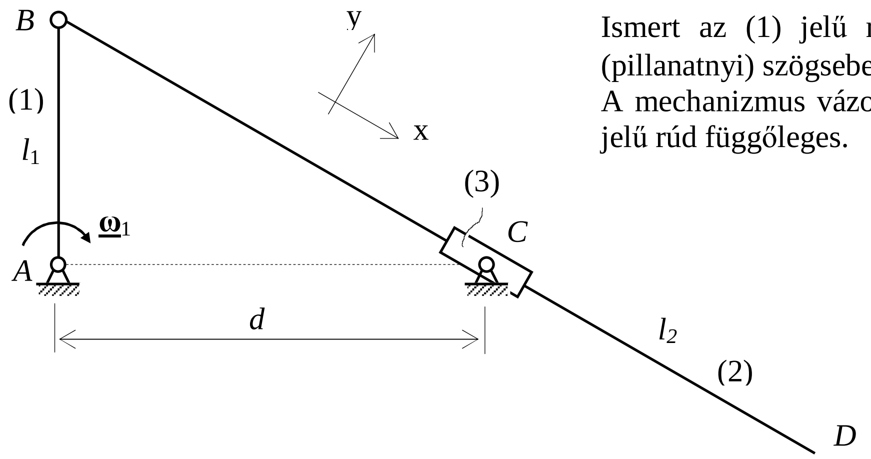
HÁZI FELADAT

Merev testekből álló rendszer kinematikája („relatlatív” kinematika)

Síkbeli csuklós, csúszkás mechanizmus 2.

A vázolt síkbeli mechanizmus (1) jelű, l_1 hosszúságú *AB* rúdjához csuklósan kapcsolódik a (2) jelű, l_2 hosszúságú *BD* rúd, amely szabadon elmozdulhat a *C* csuklóval rögzített csúszkában. Az *A* és *C* csuklók - azonos magasságban – *d* távolságban vannak egymástól.



Ismert az (1) jelű rúdnak a vázolt helyzethez tartozó (pillanatnyi) szögsebessége ($\underline{\boldsymbol{\omega}}_1$) és szöggyorsulása ($\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_1$).
A mechanizmus vázolt – pillanatnyi – helyzetében az (1) jelű rúd függőleges.

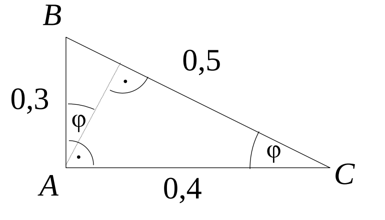
Adatok:

l_1 = 0,3 [m]
l_2 = 0,9 [m]
d = 0,4 [m]
ω_1 = 4 [rad/s]
ε_1 = 0

Feladat: 1.) Határozzuk meg a (2) jelű rúdnak a vázolt helyzethez tartozó
- a.) szögsebességét ($\underline{\boldsymbol{\omega}}_2$ = ?),
- b.) szöggyorsulását ($\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_2$ = ?),
- c.) sebességpólusának és gyorsuláspólusának helyét ($\underline{\mathbf{r}}_{CP2}$ = ? ; $\underline{\mathbf{r}}_{CG2}$ = ?), valamint
- d.) a pólusvándorlás sebességét ($\underline{\mathbf{u}}$ = ?) !

2.) Számítsuk ki a *D* pont pillanatnyi
- a.) pillanatnyi sebességét ($\underline{\mathbf{v}}_D$ = ?), és
- b.) pillanatnyi gyorsulását ($\underline{\mathbf{a}}_D$ = ?), valamint
- c.) pályájának görbületi sugarát az adott helyzetben (ρ_D = ?) !

3.) Rajzoljuk meg a
- a.) sebesség- és a
- b.) gyorsulásábrát!



