HÁZI FELADAT – megoldási segédlet
Relatív kinematika
Két autó. 2. rész

1. Határozzuk meg, hogy milyennek észleli a *B* autóban ülő megfigyelő az *A* autó sebességét és gyorsulását abban a pillanatban, amikor az ábrán vázolt helyzetbe érnek.

1. lépés:
a vonatkoztatási rendszerek és a koordinátarendszerek felvétele

VR1: a nyugvónak és merevnek tekintett környezet. A hozzá kötött KR1: $\{O;\, x, y, z\}$

VR2: a *B* jelű autó, mint merev test. A hozzá kötött KR2: $\{\Omega;\, \xi, \eta, \zeta\}$

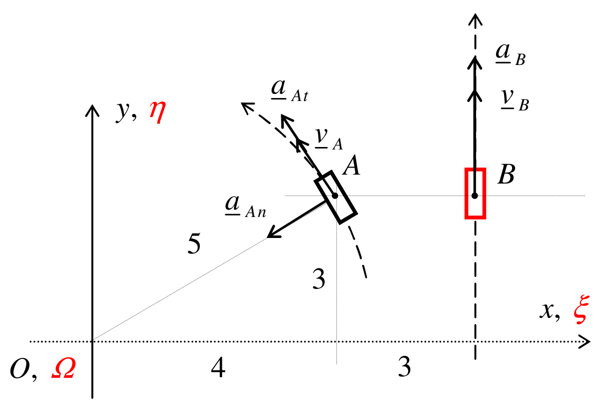
Az adott pillanatban a két KR egymással fedésben van úgy, hogy:
$O = \Omega$ és $\zeta = z$ tartósan fedésben vannak, $x = \xi$ és $y = \eta$ pillanatnyilag fedésben vannak

$v_A = 18\,[\text{km/h}] = 5\,[\text{m/s}]$

$a_{At} = 2\,[\text{m/s}^2]$

$v_B = 36\,[\text{km/h}] = 10\,[\text{m/s}]$

$a_B = 3\,[\text{m/s}^2]$



2. lépés:
a mozgó vonatkoztatási rendszer mint merev test mozgásállapotának meghatározása az álló vonatkoztatási rendszerhez képest, az adott pillanatban:

A *B* jelű autó haladó mozgást végez a VR1-ben. Minden pontjának ugyanaz a sebessége, és minden pontjának ugyanaz a gyorsulása. Nem forog, tehát szögsebessége és szöggyorsulása nulla.

Sebességállapot: $\underline{\omega}_{21} = \underline{0}, \quad \underline{v}_B = \underline{v}_\Omega = 10\,\underline{j}\left[\frac{\text{m}}{\text{s}}\right]$ adott

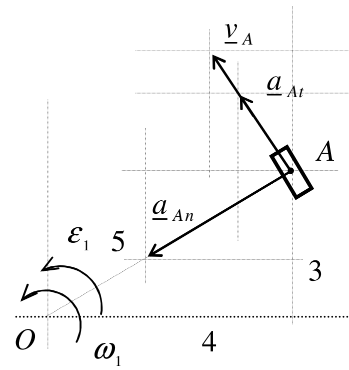
Gyorsulásállapot: $\underline{\varepsilon}_{21} = \underline{0}, \quad \underline{a}_B = \underline{a}_\Omega = 3\,\underline{j}\left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right]$ adott

3. lépés:
a megfigyelt test mozgásállapotának leírása az álló koordinátarendszerben, az adott pillanatban:

Az *A* autó (megfigyelt test) *A* pontjának sebessége és gyorsulása a VR1-hez képest:

$$v_A = 5\left[\frac{\text{m}}{\text{s}}\right]$$

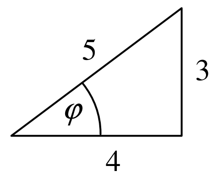
$$a_{At} = 2\left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right], \quad a_{An} = \frac{v_A^2}{R} = \frac{25}{5} = 5\left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right],$$



Az ábráról hasonló háromszögek segítségével leolvasva:

$$\underline{v}_A = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}_{x,y,z} \left[\frac{m}{s}\right]$$

$$\underline{a}_A = 2\cdot\begin{bmatrix} -0,6 \\ 0,8 \\ 0 \end{bmatrix} + 5\cdot\begin{bmatrix} -0,8 \\ -0,6 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5,2 \\ -1,4 \\ 0 \end{bmatrix}_{x,y,z} \left[\frac{\text{m}}{\text{s}}\right]$$



$$\cos\varphi = \frac{4}{5} = 0,8$$

$$\sin\varphi = \frac{3}{5} = 0,6$$

Az *A* autó (megfigyelt test) szögsebessége és szöggyorsulása a VR1-hez képest:

Hasonlóan, ahogy az 1. részben jártunk el: az *A* autó egy az *O*-n átmenő tengely körül forgó tárcsa részeként fogható fel. Így egy merev test (ti. a képzeletbeli tárcsa) két pontjára vonatkozó $\underline{v}_A = \underline{v}_O + \underline{\omega}_{21}\times\underline{r}_{OA}$ és $\underline{a}_A = \underline{a}_O + \underline{\varepsilon}_{21}\times\underline{r}_{OA} - \omega_{21}^2\cdot\underline{r}_{OA}$ összefüggésekből:

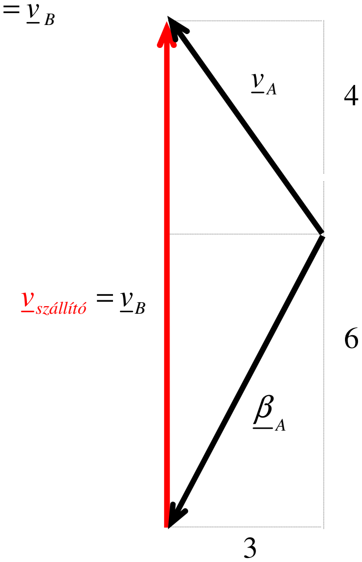
$$\underline{\omega}_1 = 1\,\underline{k}\left[\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right], \qquad \underline{\varepsilon}_1 = 0,4\,\underline{k}\left[\frac{\text{rad}}{\text{s}^2}\right]$$

<u>4. lépés:</u>

kapcsolat az A pont sebességének (és gyorsulásának) az álló és a mozgó vonatkoztatási rendszerben felírt alakjai között:

$$\underline{v}_A = \underline{\beta}_A + \underline{v}_{szállító} \qquad \underline{v}_{szállító} = \underline{v}_\Omega + \cancel{\underline{\omega}_{21}}\times\underline{\rho}_{\Omega A} = \underline{v}_B$$

$$\begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_{Ax} \\ \beta_{Ay} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \boxed{\underline{\beta}_A = \begin{bmatrix} -3 \\ -6 \\ 0 \end{bmatrix}_{x,y,z} \left[\frac{\text{m}}{\text{s}}\right]}$$

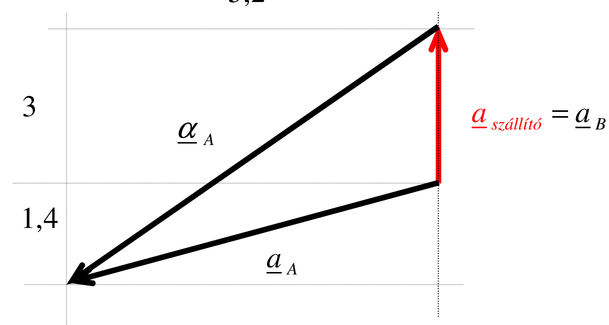


$$\underline{a}_A = \underline{\alpha}_A + \underline{a}_{szállító} + \underline{a}_{Coriolis}$$

$$\underline{a}_{szállító} = \underline{a}_{\Omega} + \cancel{\underline{\varepsilon}_{21}} \times \underline{\rho}_{\Omega A} - \cancel{\omega_{21}^2} \cdot \underline{\rho}_{\Omega A} = \underline{a}_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right]$$

$$\underline{a}_{Coriolis} = 2 \cdot \cancel{\underline{\omega}_{21}} \times \underline{\beta}_A = \underline{0}$$

$$\begin{bmatrix} -5,2 \\ -1,4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{Ax} \\ \alpha_{Ay} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \boxed{\underline{\alpha}_A = \begin{bmatrix} -5,2 \\ -4,4 \\ 0 \end{bmatrix} \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right]}$$



2. **Az *A* autónak a *B* autóban ülő megfigyelő által észlelt pillanatnyi szögsebessége és szöggyorsulása**:

Kapcsolat egy merev test szögsebességének egy mozgó, (VR2), és egy álló (VR1) vonatkoztatási rendszerből megfigyelt szögsebességei között:

$$\underline{\omega}_1 = \underline{\omega}_2 + \underline{\omega}_{21}$$

ahol

$\underline{\omega}_1$ a megfigyelt test szögsebessége az 1-es jelű (VR1) vonatkoztatási rendszerhez képest

$\underline{\omega}_2$ a megfigyelt test szögsebessége a 2-es jelű (VR2) vonatkoztatási rendszerhez képest

$\underline{\omega}_{21}$ a VR2-nek, a mozgó vonatkoztatási rendszernek mint merev testnek a szögsebessége az álló vonatkoztatási rendszerhez, VR1-hez képest.

Alkalmazva a példában:

A *B* jelű merev test haladó mozgást végez, vagyis nem forog a környezethez, vagyis az álló VR1 vonatkoztatási rendszerhez képest, ezért $\underline{\omega}_{21} = \underline{0}$ *és* $\underline{\varepsilon}_{21} = \underline{0}$.

