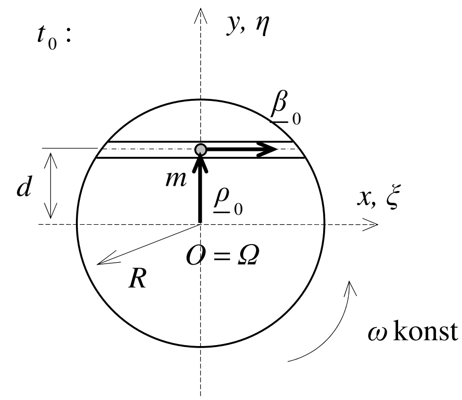
HÁZI FELADAT – megoldási segédlet
PONTSZERŰ TEST MOZGÁSA FORGÓ TÁRCSA HORNYÁBAN 2.
Anyagi pont dinamikája neminerciarendszerben

1.
A pont a tárcsán egyenes pályán mozog, mert a horony kényszert jelent a mozgása számára.
Az álló környezethez képest a pályagörbe egyenlete és a pont helyvektora az idő függvényében nem írható fel egyszerűen, így a kinematikai mennyiségek (sebesség, gyorsulás) sem. Ezért a pont mozgásának leírásához fel kell használni két, egymáshoz képest mozgó VR-ben felírható mennyiségek közötti kapcsolatokat.



Előkészítő számítások, megállapítások:

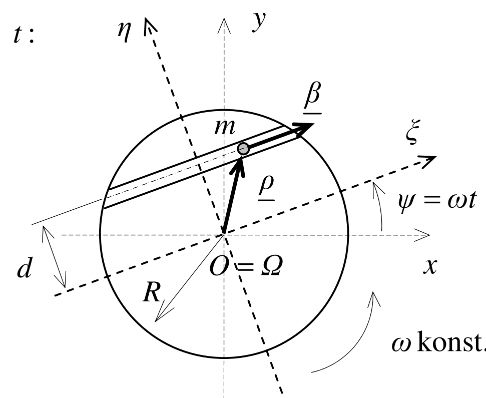
Az egyik VR a nyugvó környezet, inerciarendszer. (VR0 = IR).
A másik, hozzá képest mozgó VR a forgó tárcsa. (VR1)

A forgó tárcsa mint merev test mozgásállapota VR0-hoz képest:

Sebességállapot: $\underline{v}_\Omega = \underline{0}, \quad \underline{\omega}_{10} = \underline{\omega}$

Gyorsulásállapot: $\underline{a}_\Omega = \underline{0}, \quad \underline{\omega}_{10} = \underline{\omega} = konst, \quad \underline{\varepsilon}_{10} = \underline{0}$

A forgó tárcsa mint vonatkoztatási rendszer NEM INERCIARENDSZER, mert az IR-hez képesti gyorsulásállapotát megadó vektorok nem mind nullák:



$\underline{a}_\Omega = \underline{0}, \quad \underline{\omega}_{10} = \underline{\omega} \neq \underline{0}, \quad \underline{\varepsilon}_{10} = \underline{0}$

A VR-ekhez rögzített KR-ek definiálása:

VR0-hoz KR0: $\{O; x, y, z\}$

VR1-hez KR1: $\{O = \Omega; \xi, \eta, \zeta = z\}$

A megfigyelt test: az m tömegű, pontszerűnek tekintett test a horonyban mozoghat.
A t_0 időpontban adott $\underline{\rho}_0 = \underline{\rho}(t_0)$ helyzetből adott $\underline{\beta}_0 = \underline{\beta}(t_0)$ kezdősebességgel kezd mozogni a horonyban.

Határozzuk meg, hogy a pont HOGYAN mozog

a.) a VR1-hez képest (a tárcsán ülő megfigyelő szerint)
b.) a VR0-hoz képest (a nyugvó környezetből megfigyelve)

A „HOGYAN mozog” kérdés azt jelenti, hogy meg kell határozni a pont helyzetét, sebességét és a gyorsulását az idő függvényében. Vagyis:

a.) $\left[\underline{\rho}(t)\right]_{\xi,\eta,\zeta}, \quad \left[\underline{\beta}(t)\right]_{\xi,\eta,\zeta}, \quad \left[\underline{\alpha}(t)\right]_{\xi,\eta,\zeta}$

b.) $\left[\underline{r}(t)\right]_{x,y,z}, \quad \left[\underline{v}(t)\right]_{x,y,z}, \quad \left[\underline{a}(t)\right]_{x,y,z}$

A pont helyvektora, sebessége és gyorsulása a forgó tárcsán, a horonyban[1]:

