PONTSZERŰ TEST MOZGÁSA FORGÓ TÁRCSA HORNYÁBAN 1.
Megoldási segédlet
Anyagi pont dinamikája neminerciarendszerben

A pont mozgását a forgó tárcsán nyugalomban lévő megfigyelő szerint fogjuk leírni:
a forgó tárcsát választjuk vonatkoztatási rendszernek. (VR1)

A forgó tárcsa mozgásállapota az inerciarendszernek tekintett környezethez (VR0 = IR) képest:

Sebességállapot: $\underline{v}_\Omega = \underline{0}, \quad \underline{\omega}_{10} = \underline{\omega}$

Gyorsulásállapot: $\underline{a}_\Omega = \underline{0}, \quad \underline{\omega}_{10} = \underline{\omega}, \quad \underline{\varepsilon}_{10} = \underline{\varepsilon}$

A megfigyelt pont az *m* tömegű, pontszerűnek tekinthető test. Erre a testre fogjuk felírni a dinamika alaptételét a forgó tárcsán, vagyis a VR1-ben. Ebben a vonatkoztatási rendszerben a pont pályája egyenes, (csak a horonyban tud mozogni), ezért sebessége és gyorsulása horonyirányú:
$\underline{\beta} = \beta \cdot \underline{e}_\xi$ és $\underline{\alpha} = \alpha \cdot \underline{e}_\xi$

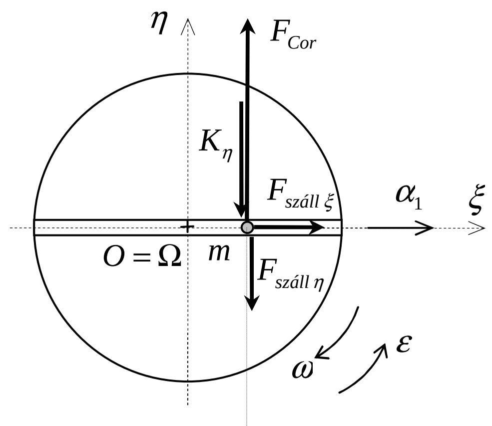
A forgó tárcsa mint vonatkoztatási rendszer NEM INERCIARENDSZER, mert az IR-hez képesti gyorsulásállapotát megadó vektorok nem mind nullák: $\underline{a}_\Omega = \underline{0}, \quad \underline{\omega}_{10} = \underline{\omega} \neq \underline{0}, \quad \underline{\varepsilon}_{10} = \underline{\varepsilon} \neq \underline{0}$

A dinamika alaptétele neminerciarendszerben, anyagi pontra:
A test mozgó VR-ben észlelt kinetikai vektora egyenlő a testre ható (más testekkel való kölcsönhatásból származó) VALÓDI erők eredőjével, plusz a VR mozgásából származó LÁTSZÓLAGOS erők eredőjével:

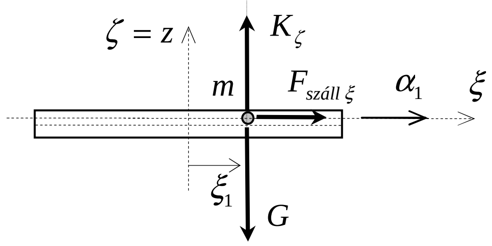
$$m \cdot \underline{\alpha}_1 = \underline{F} + \underline{F}_{tehetetlenségi}$$

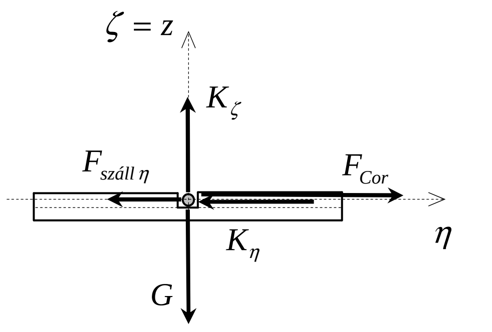
A példában a VALÓDI erők: a súlyerő és a horony oldalfaláról és fenekéről átadódó kontakterő

LÁTSZÓLAGOS erők: szállítóerő és Coriolis erő



1. A szabadtest ábrák:





2. $m \cdot \underline{a}_1 = \underline{G} + \underline{K} + \underline{F}_{száll} + \underline{F}_{Cor}$

ahol:

