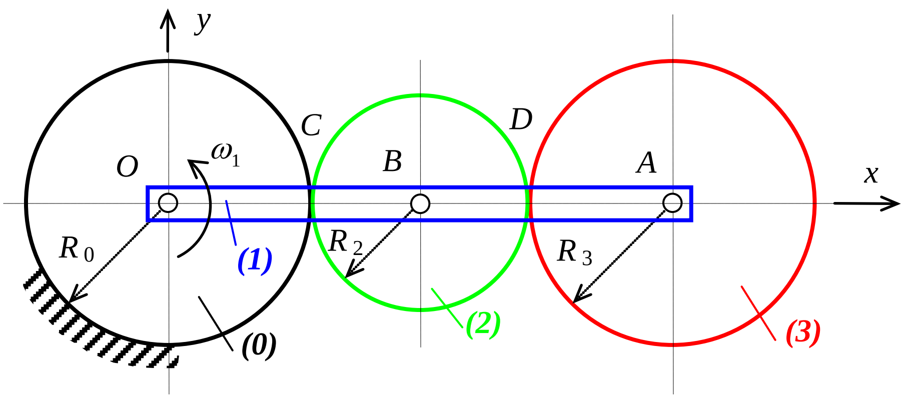
Bolygókerék mozgása

A FELADAT MEGFOGALMAZÁSA:

A vizsgált mechanizmus három fogaskerékből, és a középpontjaikat összekötő merev rúdból áll. A *(0)* jelű fogaskerék térfix, vagyis nem mozog a környezethez képest. Az *(1)*-es jelű rudat forgatjuk az *O* ponton átmenő, a mozgás síkjára merőleges tengely körül ω_1 szögsebességgel.

Adatok: ω_1, R_0, R_2, R_3



Állapítsuk meg, hogy mi a *(3)*-as jelű kerék elemi és véges mozgása, ha az álló keréknek és a *(3)*-as jelű keréknek egyforma a sugara: $R_0 = R_3$.

MEGOLDÁS:

Elemi mozgás: a vizsgált merev test egy pillanatnyi konfigurációjához rendelhető fogalom. A test egy tetszőleges *A* pontja sebességének $\left(\underline{v}_A\right)$ és a test szögsebességének $\left(\underline{\omega}\right)$ segítségével határozható meg.
Az alábbi ***négy eset*** lehetséges:

Ha $\underline{v}_A \cdot \underline{\omega} = 0$:

elemi nyugalom: $\underline{v}_A = \underline{0}$ és $\underline{\omega} = \underline{0}$

elemi forgás: $\underline{v}_A = \underline{0}$ és $\underline{\omega} \neq \underline{0}$, az *A* pont rajta van a pillanatnyi forgástengelyen

$\underline{v}_A \neq \underline{0}$ és $\underline{\omega} \neq \underline{0}$, és $\underline{v}_A \perp \underline{\omega}$, az *A* pont a forgástengelyen kívül van

elemi haladás: $\underline{v}_A \neq \underline{0}$ és $\underline{\omega} = \underline{0}$

Ha $\underline{v}_A \cdot \underline{\omega} \neq 0$:

elemi csavarmozgás (általános mozgás)

Véges mozgás: egy véges időintervallumbeli *t* időpontokhoz tartozó elemi mozgások sorozata. A fenti négy elemi mozgásból elvileg végtelen sok ilyen sorozat konstruálható, de ezek közül csak kevésnek van fizikailag értelme és gyakorlati jelentősége. Névvel illetni és számon tartani azokat szokás, amelyeknek van gyakorlati alkalmazásuk. Ezek esetében általában van valamilyen tulajdonság vagy mennyiség, ami az adott időintervallumban nem változik.

A feladatban a *(3)*-as jelű kerék mozgásállapotát vizsgáljuk.

$\underline{v}_A = ?$ és $\underline{\omega}_3 = ?$

$\underline{v}_A$ meghatározása:

A kerék középpontjának, *A*-nak a sebessége megegyezik a rúd *A* pontjának sebességével, mert itt csuklóval kapcsolódik egymáshoz a két test. A rúd *A* pontja a rúd hosszával megegyező, $R_0 + 2 \cdot R_2 + R_3$ sugarú körpályán mozog *O* körül. Ezért az *A* pont sebessége a mozgás folyamán bármely helyzetben merőleges az *OA* szakaszra, nagysága pedig $v_A = \left(R_0 + 2 \cdot R_2 + R_3\right) \cdot \omega_1 \neq 0$.