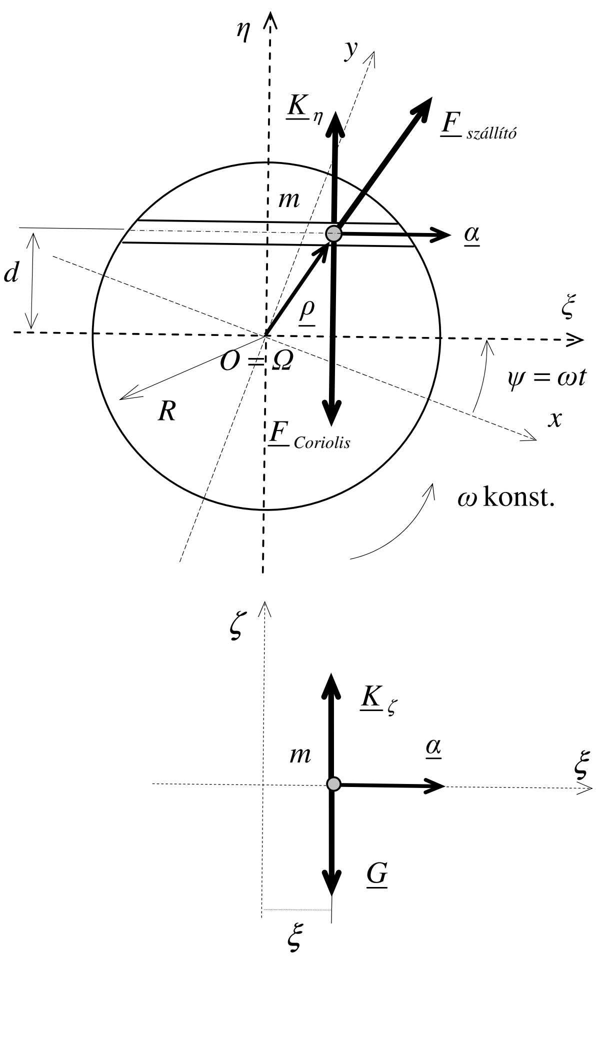
$$\underline{\rho}(t)=\begin{bmatrix}\xi(t)\\ d\\ 0\end{bmatrix}_{\xi,\eta,\zeta} \qquad \underline{\beta}(t)=\overset{*}{\underline{\rho}}(t)=\begin{bmatrix}\overset{*}{\xi}(t)\\ 0\\ 0\end{bmatrix}_{\xi,\eta,\zeta} \qquad \underline{\alpha}(t)=\overset{*}{\underline{\beta}}(t)=\overset{**}{\underline{\rho}}(t)=\begin{bmatrix}\overset{**}{\xi}(t)\\ 0\\ 0\end{bmatrix}_{\xi,\eta,\zeta}$$

Írjuk fel a dinamika alaptételét [2] a pontszerű testre a mozgó tárcsán ülő megfigyelő szerint:

$$m\cdot\underline{\alpha}=\underline{F}_{valódi}+\underline{F}_{tehetetlenségi}$$

A példában a valódi erők: a súlyerő (a Föld hatása), és a kontakterő (a horony hatása).
A tehetetlenségi erők: a szállítóerő és a Coriolis erő.

A szabadtest ábra:



[1] Jelölés: valamely mennyiség fölé írt csillag az idő szerinti deriválást jelenti a mozgó VR-ben. Az álló VR-beli idő szerinti deriválást a mennyiség fölé tett ponttal jelöljük.
[2] Szavakkal: a kinetikai vektor az adott VR-ben egyenlő a pontszerű testre ható összes erő vektori összegével. Inerciarendszerben az „összes erő” valódi kölcsönhatásból származik, vagyis az erők más testek hatásai a megfigyelt testre. Ha nem inerciarendszerben írjuk fel a dinamika alaptételét, akkor ehhez hozzá kell adni a vonatkoztatási rendszer mozgása miatt fellépő látszólagos vagy más néven tehetetlenségi erőket. Az egyenlet jobboldalán ekkor is az adott VR-ben észlelhető összes erő szerepel: a valódi erők és tehetetlenségi erők.

$$\underline{F}_{száll} = -m \cdot \underline{a}_{száll} = -m \cdot \left(\cancel{\underline{a}_{\Omega}} + \cancel{\underline{\varepsilon}} \times \underline{\rho} - \omega^2 \underline{\rho} \right) = m \cdot \omega^2 \cdot \begin{bmatrix} \xi(t) \\ d \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{F}_{Cor} = -m \cdot \underline{a}_{Cor} = -m \cdot 2 \cdot \underline{\omega} \times \underline{\beta} = -2 \cdot m \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \overset{*}{\xi}(t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = -2 \cdot m \cdot \omega \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \overset{*}{\xi}(t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ezekkel a mozgásegyenlet [3]:

$$\begin{bmatrix} m \cdot \overset{**}{\xi}(t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -m \cdot g \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ K_\eta \\ K_\zeta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m \cdot \omega^2 \cdot \xi(t) \\ m \cdot \omega^2 \cdot d \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \cdot m \cdot \omega \cdot \overset{*}{\xi}(t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

A kontakterő merőleges a horonyirányra, vagy ami ugyanaz: a kontakterő ξ irányú komponense nulla, mert a súrlódást elhanyagoltuk. (A sima érintkezés ideális kényszer.)

A mozgásegyenletnek megfelelő három skaláregyenlet:

$$(1) \qquad m \cdot \overset{**}{\xi}(t) = m \cdot \omega^2 \cdot \xi(t)$$

$$(2) \qquad 0 = K_\eta + m \cdot \omega^2 \cdot d - 2 \cdot m \cdot \omega \cdot \overset{*}{\xi}(t)$$

$$(3) \qquad 0 = -m \cdot g + K_\zeta$$

A (2)-es és a (3)-as egyenletből a kontakterő komponenseit lehet meghatározni.

