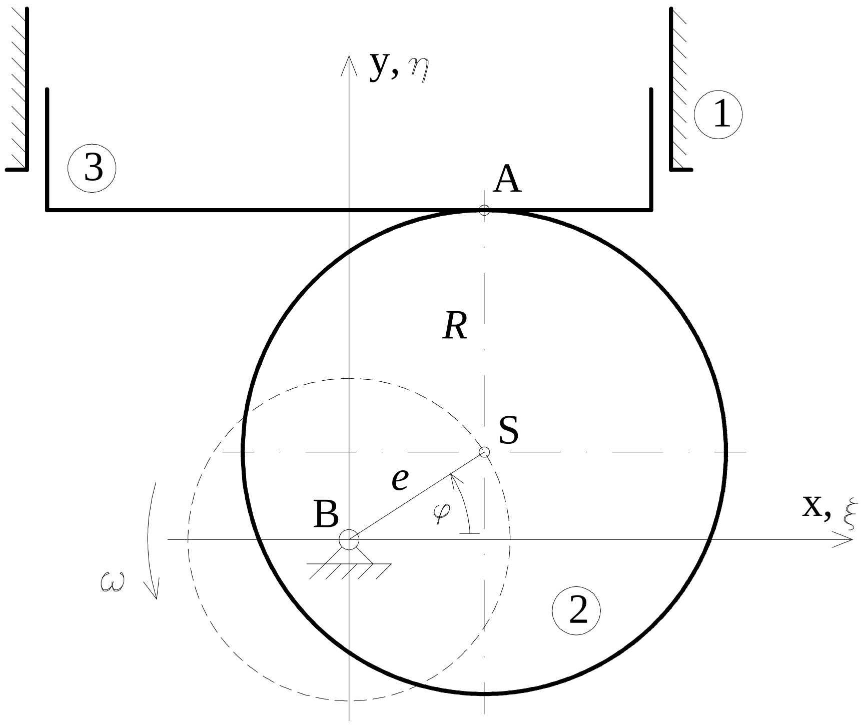
SZELEPEMELŐ MECHANIZMUS
Témakör: Kinematika, merev test, síkmozgás, relatív

A vázolt szelepemelő mechanizmus *R* sugarú, *e* excentricitású excentertárcsája állandó ω szögsebességgel forog.

1. Rajzoljuk meg a szelep foronomiai görbéit. (Vagyis az $y(t)$, $v(t)$ és $a(t)$ függvényeket.)
2. Határozzuk meg a szelep sebességét és gyorsulását a tárcsa mint mozgó vonatkoztatási rendszer segítségével egy φ helyzetben, és rajzoljuk meg a vektorábrákat.



MEGOLDÁS:

1.

A szelep a vezeték által megszabott egyenesvonalú kényszerpályán haladó mozgást végez, ezért minden pontjának ugyanaz a sebessége és a gyorsulása a mozgás folyamán bármely pillanatban. A szelep excentertárcsával való mindenkori érintkezési pontjának *y* irányú koordinátája a szelep helyzete a *B* fixponthoz képest:

$$y(t) = R + e \cdot \sin\varphi = R + e \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

Mivel a szögsebesség, $\omega = \dot{\varphi}$ állandó, ezért a $\varphi(t)$ szöghelyzet az idő lineáris függvénye:

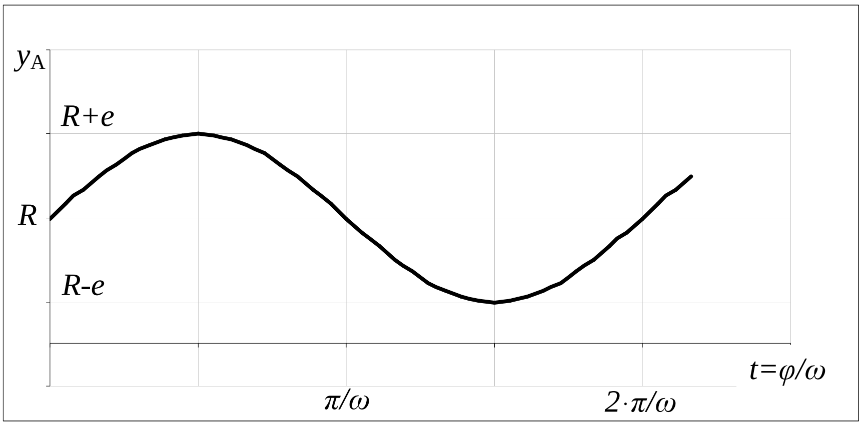
$$\varphi(t) = \omega \cdot t$$

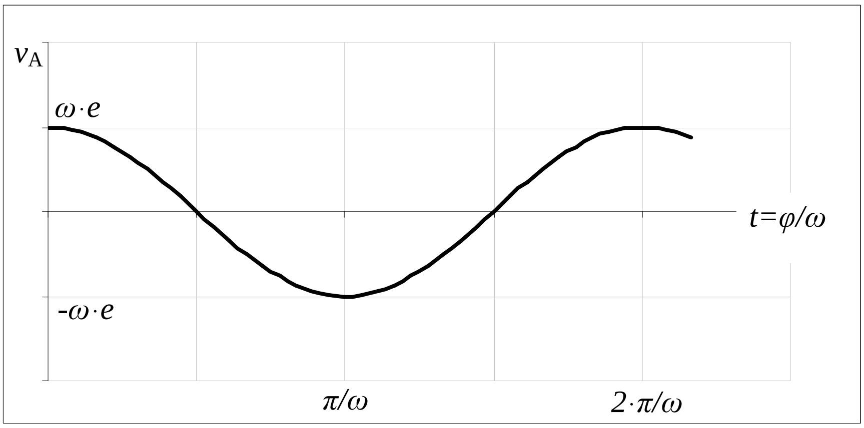
Idő szerint deriválva az *y*(t) függvényt, a szelep sebessége adódik, kétszer deriválva pedig a gyorsulása:

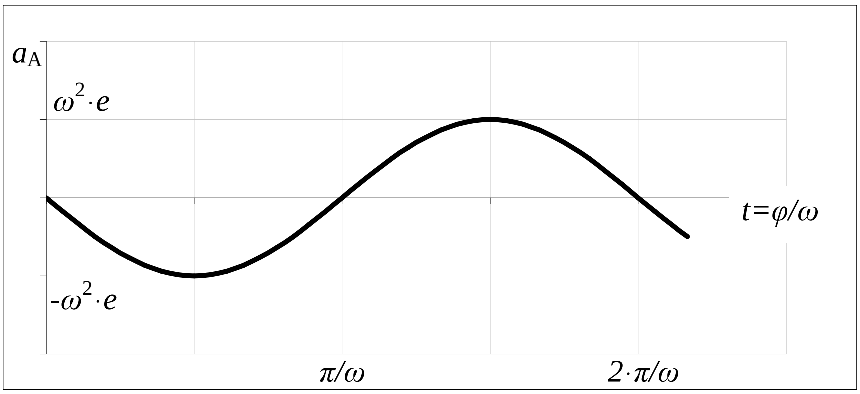
$$v(t) = \dot{y}(t) = \dot{\varphi} \cdot e \cdot \cos\varphi = \omega \cdot e \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

$$a(t) = \dot{v}(t) = -\dot{\varphi}^2 \cdot e \cdot \sin\varphi = -\omega^2 \cdot e \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

A foronomiai görbék:







Megjegyzés:

A fenti összefüggések csak akkor érvényesek, ha a szelep nem válik el a tárcsától. A szelep elválik a tárcsától, ha a tárcsáról a szelepre átadódó nyomóerő megszűnik.