$\underline{\omega}_3$ meghatározása:

a *(3)*-as kerék szögsebességének a meghatározása során három meggondolást fogunk felhasználni:

1. Egy merev test két pontjának a sebessége közötti kapcsolatot: $\underline{v}_B = \underline{v}_A + \underline{\omega} \times \underline{r}_{AB}$,
   vagyis „a test ***B***ármelyik pontjának a sebessége egyenlő egy ***A***kármelyik másik pontjának a sebességével plusz a test szögsebessége és a két pontot összekötő helyvektor vektori szorzata".
2. Ha egy pont egyszerre pontja két merev testnek, akkor annak a pontnak kétféleképpen írható fel a sebessége: először az egyik testhez tartozónak tekintve, majd a másik testhez tartozónak tekintve. Az így felírt sebességek egymással egyenlők. Például: csuklós kapcsolat két test között.
3. Két test csúszásmentes érintkezésekor az érintkezési pont mint az egyik testhez tartozó pont pillanatnyi sebessége ugyanaz, mint a vele fedésben lévő, de a másik testhez tartozó pont pillanatnyi sebessége. Például: gördülés.

<u>1. lépés</u>:

a *D* pont mint a *(2)*-es jelű kerék pontja: $C, D \in (2)$:

$$\underline{v}_D = \underline{v}_C + \underline{\omega}_2 \times \underline{r}_{CD}$$

a *D* pont mint a *(3)*-as jelű kerék pontja: $A, D \in (3)$:

$$\underline{v}_D = \underline{v}_A + \underline{\omega}_3 \times \underline{r}_{AD}$$

Mivel a fogaskerekek gördülőkörei az érintkezési pontban csúszásmentesen gördülnek egymáson, a mindenkori érintkezési pontban a pillanatnyi sebességek egyenlők:

$$\underline{v}_D = \underline{v}_D$$

$$\cancel{\underline{v}_C} + \underline{\omega}_2 \times \underline{r}_{CD} = \underline{v}_A + \underline{\omega}_3 \times \underline{r}_{AD}$$

$\uparrow$

a *(0)* jelű kerék tartós nyugalomban van, minden pontjának, így *C* pontjának, vagyis annak a pontnak, amelyik pillanatnyilag érintkezik a *(2)*-es jelű kerékkel, 0 a sebessége. *C*-ben a *(2)* és *(0)* jelű fogaskerekek gördülőkörei csúszásmentesen érintkeznek, ezért a *C* ponttal pillanatnyilag érintkezésben lévő, a *(2)*-es jelű testhez tartozó pontnak is $\underline{0}$ a sebessége: $\underline{v}_C = \underline{0}$.

Az *(1)*-es jelű rúd és a *(3)*-as jelű kerék az *A* pontban csuklóval van összekapcsolva, $A \in (1),(3)$, ezért $\underline{v}_A = \underline{v}_A$.

$O, A \in (1)$, ezért: $\underline{v}_A = \cancel{\underline{v}_O} + \underline{\omega}_1 \times \underline{r}_{OA}$

$\uparrow$

$\underline{v}_O = \underline{0}$, mert a rúd O pontja tartós nyugalomban van.

2. lépés:

A fentiek alapján a D pont kétféleképpen felírt sebessége egyenlő:

$$\underline{\omega}_2 \times \underline{r}_{CD} = \underline{\omega}_1 \times \underline{r}_{OA} + \underline{\omega}_3 \times \underline{r}_{AD}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \cdot R_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \cdot R_2 + R_0 + R_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -R_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\omega_2 \cdot 2 \cdot R_2 = \omega_1 \cdot \left(2 \cdot R_2 + R_0 + R_3\right) - \omega_3 \cdot R_3$$

Ebből az egyenletből ki kell küszöbölni ω_2-t , hogy ω_3 kifejezhető legyen a rúd szögsebességének és a sugaraknak a függvényében. Ehhez:

3. lépés:

tekintsük a *B* pontot, ami pontja a rúdnak is és a *(2)*-es jelű keréknek is, mert *B*-ben csuklóval vannak összeerősítve:

a *B* pont mint a *(2)*-es jelű kerék pontja: $C, B \in (2)$:

$$\underline{v}_B = \cancel{\underline{v}_C} + \underline{\omega}_2 \times \underline{r}_{CB}$$

a *B* pont mint az *(1)*-es jelű kerék pontja: $A, B \in (1)$:

$$\underline{v}_B = \cancel{\underline{v}_O} + \underline{\omega}_1 \times \underline{r}_{OB}$$

$\underline{v}_C = \underline{0}$ és $\underline{v}_O = \underline{0}$ magyarázatát ld. az 1. lépésben.

A *B* pont kétféleképpen felírt sebessége egyenlő: $\underline{v}_B = \underline{v}_B$

$$\underline{\omega}_2 \times \underline{r}_{CB} = \underline{\omega}_1 \times \underline{r}_{OB}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} R_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} R_0 + R_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\omega_2 \cdot R_2 = \omega_1 \cdot \left(R_0 + R_2\right)$$

$$\omega_2 = \frac{\omega_1 \cdot \left(R_0 + R_2\right)}{R_2}$$

4. lépés:

A 2. lépésben kapott egyenletbe beírjuk ω_2-nek a 3. lépésben kapott kifejezését:

$$\frac{\omega_1 \cdot \left(R_0 + R_2\right)}{R_2} \cdot 2 \cdot R_2 = \omega_1 \cdot \left(2 \cdot R_2 + R_0 + R_3\right) - \omega_3 \cdot R_3$$

majd kifejezzük belőle ω_3-t:

$$\omega_3 = \frac{R_3 - R_0}{R_3} \cdot \omega_1$$

Ha az álló keréknek és a *(3)*-as jelű keréknek egyforma a sugara, $R_0 = R_3$, akkor $\underline{\omega}_3 = \underline{0}$.
Ez azt jelenti, hogy a *(3)*-as jelű kerék elemi mozgása a vázolt konfigurációban ***elemi haladás***.
$\left(\underline{v}_A \neq \underline{0} \text{ és } \underline{\omega}_3 = \underline{0}\right)$

Ha a kerék mozgását valamely időintervallumban tekintjük, akkor a fenti megállapítás annak minden pillanatára igaz, ezért a *(3)*-as jelű kerék véges mozgása ***haladó mozgás*** vagy ***tranzláció***.

Másképpen fogalmazva:

a kerék a mozgása folyamán nem forog, a szögsebessége nulla, vagyis a térbeli irányítottsága nem változik a vizsgált időintervallumban. Ha a *(3)*-as jelű keréken bejelölünk egy egyenes szakaszt, ami az álló környezet egy egyenes szakaszával párhuzamos, akkor ez a két szakasz a rúd forgatása folyamán mindvégig párhuzamos marad egymással. Ez pontosan azt jelenti, hogy a *(3)*-as jelű kerék nem forog.

Megjegyzések:

1. A *(3)*-as jelű kerék természetesen forog a *(2)*-es jelű kerékhez képest is és a rúdhoz képest is. A *merev test szögsebessége*, ha mást nem mondunk, hallgatólagosan az állónak tekintett környezethez képesti szögsebességet jelenti. A *(3)*-as jelű kerék *az állónak tekintett környezethez képest* nem forog.
2. A *(3)*-as jelű kerék mozgása felfogható két mozgás szuperpozíciójaként: a középpontja körbe jár az *O* pont körül, mint a rúd *A* pontja, miközben a kerék forog az *A* középpontján átmenő, saját szimmetriatengelye körül:
   $\underline{\omega}_{\mathbf{3}/0} = \underline{\omega}_{\mathbf{1}/0} + \underline{\omega}_{\mathbf{3}/\mathbf{1}}$
   Ebből következik, hogy $R_0 = R_3$ esetén a *(3)*-as jelű kerék szögsebessége a rúdhoz képest ugyanakkora, de ellentétes irányú, mint a rúdnak az álló környezethez képesti szögsebessége:
   $\underline{\omega}_{\mathbf{3}/0} = \underline{0} \quad \rightarrow \quad \underline{\omega}_{\mathbf{3}/\mathbf{1}} = -\underline{\omega}_{\mathbf{1}/0}$