$\sin\varphi = 0{,}6$
$\cos\varphi = 0{,}8$

$$\underline{\mathbf{r}}_{AB} = l_1\begin{bmatrix}-\sin\varphi\\ \cos\varphi\\ 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-0{,}18\\ 0{,}24\\ 0\end{bmatrix}[\mathrm{m}];\quad \underline{\mathbf{r}}_{BC} = l_{BC}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0{,}5\\0\\0\end{bmatrix}[\mathrm{m}];\quad \underline{\mathbf{r}}_{BD} = l_2\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0{,}9\\0\\0\end{bmatrix}[\mathrm{m}];\quad \underline{\boldsymbol{\omega}}_1 = \begin{bmatrix}0\\0\\-4\end{bmatrix}\left[\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}\right]$$

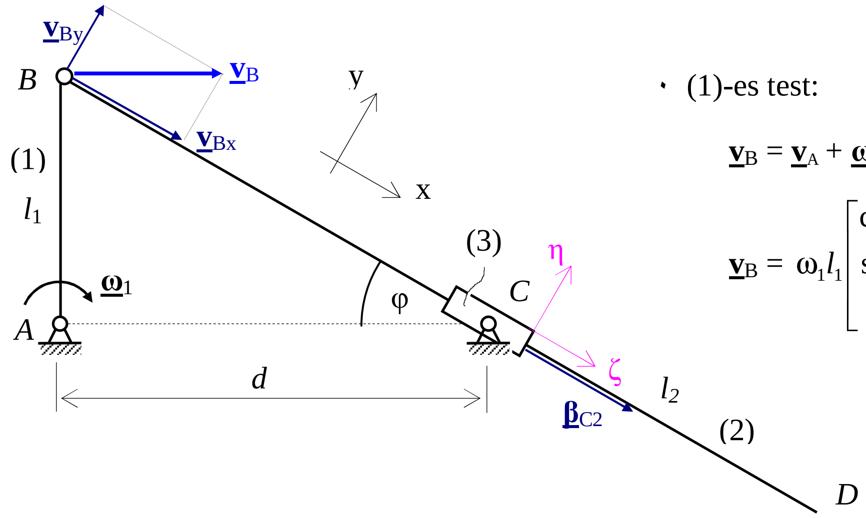
Megoldás:

1.) a.) Vizsgáljuk meg az egyes testek sebességállapotát (egy pontjukhoz redukált kinematikai vektorkettősükkel):

(1) $[\,\underline{\boldsymbol{\omega}}_1\,;\,\underline{\mathbf{v}}_A\,]_A = [\,\underline{\boldsymbol{\omega}}_1\,;\,\underline{\mathbf{0}}\,]_A$, ahol $\underline{\boldsymbol{\omega}}_1$ adott,

(2) $[\,\underline{\boldsymbol{\omega}}_2\,;\,\underline{\mathbf{v}}_B\,]_B$, ahol $\underline{\boldsymbol{\omega}}_2$ ismeretlen, és $\underline{\mathbf{v}}_B$ (mivel a B pontja az (1)-es testnek is) az $\underline{\boldsymbol{\omega}}_1$ és az $\underline{\mathbf{r}}_{AB}$ ismeretében számítható,

(3) $[\,\underline{\boldsymbol{\omega}}_3\,;\,\underline{\mathbf{v}}_C\,]_C = [\,\underline{\boldsymbol{\omega}}_3\,;\,\underline{\mathbf{0}}\,]_C$, ahol $\underline{\boldsymbol{\omega}}_3 = \underline{\boldsymbol{\omega}}_2$ (a csúszka együtt fordul a (2)-es rúddal)



