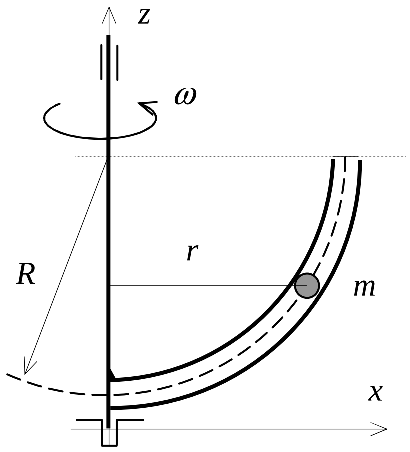
Dinamika nem-inerciarendszerben
Anyagi pont kényszermozgása forgó csőben



Egy körív alakú görbe cső állandó szögsebességgel forog a függőleges z tengely körül.
Egy pontszerűnek tekinthető test (tömege m) súrlódás nélkül mozoghat a csőben.

R = 0,5 [m]
m = 6 [kg]
ω = 5 [rad/s] konst

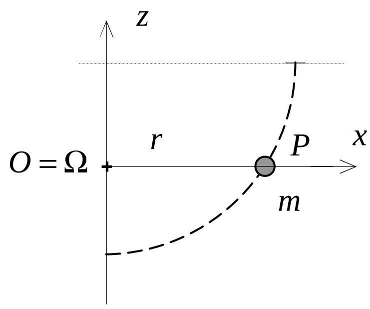
1. Határozzuk meg a test azon helyzetét, ahol az a forgó csőben tartós nyugalomban van, r_e = ?
2. A testet a t_1 időpontban az r = 0,4 [m] helyzetből relatív kezdősebesség nélkül elengedjük. $(\underline{\beta}(t_1) = \underline{0})$. Határozzuk meg t_1 -kor a test relatív (a forgó csőben észlelhető) gyorsulását, $\underline{\alpha} = ?$, valamint a csőfalról a testre átadódó kényszererőt, $\underline{\boldsymbol{K}}$ = ? A kapott eredményeket jelleghelyesen jelenítse meg a szerkezeti ábrában (a vektorok iránya , értelme).
3. Hogyan módosulnak a 2. pontban meghatározott mennyiségek, (az $\underline{\alpha}$ és a $\underline{K}$ vektorok), ha a test az r = 0,4 [m] helyzetből a csőhöz képesti $\underline{\beta}_1 \equiv \underline{\beta}(t_1) \neq \underline{0}$ kezdősebességgel indul mozgásnak?
4. Hogyan módosulnak a válaszok, ha a csőfal és a test közötti súrlódást figyelembe vesszük?

1. A csőhöz kötött vonatkoztatási rendszerben:

A tömegpont a csőben, az r_e helyzetben tartós nyugalomban van: $\underline{\beta}=\underline{0}$ és $\underline{\alpha}=\underline{0}$

Az álló VR: a környezet (1). A hozzá rögzített KR: $\{0;\, x, y, z\}$
A mozgó VR: a cső (2). A hozzá rögzített KR: $\{\Omega=0;\, \xi, \eta, \zeta=z\}$

A két KR a vizsgált pillanatban egymással fedésben van.



A cső mozgásállapota a környezethez képest:

a.) sebességállapot: $\underline{\omega}_{21}=\underline{\omega}$, $\underline{v}_{\Omega}=\underline{0}$

b.) gyorsulásállapot: $\underline{\varepsilon}_{21}=\underline{0}$, $\underline{a}_{\Omega}=\underline{0}$, $\underline{\omega}_{21}=\underline{\omega}$

A dinamika alaptétele a csőben, az r_e helyzetben:

$$m\cdot\underline{\alpha}=\underline{F}_{\text{valódi}}+\underline{F}_{\text{tehetetlenségi}}$$

$$\underline{0}=\underline{G}+\underline{K}+\underline{F}_{\text{szállító}}+\underline{F}_{\text{Coriolis}}$$

