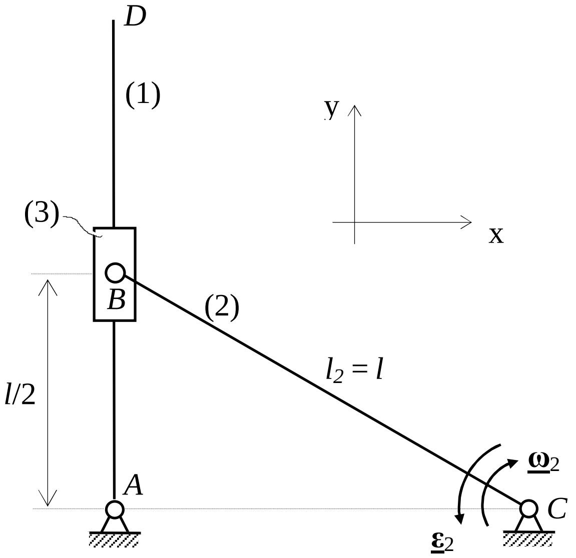
HÁZI FELADAT
Merev testekből álló rendszer kinematikája („relatlatív” kinematika)
Síkbeli csuklós, csúszkás mechanizmus 1.



A vázolt síkbeli mechanizmus (2) jelű, $l_2 = l$ hosszúságú BC rúdjához csuklósan kapcsolódik a (3) jelű csúszka, amely az (1) jelű $l_1 = l$ hosszúságú AD rúdon mozoghat.
A mechanizmus vázolt – pillanatnyi – helyzetében az (1) jelű rúd függőleges, és a B csukló $l/2$ magasságban helyezkedik el a rögzített A csukló felett.
Ismert az (2) jelű rúdnak a vázolt helyzethez tartozó (pillanatnyi) szögsebessége ($\underline{\boldsymbol{\omega}}_2$) és szöggyorsulása ($\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_2$).

Adatok: $l = 0{,}4$ [m] $\omega_2 = 2$ [rad/s]
$\varepsilon_2 = 3$ [rad/s^2]

Feladat: 1.) Határozzuk meg az (1) jelű rúdnak a vázolt helyzethez tartozó
a.) szögsebességét ($\underline{\boldsymbol{\omega}}_1 = ?$),
b.) szöggyorsulását ($\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_1 = ?$)!

2.) Számítsuk ki a D pont
a.) sebességét ($\underline{\mathbf{v}}_D = ?$), és
b.) gyorsulását ($\underline{\mathbf{a}}_D = ?$) !

3.) Rajzoljuk meg a
a.) sebesség- és a
b.) gyorsulásábrát!

$$\underline{\mathbf{r}}_{AB} = \frac{l}{2}\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0{,}2\\0\end{bmatrix}[\mathrm{m}];\quad \underline{\mathbf{r}}_{AD} = l\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0{,}4\\0\end{bmatrix}[\mathrm{m}];\quad \underline{\mathbf{r}}_{CB} = \frac{l}{2}\begin{bmatrix}-\sqrt{3}\\1\\0\end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix}-0{,}35\\0{,}2\\0\end{bmatrix}[\mathrm{m}];\quad \underline{\boldsymbol{\omega}}_2 = \begin{bmatrix}0\\0\\-2\end{bmatrix}\left[\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}\right]$$

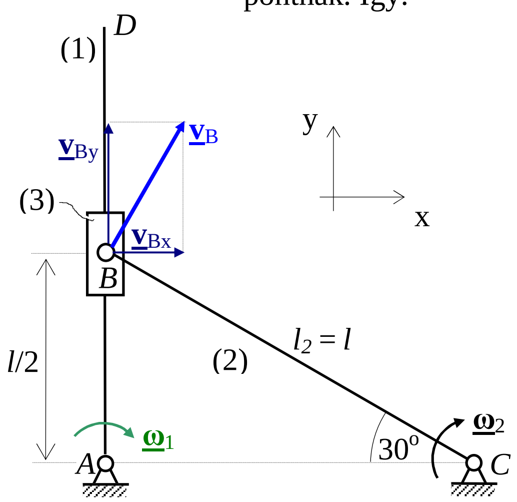
Megoldás:

1.) a.) Vizsgáljuk meg az egyes testek sebesséállapotát (egy pontjukhoz redukált kinematikai vektorkettősükkel):

(1) $[\,\underline{\boldsymbol{\omega}}_1\,;\,\underline{\mathbf{v}}_A\,]_A = [\,\underline{\boldsymbol{\omega}}_1\,;\,\underline{\mathbf{0}}\,]_A$, ahol $\underline{\boldsymbol{\omega}}_1$ ismeretlen,
(2) $[\,\underline{\boldsymbol{\omega}}_2\,;\,\underline{\mathbf{v}}_C\,]_C = [\,\underline{\boldsymbol{\omega}}_2\,;\,\underline{\mathbf{0}}\,]_C$, ahol $\underline{\boldsymbol{\omega}}_2$ adott,
(3) $[\,\underline{\boldsymbol{\omega}}_3\,;\,\underline{\mathbf{v}}_B\,]_B$, ahol $\underline{\boldsymbol{\omega}}_3 = \underline{\boldsymbol{\omega}}_1$ (a csúszka együtt fordul a rúddal) és $\underline{\mathbf{v}}_B$ ismeretlen.

B-ben mind a három testnek van pontja: B_1 ; B_2 ; B_3 .

- B_2 és B_3 csuklóval kapcsolódik egymáshoz. Tekintsük ezt a csuklót a „*B*” pontnak. Így:



$$\underline{\mathbf{v}}_{B2} = \underline{\mathbf{v}}_{B3} = \underline{\mathbf{v}}_B$$

Ez a sebesség a geometria és az $\underline{\boldsymbol{\omega}}_2$ ismeretében meghatározható:

(2)-es test: $\underline{\mathbf{v}}_B = \underline{\mathbf{v}}_C + \underline{\boldsymbol{\omega}}_2 \times \underline{\mathbf{r}}_{CB} = \underline{\boldsymbol{\omega}}_2 \times \underline{\mathbf{r}}_{CB}$

$$\underline{\mathbf{v}}_B = \omega_2 l \begin{bmatrix} \sin 30^{\mathrm{o}} \\ \cos 30^{\mathrm{o}} \\ 0 \end{bmatrix} = 0{,}8 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right] = \begin{bmatrix} 0{,}4 \\ 0{,}4\sqrt{3} \\ 0 \end{bmatrix} \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right]$$

- B_1 és B_3 (azaz *B*) pontok egymáshoz képest elmozdulnak (hiszen a csúszka elmozdul a rúdon), tehát:

$$\underline{\mathbf{v}}_{B1} \neq \underline{\mathbf{v}}_{B3}$$

$$\underline{\mathbf{v}}_{B1} \neq \underline{\mathbf{v}}_{B}$$

$$\underline{\mathbf{v}}_{B1} = \underline{\mathbf{v}}_A + \underline{\boldsymbol{\omega}}_1 \times \underline{\mathbf{r}}_{AB} = \underline{\boldsymbol{\omega}}_1 \times \underline{\mathbf{r}}_{AB}$$, ez $\perp$ az *AB* rúdra.

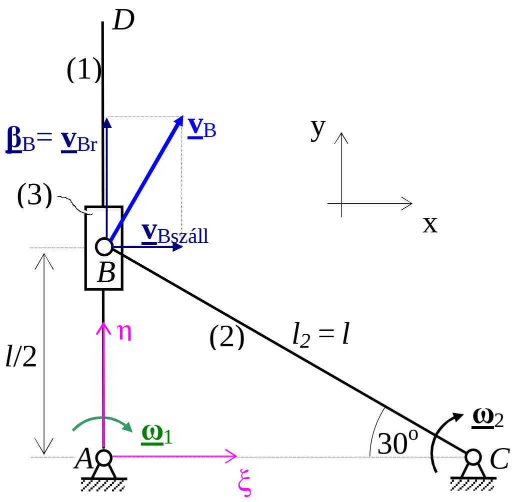
Felírható a $\underline{\mathbf{v}}_{B1}$ és $\underline{\mathbf{v}}_B$ közötti kapcsolat az előadáson levezetett képletek alkalmazásával (Mozgás leírása egymáshoz képest mozgó koordinátarendszerekben).

