho a \frac{c}{b} \int_0^b \left(by^2 - y^3\right) dy = \rho a \frac{c}{b}\left[\frac{1}{3}by^3 - \frac{1}{4}y^4\right]_0^b =$$

$$= \rho a \frac{c}{b}\left(\frac{1}{3}b^4 - \frac{1}{4}b^4\right) = \frac{1}{12}\rho ab^3 c = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\rho abc\right)b^2 = \frac{1}{6}mb^2$$

$$\boxed{\int_{(m)} y^2 dm = \frac{1}{6}mb^2}$$

$$\boxed{\int_{(m)} z^2 dm = \frac{1}{6}mc^2}$$

$$\boxed{\Theta_x = \int_{(m)} y^2 dm + \int_{(m)} z^2 dm = \frac{1}{6}mb^2 + \frac{1}{6}mc^2 = \frac{1}{6}m\left(b^2+c^2\right)}$$

$$\boxed{\boxed{\Theta_x = \frac{1}{6}m\left(b^2+c^2\right)}}$$

$$\boxed{\Theta_y = \int_{(m)} x^2 dm + \int_{(m)} z^2 dm = \frac{1}{12}ma^2 + \frac{1}{6}mc^2 = \frac{1}{12}m\left(a^2+2c^2\right)}$$

$$\boxed{\boxed{\Theta_y = \frac{1}{12}m\left(a^2+2c^2\right)}}$$

$$\boxed{\Theta_z = \int_{(m)} x^2 dm + \int_{(m)} y^2 dm = \frac{1}{12}ma^2 + \frac{1}{6}mb^2 = \frac{1}{12}m\left(a^2+2b^2\right)}$$

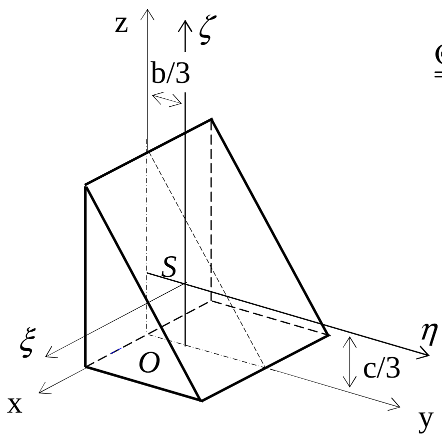
$$\boxed{\boxed{\Theta_z = \frac{1}{12}m\left(a^2+2b^2\right)}}$$

$$D_{yz}=D_{zy}=\int_{(m)} yz\,dm=\rho\int_{(V)} yz\,dV=\rho a\int_0^c z\left(\int_0^{\frac{b}{c}(c-z)} y\,dy\right)dz=\rho a\int_0^c z\frac{1}{2}\left[y^2\right]_0^{\frac{b}{c}(c-z)}dz=\frac{1}{2}\rho a\frac{b^2}{c^2}\int_0^c z(c-z)^2dz=$$

$$=\frac{1}{2}\rho a\frac{b^2}{c^2}\int_0^c z\left(c^2-2cz+z^2\right)dz=\frac{1}{2}\rho a\frac{b^2}{c^2}\int_0^c\left(c^2z-2cz^2+z^3\right)dz=\frac{1}{2}\rho a\frac{b^2}{c^2}\left(c^2\frac{c^2}{2}-c\frac{2c^3}{3}+\frac{c^4}{4}\right)=\frac{1}{2}\rho ab^2c^2\frac{1}{12}=\frac{1}{12}\left(\frac{1}{2}\rho abc\right)bc$$

$$\boxed{D_{yz}=D_{zy}=\frac{1}{12}m\,bc}$$

A test tömegközéppontjához (ill. az „*S*” súlypontjához) rendelt tehetetlenségi nyomatéki mátrixa:



$$\underline{\underline{\Theta}}_S=\begin{bmatrix}\Theta_\xi & 0 & 0\\ 0 & \Theta_\eta & -D_{\eta\zeta}\\ 0 & -D_{\zeta\eta} & \Theta_\zeta\end{bmatrix},\qquad \underline{\underline{\Theta}}_S=\underline{\underline{\Theta}}_A-\underline{\underline{\Theta}}_{AS},$$

ahol ξ, η és ζ az „*S*” súlyponton átmenő, s az x, y, és z tengelyekkel párhuzamos tengelyek.

A tömegközéppont (súlypont) helyvektora: $\underline{\mathbf{r}}_S=\underline{\mathbf{r}}_{AS}=\begin{bmatrix}0\\ y_{AS}\\ z_{AS}\end{bmatrix}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}0\\ b\\ c\end{bmatrix}$,

$$\underline{\underline{\Theta}}_S=\begin{bmatrix}\Theta_\xi & 0 & 0\\ 0 & \Theta_\eta & -D_{\eta\zeta}\\ 0 & -D_{\zeta\eta} & \Theta_\zeta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\Theta_x & 0 & 0\\ 0 & \Theta_y & -D_{yz}\\ 0 & -D_{zy} & \Theta_z\end{bmatrix}-m\begin{bmatrix}y_{AS}^2+z_{AS}^2 & 0 & 0\\ 0 & z_{AS}^2 & -y_{AS}z_{AS}\\ 0 & -y_{AS}z_{AS} & y_{AS}^2\end{bmatrix}$$

$$\Theta_\xi=\Theta_x-m\left(y_{AS}^2+z_{AS}^2\right)=\frac{1}{6}m\left(b^2+c^2\right)-m\frac{1}{9}\left(b^2+c^2\right)=\frac{1}{18}m\left(b^2+c^2\right)$$

$$\boxed{\Theta_\xi=\frac{1}{18}m\left(b^2+c^2\right)}$$

$$\Theta_\eta=\Theta_y-m\cdot z_{AS}^2=\frac{1}{12}m\left(a^2+2c^2\right)-m\frac{1}{9}c^2=\frac{1}{12}ma^2+\frac{1}{18}mc^2=\frac{1}{36}m\left(3a^2+2c^2\right)$$

$$\boxed{\Theta_\eta=\frac{1}{36}m\left(3a^2+2c^2\right)}$$

$$\Theta_\zeta=\Theta_z-m\cdot y_{AS}^2=\frac{1}{12}m\left(a^2+2b^2\right)-m\frac{1}{9}b^2=\frac{1}{12}ma^2+\frac{1}{18}mb^2=\frac{1}{36}m\left(3a^2+2b^2\right)$$

$$\boxed{\Theta_\zeta=\frac{1}{36}m\left(3a^2+2b^2\right)}$$

$$D_{\eta\zeta}=D_{zy}-m\,y_{AS}z_{AS}=\frac{1}{12}m\,bc-m\frac{1}{9}bc=-\frac{1}{36}m\,bc$$

$$\boxed{D_{\eta\zeta}=-\frac{1}{36}m\,bc}$$