HÁZI FELADAT – MEGOLDÁSI SEGÉDLET
Merev test, kinematika
Gördülés

1.

Az *(1)*-es testre:

$$\mathbf{v}_S = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r}_{OS}$$

$$\begin{bmatrix} v_S \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ -(R-r) \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \underline{\underline{v_{S1}}} = \omega_1 \cdot (R-r) = \underline{\underline{4\,\mathbf{i}\ \text{[m / s]}}}$$

A gördülés miatt a *(2)*-es test sebességpólusa a két körív érintkezési pontjában van:

$$\mathbf{r}_{OP} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0{,}6 \\ 0 \end{bmatrix} \text{[m]}$$

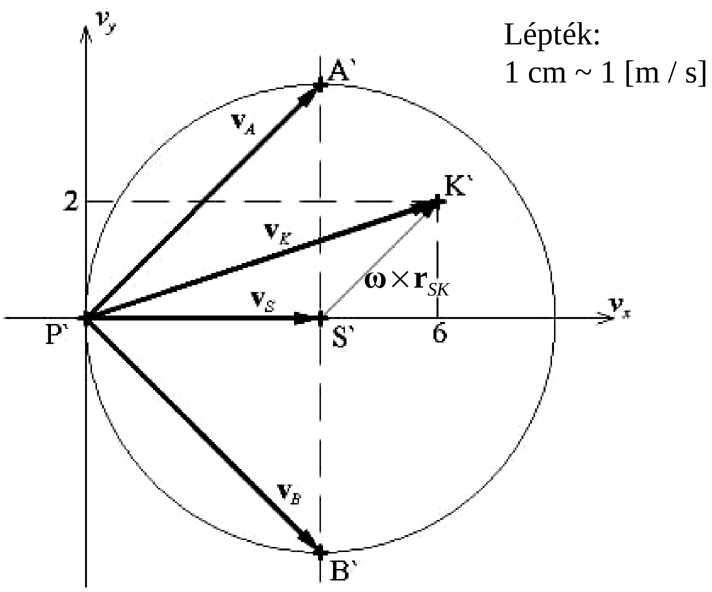
A *(2)*-es testre:

$$\mathbf{v}_S = \mathbf{v}_P + \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{r}_{PS}$$

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0{,}2 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \underline{\underline{\omega = -20\,\mathbf{k}\ \text{[rad / s]}}}$$

2.

Sebességábra:



$$\mathbf{v}_K = \mathbf{v}_S + \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{r}_{SK}$$

leolvasva:

$$\mathbf{v}_K = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \ [\mathrm{m/s}]$$

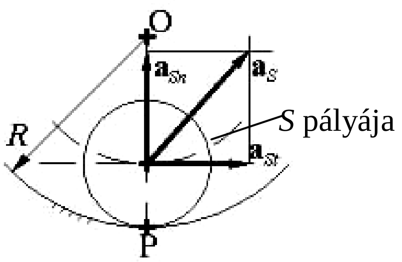
3.

a_S számítása az *(1)*-es testről:

$$\mathbf{a}_S = \mathbf{a}_0 + \boldsymbol{\varepsilon}_1 \times \mathbf{r}_{OS} - \omega_1^2 \cdot \mathbf{r}_{OS}$$

$$\underline{\underline{\mathbf{a}_S}} = \begin{bmatrix} a_{Sx} \\ a_{Sy} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 100 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ -0{,}4 \\ 0 \end{bmatrix} - 100 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -0{,}4 \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 40 \\ 40 \\ 0 \end{bmatrix} \ [\mathrm{m/s^2}]}}$$

<u>Megjegyzés:</u> az *S* pont *O* körül *R–r* sugarú körpályán mozog. A vázolt helyzetben $\mathbf{a}_S$ *x* irányú komponense tangenciális gyorsulás, *y* irányú komponense pedig normális gyorsulás.



$$a_{Sn} = \frac{v_S^2}{R-r} = \frac{16}{0{,}4} = 40 \ [\mathrm{m/s^2}]$$, *O* felé mutat, összhangban az előbbi eredménnyel.