Fel kell tehát vennünk egy másik (ξηζ) koordinátarendszert. Ezt az egymáshoz képest elmozduló (1)-es , ill. (3)-as testek valamelyikéhez kell rögzítenünk. (A két koordinátarendszer közötti transzformáció külön munkáját „elkerülhetjük” az egymásnak „megfeleltetett” tengelyek ║-os felvételével : ξ║x; η║y ; ζ║z).

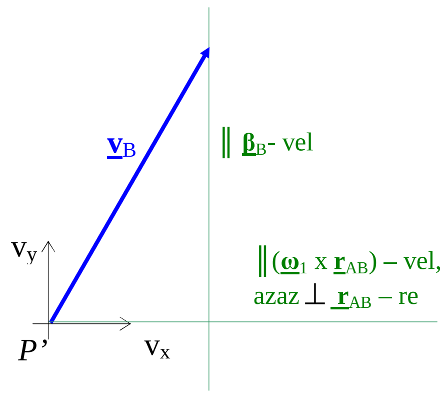
Ismerjük már a *B* pont sebességét az adott (xyz) koordinátarendszerben. Vizsgáljuk meg a mozgását az (1)-hez képest is. Rögzítsük tehát a (ξηζ) koordinátarendszert az (1)-es rúdhoz:

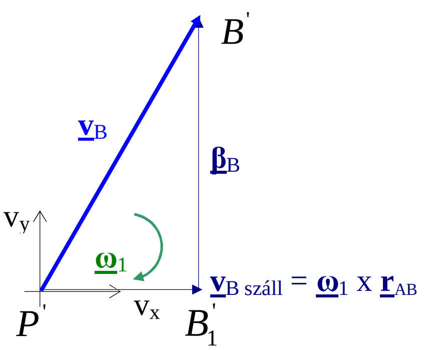
A „relatív” kapcsolat: $\underline{\mathbf{v}}_B = \underline{\mathbf{v}}_{B\,\text{száll}} + \underline{\boldsymbol{\beta}}_B$,

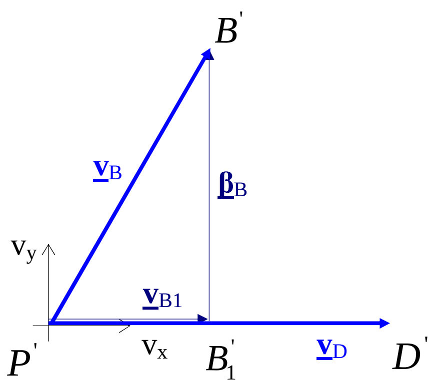
ahol $\underline{\mathbf{v}}_{B\,\text{száll}}$ (a szállítósebesség) az (1)-es test (ξηζ - relatív rendszer) azon pontjának sebessége, amely fedésben van a vizsgált (*B*) ponttal, tehát a B_1 pont sebessége.



3.) a.) Sebességábra:







(1)-es test:

$$\underline{\mathbf{v}}_{B\,\text{száll}} = \underline{\mathbf{v}}_{B1} = \underline{\boldsymbol{\omega}}_1 \times \underline{\mathbf{r}}_{AB} = \omega_1 \frac{l}{2}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}_{(xyz)},$$

$\underline{\boldsymbol{\beta}}_B$ pedig a *B* pont sebessége a (ξηζ) rendszerben, tehát a relatív sebesség ($\underline{\boldsymbol{\beta}}_B = \underline{\mathbf{v}}_{B\,\text{rel}}$). Mivel a *B* pont (az egész csúszkával együtt) csak rúdirányban (η) tud elmozdulni az (1)-hez képest:

$$\underline{\boldsymbol{\beta}}_B = \begin{bmatrix}0\\ \beta_B\\ 0\end{bmatrix}_{(\xi\eta\varsigma)} = \begin{bmatrix}0\\ \beta_B\\ 0\end{bmatrix}_{(xyz)}$$