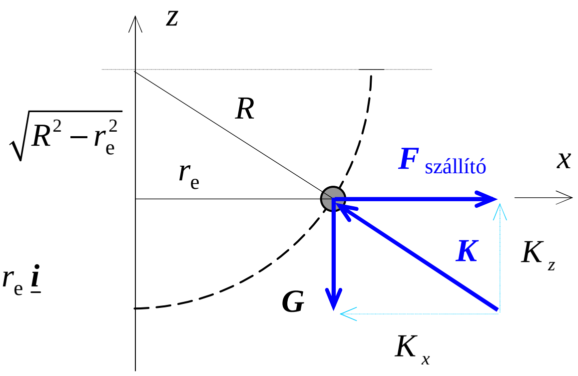
$$\underline{F}_{\text{szállító}}=-m\cdot\underline{a}_{\text{szállító}}$$

$$\underline{F}_{\text{Coriolis}}=-m\cdot\underline{a}_{\text{Coriolis}}$$

$$\underline{a}_{\text{szállító}}=\cancel{\underline{a}_{\Omega}}+\cancel{\underline{\varepsilon}_{21}}\times\underline{r}_{\Omega P}-\omega_{21}^2\underline{r}_{\Omega P}=-\omega^2 r_e\,\underline{i}$$

$$\underline{a}_{\text{Coriolis}}=2\cdot\underline{\omega}_{21}\times\cancel{\underline{\beta}}=\underline{0}$$

Szabadtest ábra a csőben, az r_e helyzetben:



$$\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\-m\cdot g\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-K_x\\K_y\\K_z\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}m\cdot r_e\cdot\omega^2\\0\\0\end{bmatrix}\ \rightarrow\ \left.\begin{array}{ll}(1) & 0=-K_x+m\cdot r_e\cdot\omega^2\\(2) & 0=K_y\\(3) & 0=-m\cdot g+K_z\end{array}\right\}\ \begin{cases}\text{3 egyenlet,}\\ \text{4 ismeretlen: } K_x, K_y, K_z, r_e\end{cases}$$

A kiegészítő egyenlet:
Mivel a cső és a test közötti érintkezés súrlódásmentes, a $\underline{K}$ kényszererő merőleges a csőfalra, (**ideális kényszer**). Hasonló háromszögek megfelelő oldalhosszainak arányából:

$$(4)\quad \frac{r_e}{\sqrt{R^2-r_e^2}}=\frac{K_x}{K_z}$$

A megoldás a fenti egyenletrendszerből:

$\big((2)\ \rightarrow\ K_y=0$ a cső egyenletesen forog$\big)$ a kérdés megválaszolásához nincs rá szükség.

$$(1)\ \rightarrow\ K_x=m\cdot r_e\cdot\omega^2$$

$$(3)\ \rightarrow\ K_z=m\cdot g$$

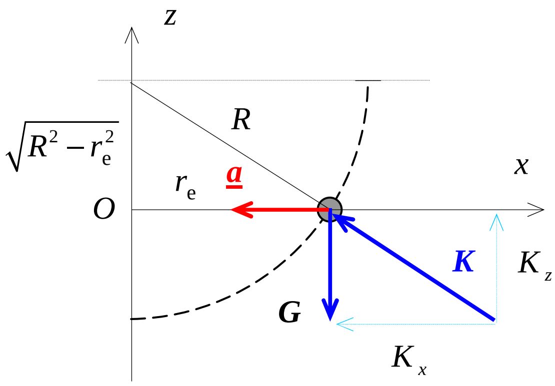
$$(4)\ \rightarrow\ \frac{\cancel{r_e}}{\sqrt{R^2-r_e^2}}=\frac{\cancel{m}\cdot\cancel{r_e}\cdot\omega^2}{\cancel{m}\cdot g}\quad\rightarrow\quad r_e=\sqrt{R^2-\left(\frac{g}{\omega^2}\right)^2}=\sqrt{0{,}5^2-\left(\frac{9{,}81}{5^2}\right)^2}=\underline{\underline{0{,}31\,[\mathrm{m}]}}$$