Az (1)-es egyenlet a mozgásegyenlet horonyirányú vetületi egyenlete, vagyis a mozgást a horonyban leíró $\xi(t)$ mozgástörvényre vonatkozó differenciálegyenlet:

$$\overset{**}{\xi}(t) = \omega^2 \cdot \xi(t) \qquad \rightarrow \qquad \boxed{\overset{**}{\xi}(t) - \omega^2 \cdot \xi(t) = 0}$$

A kezdeti feltételek:

$$[1] \quad \xi(t=0) = 0$$

$$[2] \quad \overset{*}{\xi}(t=0) = \beta_0$$

A megoldást a következő alakban keressük: $\xi(t) = C \cdot e^{\lambda \cdot t}$

Deriváljuk egyszer: $\overset{*}{\xi}(t) = C \cdot \lambda \cdot e^{\lambda \cdot t}$

kétszer: $\overset{**}{\xi}(t) = C \cdot \lambda^2 \cdot e^{\lambda \cdot t}$

Helyettesítjük a differenciálegyenletbe: $C \cdot \lambda^2 \cdot e^{\lambda \cdot t} - \omega^2 \cdot C \cdot e^{\lambda \cdot t} = 0$

$$C \cdot e^{\lambda \cdot t} \cdot \left(\lambda^2 - \omega^2 \right) = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \pm \omega$$

[3] A dinamika alaptételének egyenletét mozgásegyenletnek is szokás nevezni, különösen akkor, amikor benne az időfüggés is fel van tüntetve. A mozgásegyenlet a helyzetvektorra vonatkozó másodrendű differenciálegyenlet.

A megoldás: $\xi(t) = C_1 \cdot e^{\omega \cdot t} + C_2 \cdot e^{-\omega \cdot t}$

$$\overset{*}{\xi}(t) = C_1 \cdot \omega \cdot e^{\omega \cdot t} - C_2 \cdot \omega \cdot e^{-\omega \cdot t}$$

A C_1 és C_2 konstansok meghatározása a kezdeti feltételekből:

$$[1] \rightarrow \quad 0 = C_1 + C_2 \quad \rightarrow \quad C_2 = -C_1$$

$$[2] \rightarrow \quad \beta_0 = C_1 \cdot \omega - C_2 \cdot \omega = 2 \cdot C_1 \cdot \omega \quad \rightarrow \quad C_1 = \frac{\beta_0}{2 \cdot \omega}, \quad C_2 = -\frac{\beta_0}{2 \cdot \omega}$$

Ezzel a pont helyzete a horonyban, az idő függvényében: (mozgástörvény a horonyban):

$$\underline{\underline{\xi(t)}} = \frac{\beta_0}{2 \cdot \omega} e^{\omega \cdot t} - \frac{\beta_0}{2 \cdot \omega} e^{-\omega \cdot t} = \underline{\underline{\frac{\beta_0}{\omega} \cdot \operatorname{sh} \omega t}}$$

2.
A pont horonyban való mozgását megadó helykoordináta, sebesség és gyorsulás:

$$\xi(t) = \frac{\beta_0}{\omega} \cdot \operatorname{sh} \omega t$$

$$\beta(t) = \overset{*}{\xi}(t) = \beta_0 \cdot \operatorname{ch} \omega t$$

$$\alpha(t) = \overset{**}{\xi}(t) = \beta_0 \cdot \omega \cdot \operatorname{sh} \omega t$$

A helyzet-, sebesség- és gyorsulásvektor a forgó tárcsához (VR1) rögzített KR1-ben:

$$\underline{\rho}(t) = \begin{bmatrix} \xi(t) \\ d \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\beta_0}{\omega} \cdot \operatorname{sh} \omega t \\ d \\ 0 \end{bmatrix}_{\xi,\eta,\zeta}$$

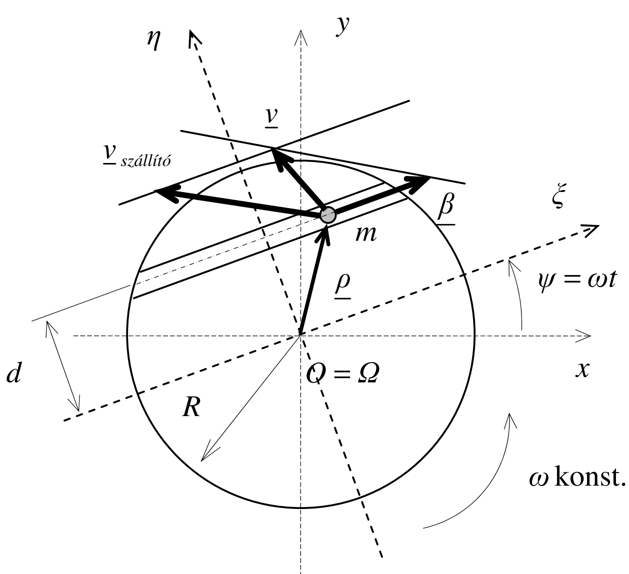
$$\underline{\beta}(t) = \begin{bmatrix} \overset{*}{\xi}(t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_0 \cdot \operatorname{ch} \omega t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{\xi,\eta,\zeta}$$