Így (xyz-ben):

$$(\underline{\mathbf{v}}_B =)\ \omega_2 l\begin{bmatrix}\sin 30^{\circ}\\ \cos 30^{\circ}\\ 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ \beta_B\\ 0\end{bmatrix} + \omega_1\frac{l}{2}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$$

x: $\omega_2 \frac{l}{2} = \omega_1 \frac{l}{2}$; $\omega_1 = \omega_2$

$$\underline{\boldsymbol{\omega}}_1 = \begin{bmatrix}0\\0\\-2\end{bmatrix}\left[\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right]$$

y: $\beta_B = \frac{\sqrt{3}}{2}\omega_2 l \approx 0{,}69\left[\frac{\text{m}}{\text{s}}\right]$

$$\underline{\boldsymbol{\beta}}_B \approx \begin{bmatrix}0\\0{,}69\\0\end{bmatrix}\left[\frac{\text{m}}{\text{s}}\right]_{(\xi\eta\varsigma)} = \begin{bmatrix}0\\0{,}69\\0\end{bmatrix}\left[\frac{\text{m}}{\text{s}}\right]_{(xyz)}$$

$$\underline{\mathbf{v}}_{B\,\text{száll}} = \underline{\mathbf{v}}_{B1} = \underline{\boldsymbol{\omega}}_1 \times \underline{\mathbf{r}}_{AB} = \omega_1 \frac{l}{2}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}_{(xyz)} = \begin{bmatrix}0{,}4\\0\\0\end{bmatrix}\left[\frac{\text{m}}{\text{s}}\right]$$

2.) a.)

$$\underline{\mathbf{v}}_D = \underline{\boldsymbol{\omega}}_1 \times \underline{\mathbf{r}}_{AD} = \underline{\boldsymbol{\omega}}_1 \times 2\,\underline{\mathbf{r}}_{AB}$$

$$\underline{\mathbf{v}}_D = 2\,\underline{\mathbf{v}}_{B1} = \begin{bmatrix}0{,}8\\0\\0\end{bmatrix}\left[\frac{\text{m}}{\text{s}}\right]$$

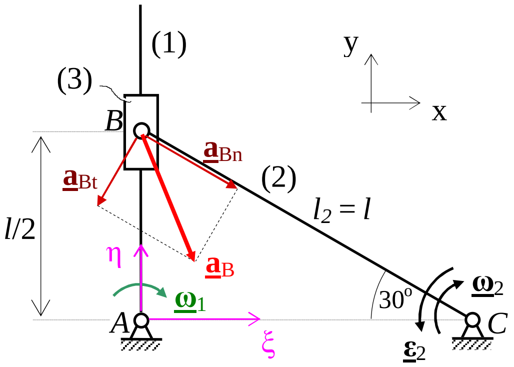
1.) b.) A „*B*” pont gyorsulását (a sebességek vizsgálata során említettek figyelembe vételével):

$$\underline{\mathbf{a}}_{B2} = \underline{\mathbf{a}}_{B3} = \underline{\mathbf{a}}_{B}$$

- a *C* csukló felől a (2)-es test pontjaként ($\underline{\mathbf{a}}_{B2}$) ,
- az *A* csuló felől az (1)-es test, valamint az (1)-es és a (3)-as test egymáshoz viszonyított mozgásán keresztül a (3)-as test pontjaként ($\underline{\mathbf{a}}_{B3}$) is számíthatjuk,

majd ezek egyenlővé tételével megkaphatjuk az (1)-es test gyorsulásállapotát jellemző (egyelőre ismeretlen) $\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_1$ szöggyorsulásvektort.