A szelepre felírható dinamika alaptételének függőleges irányú vetülete:

$$m \cdot a_{szelep} = N - m \cdot g$$

Az N nyomóerő megszűnik, ha

$$N = m \cdot (a_{szelep} + g) \le 0 \quad \rightarrow \quad a_{szelep} \le -g = -9{,}81\,[\mathrm{m/s}]$$

Ez csak nagyon lassú forgás esetén nem teljesülne, (a szelepgyorsulás nagyságának legnagyobb értéke $\omega^2 \cdot e$), ezért a folyamatos érintkezést a szelep és az excentertárcsa között meg kell oldani. (pl. rugóval.)

2.

Definiáljuk a megfigyelt pontot, a vonatkoztatási rendszereket (VR) és a koordinátarendszereket (KR):

A megfigyelt pont: a (3)-as jelű szelepnek az a pontja, A_3 , amelyik a (2)-es jelű excentertárcsával érintkezésben van. Mivel a szelep az (1)-es jelű vezetékben egyenesvonalú tranzlációt végez, ezért az A_3 pont sebessége és gyorsulása egyben a keresett szelepemelkedési sebesség és gyorsulás.

Álló vonatkoztatási rendszer: *VR(1)*: az (1)-es jelű vezeték, térfix
Mozgó vonatkoztatási rendszer: *VR(2)*: a (2)-es jelű excentertárcsa
Koordinátarendszerek: *KR(1)* és *KR(2)* a mechanizmus φ konfigurációjában essen egybe:
$\{B; x = \xi, y = \eta, z = \zeta\}$

A mozgó VR mozgásállapota az álló VR-hez képest:

Sebességállapot: $\underline{v}_B = \underline{0}; \quad \underline{\omega}_{21} = \underline{\omega}$

Gyorsulásállapot: $\underline{a}_B = \underline{0}; \quad \underline{\omega}_{21} = \underline{\omega}; \quad \underline{\varepsilon}_{21} = \underline{0}$

Kapcsolat az A_3 pontnak a *KR(1)*-ben és *KR(2)*-ben észlelt sebessége között:

$\underline{v}_A = \underline{\beta}_A + \underline{v}_{A\,szállító}$ vagy más jelöléssel ugyanez: $\underline{v}_{A\,3/1} = \underline{v}_{A\,3/2} + \underline{v}_{A\,2/1}$

Ez az írásmód az indexekben megjelöli, megmagyarázza, hogy a kérdéses pont ***melyik testnek a pontja***, és hogy a sebesség ***melyik testhez képesti*** sebesség. Például $\underline{v}_{A3/1}$ azt jelenti, hogy az *A* pontnak mint a (3)-as test *A* pontjának a sebessége, az (1)-es vezetékhez képest. Fontos világosan látni, hogy mikor melyikről van szó, hiszen a fenti egyenletben mind a három sebesség az *A* pontnak a sebességét jelenti, mégis három különböző vektormennyiséget fogunk beírі az egyenletbe, aszerint, hogy az *A* pontot melyik testhez tartozónk tekintjük, és melyik VR-hez képesti sebességet tekintjük:

$$\underline{v}_A = \underline{v}_{A3/1} = \begin{bmatrix} 0 \\ v_A \\ 0 \end{bmatrix}$$

a (3)-as jelű szelep azon pontjának a sebességét jelenti az (1)-es jelű vezetékhez képest, amelyik éppen érintkezik a tárcsával. A szelep *A* pontja „abszolút” sebességének is nevezhetjük, ha az álló vezetéket „abszolút” VR-nek nevezzük.
Mivel a szelep a vezetékben haladó mozgást végez, a szelep ***minden*** pontjának ugyanez a sebessége a vezetékhez képest ebben a pillanatban. Ennek a sebességnek az irányát a vezeték mint kényszer megszabja: $\underline{v}_A$ vezetékirányú.