Megjegyzés: inerciarendszerben, „relatív dinamika” nélkül:

A tömegpont r_e sugarú körpályán mozog az *x,y* síkkal párhuzamos vízszintes helyzetű síkban, állandó pályasebességgel, ezért gyorsulása **normális gyorsulás**, ami a körpálya *O* középpontja felé mutat,

nagysága pedig $a = a_n = \dfrac{v^2}{r_e} = \dfrac{(r_e \cdot \omega)^2}{r_e} = r_e \cdot \omega^2$

Szabadtest ábra a nyugvó környezethez képest, inerciarendszerben, az r_e helyzetben:



A dinamika alaptétele pontszerű testre, inerciarendszerben: $m \cdot \underline{a} = \underline{F}$

A példában a testre ható erők vektori összege: $\underline{F} = \underline{G} + \underline{K}$

Az egyenlet komponensei az *x,y,z* koordinátarendszerben:

$$\begin{bmatrix} -m \cdot r_e \cdot \omega^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -m \cdot g \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -K_x \\ K_y \\ K_z \end{bmatrix} \quad \to \quad \begin{cases} K_x = m \cdot r_e \cdot \omega^2 \\ K_z = m \cdot g \end{cases} \quad \to \quad \frac{K_x}{K_z} = \frac{r_e \cdot \omega^2}{g} \qquad (1)$$

A kiegészítő egyenlet:

Mivel a cső és a test közötti érintkezés súrlódásmentes, a $\underline{K}$ kényszererő merőleges a csőfalra, (**ideális kényszer**). Hasonló háromszögek megfelelő oldalhosszainak arányából:

$$\frac{r_e}{\sqrt{R^2 - r_e^2}} = \frac{K_x}{K_z} \qquad (2)$$

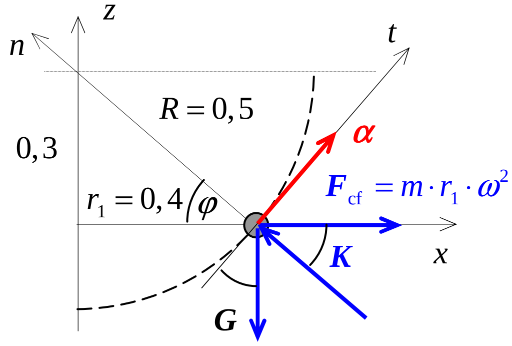
A megoldás (1) és (2)-ből:

$$\frac{\cancel{r_e} \cdot \omega^2}{g} = \frac{\cancel{r_e}}{\sqrt{R^2 - r_e^2}} \quad \to \quad r_e = \sqrt{R^2 - \left(\frac{g}{\omega^2}\right)^2} = \sqrt{0{,}5^2 - \left(\frac{9{,}81}{5^2}\right)^2} = \underline{\underline{0{,}31\,[\mathrm{m}]}}$$

Megjegyzés:
a kétféle megoldás két különböző szemléletmódon alapul, de ugyanazt az eredményt kell adják.
A relatív dinamika alkalmazásának előnyei ennél bonyolultabb feladatok megoldása során jelentkeznek.

2.
A vonatkoztatási rendszer a cső.
A dinamika alaptétele a csőben,
az $r_1 = 0,4\,[\mathrm{m}]$ helyzetben:

A szabadtest ábra az $r_1 = 0,4\,[\mathrm{m}]$ helyzetben:



$$\underline{m}\cdot\underline{\alpha} = \underline{F}_{\text{valódi}} + \underline{F}_{\text{tehetetlenségi}}$$

$$m\cdot\underline{\alpha} = \underline{G} + \underline{K} + \underline{F}_{\text{szállító}} + \cancel{\underline{F}_{\text{Coriolis}}}$$

$$\underline{F}_{\text{szállító}} = -m\cdot\underline{a}_{\text{szállító}}$$

$$\underline{F}_{\text{Coriolis}} = -m\cdot\underline{a}_{\text{Coriolis}}$$

$$\underline{a}_{\text{szállító}} = \cancel{\underline{a}_{\Omega}} + \cancel{\underline{\varepsilon}_{21}}\times\underline{r}_{\Omega P} - \omega_{21}^2\underline{r}_{\Omega P} = -\omega^2 r_{\mathrm{e}}\,\underline{\boldsymbol{i}}$$