$\underline{K}$ a horonyról a testre átadódó kényszererő;

csak a horonyfalra merőleges (K_η) és a horonyfenékre merőleges (K_ζ) komponense van, nincs horonyirányú komponense, mert a test súrlódásmentesen mozog a horonyban

$$\underline{F}_{száll} = -m \cdot \underline{a}_{száll} = -m \cdot (\underline{a}_\Omega + \underline{\varepsilon} \times \underline{\rho} - \omega^2 \cdot \underline{\rho})$$

$$\underline{a}_{száll} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \varepsilon \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \xi_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \omega^2 \cdot \begin{bmatrix} \xi_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\omega^2 \cdot \xi_1 \\ \varepsilon \cdot \xi_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3,6 \\ 1,6 \\ 0 \end{bmatrix} m/s^2$$

$$\underline{F}_{Cor} = -m \cdot \underline{a}_{Cor} = -m \cdot 2 \cdot \underline{\omega} \times \underline{\beta}_1$$

$$\underline{a}_{Cor} = 2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\omega \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \beta_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \cdot \omega \cdot \beta_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -12 \\ 0 \end{bmatrix} m/s^2$$

ezeket beírva a dinamika alaptételének egyenletébe:

$$\begin{bmatrix} m \cdot \alpha_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -m \cdot g \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ K_\eta \\ K_\zeta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m \cdot \omega^2 \cdot \xi_1 \\ -m \cdot \varepsilon \cdot \xi_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \cdot m \cdot \omega \cdot \beta_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

3. A számértékekkel:

$$\begin{bmatrix} 0,8 \cdot \alpha_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0,8 \cdot 9,81 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ K_\eta \\ K_\zeta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,8 \cdot 3^2 \cdot 0,4 \\ -0,8 \cdot 4 \cdot 0,4 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \cdot 0,8 \cdot 3 \cdot 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

a.) $\alpha_1 = \omega^2 \cdot \xi_1 = 3^2 \cdot 0,4 = 3,6 \ \ m/s^2 \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{\underline{\alpha}_1 = 3,6 \ \underline{e}_\xi \ \ m/s^2}}$

b.) $0 = K_\eta - m \cdot \varepsilon \cdot \xi_1 + 2 \cdot m \cdot \omega \cdot \beta_1 \quad \rightarrow \quad K_\eta = F_{száll\ \eta} - F_{Cor} = 1,28 - 9,6 = -8,32 \ N$

$0 = -m \cdot g + K_\zeta \quad \rightarrow \quad K_\zeta = 0,8 \cdot 9,81 = 7,85 \ N$

$$\underline{K}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -8,32 \\ 7,85 \end{bmatrix} N$$

c.) A válasz az első vagy a harmadik szabadtest ábrából ill. a dinamika alaptételének η irányú vetületi egyenletéből - *b.) pont alatti első egyenlet* - olvasható ki.
Fizikailag: a tárcsával együtt mozgó megfigyelő értelmezése szerint:
a test η irányban nem mozog, az összes erő η irányú komponenseinek összege nulla.
Az η irányú tehetetlenségi erők ($F_{száll\ \eta}$ és F_{Cor}) eredőjével a horonyfal nyomása (K_η) tart egyensúlyt. A tehetetlenségi erők eredőjének iránya +η, ezért K_η iránya -η,
tehát a ***baloldali horonyfal*** nyomja a testet.

4.
Egy test mozgása csak egy másik testhez képest figyelhető meg, írható le. Ez a másik test (merev test) a VONATKOZTATÁSI RENDSZER. A VR ***fizikailag meghatározott fogalom***.
A KOORDINÁTARENDSZER konkrét számítások elvégzésére szolgáló ***matematikai segédkonstrukció***. A KR-t a VR-hez rögzítjük. Egy adott VR-hez végtelen sok KR rögzíthető.

A ***VR megválasztása*** kinematikában önkényes, kinetikában nem: a Newton axiómákból levezetett mechanikai törvények inerciaredszerben érvényesek. (Az IR olyan VR, amiben érvényes a tehetetlenség törvénye, *inerciarendszer* magyarul *tehetetlenségi rendszer*) Az IR kitüntetett VR: benne tehetetlenségi erők nem lépnek fel.
Valamely, egy IR-hez képest mozgó VR akkor NEM INERCIARENDSZER, ha a mozgó VR-nek mint merev testnek az IR-hez képesti gyorsulásállapotát megadó három vektor közül $\left(\underline{a}_{\Omega}, \underline{\omega}_{10}, \underline{\varepsilon}_{10}\right)$ legalább az egyik nem nulla. Ha ebben a VR-ben akarjuk felírni a dinamika alaptételét, akkor a más testekkel való kölcsönhatásból származó erőkhöz a VR mozgásállapotából származó látszólagos erőket hozzá kell adni.
Más-más mozgásállapotú VR-ekben más-más tehetetlenségi erők lépnek fel.