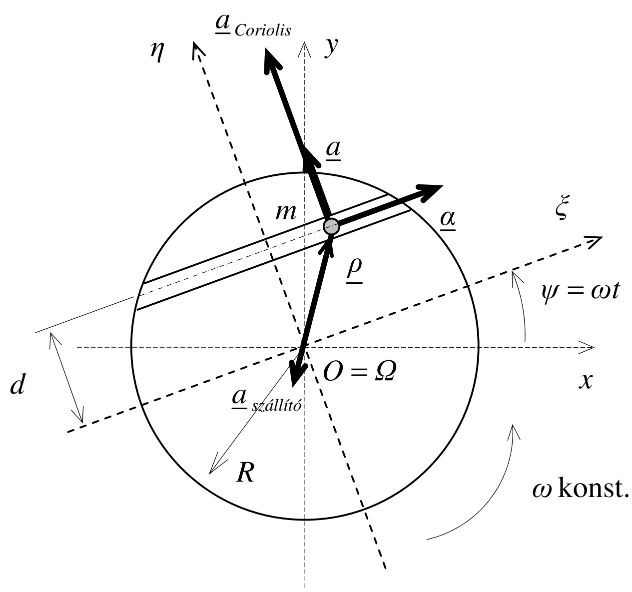
$$\underline{\alpha}(t) = \begin{bmatrix} \overset{**}{\xi}(t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_0 \cdot \omega \cdot \operatorname{sh} \omega t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{\xi,\eta,\zeta}$$

Ezzel meghatároztuk a pont mozgását a tárcsába vájt horonyban.

Az álló környezethez képesti sebesség és gyorsulás meghatározásához felírjuk a két, egymáshoz képest mozgó vonatkoztatási rendszerből megfigyelt sebességek (és gyorsulások) közötti kapcsolatot:

$$\underline{v}=\underline{\beta}+\underbrace{\underline{v}_{szállító}}_{=\overbrace{\cancel{\underline{v}_{\Omega}}+\underline{\omega}\times\underline{\rho}}}\qquad\qquad \underline{a}=\underline{\alpha}+\underbrace{\underline{a}_{szállító}}_{=\overbrace{\cancel{\underline{a}_{\Omega}}+\cancel{\underline{\varepsilon}}\times\underline{\rho}-\omega^{2}\underline{\rho}}}+\underbrace{\underline{a}_{Coriolis}}_{2\cdot\underline{\omega}\times\underline{\beta}}$$





$$\underline{r}(t)=\underline{\rho}(t)=\begin{bmatrix}\xi(t)\\ d\\ 0\end{bmatrix}_{\xi,\eta,\zeta}=\begin{bmatrix}\dfrac{\beta_0}{\omega}\cdot\operatorname{sh}\omega t\\ d\\ 0\end{bmatrix}_{\xi,\eta,\zeta}$$

$$\underline{v}(t)=\begin{bmatrix}\overset{*}{\xi}(t)\\ 0\\ 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ \omega\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}\xi(t)\\ d\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\overset{*}{\xi}(t)-\omega\cdot d\\ \omega\cdot\xi(t)\\ 0\end{bmatrix}_{\xi,\eta,\zeta}=\begin{bmatrix}\beta_0\cdot\operatorname{ch}\omega t-\omega\cdot d\\ \beta_0\cdot\operatorname{sh}\omega t\\ 0\end{bmatrix}_{\xi,\eta,\zeta}$$

$$\underline{a}(t)=\begin{bmatrix}\overset{**}{\xi}(t)\\ 0\\ 0\end{bmatrix}-\omega^2\cdot\begin{bmatrix}\xi(t)\\ d\\ 0\end{bmatrix}+2\cdot\begin{bmatrix}0\\ 0\\ \omega\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}\overset{*}{\xi}(t)\\ 0\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\overset{**}{\xi}(t)-\omega^2\cdot\xi(t)\\ -\omega^2\cdot d+2\cdot\omega\cdot\overset{*}{\xi}(t)\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ -\omega^2\cdot d+2\cdot\omega\cdot\beta_0\cdot\operatorname{ch}\omega t\\ 0\end{bmatrix}_{\xi,\eta,\zeta}$$

Ezzel a pont VR0-ban észlelt sebessége és gyorsulása („abszolút" sebesség és gyorsulás) a KR1-ben áll rendelkezésre.