- (2)-es test: A *B* pont gyorsulása a geometria, az $\underline{\boldsymbol{\omega}}_2$ és az $\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_2$ ismeretében meghatározható:

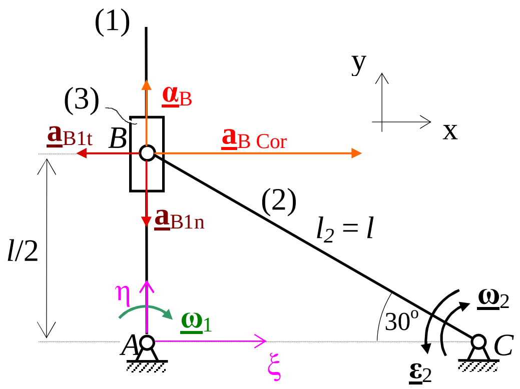


$$\underline{\mathbf{a}}_B = \underline{\mathbf{a}}_C + \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_2 \mathrm{x}\, \underline{\mathbf{r}}_{CB} - \omega_2^2\, \underline{\mathbf{r}}_{CB} = \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_2 \mathrm{x}\, \underline{\mathbf{r}}_{CB} - \omega_2^2\, \underline{\mathbf{r}}_{CB} = \underline{\mathbf{a}}_{Bt} + \underline{\mathbf{a}}_{Bn}$$

$$\underline{\mathbf{a}}_B = \varepsilon_2 l \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{bmatrix} + \omega_2^2 l \begin{bmatrix} \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ -\dfrac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0{,}79 \\ -1{,}84 \\ 0 \end{bmatrix} \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right]$$

- A „relatív” kapcsolat:

$$\underline{\mathbf{a}}_B = \underline{\boldsymbol{\alpha}}_B + \underline{\mathbf{a}}_{B\,\text{száll}} + \underline{\mathbf{a}}_{B\,\text{Cor}}, \quad \text{ahol}$$



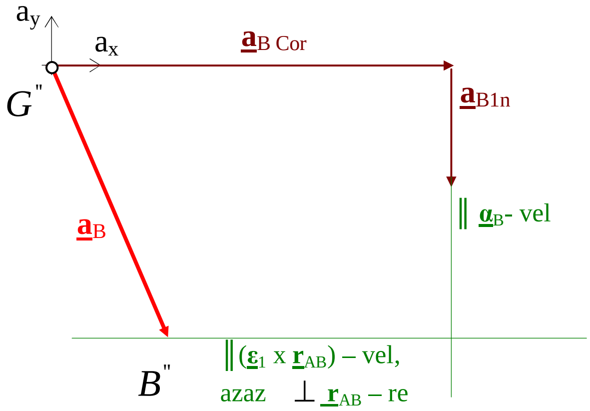
- $\underline{\boldsymbol{\alpha}}_B$ a *B* pont gyorsulása a (ξηζ) rendszerben, tehát a relatív gyorsulás ($\underline{\boldsymbol{\alpha}}_B = \underline{\mathbf{a}}_{B\,\text{rel}}$). Mivel a *B* pont (az egész csúszkával együtt) csak rúdirányban (η) tud elmozdulni az (1)-hez képest:

$$\underline{\boldsymbol{\alpha}}_B = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha_B \\ 0 \end{bmatrix}_{(\xi\eta\zeta)} = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha_B \\ 0 \end{bmatrix}_{(xyz)},$$

- az $\underline{\mathbf{a}}_{B\,\text{száll}}$ (a szállítógyorsulás) az (1)-es test (ξηζ - relatív rendszer) azon pontjának gyorsulása, amely fedésben van a vizsgált (*B*) ponttal, tehát a B_1 pont gyorsulása.:

$$\underline{\mathbf{a}}_{B\,\text{száll}} = \underline{\mathbf{a}}_{B1} = \underline{\mathbf{a}}_A + \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_1 \mathrm{\ x\ } \underline{\mathbf{r}}_{AB} - \omega_1^2\, \underline{\mathbf{r}}_{AB} = \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_1 \mathrm{\ x\ } \underline{\mathbf{r}}_{AB} - \omega_1^2\, \underline{\mathbf{r}}_{AB}$$

$$\underline{\mathbf{a}}_{B\,\text{száll}} = \underline{\mathbf{a}}_{B1t} + \underline{\mathbf{a}}_{B1n} = \varepsilon_1 \frac{l}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \omega_1^2 \frac{l}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$



• az $\underline{a}_{B\,Cor}$ pedig a Coriolis gyorsulás, melyet az

$$\underline{a}_{B\,Cor} = 2\,\underline{\omega}_1 \times \underline{\beta}_B = 2\omega_1\beta_B \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix}2{,}77\\0\\0\end{bmatrix}\left[\frac{m}{s^2}\right]$$

összefüggéssel számíthatunk.