$$\underline{a}_{\text{szállító}} = \underline{a}_{\text{centrifugális}} \quad\rightarrow\quad \underline{F}_{\text{szállító}} = \underline{F}_{\text{cf}}$$

$$\underline{a}_{\text{Coriolis}} = 2\cdot\underline{\omega}_{21}\times\cancel{\underline{\beta}} = \underline{0}$$

$$\sin\varphi = \frac{3}{5} = 0,6$$

$$\cos\varphi = \frac{4}{5} = 0,8$$

$$\begin{bmatrix} m\cdot\alpha \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{t,n,b} = \begin{bmatrix} -m\cdot g\cdot\cos\varphi \\ -m\cdot g\cdot\sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix}_{t,n,b} + \begin{bmatrix} 0 \\ K_n \\ K_y \end{bmatrix}_{t,n,b} + \begin{bmatrix} m\cdot r_1\cdot\omega^2\cdot\sin\varphi \\ -m\cdot r_1\cdot\omega^2\cdot\cos\varphi \\ 0 \end{bmatrix}_{t,n,b}$$

$\underline{\alpha} \parallel t$ a relatív gyorsulás csak tangenciális, mert az indulás pillanatában $\underline{\beta} = \underline{0}$

A dinamika alaptételének skaláregyenletei a *t,n,b* bázisban:

$$(t) \quad\rightarrow\quad \alpha = -g\cdot\cos\varphi + r_1\cdot\omega^2\cdot\sin\varphi$$

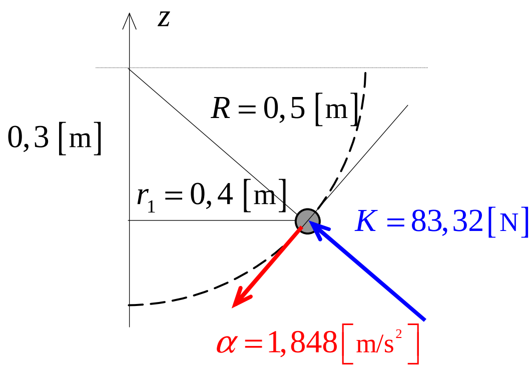
$$\alpha = -9,81\cdot 0,8 + 0,4\cdot 5^2\cdot 0,6 = \underline{\underline{-1,848\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right]}}$$

$$(n) \quad\rightarrow\quad K_n = K = m\cdot\left(g\cdot\sin\varphi + r_1\cdot\omega^2\cdot\cos\varphi\right)$$

$$K_n = K = 6\cdot\left(9,81\cdot 0,6 + 0,4\cdot 5^2\cdot 0,8\right) = \underline{\underline{83,32\,[\mathrm{N}]}}$$

$$(b) \quad\rightarrow\quad K_b = K_y = 0 \quad \text{nincs Coriolis erő, mert } \underline{\beta} = \underline{0}$$

Az eredmények:



2. MÁSKÉPP: a VR most is a cső, de most az *x,y,z* KR-ben számolunk.

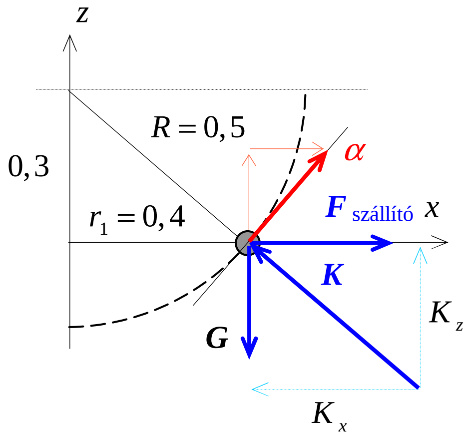
A dinamika alaptétele a csőben, az $r_1 = 0,4[\text{m}]$ helyzetben:

$$m \cdot \underline{\alpha} = \underline{F}_{\text{valódi}} + \underline{F}_{\text{tehetetlenségi}}$$

$$m \cdot \underline{\alpha} = \underline{G} + \underline{K} + \underline{F}_{\text{szállító}} + \cancel{\underline{F}_{\text{Coriolis}}}$$

$$\begin{bmatrix} m \cdot \alpha_x \\ 0 \\ m \cdot \alpha_z \end{bmatrix}_{x,y,z} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -m \cdot g \end{bmatrix}_{x,y,z} + \begin{bmatrix} -K_x \\ K_y \\ K_z \end{bmatrix}_{x,y,z} + \begin{bmatrix} m \cdot r_1 \cdot \omega^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{x,y,z}$$

A szabadtest ábra az $r_1 = 0,4[\text{m}]$ helyzetben:



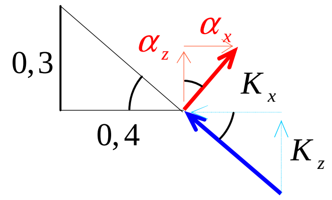
A három skaláregyenlet a dinamika alaptételéből:

$$\left.\begin{aligned} &(1)\quad m \cdot \alpha_x = -K_x + m \cdot r_1 \cdot \omega^2 \\ &(2)\quad 0 = K_y \\ &(3)\quad m \cdot \alpha_z = -m \cdot g + K_z \end{aligned}\right\} \left\{\begin{array}{l} \text{3 egyenlet,} \\ \text{5 ismeretlen: } K_x, K_y, K_z, \alpha_x, \alpha_z \end{array}\right.$$

A kiegészítő egyenletek:
Hasonló háromszögek oldalarányaiból: (3,4,5 oldalhosszúság arányú derékszögű háromszögek)

(4) a sima érintkezés miatt: $\dfrac{K_x}{K_z} = \dfrac{4}{3}$

(5) a gyorsulás a csőben csőirányú: $\dfrac{\alpha_x}{\alpha_z} = \dfrac{3}{4}$



Az egyenletrendszer megoldása:

$$\left.\begin{aligned} &(3),(4),(5) \;\rightarrow\; m \cdot \frac{4}{3} \cdot \alpha_x = -m \cdot g + \frac{3}{4} K_x \\ &(1) \;\rightarrow\; m \cdot \alpha_x = -K_x + m \cdot r_1 \cdot \omega^2 \end{aligned}\right\} \rightarrow\; K_x \cdot \underbrace{\left(\frac{4}{3} + \frac{3}{4}\right)}_{\frac{25}{12}} = m \cdot \left(g + \frac{4}{3} \cdot r_1 \cdot \omega^2\right)$$

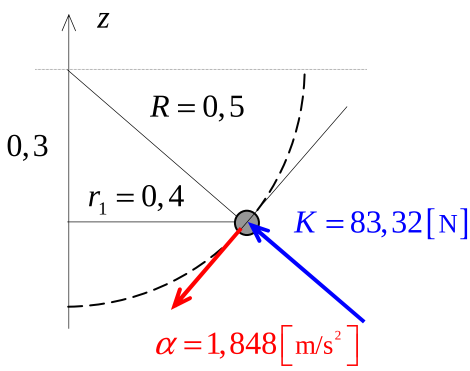
$$K_x = \frac{12}{25} \cdot 6 \cdot \left(9.81 + \frac{4}{3} \cdot 0,4 \cdot 5^2\right) = 66,65[\text{N}]$$

$$(4) \;\rightarrow\; K_z = \frac{3}{4} \cdot K_x = 49,99[\text{N}]$$

$$(1) \;\rightarrow\; \alpha_x = -\frac{K_x}{m} + r_1 \cdot \omega^2 = -\frac{66,65}{6} + 0,4 \cdot 5^2 = -1,108\left[\text{m/s}^2\right]$$

$$(5) \;\rightarrow\; \alpha_z = \frac{4}{3} \cdot \alpha_x = -1,478\left[\text{m/s}^2\right]$$

$$\underline{\alpha} = \begin{bmatrix} -1,108 \\ 0 \\ -1,478 \end{bmatrix}_{x,y,z} \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right] \qquad \underline{K} = \begin{bmatrix} -66,65 \\ 0 \\ 49,99 \end{bmatrix}_{x,y,z} [\text{N}]$$



