Házi feladat – megoldási segédlet
Merev test, kinematika, térbeli mozgás
Elektromos motor

A test (rotor: a motor a tárcsával: egy merev testet alkot) forgása két részforgásból tevődik össze:

1. *n* állandó fordulatszámmal forog a saját szimmetriatengelye körül. Ebből az *s* jelű tengely körüli forgás szögsebessége:

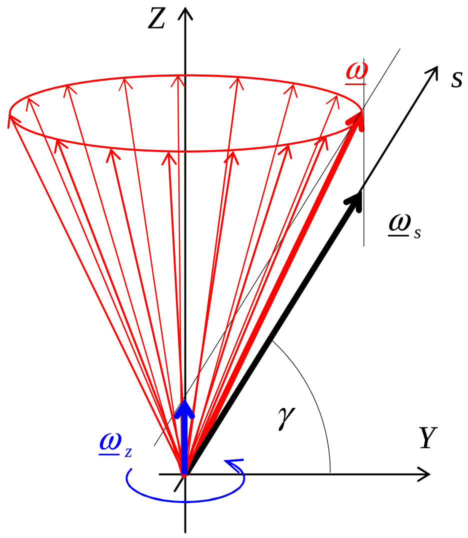
$$1\left[\frac{\text{ford}}{\text{perc}}\right]=\frac{2\pi[\text{rad}]}{60[\text{sec}]} \qquad \rightarrow \qquad \omega_s = 240\cdot\frac{2\pi}{60}=25{,}13\left[\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right]$$

2. részforgás: a térfix *Z* tengely körüli forgás szögsebessége: $\omega_z = 30\cdot\frac{2\pi}{60}=3{,}14\left[\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right]$

A test szögsebessége e két részforgás eredője. A test $\underline{\omega}$ szögsebességvektora a két szögsebesség vektori összege: (az összeadást csak úgy lehet elvégezni, ha mindkét vektort ugyanabban a koordinátarendszerben írjuk fel):

$$\underline{\omega}=\underline{\omega}_s+\underline{\omega}_z$$

$$\underline{\omega}=\begin{bmatrix}0\\ \omega_s\cos\gamma\\ \omega_s\sin\gamma\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ \omega_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 12{,}57\\ 24{,}91\end{bmatrix}\left[\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right]$$



Megjegyzés a szóhasználatra vonatkozóan:

a ***szögsebesség*** szót több értelemben használjuk.
Pontnak körpályán való mozgása esetén a szögsebességet a szögkoordináta időbeli változását, vagyis idő szerinti deriváltját jelentő skalár mennyiségként definiáljuk. Hasonlóan: egy merev test álló tengely körüli forgása esetén is ezt az értelmezést használjuk. Merev test álló tengely körüli forgása esetén vektorként is értelmezhetjük, ha a skalár szögsebességet a forgástengely bázisegységvektorával szorozva vektorként fogjuk fel. Ennek a szögsebességvektornak az iránya állandó a mozgás folyamán. Ezt úgy is mondhatjuk, hogy merev test álló tengely körüli forgása esetén a szögsebességvektor hatásvonala térfix.

Merev test általános mozgása esetén a test térbeli orientációjának időbeli változását is szögsebességnek nevezzük, nincs rá másik szó. Ez utóbbi esetben a szögsebesség mindig vektormennyiség. Deriválásakor nem csak a nagyságának, hanem az irányának a változását is figyelembe kell venni, deriváltja szintén vektor, a merev test szöggyorsulásának nevezzük és $\underline{\varepsilon}$ -nal jelöljük.

A kétféle értelmezés különböző, de kapcsolatba hozhatók egymással. (ld. előadáson elhangzottak)

Van egy harmadik használata is a *szögsebesség* szónak: ha egy forgásszimmetrikus test a saját szimmetriatengelye körül forog, és ez a szimmetriatengely nincs nyugalomban, hanem mozog, akkor a saját tengely körüli forgás időbeli szögváltozását az álló tengely körüli forgáshoz hasonlóan ekkor is szögsebességnek nevezzük. Ekkor ez a test egy részforgásának a szögsebessége. A pörgettyűmozgás kinetikájának tárgyalásánál pontosítjuk majd ezt a részforgást, és lesz rá külön elnevezés: spin vagy rotáció.

