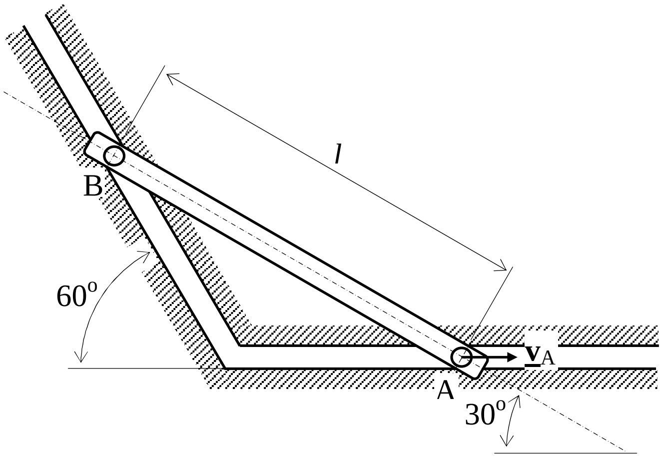
Merev test kinematikája (SÍKMOZGÁS)
HÁZI FELADAT



Az ábrán vázolt *l* hosszúságú *AB* merev rúd síkmozgást végez. A sima vízszintes vezetékben mozgó *A* jelű csapjának pillanatnyi sebessége $\underline{\mathbf{v}}_A$, illetve pillanatnyi gyorsulása $\underline{\mathbf{a}}_A$ adott, a B jelű csap a vízszintessel 60^o-os szöget bezáró - ugyancsak sima - vezetékben mozoghat. A rúd a vizsgált pillanatban 30^o-os szöget zár be a vízszintessel.

Adatok: $l = 0{,}3$ [m]
$v_A = 3$ [m/s]
$a_A = 0$

Feladat:

1.) Jelöljük be az ábrába a pillanatnyi sebességpólus (P), illetve pillanatnyi gyorsuláspólus (G) helyét!

2.) Számítsuk ki a rúd pillanatnyi
   - a.) szögsebességét ($\underline{\boldsymbol{\omega}}$ = ?) és
   - b.) szöggyorsulását ($\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}$ = ?)!

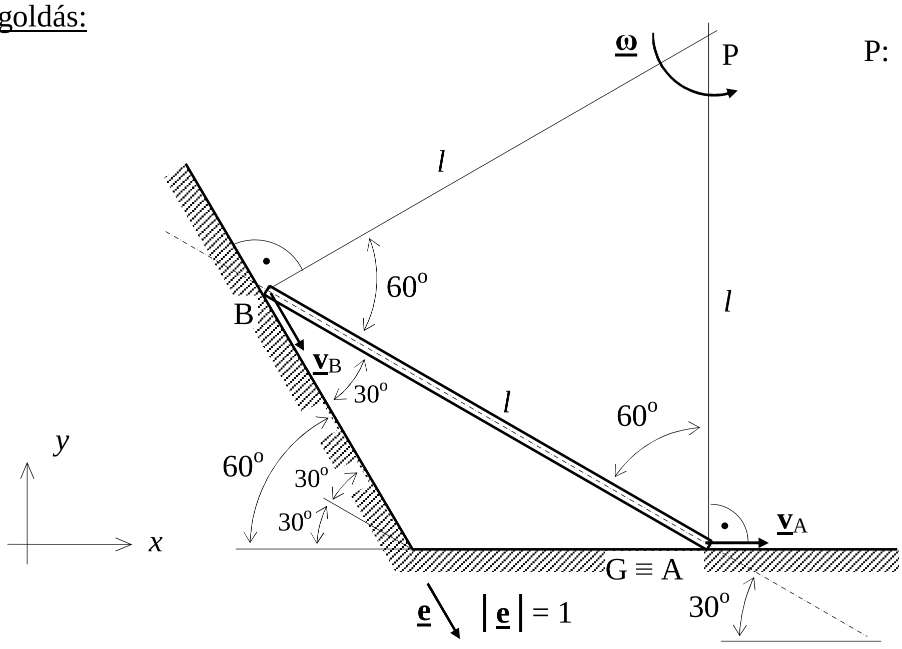
3.) Határozzuk meg a a *B* csap vázolt helyzethez tartozó
   - a.) pillanatnyi sebességét ($\underline{\mathbf{v}}_B$ = ?) és
   - b.) pillanatnyi gyorsulását ($\underline{\mathbf{a}}_B$ = ?)!