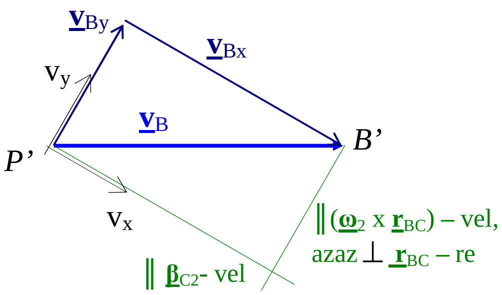
- (1)-es test:

$$\underline{\mathbf{v}}_B = \underline{\mathbf{v}}_A + \underline{\boldsymbol{\omega}}_1 \times \underline{\mathbf{r}}_{AB} = \underline{\boldsymbol{\omega}}_1 \times \underline{\mathbf{r}}_{AB}$$

$$\underline{\mathbf{v}}_B = \omega_1 l_1 \begin{bmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\\ 0\end{bmatrix} = 1{,}2\begin{bmatrix}0{,}8\\ 0{,}6\\ 0\end{bmatrix}\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right] = \begin{bmatrix}0{,}96\\ 0{,}72\\ 0\end{bmatrix}\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right]$$

C-ben két testnek van pontja: a (2)-es rúdnak (C_2), és a (3)-as csúszkának (C_3).

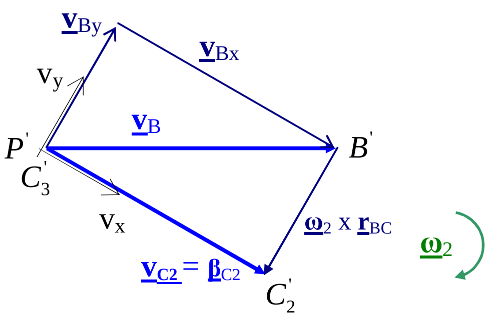
A C_2 pont elmozdul a rögzített C_3 ponthoz képest.(Mivel C_3 rögzített csukló, a C_2 pont abszolút sebessége meg fog egyezni a relatív sebességével.) Felvesszük a ((ξηζ) koordinátarendszert (, amit most a csúszkához rögzítünk), majd felírjuk a C_2 pont sebességét kétféle megközelítésben:



- (2)-es test:

$$\underline{\mathbf{v}}_{C2} = \underline{\mathbf{v}}_B + \underline{\boldsymbol{\omega}}_2 \times \underline{\mathbf{r}}_{BC}\text{ , és }\quad \underline{\boldsymbol{\omega}}_2 = \begin{bmatrix}0\\ 0\\ -\omega_2\end{bmatrix}\text{-t feltételezve:}$$

$$\underline{\mathbf{v}}_{C2} = \omega_1 l_1 \begin{bmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\\ 0\end{bmatrix} + \omega_2 l_{BC}\begin{bmatrix}0\\ -1\\ 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0{,}96\\ 0{,}72\\ 0\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0\\ 0{,}5\omega_2\\ 0\end{bmatrix}$$



- A „relatív" kapcsolat: $\underline{\mathbf{v}}_{C2} = \underline{\mathbf{v}}_{C2\,\text{száll}} + \underline{\boldsymbol{\beta}}_{C2}$, ahol

$$\underline{\mathbf{v}}_{C2\,\text{száll}} = \underline{\mathbf{v}}_{C3} = \underline{\mathbf{0}}\,; \qquad \underline{\boldsymbol{\beta}}_{C2} = \begin{bmatrix}\beta_{C2}\\ 0\\ 0\end{bmatrix}_{(\xi\eta\varsigma)} = \begin{bmatrix}\beta_{C2}\\ 0\\ 0\end{bmatrix}_{(xyz)}$$

Így (xyz-ben):