Mivel a merev test sebességállapota matematikailag redukált vektorkettőssel írható le, a test nyugvó vagy inerciarendszerhez képesti mozgásának szögsebessége részforgások összegére bontható, és fordítva: ha a test mozgása felfogható részforgások szuperpozíciójaként (pl. több tengely körüli forgások egyidejűleg), akkor a részforgások szögsebessége vektorilag összegezhető, és ezt az eredő szögsebességvektor nevezzük a merev test szögsebességének. Általában ha csak a *merev test szögsebességé*ről vagy *szögsebességvektorá*ról beszélünk, akkor hallgatólagosan mindig az álló rendszerhez képesti teljes szögsebességet értjük alatta. A merev test szögsebessége és szöggyorsulása hallgatólagosan mindig nyugalomban lévő vonatkoztatási rendszerhez (kinetikában: inerciarendszerhez) képesti mozgáshoz tartozik.

A rotor **pillanatnyi mozgásának** megállapításához a sebességállapotot megadó kinematikai vektorkettős skalárinvariánsát kell kiszámítani:

$\left[\underline{\omega}, \underline{v}_O\right]_O \quad \rightarrow \quad I = \underline{\omega} \cdot \underline{v}_O = 0$ úgy, hogy $\underline{\omega} \neq \underline{0}$ *és* $\underline{v}_O = \underline{0} \quad \rightarrow$ pillanatnyi forgás

O rajta van a pillanatnyi forgástengelyen

Az O pont a nyugalomban lévő környezethez rögzített X,Y,Z koordinátarendszer origója, egyben pontja a rotornak is, nyugalomban lévő pontja, ezért nulla a sebessége.

A rotor mozgása mint **véges mozgás**:
Minden pillanatban pillanatnyi forgás, és a szögsebességvektor hatásvonala minden pillanatban átmegy az O térfix ponton, ezért **gömbi mozgás** vagy pörgettyűmozgás.

A rotor **szöggyorsulásának** meghatározása:

A merev test szöggyorsulása a szögsebességének idő szerinti deriváltja. **Ha a szögsebességvektor abszolút értéke állandó**, akkor a szögsebességvektor idő szerinti deriválását elvégezhetjük algebrai művelettel is: vektoriálisan megszorozzuk balról egy vektorral: azzal a szögsebességvektorral, amelyikkel a deriválandó szögsebességvektor forog.

Ez következik abból az analízisbeli tételből, hogy egy állandó abszolút értékű vektor-skalár függvénynek a deriváltja merőleges a függvényre – éppen ezt használtuk fel a **merev test szögsebessége** fogalmának a bevezetéséhez – ott a merev test két pontját, A-t és B-t összekötő helyvektor, $\underline{r}_{AB}$ deriváltját írtuk fel $\dot{\underline{r}}_{AB} = \underline{\omega} \times \underline{r}_{AB}$ alakban. Az $\underline{r}_{AB}$ helyvektor abszolút értéke állandó, a vizsgált merev testtel együtt mozog, azon van rajta, tehát a deriválandó $\underline{r}_{AB}$ állandó abszolút értékű vektor a test szögsebességével forog.

Jelen példában a deriválandó $\underline{\omega}$ vektor $\underline{\omega}_z$ szögsebességgel forog a Z tengely körül.

Ekkor: $\underline{\varepsilon} = \dot{\underline{\omega}} = \underline{\omega}_z \times \underline{\omega}$

$$\underline{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_s \cos\gamma \\ \omega_z + \omega_s \sin\gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\omega_z \omega_s \cos\gamma \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -39{,}48 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}^2}\right]$$

Megjegyzés:
Alkalmazva a „Mozgás leírása egymáshoz képest mozgó vonatkoztatási rendszerekben” c. fejezetben megismert összefüggést:
Ha a nyugalomban lévő környezet, vagyis az álló vonatkoztatási rendszer a (0) jelű test, a motorház az (1)-es jelű test, a vizsgált rotor pedig a (2)-es jelű test, akkor

$$\underline{\varepsilon}_{20} = \underline{\varepsilon}_{10} + \underline{\varepsilon}_{21} + \underline{\omega}_{10} \times \underline{\omega}_{21}$$

ahol:

$\underline{\varepsilon}_{20} = \underline{\varepsilon}$

$\underline{\varepsilon}_{10} = \underline{0}$, mert a motorház egyenletesen forog a térfix Z tengely körül