A *(2)*-es testre:

$$\mathbf{a}_S = \mathbf{a}_P + \boldsymbol{\varepsilon}_2 \times \mathbf{r}_{PS} - \omega_2^2 \cdot \mathbf{r}_{PS}$$

$$\begin{bmatrix} 40 \\ 40 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ a_P \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \varepsilon \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0{,}2 \\ 0 \end{bmatrix} - (-20)^2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0{,}2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

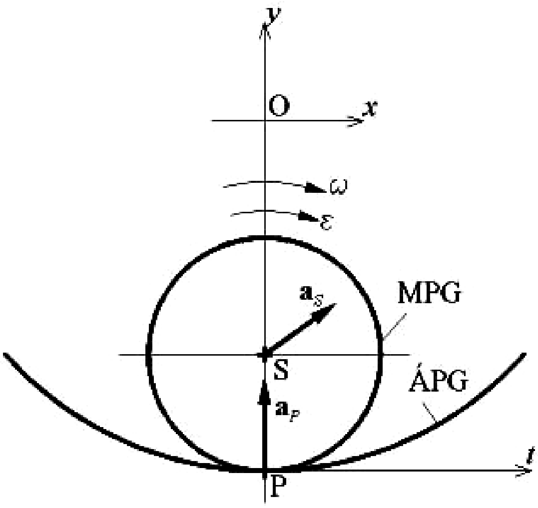
$$\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -200 \end{bmatrix} \ [\mathrm{rad/s^2}]}} \qquad \underline{\underline{\mathbf{a}_P = \begin{bmatrix} 0 \\ 120 \\ 0 \end{bmatrix} \ [\mathrm{m/s^2}]}}$$

<u>Megjegyzés:</u> a sebességpólus gyorsulása merőleges a pólusgörbék közös érintőjére, ezért csak *y* irányú komponense van.

$$40 = -0{,}2 \cdot \varepsilon \quad \rightarrow \quad \varepsilon = -200 \ [\mathrm{rad/s^2}]$$

$$40 = a_P - 80 \quad \rightarrow \quad a_P = 120 \ [\mathrm{m/s^2}]$$

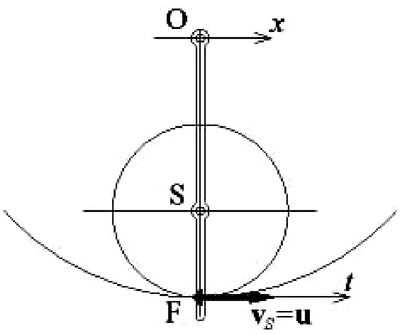
$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -200 \end{bmatrix} [\mathrm{rad/s^2}] \qquad a_P = \begin{bmatrix} 0 \\ 120 \\ 0 \end{bmatrix} [\mathrm{m/s^2}]$$



Az álló pólusgörbe az R sugarú kör, a mozgó pólusgörbe az r sugarú kör.

A pólusvándorlás sebességének meghatározása:

Szemlélet alapján:
Az OS hajtórudat gondolatban meghosszabbítva, annak a pólust fedő F pontjának a sebessége egyenlő a pólusvándorlás sebességével: $\mathbf{v}_F = \mathbf{u}$



$$\mathbf{v}_F = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r}_{OF}$$

$$\underline{\underline{\mathbf{v}_F}} = \begin{bmatrix} v_F \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ -0,6 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [\mathrm{m/s}]$$

Egybevetve **u** általános képletével:

$$\mathbf{u} = \frac{\boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{a}_P}{\omega_2^2} = \frac{1}{20^2} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -20 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 120 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [\mathrm{m/s}]$$

A gyorsuláspólus helyének meghatározása:

$$\mathbf{r}_{PG} = \begin{bmatrix} x_{PG} \\ y_{PG} \\ 0 \end{bmatrix} = ?$$

$$\mathbf{a}_G = \mathbf{0} = \mathbf{a}_P + \boldsymbol{\varepsilon}_2 \times \mathbf{r}_{PG} - \omega_2^2 \cdot \mathbf{r}_{PG}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 120 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -200 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_{PG} \\ y_{PG} \\ 0 \end{bmatrix} - 400 \cdot \begin{bmatrix} x_{PG} \\ y_{PG} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} 0 &= 200 \cdot y_{PG} - 400 \cdot x_{PG} \\ 0 &= 120 - 200 \cdot x_{PG} - 400 \cdot y_{PG} \end{aligned}\right\} \rightarrow \underline{\underline{x_{PG} = 0{,}12\ [\mathrm{m}],\ y_{PG} = 0{,}24\ [\mathrm{m}]}}$$

4.