Így az *A* autónak a *B* autóhoz képesti szögsebessége ugyanaz, mint a környezethez képesti szögsebessége: $\boxed{\underline{\omega}_2 = \underline{\omega}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \left[\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}\right]}$.

Hasonlóan, a szöggyorsulások kapcsolatára vonatkozó összefüggésből az A autónak a *B* autóhoz képesti **szöggyorsulása**

$$\boxed{\underline{\varepsilon}_2 = \underline{\varepsilon}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,4 \end{bmatrix} \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}^2}\right]},$$

ugyanis az $\underline{\varepsilon}_1 = \underline{\varepsilon}_2 + \cancel{\underline{\omega}_{21} \times \underline{\omega}_2} + \cancel{\underline{\varepsilon}_{21}}$ általános összefüggésben $\underline{\varepsilon}_{21} = \underline{0}$ (mert a *B* autó haladó mozgást végez), az $\underline{\omega}_{21} \times \underline{\omega}_2$ tag pedig síkbeli mozgásnál mindig nulla, mert mindkét szögsebességvektor merőleges a mozgás síkjára.

3. Ismételjük meg a feladat megoldását, más koordinátarendszer választással.
Most is a *B* jelű autóból figyeljük az *A* jelű autó mozgását. A megoldás lépései is ugyanazok lesznek. A különbség az, hogy a mozgó koordinátarendszert másképp vesszük fel:

1. lépés:
a vonatkoztatási rendszerek és a koordinátarendszerek felvétele

Jelölések:

VR1: álló vonatkoztatási rendszer (1-es jelű merev test)
VR2: mozgó vonatkoztatási rendszer (2-es jelű merev test)
KR1: az álló vonatkoztatási rendszerhez mint merev testhez kötött koordinátarendszer
KR2: a mozgó vonatkoztatási rendszerhez mint merev testhez kötött koordinátarendszer

VR1: a nyugvónak és merevnek tekintett környezet. A hozzá kötött KR1: $\{O; x, y, z\}$ térfix

VR2: a *B* jelű autó, mint merev test. A hozzá kötött KR2: $\{\Omega;\ \xi, \eta, \zeta\}$

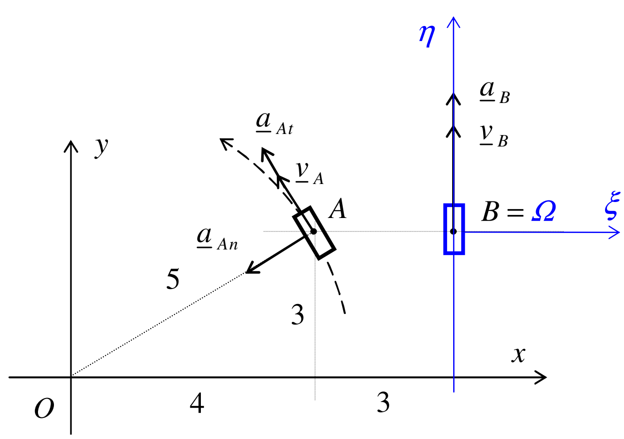
A mozgó koordinátarendszer origóját a *B* autó középpontjában rögzítjük, tengelyei pedig párhuzamosak az álló KR tengelyeivel.

$v_A = 18\,[\text{km/h}] = 5\,[\text{m/s}]$

$a_{At} = 2\,[\text{m/s}^2]$

$v_B = 36\,[\text{km/h}] = 10\,[\text{m/s}]$

$a_B = 3\,[\text{m/s}^2]$



2. lépés:
a mozgó vonatkoztatási rendszer mint merev test mozgásállapotának meghatározása az álló vonatkoztatási rendszerhez képest, az adott pillanatban:

A *B* jelű autó haladó mozgást végez a VR1-ben, nem forog, tehát szögsebessége és szöggyorsulása is nulla.

Sebességállapot: $\underline{\omega}_{21} = \underline{0}, \quad \underline{v}_{\Omega} = \underline{v}_B$

Gyorsulásállapot: $\underline{\varepsilon}_{21} = \underline{0}, \quad \underline{\omega}_{21} = \underline{0}, \quad \underline{a}_{\Omega} = \underline{a}_B$

3. lépés:
a megfigyelt test mozgásállapotának leírása az álló koordinátarendszerben, az adott pillanatban