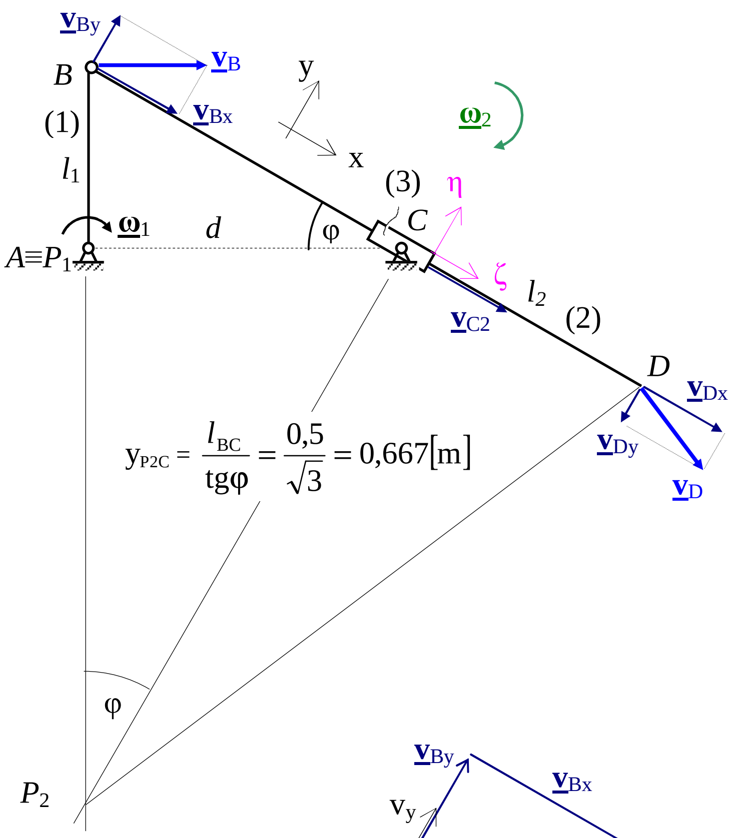
$$(\underline{\mathbf{v}}_{C2} =)\ \omega_1 l_1 \begin{bmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix} + \omega_2 l_{BC} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_{C2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

x: $\omega_1 l_1 \cos\varphi = \beta_{C2}$, $$\underline{\boldsymbol{\beta}}_{C2} = \underline{\mathbf{v}}_{C2} = \begin{bmatrix} \omega_1 l_1 \cos\varphi \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}96 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \left[\frac{m}{s}\right]$$

y: $\omega_1 l_1 \sin\varphi - \omega_2 l_{BC} = 0$, $$\omega_2 = \frac{\omega_1 l_1 \sin\varphi}{l_{BC}} = \frac{0{,}72}{0{,}5} = 1{,}44 \left[\frac{rad}{s}\right]$$

$$\underline{\boldsymbol{\omega}}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1{,}44 \end{bmatrix} \left[\frac{rad}{s}\right]$$

2.) a.)



(2)-es test:

$$\underline{\mathbf{v}}_D = \underline{\mathbf{v}}_{C2} + \underline{\boldsymbol{\omega}}_2 \times \underline{\mathbf{r}}_{C2D}$$

$$\underline{\mathbf{v}}_D = \begin{bmatrix} v_{C2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \omega_2 l_{CD} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{C2} \\ -\omega_2 l_{CD} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\mathbf{v}}_D = \begin{bmatrix} 0{,}96 \\ -0{,}576 \\ 0 \end{bmatrix} \left[\frac{m}{s}\right]$$

1.) c.) Sebességpólus:

$$\underline{\mathbf{v}}_{C2} = \underline{\mathbf{v}}_{P2} + \underline{\boldsymbol{\omega}}_2 \times \underline{\mathbf{r}}_{P2C} = \underline{\boldsymbol{\omega}}_2 \times \underline{\mathbf{r}}_{P2C}$$

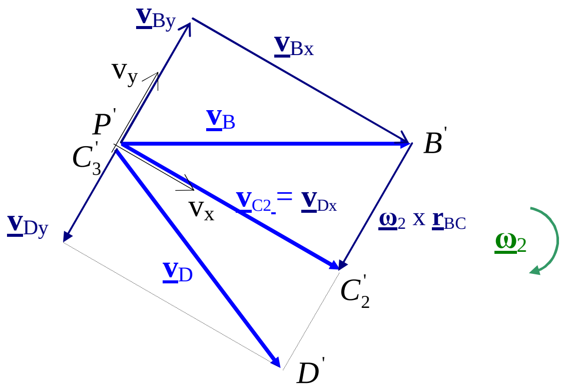
$$\underline{\mathbf{v}}_{C2} = \begin{bmatrix} v_{C2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_2 y_{P2C} \\ -\omega_2 x_{P2C} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$y_{P2C} = \frac{v_{C2}}{\omega_2} = 0{,}667\ [m]$$

