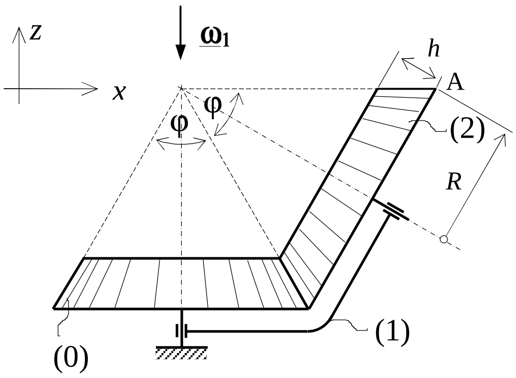
HÁZI FELADAT
Merev test kinematikája (térbeli mozgás)



Adatok:

$R = 0{,}5$ [m]
$\varphi = 60^o$
$\omega_1 = 6$ [rad/s]

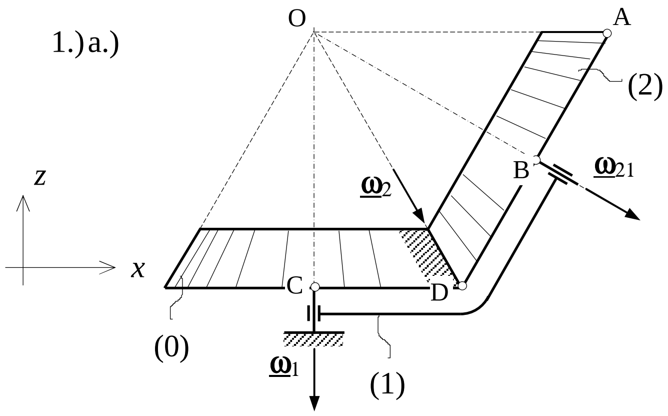
Az ábrán feltüntetett kúpkerekek közül a (2) jelű tisztán gördül a nyugalomban levő (0) jelű keréken. A (2) jelű kerék mozgását az (1) jelű kar biztosítja, amely az ábrán feltüntetett értelmű, *állandó nagyságú* $\underline{\omega}_1$ szögsebességgel forog a rögzített függőleges tengely körül.

Feladat:

1.) Határozzuk meg a (2) jelű kerék vázolt helyzetéhez tartozó
   a.) szögsebesség vektorát ($\underline{\omega}_2$ = ?) és
   b.) szöggyorsulás vektorát ($\underline{\varepsilon}_2$ = ?)
2.) Állapítsuk meg, hogy milyen elemi mozgást végez a (2) jelű kúpkerék.
   Indokoljuk a választ.
3.) Számítsuk ki a (2) jelű kerék „A” pontjának pillanatnyi
   a.) sebességét ($\underline{v}_A$ = ?), valamint
   b.) gyorsulását ($\underline{a}_A$ = ?).
4.) Határozzuk meg a pillanatnyi nyugalomban lévő D pont gyorsulását.

Megoldás: Jelölje $\underline{\boldsymbol{\omega}}_{21}$ a 2-es test 1-hez viszonyított szögsebességét, és így (mivel az *OD* tengely a (2)-es test pillanatnyi forgástengelye, $\underline{\boldsymbol{\omega}}_{2}$ párhuzamos vele):

1.) a.)



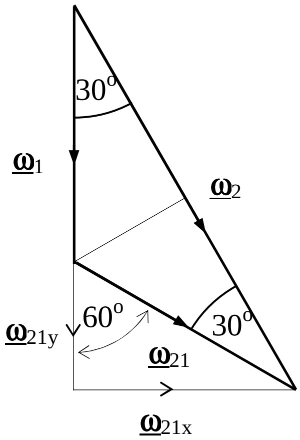
$$\underline{\boldsymbol{\omega}}_2 = \underline{\boldsymbol{\omega}}_1 + \underline{\boldsymbol{\omega}}_{21}$$

$$|\,\underline{\boldsymbol{\omega}}_{21}| = |\,\underline{\boldsymbol{\omega}}_1| = 6\ \left[\frac{rad}{s}\right]$$