$$\underline{\beta}_A = \underline{v}_{A3/2} = \begin{bmatrix} \beta_A \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

a (3)-as jelű szelep azon pontjának a sebességét jelenti a (2)-es jelű tárcsához képest, amelyik éppen érintkezik a tárcsával. A szelep *A* pontja „relatív” sebességének is nevezhetjük, ha a forgó excentertárcsát „relatív” VR-nek nevezzük. A relatív sebesség mindig az érintkező felületek közös érintősíkjába esik, így $\underline{\beta}_A$ iránya ismert.

$$\underline{v}_{A\,szállító} = \underline{v}_{A\,2/1} = \underline{v}_B + \underline{\omega} \times \underline{\rho}_{BA} = \underline{0} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} e \cdot \cos\varphi \\ R + e \cdot \sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\omega \cdot (R + e \cdot \sin\varphi) \\ \omega \cdot e \cdot \cos\varphi \\ 0 \end{bmatrix}$$

a (2)-es jelű excentertárcsa (vagyis mozgó VR) azon pontjának sebességét jelenti az álló VR-hez képest, amelyik éppen fedésben van a vizsgált *A* ponttal.

Megjegyzés: az *A* pont fizikailag három pontot jelent: a két érintkező testnek az érintkezésben részt vevő pontját, (A_2 és A_3) és az *A* geometriai pontot, amely nem tartozik hozzá egyik fizikai testhez sem.

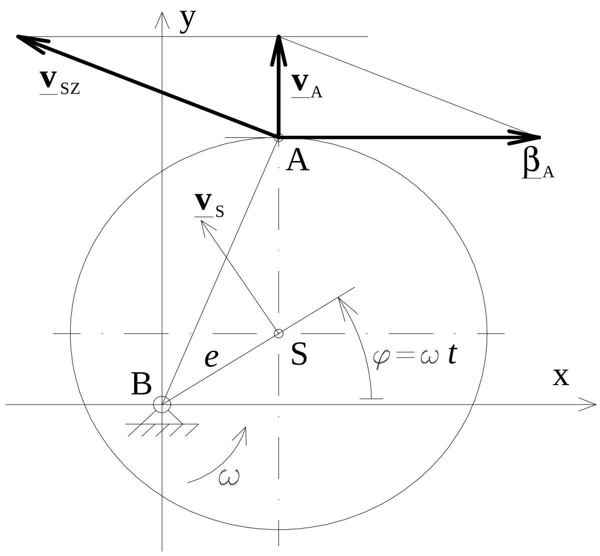
$$\underline{v}_A = \underline{\beta}_A + \underline{v}_{A\,szállító}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ v_A \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_A \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\omega \cdot (R + e \cdot \sin\varphi) \\ \omega \cdot e \cdot \cos\varphi \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{l} \rightarrow \quad \beta_A = \omega \cdot (R + e \cdot \sin\varphi) \\ \rightarrow \quad v_A = v_{A\,3/1} = v_{szelep} = \omega \cdot e \cdot \cos\varphi \end{array}$$

A síkbeli vektoregyenletnek megfelelő két skaláregyenletből (x és y irányú vetületi egyenleteiből) megkaptuk β_A-t és v_A-t.
A szelep sebességét idő szerint deriválva a szelep gyorsulása adódik:

$$a_A = a_{A\,3/1} = a_{szelep} = \dot{v}_{szelep} = -\omega^2 \cdot e \cdot \sin\varphi$$

A $\underline{v}_A = \underline{\beta}_A + \underline{v}_{A\,szállító}$ egyenletnek megfelelő vektorábra:



Jól látszik, hogy a szállítósebesség függőleges vetülete (vagyis a tárcsa érintkezési pontja pillanatnyi sebességének *y* irányú összetevője) a szelepemelkedés sebessége, a vízszintes vetülete pedig a relatív sebesség mínusz egyszerese.