4.) Számítsuk ki a sebességpólus pillanatnyi gyorsulását ($\underline{\mathbf{a}}_P$ = ?)!

5.) Rajzoljuk meg a rúd –ábrán vázolt helyzetéhez tartozó -
   - a.) sebességábráját, és a
   - b.) gyorsulásábráját!

Megoldás:

1.)



P: A sebességvektorokra állított merőleges egyenesek metszéspontja.

G ≡ A, ugyanis: $\underline{\mathbf{a}}_A = \underline{\mathbf{0}}$

2.) a.) $\quad \underline{\boldsymbol{\omega}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix}$, ahol $\quad \omega = \dfrac{v_A}{l} = \dfrac{3}{0{,}3} = 10\left[\dfrac{rad}{s}\right]$, így $\quad \underline{\boldsymbol{\omega}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix}\left[\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right]$

3.) a.) $\quad v_B = l\omega = v_A = 3\left[\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right]$

$$\underline{\mathbf{v}}_B = v_B\,\underline{\mathbf{e}} = 3\begin{bmatrix} \dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{bmatrix}\left[\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right] = \begin{bmatrix} 1{,}5 \\ -2{,}6 \\ 0 \end{bmatrix}\left[\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right],$$

vagy:

$$\underline{\mathbf{v}}_B = \underline{\mathbf{v}}_A + \underline{\boldsymbol{\omega}} \times \underline{\mathbf{r}}_{AB}\ ,$$

ahol $\quad \underline{\mathbf{v}}_B = v_B\,\underline{\mathbf{e}} = v_B\begin{bmatrix} \dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{bmatrix}\left[\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right]$, és $\quad \underline{\mathbf{r}}_{AB} = \begin{bmatrix} x_{AB} \\ y_{AB} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l\cos 30^o \\ l\sin 30^o \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}3\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ 0{,}3\dfrac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}[\mathrm{m}]$, így:

$$\underline{\mathbf{v}}_B = \begin{bmatrix} v_{Bx} \\ v_{By} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_A \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \omega \begin{bmatrix} -y_{AB} \\ x_{AB} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-0{,}3\frac{1}{2}\omega \\ -0{,}3\frac{\sqrt{3}}{2}\omega \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-0{,}15\omega \\ -0{,}15\sqrt{3}\omega \\ 0 \end{bmatrix}$$

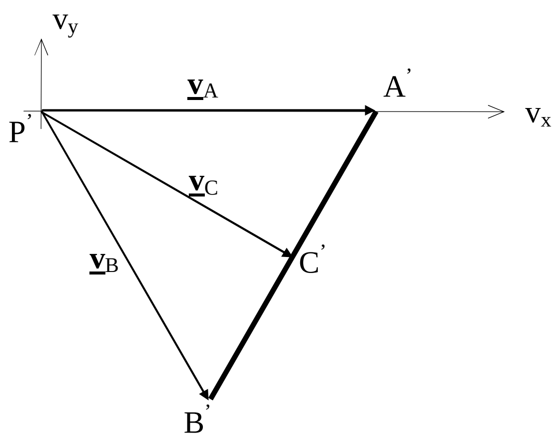
x: $\quad v_{Bx} = 0{,}5v_B = 3 - 0{,}15\omega$