Megjegyzés:

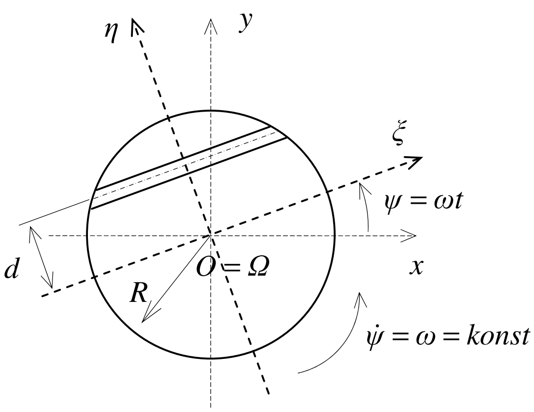
abból, hogy az abszolút gyorsulás horonyirányú vetülete nulla, gyakran tévesen arra következtetnek, hogy akkor az abszolút sebesség horonyirányú vetülete konstans kell legyen.

Márpedig az nem nulla: $\overset{*}{\xi}(t)-\omega\cdot d\neq 0$

Mi a hiba a következtetésben? [4]

A helyvektort, vagyis a mozgástörvényt, valamint az abszolút sebességet és gyorsulást a környezethez rögzített KR0-ben szeretnénk felírni.
Ehhez koordinátatranszformációt kell végrehajtani: tetszőleges t időpontban a tárcsa – és ezzel KR1 – szögelfordulása a nyugvó környezethez kötött KR0 z tengelye körül: $\psi=\omega\cdot t$.

$$[\underline{r}]_{x,y,z}=\underset{KR1\to KR0}{\underline{\underline{T}}}\cdot[\underline{r}]_{\xi,\eta,\zeta}$$



A transzformációs mátrix:

$$\underset{KR1\to KR0}{\underline{\underline{T}}}=\begin{bmatrix}\cos\psi & -\sin\psi & 0\\ \sin\psi & \cos\psi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Transzformáljuk a helyvektort:

$$[\underline{r}(t)]_{x,y,z}=\begin{bmatrix}\cos\psi & -\sin\psi & 0\\ \sin\psi & \cos\psi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\xi(t)\\ d\\ 0\end{bmatrix}_{\xi,\eta,\zeta}=\begin{bmatrix}\xi(t)\cdot\cos\omega t-d\cdot\sin\omega t\\ \xi(t)\cdot\sin\omega t+d\cdot\cos\omega t\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\beta_0}{\omega}\cdot\operatorname{sh}\omega t\cdot\cos\omega t-d\cdot\sin\omega t\\ \frac{\beta_0}{\omega}\cdot\operatorname{sh}\omega t\cdot\sin\omega t+d\cdot\cos\omega t\\ 0\end{bmatrix}_{x,y,z}$$

---

[4] Az abszolút gyorsulás horonyirányú vetületének nulla volta **dinamikailag** azt jelenti, hogy nincs valódi erő horonyirányban. Ha a horony IR lenne, akkor ebből a tehetetlenség törvénye értelmében tényleg az következne, hogy az abszolút sebesség horonyirányban állandó. De a horony NEM INERCIARENDSZER, mert forog egy IR-hez képest: az IR-hez képesti gyorsulásállapotát leíró három vektor közül *egy* nem nulla:

$\underline{a}_{\Omega}=\underline{0}$, $\quad\underline{\omega}_{10}=\underline{\omega}\neq\underline{0}$, $\quad\underline{\varepsilon}_{10}=\underline{0}$

Az abszolút gyorsulásvektort az álló környezethez kötött megfigyelő észleli. Koordinátáinak kifejezése a ξ,η,ζ KR-ben az abszolút gyorsulásvektor horonyhoz képesti mindenkori állását jelenti. A példában az abszolút gyorsulás minden pillanatban merőleges a horonyirányra, mivel csak az η koordinátája nem nulla.

Kinematikailag: az $\underline{a}=\frac{d\underline{v}}{dt}$, illetve az $\underline{a}=\underline{0}\quad\Rightarrow\quad\underline{v}=\textit{állandó}$ összefüggések csak egyazon VR-en belül érvényesek. Ilyen következtetéseket csak akkor lehet levonni, ha a gyorsulásvektort ugyanabban a VR-ben észleljük, mint amelyikben az idő szerinti deriválást végezzük.

Transzformáljuk a sebességvektort:

$$\left[\underline{v}(t)\right]_{x,y,z}=\begin{bmatrix}\cos\psi & -\sin\psi & 0\\ \sin\psi & \cos\psi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}v_\xi\\ v_\eta\\ 0\end{bmatrix}_{\xi,\eta,\zeta}=\begin{bmatrix}v_\xi\cdot\cos\omega t-v_\eta\cdot\sin\omega t\\ v_\xi\cdot\sin\omega t+v_\eta\cdot\cos\omega t\\ 0\end{bmatrix}_{x,y,z}$$

$$\underline{v}(t)=\begin{bmatrix}\left(\overset{*}{\xi}(t)-\omega\cdot d\right)\cdot\cos\omega t-\omega\cdot\xi(t)\cdot\sin\omega t\\ \left(\overset{*}{\xi}(t)-\omega\cdot d\right)\cdot\sin\omega t+\omega\cdot\xi(t)\cdot\cos\omega t\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\left(\beta_0\cdot\operatorname{ch}\omega t-\omega\cdot d\right)\cdot\cos\omega t-\beta_0\cdot\operatorname{sh}\omega t\cdot\sin\omega t\\ \left(\beta_0\cdot\operatorname{ch}\omega t-\omega\cdot d\right)\cdot\sin\omega t+\beta_0\cdot\operatorname{sh}\omega t\cdot\cos\omega t\\ 0\end{bmatrix}_{x,y,z}$$