A vázolt helyzetben:

$$\underline{\boldsymbol{\omega}}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -6 \end{bmatrix}\left[\frac{rad}{s}\right], \quad \underline{\boldsymbol{\omega}}_{21} = \omega_{21}\begin{bmatrix} \sin 60^o \\ 0 \\ -\cos 60^o \end{bmatrix} = \frac{6}{2}\begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}\left[\frac{rad}{s}\right]$$

$$\underline{\boldsymbol{\omega}}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -6 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\sqrt{3} \\ 0 \\ -9 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 5{,}196 \\ 0 \\ -9 \end{bmatrix}\left[\frac{rad}{s}\right],$$



vagy:

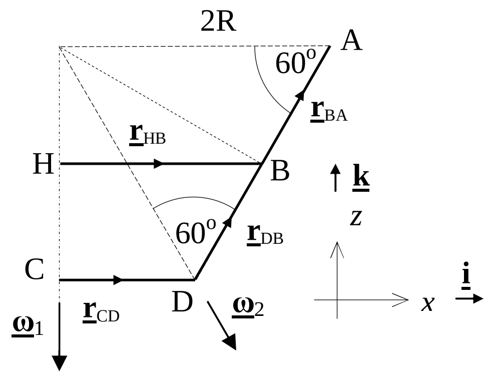
$$|\,\underline{\boldsymbol{\omega}}_2| = \omega_2 = 2\,\omega_1 \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}\ \left[\frac{rad}{s}\right] \approx 10{,}39\ \left[\frac{rad}{s}\right]$$

$$\underline{\boldsymbol{\omega}}_2 = \omega_2 \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -\sqrt{3} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 5{,}196 \\ 0 \\ -9 \end{bmatrix}\left[\frac{rad}{s}\right],$$

vagy:

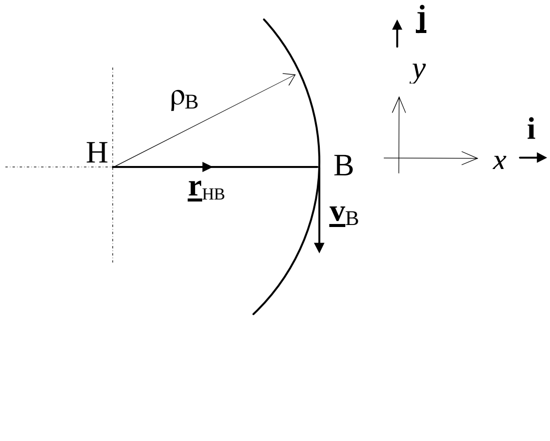
$$\underline{\mathbf{v}}_B = \underline{\mathbf{v}}_D + \underline{\boldsymbol{\omega}}_2 \times \underline{\mathbf{r}}_{DB} = \underline{\mathbf{0}} + \underline{\boldsymbol{\omega}}_2 \times \underline{\mathbf{r}}_{DB}, \quad \text{ahol: } \underline{\boldsymbol{\omega}}_2 = \begin{bmatrix} \omega_{2x} \\ \omega_{2y} \\ \omega_{2z} \end{bmatrix}, \quad \underline{\mathbf{r}}_{DB} = \frac{1}{2}R\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$$\underline{\mathbf{v}}_B = \underline{\boldsymbol{\omega}}_2 \times \underline{\mathbf{r}}_{DB} = \begin{vmatrix} \underline{\mathrm{i}} & \underline{\mathrm{j}} & \underline{\mathrm{k}} \\ \omega_{2x} & \omega_{2y} & \omega_{2z} \\ \frac{1}{2}R & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2}R \end{vmatrix} = \frac{1}{2}R\begin{bmatrix} \sqrt{3}\omega_{2y} \\ \omega_{2z} - \sqrt{3}\omega_{2x} \\ -\omega_{2y} \end{bmatrix}$$