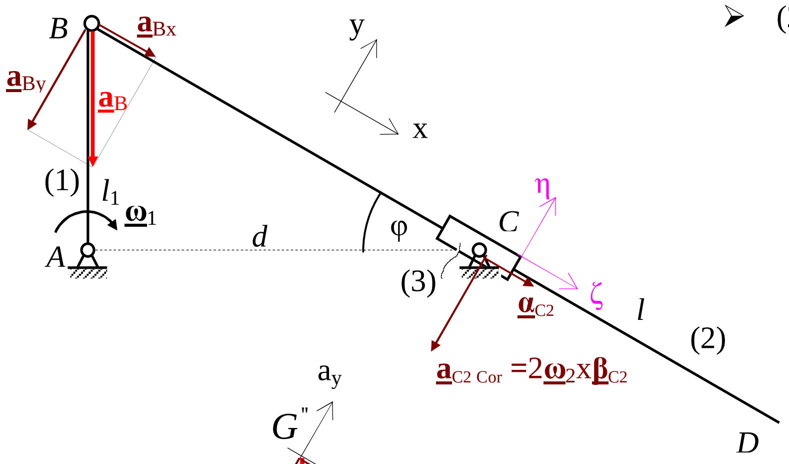
$$x_{P2C} = 0$$

$$\underline{\mathbf{r}}_{CP2} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0{,}667 \\ 0 \end{bmatrix} [m]$$

3.) a.) Sebességábra:



1.) b.) Írjuk fel a C_2 pont gyorsulását kétféle megközelítésben:



➢ (2)-es test:

$$\underline{a}_{C2} = \underline{a}_B + \underline{\varepsilon}_2 x\ \underline{r}_{BC} - \omega_2^2\, \underline{r}_{BC}\text{ , ehhez}$$

- (1)-es test:

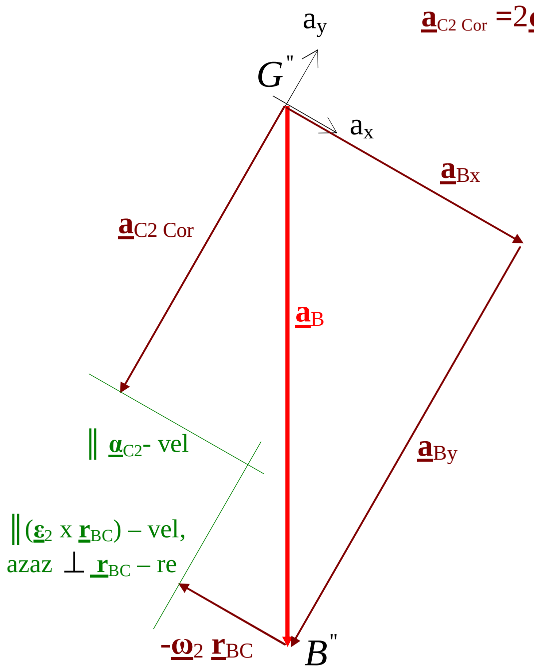
$$\underline{a}_B = \underline{a}_A + \underline{\varepsilon}_1 x\ \underline{r}_{AB} - \omega_1^2\, \underline{r}_{AB} = -\ \omega_1^2\, \underline{r}_{AB} = \underline{a}_{Bn}$$