Transzformáljuk a gyorsulásvektort:

$$\left[\underline{a}(t)\right]_{x,y,z}=\begin{bmatrix}\cos\psi & -\sin\psi & 0\\ \sin\psi & \cos\psi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}0\\ a_\eta\\ 0\end{bmatrix}_{\xi,\eta,\zeta}=\begin{bmatrix}-a_\eta\cdot\sin\omega t\\ a_\eta\cdot\cos\omega t\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\left(\omega^2\cdot d-2\cdot\omega\cdot\overset{*}{\xi}(t)\right)\cdot\sin\omega t\\ \left(-\omega^2\cdot d+2\cdot\omega\cdot\overset{*}{\xi}(t)\right)\cdot\cos\omega t\\ 0\end{bmatrix}_{x,y,z}$$

$$\underline{a}(t)=\begin{bmatrix}\left(\omega^2\cdot d-2\cdot\omega\cdot\beta_0\cdot\operatorname{ch}\omega t\right)\cdot\sin\omega t\\ \left(-\omega^2\cdot d+2\cdot\omega\cdot\beta_0\cdot\operatorname{ch}\omega t\right)\cdot\cos\omega t\\ 0\end{bmatrix}_{x,y,z}$$

3.

a.

Pythagorasz tétellel kiszámítható a ξ koordináta a peremre érkezés pillanatában:

$$\xi(t_1)=\xi_1=\sqrt{R^2-d^2}=0{,}968[\mathrm{m}]$$

Ismert a mozgástörvény a horonyban:

$$\xi(t)=\frac{\beta_0}{\omega}\cdot \mathrm{sh}\,\omega t \quad\rightarrow\quad \xi(t_1)=\xi_1=\frac{\beta_0}{\omega}\cdot \mathrm{sh}\,\omega t_1 \quad \text{ebből} \quad t_1=\frac{1}{\omega}\cdot \mathrm{arsh}\left(\frac{\xi_1\cdot\omega}{\beta_0}\right)=0{,}228[\mathrm{s}]$$

b.

A tárcsa állandó ω szögsebességgel forog. A szöghelyzete az idő függvényében: $\psi(t)=\omega\cdot t$

$$\psi(t_1)=\omega\cdot t_1=2{,}28[\mathrm{rad}]=130{,}7^{\circ}$$

c.

A 2. pontban felírt időfüggvényekbe helyettesítjük a $t_1=0{,}228[\mathrm{s}]$ értéket:

$$\beta(t_1)=\beta_0\cdot \mathrm{ch}\,\omega t_1=9{,}89\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right] \qquad \underline{\beta}(t_1)=9{,}89\,\underline{\mathrm{e}}_{\xi}$$

$$\alpha(t_1)=\beta_0\cdot\omega\cdot \mathrm{sh}\,\omega t_1=96{,}82\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right] \qquad \underline{\alpha}(t_1)=96{,}82\,\underline{\mathrm{e}}_{\xi}$$

d.

A kényszererő komponenseit a dinamika alaptételének második és harmadik skaláregyenletéből számítjuk: (ld. 2. pont)

$$(2) \qquad 0=K_{\eta}+m\cdot\omega^2\cdot d-2\cdot m\cdot\omega\cdot\overset{*}{\xi}(t) \quad\rightarrow\quad K_{\eta}=-m\cdot\omega^2\cdot d+2\cdot m\cdot\omega\cdot\beta(t_1)=1728[\mathrm{N}]$$

$$(3) \qquad 0=-m\cdot g+K_{\zeta} \quad\rightarrow\quad K_{\zeta}=m\cdot g=98{,}1[\mathrm{N}]$$

$$\underline{K}(t_1)=\begin{bmatrix}0\\1728\\98{,}1\end{bmatrix}_{\xi,\eta,\zeta}[\mathrm{N}]$$

e.

Az abszolút sebességet és gyorsulást szintén a 2. pontban felírt időfüggvényekből számítjuk, a $t_1=0{,}228[\mathrm{s}]$ érték behelyettesítésével:

KR1-ben:

$$\underline{v}(t_1)=\begin{bmatrix}\beta(t_1)-\omega\cdot d\\ \omega\cdot\xi(t_1)\\ 0\end{bmatrix}_{\xi,\eta,\zeta}=\begin{bmatrix}7{,}39\\9{,}68\\0\end{bmatrix}_{\xi,\eta,\zeta}\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right]$$

$$\underline{a}(t_1)=\begin{bmatrix}\alpha(t_1)-\omega^2\cdot\xi(t_1)\\ -\omega^2\cdot d+2\cdot\omega\cdot\beta(t_1)\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\172{,}7\\0\end{bmatrix}_{\xi,\eta,\zeta}\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right]$$