Mivel a (2)-es test tengelyének mozgását az (1) jelű kar biztosítja, így a tengely *B* pontjának sebességét az (1)-es test szögsebességével is számíthatjuk:

$$\underline{\mathbf{v}}_B = \underline{\mathbf{v}}_C + \underline{\boldsymbol{\omega}}_1 \times \underline{\mathbf{r}}_{CB} = \underline{\mathbf{0}} + \underline{\boldsymbol{\omega}}_1 \times \underline{\mathbf{r}}_{CB}, \quad \text{ahol: } \underline{\mathbf{r}}_{CB} = \frac{1}{2}R\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix},$$



egyszerűbben:

$$\underline{\mathbf{v}}_B = \underline{\mathbf{v}}_H + \underline{\boldsymbol{\omega}}_1 \times \underline{\mathbf{r}}_{HB} = \underline{\mathbf{0}} + \underline{\boldsymbol{\omega}}_1 \times \underline{\mathbf{r}}_{HB}\,, \quad \text{ahol:} \quad \underline{\mathbf{r}}_{HB} = \frac{3}{2}R\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\underline{\mathbf{v}}_B = |\underline{\omega}_1||\underline{r}_{HB}|\begin{bmatrix}0\\-1\\0\end{bmatrix} = \omega_1\frac{3}{2}R\begin{bmatrix}0\\-1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\-4{,}5\\0\end{bmatrix}\left[\frac{m}{s}\right]$$

Vagyis a kétféle számítási mód összevetéséből:

$$\frac{1}{2}R\begin{bmatrix}\sqrt{3}\omega_{2y}\\ \omega_{2z}-\sqrt{3}\omega_{2x}\\ -\omega_{2y}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\-4{,}5\\0\end{bmatrix}\left[\frac{m}{s}\right]$$

így: x: $\omega_{2y} = 0$

y: $\frac{1}{2}R(\omega_{2z}-\sqrt{3}\omega_{2x}) = -4{,}5\left[\frac{m}{s}\right]$, innen: $\omega_{2z}-\sqrt{3}\omega_{2x} = -18\left[\frac{rad}{s}\right]$

z: $(\omega_{2y} = 0)$, geometriából: $-\frac{\omega_{2x}}{\omega_{2z}} = \text{tg}\,30^{o} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, tehát

$$\omega_{2z} = -9\left[\frac{rad}{s}\right], \text{ így}$$

$$\omega_{2x} = -\frac{\sqrt{3}}{3}\omega_{2z} = 3\sqrt{3}\left[\frac{rad}{s}\right] \approx 5{,}196\left[\frac{rad}{s}\right]$$

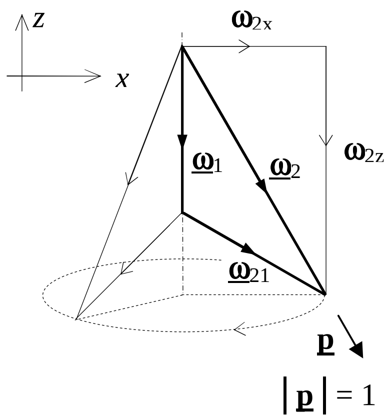
azaz: $$\underline{\boldsymbol{\omega}}_2 = \begin{bmatrix}3\sqrt{3}\\0\\-9\end{bmatrix}\left[\frac{rad}{s}\right] \approx \begin{bmatrix}5{,}196\\0\\-9\end{bmatrix}\left[\frac{rad}{s}\right]$$

1.) b.) $|\underline{\boldsymbol{\omega}}_2|$ = állandó, de $\underline{\boldsymbol{\omega}}_2$ iránya változik, ugyanis a 2-es test mozgása során annak szögsebességvektora $\underline{\boldsymbol{\omega}}_1$ szögsebességgel elfordul (forog) a függőleges tengely körül, így:

$$\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_2 = \underline{\boldsymbol{\omega}}_1 \times \underline{\boldsymbol{\omega}}_2 = \underline{\boldsymbol{\omega}}_1 \times \underline{\boldsymbol{\omega}}_{2x} = \omega_1\omega_{2x}\begin{bmatrix}0\\-1\\0\end{bmatrix} = 18\sqrt{3}\begin{bmatrix}0\\-1\\0\end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix}0\\-31{,}177\\0\end{bmatrix}\left[\frac{rad}{s^2}\right],$$