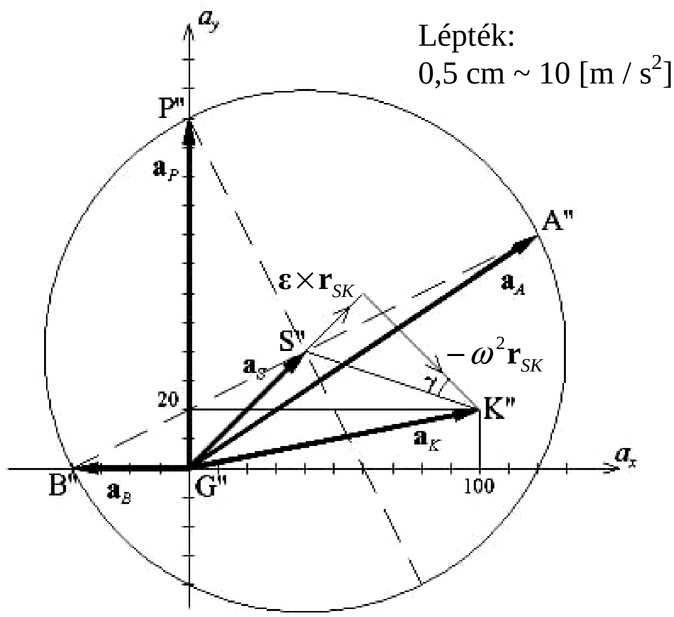
Gyorsulásábra:

$$\gamma = \arctan\left(\frac{\varepsilon}{\omega^2}\right) = 26{,}57°$$

$$\mathbf{a}_K = \mathbf{a}_S + \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}_{SK} - \omega^2 \cdot \mathbf{r}_{SK}$$

leolvasva:

$$\mathbf{a}_K = \begin{bmatrix} 100 \\ 20 \\ 0 \end{bmatrix} [\mathrm{m/s^2}]$$



5.

$$\mathbf{v}_K = \mathbf{v}_S + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{SK} \qquad \text{lásd sebességábrán}$$

$$\underline{\underline{\mathbf{v}_K}} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -20 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -0{,}1 \\ 0{,}1 \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} [\mathrm{m/s}]}}$$

$$\mathbf{a}_K = \mathbf{a}_S + \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}_{SK} - \omega^2 \cdot \mathbf{r}_{SK} \qquad \text{lásd gyorsulásábrán}$$

$$\underline{\underline{\mathbf{a}_K}} = \begin{bmatrix} 40 \\ 40 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -200 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -0{,}1 \\ 0{,}1 \\ 0 \end{bmatrix} - 400 \cdot \begin{bmatrix} -0{,}1 \\ 0{,}1 \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 100 \\ 20 \\ 0 \end{bmatrix} [\mathrm{m/s^2}]}}$$

Ábrákhoz:

$$\overline{SK} = |\mathbf{r}_{SK}| = 0{,}1414\ [\mathrm{m}]$$

$$\omega \cdot \overline{SK} = 2{,}828\ \ [\mathrm{m/s}]$$

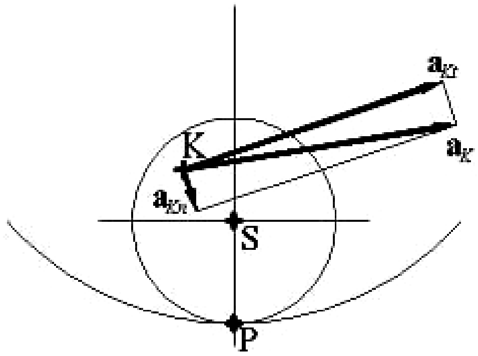
$$\varepsilon \cdot \overline{SK} = 28{,}28\ \ [\mathrm{m/s^2}]$$

$$\omega^2 \cdot \overline{SK} = 56{,}57\ \ [\mathrm{m/s^2}]$$

6.