Így (xyz-ben):

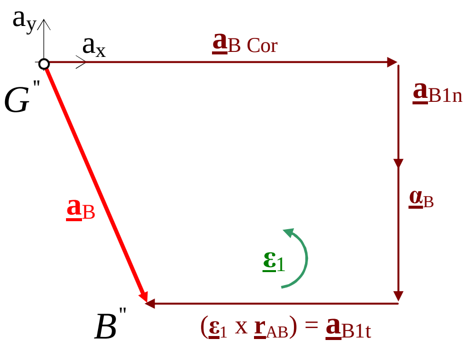
$$(\underline{a}_B =)\ \varepsilon_2 l \begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ 0\end{bmatrix} + \omega_2^2 l \begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{1}{2}\\ 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ \alpha_B\\ 0\end{bmatrix} + \varepsilon_1 \frac{l}{2}\begin{bmatrix}-1\\0\\0\end{bmatrix} - \omega_1^2 \frac{l}{2}\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} + 2\omega_1\beta_B\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},$$

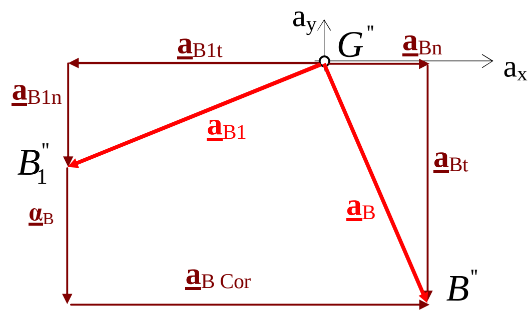
x: $$-\frac{1}{2}\varepsilon_2 l + \frac{\sqrt{3}}{2}\omega_2^2 l = -\varepsilon_1\frac{l}{2} + 2\omega_1\beta_B, \qquad \varepsilon_1 = \varepsilon_2 - \sqrt{3}\omega_2^2 + 2\omega_1\omega_2\sqrt{3} = 3 + 4\sqrt{3} \approx 9{,}93\left[\frac{rad}{s^2}\right]$$

y: $$-\frac{\sqrt{3}}{2}\varepsilon_2 l - \frac{1}{2}\omega_2^2 l = \alpha_B - \omega_1^2\frac{l}{2}, \qquad \alpha_B = -\frac{\sqrt{3}}{2}\varepsilon_2 l - \frac{1}{2}\omega_2^2 l + \omega_1^2\frac{l}{2} = -0{,}6\sqrt{3} \approx -1{,}04\left[\frac{m}{s^2}\right]$$

$$\underline{\varepsilon}_1 = \begin{bmatrix}0\\0\\ \varepsilon_1\end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix}0\\0\\9{,}93\end{bmatrix}\left[\frac{rad}{s^2}\right]; \qquad \underline{\alpha}_B = \begin{bmatrix}0\\ \alpha_B\\ 0\end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix}0\\-1{,}04\\0\end{bmatrix}\left[\frac{m}{s^2}\right]; \qquad \underline{a}_{B1} \approx \begin{bmatrix}-1{,}99\\-0{,}8\\0\end{bmatrix}\left[\frac{m}{s^2}\right]$$