Az excentertárcsa középpontjának, *S*-nek a sebességét és gyorsulását felírva és az ábrába berajzolva további megállapításokat lehet tenni:

$$\underline{v}_S = \begin{bmatrix} -\omega \cdot e \cdot \sin\varphi \\ \omega \cdot e \cdot \cos\varphi \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \underline{a}_S = \begin{bmatrix} -\omega^2 \cdot e \cdot \cos\varphi \\ -\omega^2 \cdot e \cdot \sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix}$$

Az látszik, hogy $v_A = v_{S\,y}$ és $a_A = a_{S\,y}$, vagyis a körpályán mozgó *S* pont sebességének és gyorsulásának függőleges vetülete éppen a szelep mozgásának sebessége és gyorsulása. Ez a foronomiai görbékből is kiolvasható: egy körpályán egyenletesen mozgó pont vetületi mozgása *harmonikus* lengőmozgás. (*Harmonikus* azt jelenti, hogy a kitérés, a sebesség és a gyorsulás sin és cos függvényekkel írható le.)
Erre még visszatérünk a gyorsulások vizsgálata után.

Kapcsolat az *A*$_3$ pontnak a *KR(1)*-ben és *KR(2)*-ben észlelt gyorsulása között:

$\underline{a}_A = \underline{\alpha}_A + \underline{a}_{A\,szállító} + \underline{a}_{A\,Coriolis}$ vagy ugyanez a „magyarázó” jelöléssel:

$\underline{a}_{A\,3/1} = \underline{a}_{A\,3/2} + \underline{a}_{A\,2/1} + \underline{a}_{A\,Coriolis}$

A szállító gyorsulás a mozgó VR azon pontjának a gyorsulása az álló VR-hez képest, amelyik pillanatnyilag éppen fedésben van a megfigyelt ponttal. Ez a pont az A_2 pont, vagyis a ***tárcsának*** az a pontja, amelyik éppen érintkezik a szeleppel:

$$\underline{a}_{A\ szállító} = \underline{a}_{A\ 2/1} = \underline{a}_B + \varepsilon \times \underline{\rho}_{BA} - \omega^2 \cdot \underline{\rho}_{BA}$$

Ez az összefüggés úgy néz ki, mint egy síkmozgást végző merev test két pontjának gyorsulása közötti összefüggés. Nem csak úgy néz ki, az. A helyvektort írhattuk volna $\underline{r}_{BA}$-nak is, de a $\underline{\rho}_{BA}$ jelöléssel kihangsúlyozzuk, hogy a mozgó VR-hez (mint merev testhez) tartozó pontokról van szó. A mozgó VR-nek, vagyis a forgó tárcsának a mozgás folyamán mindig ***egy másik pontja kerül érintkezésbe*** a szeleppel, vagyis kerül fedésbe a megfigyelt ponttal.

$$\underline{a}_{A\ szállító} = \underline{a}_{A\ 2/1} = \underline{0} + \underline{0} - \omega^2 \cdot \begin{bmatrix} e \cdot \cos\varphi \\ R + e \cdot \sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{a}_{A\ Coriolis} = 2 \cdot \underline{\omega} \times \underline{\beta}_A = 2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \omega \cdot (R + e \cdot \sin\varphi) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \cdot \omega^2 \cdot (R + e \cdot \sin\varphi) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Az A_3 pont a szelephez tartozik. A (3) szelep egyenesvonalú haladó mozgást végez az (1)-es jelű vezetékhez képest, ezért az $\underline{a}_A = \underline{a}_{A\ 3/1}$ „abszolút” gyorsulásnak nincsen „normális” összetevője, csak pályamenti (tangenciális), hiszen a sebesség iránya nem változik a mogás folyamán.
Az $\underline{\alpha}_A = \underline{a}_{A\ 3/2}$ „relatív” gyorsulás a $\underline{\beta}_A$ „relatív” sebességtől eltérően nem esik az érintkező felületek közös érintőjébe, ezért iránya az *x*,*y* síkban ismeretlen.