KR0-ban:

$$\underline{v}(t_1)=\begin{bmatrix}(\beta_0\cdot\operatorname{ch}\omega t_1-\omega\cdot d)\cdot\cos\omega t_1-\beta_0\cdot\operatorname{sh}\omega t_1\cdot\sin\omega t_1\\(\beta_0\cdot\operatorname{ch}\omega t_1-\omega\cdot d)\cdot\sin\omega t_1+\beta_0\cdot\operatorname{sh}\omega t_1\cdot\cos\omega t_1\\0\end{bmatrix}_{x,y,z}=\begin{bmatrix}-12,16\\-0,71\\0\end{bmatrix}_{x,y,z}\quad\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right]$$

$$\underline{a}(t_1)=\begin{bmatrix}(\omega^2\cdot d-2\cdot\omega\cdot\beta_0\cdot\operatorname{ch}\omega t_1)\cdot\sin\omega t_1\\(-\omega^2\cdot d+2\cdot\omega\cdot\beta_0\cdot\operatorname{ch}\omega t_1)\cdot\cos\omega t_1\\0\end{bmatrix}_{x,y,z}=\begin{bmatrix}-130,99\\-112,6\\0\end{bmatrix}_{x,y,z}\quad\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right]$$

Megjegyzés:

A fent ismertetett feladatmegoldás során megoldottuk a horonyban felírt mozgásegyenletet, (megoldottunk egy másodrendű differenciálegyenletet az adott kezdeti feltételekhez), majd ebből meghatároztuk a kinematikai mennyiségeket (hely, sebesség, gyorsulás) az idő függvényében.
Más meggondolás alapján, a "fényképfelvétel"[5] szemlélettel megválaszolhatók a 3. kérdés c., d., e. pontjai, vagyis kiszámítható a relatív sebesség és gyorsulás abban a pillanatban, amikor a pont a tárcsa peremére ér[6], kiszámítható ekkor a horonyfalról és fenékről a pontszerű testre ható kényszererő is, de nem tudjuk megmondani, mikor ér a pont a tárcsa peremére, és hogy milyen szöghelyzetben van a tárcsa ekkor.

Megoldás a "fényképfelvétel" szemlélettel:

3.c.

A munkatétel a forgó tárcsán, a $\underline{\rho}_0$ és $\underline{\rho}_1$ pozíció között, vagyis a $[t_0, t_1]$ intervallumra :

$$T(t_1)-T(t_0)=W_{01}$$

A mozgási energia megváltozása t_0 és t_1 között: $T(t_1)-T(t_0)=\frac{1}{2}m\cdot\beta_1^2-\frac{1}{2}m\cdot\beta_0^2$

A munkatétel jobboldalán W_{01} a testre ható összes erő munkáját jelenti a $[t_0, t_1]$ intervallumban. A munkatételt a forgó tárcsán írjuk fel, neminerciarendszerben, ezért *a testre ható összes erő* alatt a valódi erők és a tehetetlenségi erők összegét kell érteni, vagyis a tárcsához kötött megfigyelő által észlelt összes erő mechanikai munkáját kell felírni a munkatétel jobboldalán.

A példában a valódi erők: (más testekkel való kölcsönhatásból származnak): a súlyerő és a horonyfal (oldalfal és fenék) hatása. A tehetelenségi erők: a szállítóerő és a Coriolis erő.

$$\underline{F}_{valódi}+\underline{F}_{tehetetlenségi}=\underline{G}+\underline{K}+\underline{F}_{szállító}+\underline{F}_{Coriolis}$$

[5] Fényképfelvétel szemléletűnek nevezzük az olyan differenciálegyenleteket, amiket egy adott időpontban vett helyettesítési értékeikkel algebrai egyenletként használunk.
[6] Az egymáshoz képest mozgó VR-ekben felírt kinematikai mennyiségek közötti kapcsolat alapján ($\underline{v}=\underline{\beta}+\underline{v}_{szállító}$, $\underline{a}=\underline{\alpha}+\underline{a}_{szállító}+\underline{a}_{Coriolis}$) kiszámíhatjuk az abszolút sebességet és gyorsulást is, de csak a KR1-ben, a tárcsához rögzített koordinátarendszerben tudjuk felírni a koordinátáit, hiszen nem ismerjük a tárcsa szöghelyzetét KR0-hoz képest.

$$W_{01}=\int_{\underline{\rho}_0}^{\underline{\rho}_1}\left(\underline{G}+\underline{K}+\underline{F}_{szállító}+\underline{F}_{Coriolis}\right)\cdot d\underline{\rho} \qquad \underline{\rho}=\begin{bmatrix}\xi\\ d\\ 0\end{bmatrix} \rightarrow d\underline{\rho}=\begin{bmatrix}d\xi\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

A tehetetlenségi erők meghatározása:

$$\underline{F}_{szállító}=-m\cdot\underline{a}_{szállító}=-m\cdot\left(\cancel{\underline{a}_{\Omega}}+\cancel{\underline{\varepsilon}}\times\underline{\rho}-\omega^2\underline{\rho}\right)=m\cdot\omega^2\underline{\rho}=m\cdot\omega^2\begin{bmatrix}\xi\\ d\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\underline{F}_{Coriolis}=-m\cdot\underline{a}_{Coriolis}=-m\cdot\left(2\cdot\underline{\omega}\times\underline{\beta}\right)=-2\cdot m\begin{bmatrix}0\\ 0\\ \omega\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}\beta\\ 0\\ 0\end{bmatrix}=-2\cdot m\begin{bmatrix}0\\ \omega\cdot\beta\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\underline{F}_{valódi}+\underline{F}_{tehetetlenségi}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ -mg\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ K_\eta\\ K_\zeta\end{bmatrix}+m\cdot\omega^2\begin{bmatrix}\xi\\ d\\ 0\end{bmatrix}-2\cdot m\cdot\omega\begin{bmatrix}0\\ \beta\\ 0\end{bmatrix}$$