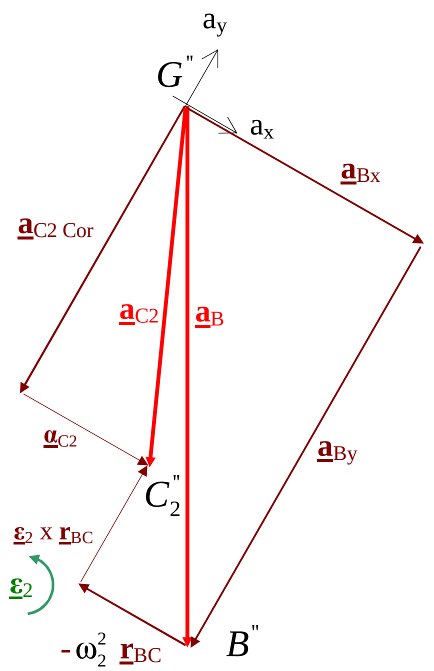
$$\underline{a}_B = -\omega_1^2 l_1 \begin{bmatrix} -0,6 \\ 0,8 \\ 0 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 2,88 \\ -3,84 \\ 0 \end{bmatrix} \left[\frac{m}{s^2}\right],$$

- $\underline{\varepsilon}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \varepsilon_2 \end{bmatrix}$ -t feltételezve:

$$\underline{\varepsilon}_2 x\ \underline{r}_{BC} = \begin{bmatrix} 0 \\ \varepsilon_2 l_{BC} \\ 0 \end{bmatrix},$$

- $$-\ \omega_2^2\, \underline{r}_{BC} = \begin{bmatrix} -\omega_2^2 l_{BC} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1,0368 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \left[\frac{m}{s^2}\right]$$





➢ A „relatív" kapcsolat:

$$\underline{a}_{C2} = \underline{\alpha}_{C2} + \underline{a}_{C2\ \text{száll}} + \underline{a}_{C2\ Cor}\text{, ahol}$$

$$\underline{\alpha}_{C2} = \begin{bmatrix} \alpha_{C2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{(\xi\eta\varsigma)} = \begin{bmatrix} \alpha_{C2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{(xyz)}$$

$$\underline{a}_{C2\ \text{száll}} = \underline{a}_{C3} = \underline{0}$$

$$\underline{a}_{C2\ Cor} = 2\ \underline{\omega}_2 x\ \underline{\beta}_{C2}$$

$$\underline{a}_{C2\ Cor} = 2\omega_2\beta_{C2} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0 \\ -2,7648 \\ 0 \end{bmatrix} \left[\frac{m}{s^2}\right]$$

Így (xyz-ben):

$$(\underline{\mathbf{a}}_{C2} =)\ -\omega_1^2 l_1 \begin{bmatrix} -0{,}6 \\ 0{,}8 \\ 0 \end{bmatrix} + \varepsilon_2 l_{BC} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \omega_2^2 l_{BC} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{C2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 2\omega_2 \beta_{C2} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

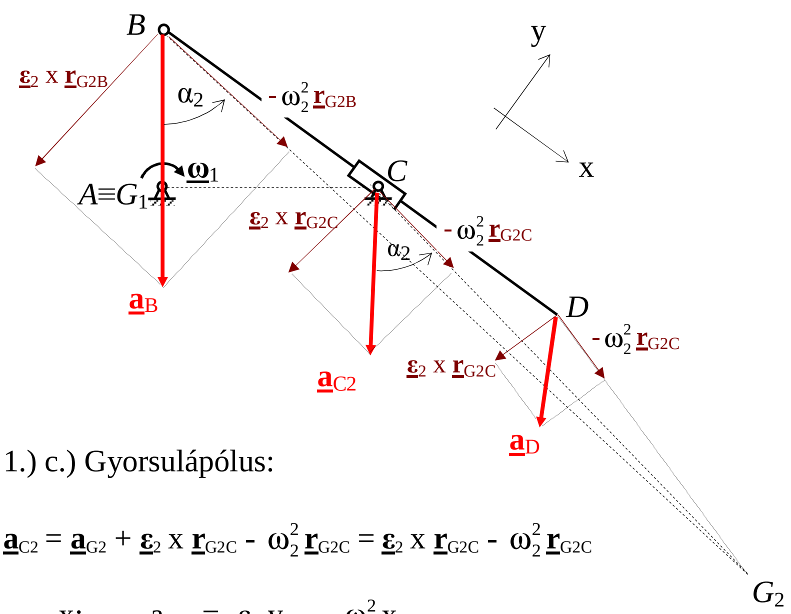
x: $\quad 0{,}6\,\omega_1^2 l_1 - \omega_2^2 l_{BC} = \alpha_{C2}, \qquad \alpha_{C2} \approx 1{,}8432 \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}^2}\right] \approx 1{,}84 \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}^2}\right]$