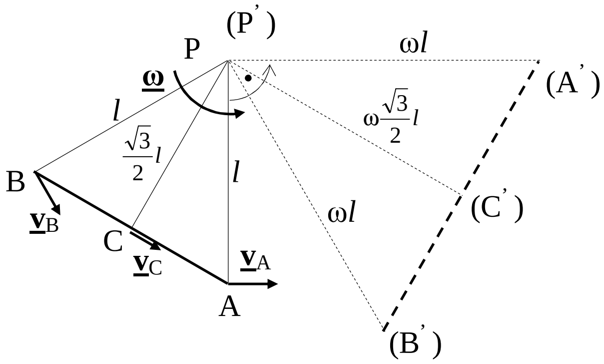
y: $\quad v_{By} = -\frac{\sqrt{3}}{2} v_B = -0{,}15\sqrt{3}\,\omega$

innen: $\omega = 10$ [rad/s], $\quad v_B = 3$ [m/s], illetve

$$\underline{\boldsymbol{\omega}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix} \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right], \qquad \underline{\mathbf{v}}_B = v_B\, \underline{\mathbf{e}} = 3 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \left[\frac{\text{m}}{\text{s}}\right] \approx \begin{bmatrix} 1{,}5 \\ -2{,}6 \\ 0 \end{bmatrix} \left[\frac{\text{m}}{\text{s}}\right]$$

5.) a.) sebességábra:





A test egy tetszőleges Q pontjának sebességét (mivel $\underline{\mathbf{v}}_P = \underline{\mathbf{0}}$) a

$$\underline{\mathbf{v}}_Q = \underline{\mathbf{v}}_P + \underline{\boldsymbol{\omega}} \times \underline{\mathbf{r}}_{PQ} = \underline{\boldsymbol{\omega}} \times \underline{\mathbf{r}}_{PQ}$$

összefüggés alapján számíthatjuk, tehát a sebességvektor merőleges - a sebességpólust a kiválasztott ponttal összekötő - helyvektorra, valamint

$$|\underline{\mathbf{v}}_Q| = |\underline{\boldsymbol{\omega}}|\,|\underline{\mathbf{r}}_{PQ}| \sin\frac{\pi}{2} = \omega\, l_{PQ},$$

tehát a sebesség nagysága arányos a szögsebességgel, és a pont pólustól mért távolságával.

Így a merev test sebességábráját megkaphatjuk

- az eredeti alakzat ($\underline{\boldsymbol{\omega}}$ irányú) 90^o-os elforgatásával, és
- az eredeti alakzat szakaszainak $|\underline{\boldsymbol{\omega}}|$-szoros „nyújtásával”.

Az ábra alapján is láthatjuk, hogy a legkisebb sebessége a sebességpólushoz legközelebb eső pontnak van, amit mi *C*-vel jelöltünk:

$$|\underline{\mathbf{v}}_C| = |\underline{\boldsymbol{\omega}} \times \underline{\mathbf{r}}_{PC}| = \omega\frac{\sqrt{3}}{2}l \approx 2{,}6\ [\mathrm{m/s}]$$

2.) b.) és 3.) b.)

$$\underline{\mathbf{a}}_B = \underline{\mathbf{a}}_A + \underline{\boldsymbol{\varepsilon}} \times \underline{\mathbf{r}}_{AB} - \omega^2\,\underline{\mathbf{r}}_{AB} = \underline{\boldsymbol{\varepsilon}} \times \underline{\mathbf{r}}_{AB} - \omega^2\,\underline{\mathbf{r}}_{AB}$$

$$\underline{\mathbf{a}}_B = a_B\,\underline{\mathbf{e}} = a_B\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ 0\end{bmatrix}\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right], \qquad \underline{\boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{bmatrix}0\\0\\\varepsilon\end{bmatrix},$$

$$\underline{\mathbf{a}}_B = \begin{bmatrix}a_{Bx}\\a_{By}\\0\end{bmatrix} = \varepsilon\begin{bmatrix}-y_{AB}\\x_{AB}\\0\end{bmatrix} - \omega^2\begin{bmatrix}x_{AB}\\y_{AB}\\0\end{bmatrix}$$

$$\text{x:}\qquad \frac{1}{2}a_B = -\frac{1}{2}l\,\varepsilon + \frac{\sqrt{3}}{2}\,l\,\omega^2$$

$$\text{y:}\qquad -\frac{\sqrt{3}}{2}\,a_B = -\frac{\sqrt{3}}{2}l\,\varepsilon - \frac{1}{2}l\,\omega^2,$$