ugyanis ha $\underline{\boldsymbol{\omega}}_2 = \omega_2\underline{\mathbf{p}}$, akkor

$$\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_2 = \frac{d}{dt}\underline{\boldsymbol{\omega}}_2 = \frac{d}{dt}\omega_2\,\underline{\mathbf{p}} + \omega_2\frac{d}{dt}\underline{\mathbf{p}} = \underline{\mathbf{0}} + \omega_2(\underline{\boldsymbol{\omega}}_1 \times \underline{\mathbf{p}}) = \underline{\boldsymbol{\omega}}_1 \times \omega_2\underline{\mathbf{p}} = \underline{\boldsymbol{\omega}}_1 \times \underline{\boldsymbol{\omega}}_2$$



2.) A 2-es test *D* pontba redukált kinematikai vektorkettőse a vázolt helyzetben:

$$[\underline{\boldsymbol{\omega}}_2 ; \underline{\mathbf{v}}_D]_D = [\underline{\boldsymbol{\omega}}_2 ; \underline{\mathbf{0}}]_D \text{ , vagyis } \quad \underline{\boldsymbol{\omega}}_2 \cdot \underline{\mathbf{v}}_D = 0 \quad ,$$

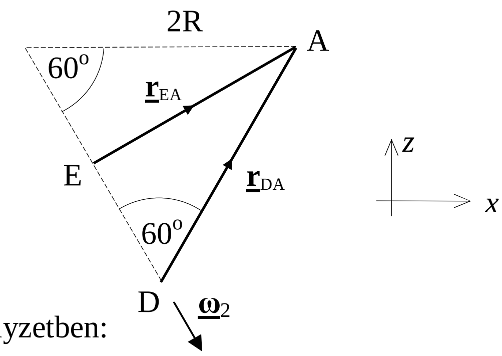
tehát a 2-es test mozgása <u>elemi forgó</u> mozgás.

3.) a.) $\underline{\mathbf{v}}_A = \underline{\mathbf{v}}_D + \underline{\boldsymbol{\omega}}_2 \times \underline{\mathbf{r}}_{DA} = \underline{\mathbf{0}} + \underline{\boldsymbol{\omega}}_2 \times \underline{\mathbf{r}}_{DA} = \underline{\boldsymbol{\omega}}_2 \times (2\,\underline{\mathbf{r}}_{DB}) = 2\,\underline{\boldsymbol{\omega}}_2 \times \underline{\mathbf{r}}_{DB} = 2\,\underline{\mathbf{v}}_B = \begin{bmatrix} 0 \\ -9 \\ 0 \end{bmatrix} \left[\frac{m}{s}\right]$

vagy:

$\underline{\mathbf{v}}_A = \underline{\mathbf{v}}_E + \underline{\boldsymbol{\omega}}_2 \times \underline{\mathbf{r}}_{EA} = \underline{\mathbf{0}} + \underline{\boldsymbol{\omega}}_2 \times \underline{\mathbf{r}}_{EA}$

$$\underline{\mathbf{v}}_A = -\omega_2 |\underline{r}_{EA}| \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = -\omega_2 2R \frac{\sqrt{3}}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -9 \\ 0 \end{bmatrix} \left[\frac{m}{s}\right],$$



A 2-es test *A* pontba redukált kinematikai vektorkettőse a vázolt helyzetben:

$$[\underline{\boldsymbol{\omega}}_2 ; \underline{\mathbf{v}}_A]_A = \left[\begin{bmatrix} 3\sqrt{3} \\ 0 \\ -9 \end{bmatrix} \left[\frac{rad}{s}\right] ; \begin{bmatrix} 0 \\ -9 \\ 0 \end{bmatrix} \left[\frac{m}{s}\right] \right] \text{, vagyis } \quad \underline{\boldsymbol{\omega}}_2 \cdot \underline{\mathbf{v}}_A = 0 \quad ,$$

tehát a 2-es test mozgása <u>elemi forgás.</u>.