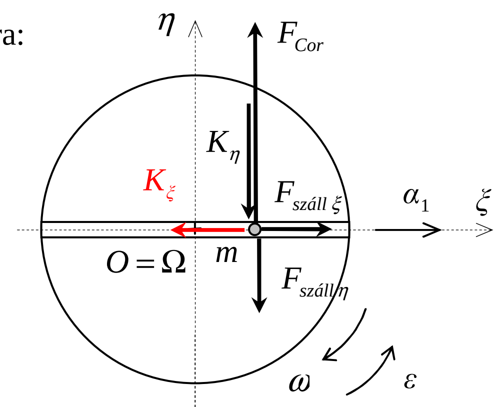
A ***KR megválasztása mindig önkényes***, célszerűségi, kényelmi szempontok alapján választjuk.

A feladatban úgy vettük fel a forgó tárcsán az $\{O;\ \xi, \eta, \zeta\}$ KR-t, hogy a ξ tengely minden pillanatban horonyirányban legyen, mert ebben kényelmes felírni a relatív sebességet és gyorsulást: $\underline{\beta} = \beta \cdot \underline{e}_{\xi}$ és $\underline{\alpha} = \alpha \cdot \underline{e}_{\xi}$

5.
A feladat megfogalmazása ugyanaz, a tárcsa mozgásállapota ugyanaz, a pont ugyanazon a ξ_1 helyen van a horonyban, a pillanatnyi relatív sebessége ($\underline{\beta}_1$) ugyanaz, mint az előbb, csak most a súrlódást figyelembe vesszük. Mozgásbeli súrlódással kell számolni, mert a test mozog a tárcsába vájt horonyban.
A horonyfalról és –fenékről a testre átadódó kényszererőnek lesz horonyirányú (ξ irányú) komponense. Ez a súrlódóerő. Értelme: sugárirányban „befelé” mutat, mert a test „kifelé” mozog.

$$F_{súrl} = K_{\xi}$$
$$F_{súrl} = \mu \cdot \left|K_{\eta}\right| + \mu \cdot \left|K_{\zeta}\right|$$

A szabadtest ábra:



A mozgásegyenlet a következőképpen módosul:

$$\begin{bmatrix} m \cdot \alpha_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -m \cdot g \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{\xi} \\ K_{\eta} \\ K_{\zeta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m \cdot \omega^2 \cdot \xi_1 \\ -m \cdot \varepsilon \cdot \xi_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \cdot m \cdot \omega \cdot \beta_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ebből a skaláregyenletek:

(1) $m \cdot \alpha_1 = K_\xi + m \cdot \omega^2 \cdot \xi_1$

(2) $0 = K_\eta - m \cdot \varepsilon \cdot \xi_1 + 2 \cdot m \cdot \omega \cdot \beta_1 \quad \rightarrow \quad K_\eta = m \cdot \varepsilon \cdot \xi_1 - 2 \cdot m \cdot \omega \cdot \beta_1 = -8{,}32\ N$

(3) $0 = -m \cdot g + K_\zeta \quad \rightarrow \quad K_\zeta = m \cdot g = 7{,}85\ N$

(2) és (3) felhasználásával: $F_{súrl} = \mu \cdot \left| K_\eta \right| + \mu \cdot \left| K_\zeta \right| = 1{,}62\ N$

Ezzel a kényszererő: $\underline{K} = \begin{bmatrix} -1{,}62 \\ -8{,}32 \\ 7{,}58 \end{bmatrix} N$

A tárcsával együtt mozgó megfigyelő által észlelt gyorsulás („relatív” gyorsulás):

(1) $\rightarrow \quad \alpha_1 = \frac{K_\xi}{m} + \omega^2 \cdot \xi_1 = \frac{-1{,}62}{0{,}8} + 3^2 \cdot 0{,}4 = 1{,}57\ m/s^2$

A relatív gyorsulás: $\underline{\alpha}_1 = \begin{bmatrix} 1{,}57 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} m/s^2$