$$\text{innen:}\ \ \varepsilon = \frac{\omega^2}{\sqrt{3}} \approx 57{,}74\left[\frac{rad}{s^2}\right], \qquad a_B = \frac{2\omega^2 l}{\sqrt{3}} \approx 34{,}64\left[\frac{m}{s^2}\right],$$

$$\underline{\boldsymbol{\varepsilon}} \approx \begin{bmatrix}0\\0\\57{,}74\end{bmatrix}\left[\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}^2}\right], \qquad \underline{\mathbf{a}}_B = a_B\,\underline{\mathbf{e}} = \frac{2\omega^2 l}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{\sqrt{3}}{2}\\0\end{bmatrix}\left[\frac{m}{s^2}\right] \approx \begin{bmatrix}17{,}32\\-30\\0\end{bmatrix}\left[\frac{m}{s^2}\right]$$

4.) $$\underline{\mathbf{a}}_P = \underline{\boldsymbol{\varepsilon}} \times \underline{\mathbf{r}}_{AP} - \omega^2\,\underline{\mathbf{r}}_{AP} = \varepsilon l\begin{bmatrix}-1\\0\\0\end{bmatrix} - \omega^2 l\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\varepsilon l\\-\omega^2 l\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-17{,}32\\-30\\0\end{bmatrix}\left[\frac{m}{s^2}\right]$$

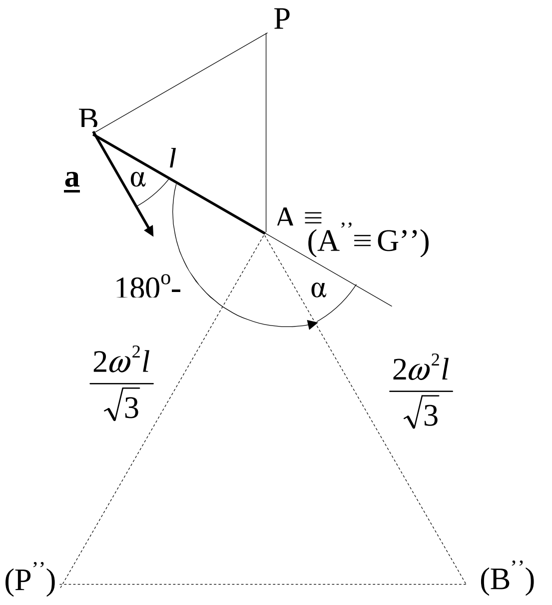
5.) b.) gyorsulásábra:

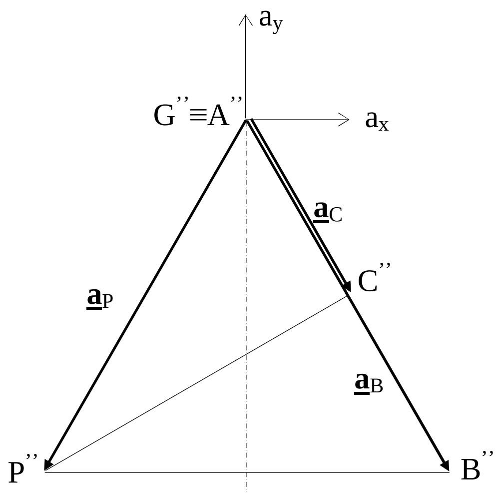
$$\text{ehhez:}\qquad \mathrm{tg}\alpha = \frac{\varepsilon}{\omega^2} = \frac{\omega^2}{\sqrt{3}\omega^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\left(\ \mathrm{tg}\alpha = \frac{\varepsilon}{\omega^2} \approx \frac{57{,}74}{100} = 0{,}5774\ \right)$$

$\alpha = 30^o$

$\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}$ irányú elforgatás $(180^o - \alpha) = (180^o - 30^o) = 150^o$ – kal :





Az előző számítások alapján:

$$\left|\underline{\mathbf{a}}_B\right| = a_B = \frac{2\omega^2 l}{\sqrt{3}}$$

$$\left|\underline{\mathbf{a}}_P\right| = a_P = l\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} = l\sqrt{\frac{1}{3}\omega^4 + \omega^4} = \frac{2\omega^2 l}{\sqrt{3}}$$