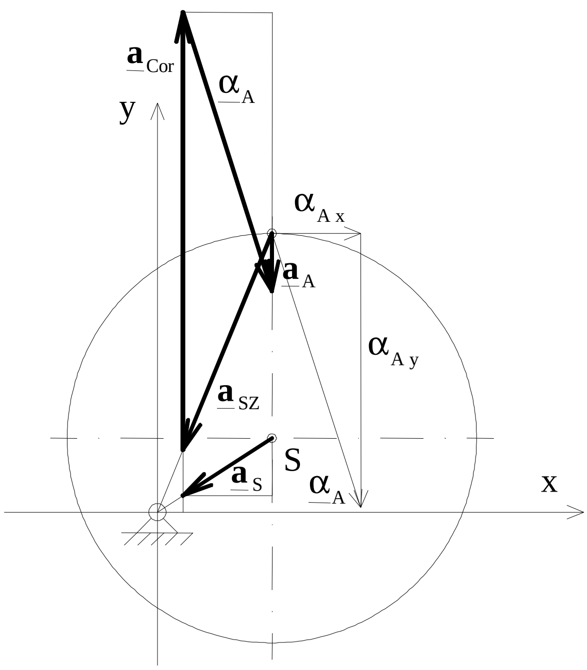
$$\begin{bmatrix} 0 \\ a_A \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{A\,x} \\ \alpha_{A\,y} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\omega^2 \cdot e \cdot \cos\varphi \\ -\omega^2 \cdot (R + e \cdot \sin\varphi) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \cdot \omega^2 \cdot (R + e \cdot \sin\varphi) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ebből a vektoregyenletből a relatív gyorsulás két ismeretlen összetevőjét tudjuk meghatározni, $a_A = -\omega^2 \cdot e \cdot \sin\varphi$ már ismert a korábbi meggondolásokból:

$$\alpha_{A\,x} = \omega^2 \cdot e \cdot \cos\varphi$$

$$\alpha_{A\,y} = a_A - \omega^2 \cdot (R + e \cdot \sin\varphi) = -\omega^2 \cdot e \cdot \sin\varphi - \omega^2 \cdot (R + e \cdot \sin\varphi) = -2 \cdot \omega^2 \cdot e \cdot \sin\varphi - \omega^2 \cdot R$$

Az $\underline{a}_A = \underline{\alpha}_A + \underline{a}_{A\,szállító} + \underline{a}_{A\,Coriolis}$ egyenletnek megfelelő vektorábra:



Jól látható, ami az egyenletek *x* és *y* összetevőiből is kiolvasható:

1. $a_{S\,x} = a_{A\,szállító\;x} = -\alpha_{A\,x}$
2. $a_{Coriolis} = a_{Coriols\;y} = -2 \cdot a_{A\,szállító\;y}$
3. $\alpha_{A\,y} = a_{A\,szállító\;y} + a_{S\;y}$

Az 1. egyenlet azt jelenti, hogy a szállító gyorsulás és a tárcsa *S* középpontja gyorsulásának vízszintes vetülete egymással egyenlő, és a relatív gyorsulás vízszintes vetülete is ugyanekkora, csak ellentétes irányú.
A 2. egyenlet azt jelenti, hogy a Coriolis gyorsulás iránya függőleges, és kétszer akkora, mint a szállító gyorsulás függőleges vetülete, és azzal ellentétes irányú.
A 3. egyenlet azt jelenti, hogy a relatív gyorsulás függőleges vetülete a szállító gyorsulás és az *S* pont gyorsulásának függőleges vetületéből tevődik össze.