$\underline{\varepsilon}_{21} = \underline{0}$, mert a forgórész a házban egyenletesen forog

$\underline{\omega}_{10} = \underline{\omega}_z$ ugyanaz, más jelöléssel (a motorház szögsebessége az álló környezethez képest)

$\underline{\omega}_{21} = \underline{\omega}_s$ ugyanaz, más jelöléssel (a rotor szögsebessége a motorházhoz képest)

ezzel:

$$\underline{\varepsilon} = \underline{\omega}_z \times \underline{\omega}_s$$

Ez ugyanaz, mint az előbb felírt $\underline{\varepsilon} = \dot{\underline{\omega}} = \underline{\omega}_z \times \underline{\omega}$ egyenlet, ugyanis

$$\underline{\varepsilon} = \dot{\underline{\omega}} = \underline{\omega}_z \times \underline{\omega} = \underline{\omega}_z \times \left(\underline{\omega}_z + \underline{\omega}_s\right) = \underline{\omega}_z \times \underline{\omega}_s$$

$$\underline{v}_A = \underbrace{\underline{v}_O}_{=\underline{0}} + \underline{\omega} \times \underline{r}_{OA} \qquad \underline{r}_{OA} = \begin{bmatrix} -R \\ \overline{OC} \cdot \cos\gamma \\ \overline{OC} \cdot \sin\gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 \\ 15 \\ 25{,}98 \end{bmatrix} \text{cm}$$

$$\underline{v}_A = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_s \cos\gamma \\ \omega_s \sin\gamma + \omega_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -R \\ \overline{OC} \cdot \cos\gamma \\ \overline{OC} \cdot \sin\gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cancel{\overline{OC} \cdot \omega_s \cdot \sin\gamma \cdot \cos\gamma} - \overline{OC} \cdot \cos\gamma \cdot (\cancel{\omega_s \sin\gamma} + \omega_z) \\ -R \cdot (\omega_s \sin\gamma + \omega_z) \\ R \cdot \omega_s \cos\gamma \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\underline{v}_A = \begin{bmatrix} -47{,}12 \\ -249{,}07 \\ 125{,}60 \end{bmatrix} \frac{\text{cm}}{\text{s}}}$$

$$\underline{a}_A = \underbrace{\underline{a}_O}_{=\underline{0}} + \underline{\varepsilon} \times \underline{r}_{OA} + \underline{\omega} \times \underbrace{(\underline{\omega} \times \underline{r}_{OA})}_{=\underline{v}_A}$$ [1]

$$\underline{a}_A = \begin{bmatrix} -\omega_z \cdot \omega_s \cdot \cos\gamma \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -R \\ \overline{OC} \cdot \cos\gamma \\ \overline{OC} \cdot \sin\gamma \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_s \cos\gamma \\ \omega_s \sin\gamma + \omega_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -\overline{OC} \cdot \cos\gamma \cdot \omega_z \\ -R \cdot (\omega_s \sin\gamma + \omega_z) \\ R \cdot \omega_s \cos\gamma \end{bmatrix}$$

$$\underline{a}_A = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_z \cdot \omega_s \cdot \overline{OC} \cdot \cos\gamma \cdot \sin\gamma \\ -\omega_z \cdot \omega_s \cdot \overline{OC} \cdot \cos^2\gamma \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_s^2 \cdot R \cdot \cos\gamma + R \cdot (\omega_s \sin\gamma + \omega_z)^2 \\ -\overline{OC} \cdot \cos\gamma \cdot \omega_z \cdot (\omega_s \sin\gamma + \omega_z) \\ \omega_z \cdot \omega_s \cdot \overline{OC} \cdot \cos^2\gamma \end{bmatrix}$$

$$\underline{a}_A = \begin{bmatrix} R \cdot (\omega_s^2 + \omega_z^2) + 2R \cdot \omega_s \cdot \omega_z \cdot \sin\gamma \\ -\overline{OC} \cdot \omega_z^2 \cdot \cos\gamma \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\underline{a}_A = \begin{bmatrix} 7782{,}82 \\ -148{,}04 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}^2}}$$

[1] Általánosan nem igaz, hogy $\underline{v}_A = \underline{\omega} \times \underline{r}_{OA}$, csak akkor, ha $\underline{v}_O = \underline{0}$. Jelen esetben ez fennáll.