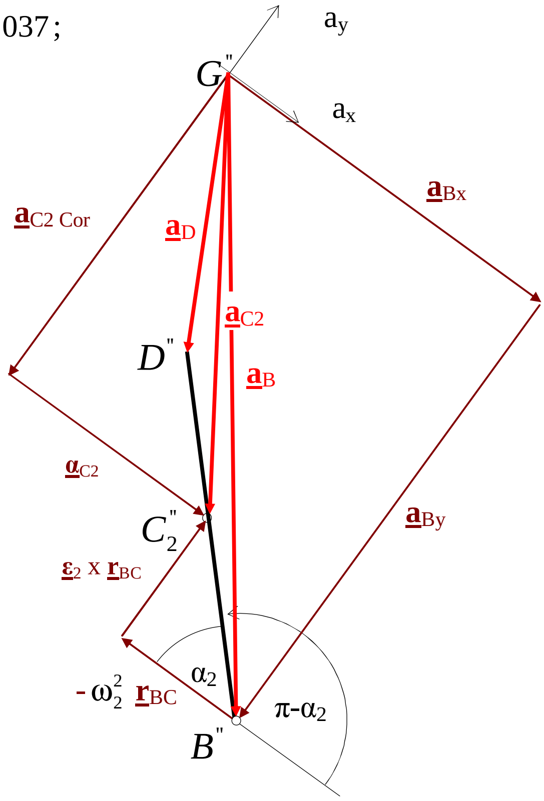
y: $\quad -0{,}8\omega_1^2 l_1 + \varepsilon_2 l_{BC} = -2\omega_2 \beta_{C2}, \qquad \varepsilon_2 \approx 2{,}1504 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right] \approx 2{,}15 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right]$

$$\underline{\boldsymbol{\alpha}}_{C2} \approx \begin{bmatrix} 1{,}84 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right]; \qquad \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \varepsilon_2 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2{,}15 \end{bmatrix} \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}^2}\right]; \qquad \underline{\mathbf{a}}_{C2} \approx \begin{bmatrix} 1{,}84 \\ -2{,}76 \\ 0 \end{bmatrix} \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right]$$

3.) b.) Gyorsulásábra: $\quad \text{tg}\alpha_1 = \frac{\varepsilon_1}{\omega_1^2} = 0; \quad \text{tg}\alpha_2 = \frac{\varepsilon_2}{\omega_2^2} \approx 1{,}037;$

$\alpha_1 = 0 \qquad \alpha_2 \approx 46^o$





1.) c.) Gyorsulápólus:

$\underline{\mathbf{a}}_{C2} = \underline{\mathbf{a}}_{G2} + \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_2 \times \underline{\mathbf{r}}_{G2C} - \omega_2^2 \underline{\mathbf{r}}_{G2C} = \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_2 \times \underline{\mathbf{r}}_{G2C} - \omega_2^2 \underline{\mathbf{r}}_{G2C}$

x: $\quad a_{C2x} = -\varepsilon_2\, y_{G2C} - \omega_2^2\, x_{G2C}$

y: $\quad a_{C2y} = \varepsilon_2\, x_{G2C} - \omega_2^2\, y_{G2C}$

$x_{G2C} \approx -1{,}1$ [m]