Megjegyzés:

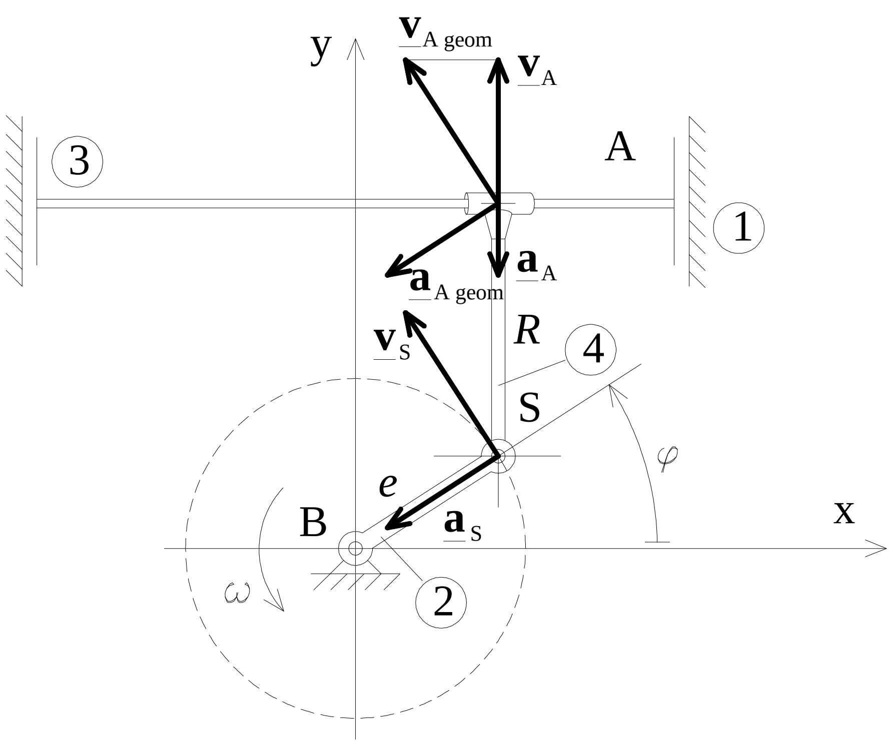
Korábban megállapítottuk, hogy a szelep mozgása az *S* pont mozgásának függőleges vetülete.
Az is megállapítható, hogy az *A* ***geometriai pontnak*** (tehát sem a tárcsához, sem a szelephez nem tartozó azon pontnak, amelyikben a tárcsa és a szelep érintkezik) a sebessége és gyorsulása is ugyanaz, mint az *S* pont sebessége és gyorsulása, ugyanis:

$$\underline{r}_A = \underline{r}_{BA} = \begin{bmatrix} e \cdot \cos\varphi \\ R + e \cdot \sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{v}_{A\ geom} = \underline{\dot{r}}_{BA} = \begin{bmatrix} -\omega \cdot e \cdot \sin\varphi \\ \omega \cdot e \cdot \cos\varphi \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \leftarrow \text{ez éppen } \underline{v}_S$$

$$\underline{a}_{A\ geom} = \underline{\dot{v}}_{A\ geom} = \begin{bmatrix} -\omega^2 \cdot e \cdot \cos\varphi \\ -\omega^2 \cdot e \cdot \sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \leftarrow \text{ez éppen } \underline{a}_S$$

Ennek alapján elkészíthető az alábbi ún. helyettesítő (az eredetivel kinematikailag egyenértékű) mechanizmus:



az (1)-es tag változatlanul a környezet, (térfix),
a (3)-as tag változatlanul a föl-le mozgó szelep,
a (2)-es tag a $\overline{BS}$ forgattyú, (ennek a mozgása ugyanaz, mint az eredeti excentertárcsa mozgásállapota),
a (2)-es jelű forgattyú és a (3)-as jelű szelep közé egy az *S* pontot és az *A* geometriai pontot öszekötő fiktív rúd, a (4)-es jelű tag épül be, amely csúszkával kapcsolódik a (3)-as taghoz. Ennek

az új tagnak a mozgása tranzláció, pontjai *R* sugarú kongruens (egybevágó, egymáshoz képest eltolt helyzetű) körpályákon mozognak $\underline{v}_S$ sebességgel és $\underline{a}_S$ gyorsulással.
A (2)-es és a (3)-as tag mozgása és kinematikai kapcsolata ugyanaz, mint az eredeti mechanizmusban.