$$\rho_K = \frac{v_K^2}{a_{Kn}}$$

a_{Kn} számítása: $\mathbf{a}_K$-nak $\mathbf{v}_K$-ra merőleges vetületének hossza, vagyis



$$\mathbf{a}_{Kn} = \mathbf{a}_K - \mathbf{a}_{Kt}$$

$$\mathbf{a}_{Kt} = \frac{(\mathbf{a}_K \cdot \mathbf{v}_K)}{v_K^2} \cdot \mathbf{v}_K = \frac{640}{40} \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 96 \\ 32 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ [m / s}^2\text{]}$$

$$\mathbf{a}_{Kn} = \begin{bmatrix} 100 \\ 20 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 96 \\ 32 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -12 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ [m / s}^2\text{]}$$

$$a_{Kn} = |\mathbf{a}_{Kn}| = 12{,}65 \text{ [m / s}^2\text{]}$$

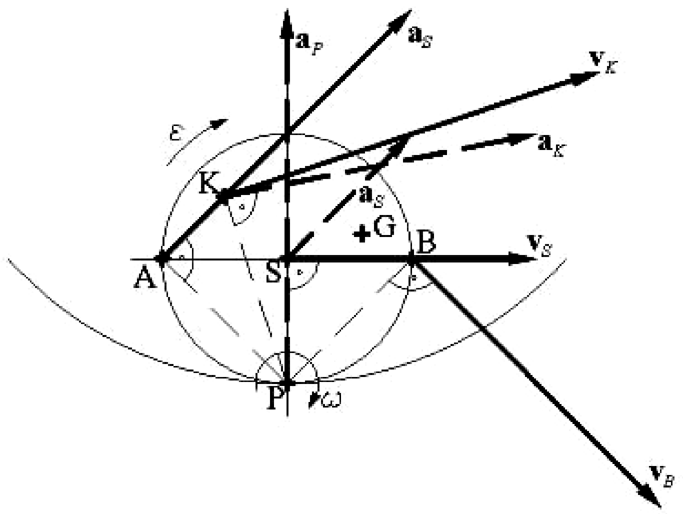
$$\underline{\underline{\rho_K}} = \frac{40}{12{,}65} = \underline{\underline{3{,}162 \text{ [m]}}}$$

7.

A szerkezeti ábra az eredményekkel:

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -20 \end{bmatrix} \text{ [rad / s]} \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -200 \end{bmatrix} \text{ [rad / s}^2\text{]}$$

Hosszlépték:	1 cm ~ 0,1 [m]
Sebességlépték:	1 cm ~ 1 [m / s]
Gyorsuláslépték:	0,5 cm ~ 10 [m / s^2]



$$\mathbf{v}_S = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ [m / s]} \qquad \mathbf{a}_S = \begin{bmatrix} 40 \\ 40 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ [m / s}^2\text{]}$$

$$\mathbf{v}_K = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ [m / s]} \qquad \mathbf{a}_S = \begin{bmatrix} 100 \\ 20 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ [m / s}^2\text{]}$$

$$\mathbf{v}_A = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ [m / s]} \qquad \mathbf{a}_S = \begin{bmatrix} 0 \\ 120 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ [m / s}^2\text{]}$$

$$\mathbf{v}_B = \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ [m / s]}$$

$v_S = 4 \text{ [m / s]}$ $\qquad a_S = 56{,}57 \text{ [m / s}^2\text{]}$

$v_K = 6{,}32 \text{ [m / s]}$ $\qquad a_K = 102 \text{ [m / s}^2\text{]}$

$v_A = v_B = 5{,}66 \text{ [m / s]}$