Az *A* autó VR1-beli mozgásállapotát leíró mennyiségeket már kiszámítottuk az 1. kérdés 3. lépésében. Mivel most a két KR tengelyei egymással párhuzamosak, ezért az adott helyzethez tartozó időpillanatban az *A* pont sebességének (és gyorsulásának) koordinátái a két KR-ben megegyeznek:

$$\left[\underline{v}_A\right]_{KR1} = \left[\underline{v}_A\right]_{KR2} = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} \left[\frac{\text{m}}{\text{s}}\right] \quad \textit{és} \quad \left[\underline{a}_A\right]_{KR1} = \left[\underline{a}_A\right]_{KR2} = \begin{bmatrix} -5,2 \\ -1,4 \\ 0 \end{bmatrix} \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right]$$

Az *A* autó (megfigyelt test) szögsebessége és szöggyorsulása a VR1 álló környezethez képest:

$$\underline{\omega}_{21} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{x,y,z} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{\xi,\eta,\zeta} \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right] \qquad \underline{\varepsilon}_{21} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,4 \end{bmatrix}_{x,y,z} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,4 \end{bmatrix}_{\xi,\eta,\zeta} \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}^2}\right]$$

Rendelkezésre állnak az *A* autónak mint merev testnek a **mozgásállapotát** megadó vektorok:

Sebességállapot: $\underline{v}_A, \ \underline{\omega}_1$

Gyorsulásállapot: $\underline{a}_A, \ \underline{\varepsilon}_1, \ \underline{\omega}_1$

4. lépés:
kapcsolat az A pont sebességének (és gyorsulásának) az álló és a mozgó vonatkoztatási rendszerben felírt alakjai között:

$$\underline{v}_A = \underline{\beta}_A + \underline{v}_{szállító}$$

$$\underline{v}_{szállító} = \underline{v}_{\Omega} + \cancel{\underline{\omega}_{21} \times \underline{\rho}_{\Omega A}} = \underline{v}_B + \cancel{\underline{\omega}_{21} \times \underline{\rho}_{BA}} = \underline{v}_B$$

$$\underline{\beta}_A = \underline{v}_A - \underline{v}_{szállító} = \underline{v}_A - \underline{v}_B = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -6 \\ 0 \end{bmatrix} \left[\frac{\text{m}}{\text{s}}\right]$$

$$\underline{a}_A = \underline{\alpha}_A + \underline{a}_{szállító} + \underline{a}_{Coriolis}$$

$$\underline{a}_{szállító} = \underline{a}_{\Omega} + \cancel{\underline{\varepsilon}_{21}} \times \underline{\rho}_{\Omega A} - \cancel{\omega_{21}^2} \cdot \underline{\rho}_{\Omega A} = \underline{a}_B$$

$$\underline{a}_{Coriolis} = 2 \cdot \cancel{\underline{\omega}_{21}} \times \underline{\beta}_B = \underline{0}$$

$$\underline{\alpha}_A = \underline{a}_A - \underline{a}_{szállító} = \underline{a}_A - \underline{a}_B = \begin{bmatrix} -5,2 \\ -1,4 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5,2 \\ -4,4 \\ 0 \end{bmatrix} \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right]$$

A szögsebesség és szöggyorsulás számítása minden részletében megegyezik az előbbiekben ismertetettel.

A feladat ***fizikai megfogalmazása*** ugyanaz, mint az előbb. A ***számítási segédeszköz*** különböző: másmilyen koordinátarendszert kötöttünk a mozgó vonatkoztatási rendszerhez. Ez nem befolyásolja a végeredményt. Ugyanazokat a kinematikai mennyiségeket kaptuk, mint az előbb, vagyis az autó mozgása ugyanolyannak látszik egy adott mozgásállapotú másik autóból nézve, akárhogyan választottunk koordinátarendszert.

Hogy milyennek észleli egy mozgó megfigyelő az autó mozgását, az függ annak a vonatkoztatási rendszernek a mozgásállapotától, amelyiken a megfigyelő ül, de nem függ a hozzá rögzített koordinátarendszer megválasztásától. A koordinátarendszer MATEMATIKAI SEGÉDKONSTRUKCIÓ, a vonatkoztatási rendszer pedig egy FIZIKAILAG MEGHATÁROZOTT objektum.

A feladatmegoldás során nyert megállapítások összefoglalása:

1. Az eredmények szempontjából közömbös, hogy milyen koordinátarendszerben számolunk. (az origó megválasztása és a tengelyek szögállása nem befolyásolja az eredményeket). Koordinátarendszert számítástechnikai célszerűségi alapon választunk.
2. Ha úgy vesszük fel a különböző mozgásállapotú vonatkoztatási rendszerekhez rögzített koordinátarendszereket, hogy a vizsgált pillanatban nincsenek egymással fedésben, akkor koordinátatranszformációval minden, egyazon egyenletben szereplő vektormennyiség koordinátáit át kell írni ugyanabba a koordinátarendszerbe.
3. A koordinátarendszereket eleve fedésben felvenni olyankor célszerű, amikor csak egy adott időpillanatban vizsgáljuk a rendszer mozgásállapotát („fényképfelvétel”).