További megjegyzés:

A „relatív” kinematika fogalmainak elmélyítése céljából a szelep mozgását írjuk le a (4)-es tag mint mozgó VR segítségével.

Álló VR: most is is a nyugvó környezet
Mozgó VR: a (4)-es jelű $\overline{SA}$ rúd.
A mozgó VR mozgásállapota az állóhoz képest: (haladó mozgás!)
Sebességállapot: $\underline{v}_S, \underline{\omega}_{41} = \underline{0}$
Gyorsulásállapot: $\underline{a}_S, \underline{\omega}_{41} = \underline{0}, \underline{\varepsilon}_{41} = \underline{0}$

$$\underline{v}_{A\,3/1} = \underline{v}_{A\,3/4} + \underline{v}_{A\,4/1}\,, \quad \text{ahol} \quad \underline{v}_{A\,4/1} = \underline{v}_{A\,szállító} = \underline{v}_S + \underline{\omega}_{41} \times \underline{\rho}_{SA} = \underline{v}_S = \begin{bmatrix} -\omega \cdot e \cdot \sin\varphi \\ \omega \cdot e \cdot \cos\varphi \\ 0 \end{bmatrix}$$

A szelep *A* pontjának sebessége most is *y* irányú, a relatív sebesség most is *x* irányú:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ v_A \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_A \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\omega \cdot e \cdot \sin\varphi \\ \omega \cdot e \cdot \cos\varphi \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \rightarrow & \beta_A = \omega \cdot e \cdot \sin\varphi \\ \rightarrow & v_A = \omega \cdot e \cdot \cos\varphi = v_{szelep} \end{matrix}$$

A szelep sebessége ugyanaz, mint az előbb, a relatív sebesség különbözik az előbbitől, hiszen most más mozgásállapotú testet választottunk mozgó vonatkoztatási rendszernek.

$$\underline{a}_{A\,3/1} = \underline{a}_{A\,3/4} + \underline{a}_{A\,4/1} + \underline{a}_{A\,Coriolis}\,,$$
ahol:
$\underline{a}_{A\,Coriolis} = \underline{0}$, mert a mozgó VR nem forog az állóhoz képest,
$\underline{a}_{A\,4/1} = \underline{a}_{A\,szállító} = \underline{a}_S$, mert a mozgó VR haladó mozgást végez az álló VR-hez képest.

A szelep *A* pontjának gyorsulása most is *y* irányú, a relaív gyorsulás most *x* irányú, mert a mozgó VR-hez képest a megfigyelt pont egyenes pályán mozog:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ a_A \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_A \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\omega^2 \cdot e \cdot \cos\varphi \\ -\omega^2 \cdot e \cdot \sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \rightarrow & \alpha_A = \omega^2 \cdot e \cdot \cos\varphi \\ \rightarrow & a_A = -\omega^2 \cdot e \cdot \sin\varphi = a_{szelep} \end{matrix}$$

A szelep gyorsulása ugyanaz, mint az előbb, a relatív gyorsulás különbözik az előbbitől, hiszen most más mozgásállapotú testet választottunk mozgó vonatkoztatási rendszernek.

A vektorábrák egyszerűbbek, mint az előbb: a fenti egyenletekből kiolvasható, hogy a szállító sebességnek és a szállító gyorsulásnak ($\underline{v}_{A\ szállító} = \underline{v}_{A\ geom} = \underline{v}_S$ és $\underline{a}_{A\ szállító} = \underline{a}_{A\ geom} = \underline{a}_S$) a függőleges vetülete a szelep sebessége illetve gyorsulása, a vízszintes vetületek pedig a relatív sebesség és gyorsulás.