Megjegyzés:
a 2. kérdés kétféle megválaszolása során ugyanazon szemléletmód alapján jártunk el, csak a matematikai segédkonstrukció, a vonatkoztatási rendszerhez kötött koordinátarendszer volt különböző a két esetben.

3.

Ha meglökjük: $\underline{\beta} \neq \underline{0}$

Két dolog lesz más:

1. Lesz Coriolis erő, mert van relatív sebesség
2. A relatív gyorsulásnak lesz normális komponense is, mert a relatív pálya nem egyenes.

A sebesség a csőben csőirányú: (a csőhöz érintőirányú) $\underline{\beta} = \begin{bmatrix} \beta \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{t,n,b}$

A Coriolis erő:

$$\underline{F}_{\text{Coriolis}} = -m \cdot \underline{a}_{\text{Coriolis}} = -m \cdot 2 \cdot \underline{\omega} \times \underline{\beta}$$

Kifejezve a *t,n,b* bázisban:

$$\underline{F}_{\text{Coriolis}} = -m \cdot \underline{a}_{\text{Coriolis}} = -m \cdot 2 \cdot \underline{\omega} \times \underline{\beta} = -m \cdot 2 \cdot \begin{bmatrix} \omega \cdot \cos\varphi \\ \omega \cdot \sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \beta \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2m \cdot \omega \cdot \beta \cdot \sin\varphi \end{bmatrix}_{t,n,b}$$

A dinamika alaptörvénye a csőben:

$$m \cdot \underline{\alpha} = \underline{G} + \underline{K} + \underline{F}_{\text{szállító}} + \underline{F}_{\text{Coriolis}}$$

skaláregyenletei a *t,n,b* bázisban: (3 egyenlet)

$$\begin{bmatrix} m \cdot \alpha_t \\ m \cdot \alpha_n \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -m \cdot g \cdot \cos\varphi \\ -m \cdot g \cdot \sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ K_n \\ K_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m \cdot r_1 \cdot \omega^2 \cdot \sin\varphi \\ -m \cdot r_1 \cdot \omega^2 \cdot \cos\varphi \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2m \cdot \omega \cdot \beta \cdot \sin\varphi \end{bmatrix}$$

Kiegészítő egyenlet: kinematikából a normális gyorsulás kifejezése: (1 egyenlet)

$$\alpha_n = \frac{\beta^2}{R}$$

4 egyenlet, 4 ismeretlen: $\alpha_t,\ \alpha_n,\ K_n,\ K_b$

4.

A 3. kérdés súrlódással:
A dinamika alaptörvénye a csőben: (mint a 3. pontban, de most a kényszererőnek van csőirányú komponense is)

$$m \cdot \underline{\alpha} = \underline{G} + \underline{K} + \underline{F}_{\text{szállító}} + \underline{F}_{\text{Coriolis}}$$

skaláregyenletei a *t*,*n*,*b* bázisban: (3 egyenlet)

$$\begin{bmatrix} m \cdot \alpha_t \\ m \cdot \alpha_n \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -m \cdot g \cdot \cos\varphi \\ -m \cdot g \cdot \sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_t \\ K_n \\ K_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m \cdot r_1 \cdot \omega^2 \cdot \sin\varphi \\ -m \cdot r_1 \cdot \omega^2 \cdot \cos\varphi \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2m \cdot \omega \cdot \beta \cdot \sin\varphi \end{bmatrix}$$

A súrlódóerő a kényszererő csőirányú komponense, az *n* irányú és a *b* irányú nyomóerőkből:

$$S = K_t = \mu \cdot |K_n| + \mu \cdot |K_b|$$