$y_{G2C} \approx 0{,}2$ [m] $\qquad \underline{\mathbf{r}}_{CG2} = -\,\underline{\mathbf{r}}_{G2C} \approx \begin{bmatrix} 1{,}1 \\ -0{,}2 \\ 0 \end{bmatrix}$ [m]

2.) b.) $\underline{\mathbf{a}}_D = \underline{\mathbf{a}}_B + \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_2 \times \underline{\mathbf{r}}_{BD} - \omega_2^2 \underline{\mathbf{r}}_{BD} \approx \begin{bmatrix} 2{,}88 \\ -3{,}84 \\ 0 \end{bmatrix} + 2{,}15 \begin{bmatrix} 0 \\ 0{,}9 \\ 0 \end{bmatrix} - 1{,}44^2 \begin{bmatrix} 0{,}9 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1{,}01 \\ -1{,}9 \\ 0 \end{bmatrix} \left[\frac{m}{s^2}\right]$

2.) c.)

$$\rho_D = \frac{v_D^2}{a_{Dn}} \approx 1{,}13 \ [m]$$

$$a_{Dn} = \sqrt{a_D^2 - a_{Dt}^2} = \sqrt{a_{Dx}^2 + a_{Dy}^2 - a_{Dt}^2} \approx 1{,}11 \left[\frac{m}{s^2}\right]$$

$$a_{Dt} = \frac{1}{|\underline{\mathbf{v}}_D|} (\underline{\mathbf{a}}_D \bullet \underline{\mathbf{v}}_D) = \frac{1}{\sqrt{v_{Dx}^2 + v_{Dy}^2}} (\, a_{Dx} v_{Dx} + a_{Dy} v_{Dy} \,) \approx 1{,}84 \left[\frac{m}{s^2}\right]$$

$$\underline{\mathbf{v}}_D = \begin{bmatrix} 0{,}96 \\ -0{,}576 \\ 0 \end{bmatrix} \left[\frac{m}{s}\right]; \qquad \underline{\mathbf{a}}_D \approx \begin{bmatrix} 1{,}01 \\ -1{,}9 \\ 0 \end{bmatrix} \left[\frac{m}{s^2}\right]$$

1.) d.) $\underline{\mathbf{u}} = \dfrac{1}{\omega_2^2} (\underline{\boldsymbol{\omega}}_2 \times \underline{\mathbf{a}}_{P2})$

$$\underline{\mathbf{a}}_{P2} = \underline{\mathbf{a}}_{G2} + \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_2 \times \underline{\mathbf{r}}_{G2P} - \omega_2^2 \underline{\mathbf{r}}_{G2P}$$

$$\underline{\mathbf{r}}_{G2P2} = \underline{\mathbf{r}}_{G2C} + \underline{\mathbf{r}}_{CG2} = \begin{bmatrix} -1{,}1 \\ 0{,}2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -0{,}667 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1{,}1 \\ -0{,}467 \\ 0 \end{bmatrix} [m]$$

$$\underline{\mathbf{a}}_{P2} = \begin{bmatrix} -\varepsilon_2 y_{G2P2} \\ \varepsilon_2 x_{G2P2} \\ 0 \end{bmatrix} - \omega_2^2 \begin{bmatrix} x_{G2P2} \\ y_{G2P2} \\ 0 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 \\ -2{,}35 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2{,}27 \\ -0{,}97 \\ 0 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 3{,}27 \\ -1{,}38 \\ 0 \end{bmatrix} \left[\frac{m}{s^2}\right]$$

$$\underline{\mathbf{u}} \approx \begin{bmatrix} -0{,}96 \\ -2{,}27 \\ 0 \end{bmatrix} \left[\frac{m}{s}\right]$$