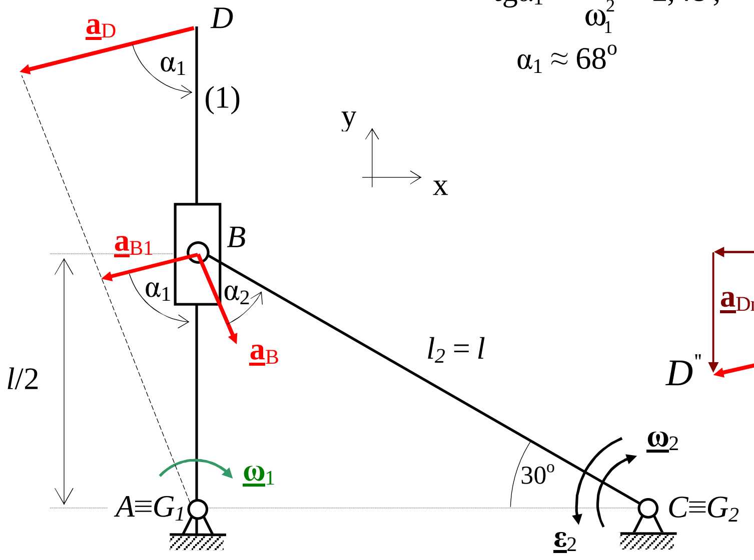
3.) b.)

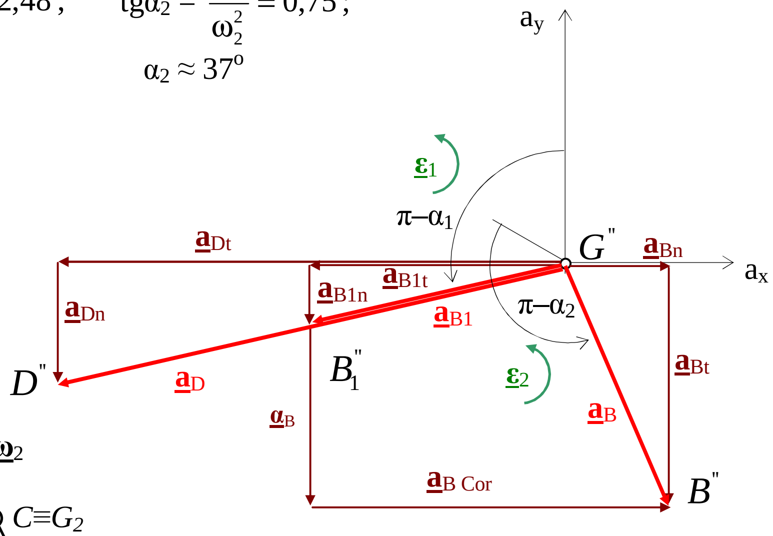




$$\mathrm{tg}\,\alpha_1 = \frac{\varepsilon_1}{\omega_1^2} \approx 2{,}48\,; \qquad \mathrm{tg}\,\alpha_2 = \frac{\varepsilon_2}{\omega_2^2} = 0{,}75\,;$$

$$\alpha_1 \approx 68^{\circ} \qquad\qquad \alpha_2 \approx 37^{\circ}$$





2.) b.)

$$\underline{\mathbf{a}}_D = \underline{\mathbf{a}}_A + \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_1 \times \underline{\mathbf{r}}_{AD} - \omega_1^2\,\underline{\mathbf{r}}_{AD} = \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_1 \times \underline{\mathbf{r}}_{AD} - \omega_1^2\,\underline{\mathbf{r}}_{AD} = \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_1 \times 2\underline{\mathbf{r}}_{AB} - \omega_1^2\,2\underline{\mathbf{r}}_{AB} = 2(\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_1 \times \underline{\mathbf{r}}_{AB} - \omega_1^2\,\underline{\mathbf{r}}_{AB}) = 2\,\underline{\mathbf{a}}_{B1}$$

$$\underline{\mathbf{a}}_D = \underline{\mathbf{a}}_{Dt} + \underline{\mathbf{a}}_{Dn} = 2(\,\underline{\mathbf{a}}_{B1t} + \underline{\mathbf{a}}_{B1n}\,) = \varepsilon_1 l \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \omega_1^2 l \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} -7{,}94 \\ -1{,}6 \\ 0 \end{bmatrix} \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right],$$