A horonyban való mozgás folyamán az erőknek csak a horonyirányú komponense végez mechanikai munkát. Az erők fenti felírásából látszik, hogy csak a szállítóerőnek van horonyirányú komponense. Így a munkatétel jobboldala:

$$W_{01}=\int_{\underline{\rho}_0}^{\underline{\rho}_1}\left(\begin{bmatrix}0\\ 0\\ -mg\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ K_\eta\\ K_\zeta\end{bmatrix}+m\cdot\omega^2\begin{bmatrix}\xi\\ d\\ 0\end{bmatrix}-2\cdot m\cdot\omega\begin{bmatrix}0\\ \beta\\ 0\end{bmatrix}\right)\cdot\begin{bmatrix}d\xi\\ 0\\ 0\end{bmatrix}=\int_{\xi_0=0}^{\xi_1=\sqrt{R^2-d^2}} m\cdot\omega^2\cdot\xi\cdot d\xi=m\cdot\omega^2\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(R^2-d^2\right)$$

$$\frac{1}{2}m\cdot\beta_1^2-\frac{1}{2}m\cdot\beta_0^2=m\cdot\omega^2\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(R^2-d^2\right) \rightarrow \beta_1=\sqrt{\beta_0^2+\omega^2\cdot\left(R^2-d^2\right)}\ ^{7} \qquad \underline{\underline{\beta_1=9{,}89\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right]}}$$

d.

A dinamika alaptételét írjuk fel a tárcsához kötött VR-ben, abban a pillanatban, amikor a pont a tárcsa peremére ér:
a tárcsán megfigyelhető kinetikai vektor egyenlő az anyagi pontra ható valódi (vagyis más testekkel való kölcsönhatásból származó) erők plusz a (VR mozgása miatt fellépő) tehetetlenségi erők összegével :

$$m\cdot\underline{\alpha}=\underbrace{\underline{G}+\underline{K}}_{valódi}+\underbrace{\underline{F}_{szállító}+\underline{F}_{Coriolis}}_{tehetetlenségi}$$

[7] Négyzetgyökvonáskor a + vagy a – előjelet kell figyelembe venni? Másképp fogalmazva a kérdést: megfordulhat-e a horonyban a pont mozgásának iránya? Erre a kérdésre a "nem fényképfelvétel" szemléletű megoldás segítségével lehet felelni. Ott meghatároztuk a relatív sebességet az idő függvényében: $\beta(t)=\beta_0\cdot\mathrm{ch}\,\omega t$. Ebből kiolvasható, hogy a relatív sebesség előjele minden t-re megegyezik β_0 előjelével. (Mert a ch$x$ fügvény mindenütt pozitív.)

$$\begin{bmatrix} m\cdot\alpha_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -m\cdot g \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ K_\eta \\ K_\zeta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m\cdot\omega^2\cdot\xi_1 \\ m\cdot\omega^2\cdot d \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -2\cdot m\cdot\omega\cdot\beta_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ebből $\alpha_1 = \omega^2\cdot\xi_1 = \underline{\underline{96{,}8\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right]}}$

A kényszererő komponenseit ugyanúgy számítjuk, mint az előbb:

$$K_\eta = -m\cdot\omega^2\cdot d + 2\cdot m\cdot\omega\cdot\beta_1 = 1728[\mathrm{N}]$$
$$K_\zeta = m\cdot g = 98{,}1[\mathrm{N}]$$

e.

Ugyanúgy, mint a 2. pontban, azzal a különbséggel, hogy minden mennyiség a t_1 időpillanatban vett helyettesítési értékével szerepel.

$$\underline{v}(t_1) = \begin{bmatrix} \beta(t_1)-\omega\cdot d \\ \omega\cdot\xi(t_1) \\ 0 \end{bmatrix}_{\xi,\eta,\zeta} = \begin{bmatrix} 7{,}39 \\ 9{,}68 \\ 0 \end{bmatrix}_{\xi,\eta,\zeta} \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right]$$

$$\underline{a}(t_1) = \begin{bmatrix} \alpha(t_1)-\omega^2\cdot\xi(t_1) \\ -\omega^2\cdot d + 2\cdot\omega\cdot\beta(t_1) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 172{,}7 \\ 0 \end{bmatrix}_{\xi,\eta,\zeta} \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right]$$

Most nem tudjuk felírni ezeknek a vektoroknak a koordinátáit a VR0 környezethez rögzített KR0-ban, hiszen a tárcsa szöghelyzetének ismerete nélkül a VR1 tárcsához kötött KR1 helyzete sem ismert.