b.) $\underline{\mathbf{a}}_A = \underline{\mathbf{a}}_B + \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_2 \times \underline{\mathbf{r}}_{BA} + \underline{\boldsymbol{\omega}}_2 \times (\underline{\boldsymbol{\omega}}_2 \times \underline{\mathbf{r}}_{BA}) = \underline{\mathbf{a}}_B + \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_2 \times \underline{\mathbf{r}}_{BA} + \underline{\boldsymbol{\omega}}_2 \times \underline{\mathbf{v}}_B$

$$\underline{\mathbf{a}}_B = \underline{\mathbf{a}}_H + \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_1 \times \underline{\mathbf{r}}_{HB} + \underline{\boldsymbol{\omega}}_1 \times (\underline{\boldsymbol{\omega}}_1 \times \underline{\mathbf{r}}_{HB}) = -\,\omega_1^2 \underline{\mathbf{r}}_{HB} = \begin{bmatrix} -27 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \left[\frac{m}{s^2}\right]$$

ahol: $\underline{\mathbf{a}}_H = \underline{\mathbf{0}}$, $\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_1 = \underline{\mathbf{0}}$, mivel $\underline{\boldsymbol{\omega}}_1$ = állandó,

vagy: A „*B*” pont $\rho_B = |\underline{\mathbf{r}}_{HB}| = \frac{3}{2}R$ sugarú köríven (körpályán) mozog állandó nagyságú $\underline{\mathbf{v}}_B$ sebességgel, így:

$\underline{\mathbf{a}}_B = \underline{\mathbf{a}}_{Bt} + \underline{\mathbf{a}}_{Bn} = \underline{\mathbf{a}}_{Bn} = a_{Bn}\underline{\mathbf{n}} = -a_{Bn}\,\underline{\mathbf{i}}$

$$a_{Bn} = \frac{v_B^2}{\rho_B} = \rho_B \omega_1^2 = \frac{3}{4} 36 \left[\frac{m}{s^2}\right] = 27 \left[\frac{m}{s^2}\right]$$

$$\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_2 \times \underline{\mathbf{r}}_{BA} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 0 & -\varepsilon_2 & 0 \\ \frac{1}{2}R & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2}R \end{vmatrix} = \frac{1}{2}R\varepsilon_2 \begin{bmatrix} -\sqrt{3} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{9}{2} \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix} \left[\frac{m}{s^2}\right] \approx \begin{bmatrix} -13{,}5 \\ 0 \\ 7{,}794 \end{bmatrix} \left[\frac{m}{s^2}\right]$$

$$\underline{\boldsymbol{\omega}}_2 \times \underline{\mathbf{v}}_B = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 3\sqrt{3} & 0 & -9 \\ 0 & -4{,}5 & 0 \end{vmatrix} \approx \begin{bmatrix} -40{,}5 \\ 0 \\ -23{,}383 \end{bmatrix} \left[\frac{m}{s^2} \right]$$

$$\underline{\mathbf{a}}_A \approx \begin{bmatrix} -27 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -13{,}5 \\ 0 \\ 7{,}94 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -40{,}5 \\ 0 \\ -23{,}383 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} -81 \\ 0 \\ -15{,}589 \end{bmatrix} \left[\frac{m}{s^2} \right]$$

4.) A pillanatnyi nyugalomban levő *D* pont gyorsulása:

$$\underline{\mathbf{a}}_D = \underline{\mathbf{a}}_B + \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_2 \times \underline{\mathbf{r}}_{BD} + \underline{\boldsymbol{\omega}}_2 \times (\underline{\boldsymbol{\omega}}_2 \times \underline{\mathbf{r}}_{BD}) = \underline{\mathbf{a}}_B + \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_2 \times (-\underline{\mathbf{r}}_{BA}) + \underline{\boldsymbol{\omega}}_2 \times (-\underline{\mathbf{v}}_B) =$$

$$= \underline{\mathbf{a}}_B - \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_2 \times \underline{\mathbf{r}}_{BA} - \underline{\boldsymbol{\omega}}_2 \times \underline{\mathbf{v}}_B \approx \begin{bmatrix} -27 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -13{,}5 \\ 0 \\ 7{,}94 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -40{,}5 \\ 0 \\ -23{,}383 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 27 \\ 0 \\ 15{,}589 \end{bmatrix} \left[\frac{m}{s^2} \right]$$