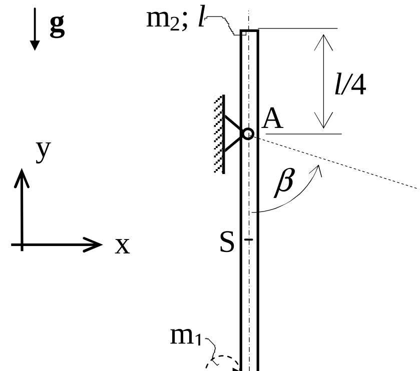
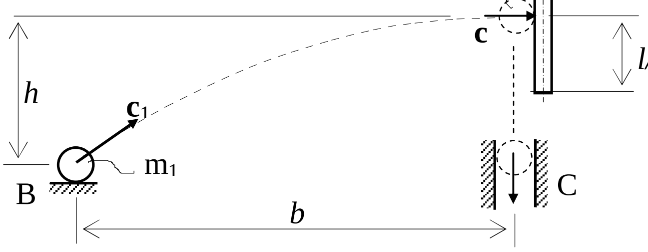
ÜTKÖZÉS 2. példa:



Az ábrán vázolt l hosszúságú, m_2 tömegű homogén tömegeloszlású – pillanatnyilag nyugalomban levő – prizmatikus merev rúd az "A" csuklón átmenő, a rajz síkjára merőleges tengely körül szabadon elfordulhat (a **függőleges** síkban). Az m_1 tömegű - anyagi pontnak modellezhető – test a B helyről $\underline{\mathbf{c}}_{10}$ ismert sebességgel indul, majd vízszintes $\underline{\mathbf{c}}_1$ sebességgel – az ábrán vázolt helyen – nekiütközik a nyugalomban levő rúdnak. Az ütközési tényező: k.

Adatok:



$m_1 = 1$ [kg] $\qquad l = 1$ [m]

$m_2 = 7$ [kg] $\qquad g \approx 9.81$ [m/s^2]

$$\underline{\mathbf{c}}_{10} = \begin{bmatrix} 12 \\ 9 \\ 0 \end{bmatrix} \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right]$$

Feladat :

1.) Határozza meg

a.) honnan kell az ismert $\underline{\mathbf{c}}_{10}$ sebességgel elindítani az anyagi pontot, hogy – az ábrán vázolt helyen – vízszintes $\underline{\mathbf{c}}_1$ sebességgel ütközzék a nyugalomban levő rúdnak (h = ?; b = ?), valamint

b.) a B helyen az anyagi pont pályájának görbületi sugarát (ρ_B = ?)!

2.) Az ütközési feladat megoldásával határozza meg az ütközési tényező azon értékét, amely mellett az anyagi pont az ütközés után a C jelű furatba fog pottyanni (k = ?)!

(*Rajzolja meg az ütközési feladat MAXWELL-ábráját!*)

3.) Származik-e az ütközésből reakcióerő az A jelű csuklónál? Indokolja válaszát!

4.) Számítsa ki, hogy az ütközés után mekkora szöggel lendül el a rúd a függőleges helyzettől (β = ?)!

Megoldás:

1.) a.) Mivel $\underline{\mathbf{a}} = \underline{\mathbf{g}}$ = állandó, az anyagi pont mozgástörvénye:

$$\underline{\mathbf{r}}(t) = \underline{\mathbf{c}}_{10} \cdot t + \frac{1}{2}\underline{\mathbf{g}} \cdot t^2$$

$$\dot{\underline{\mathbf{r}}}(t) = \underline{\mathbf{c}}(t) = \underline{\mathbf{c}}_{10} + \underline{\mathbf{g}}t$$

x: $\quad c_1 = c_{10\,x}$ = állandó

y: $\quad 0 = c_{10\,y} - g\,t_1 \;\Rightarrow\; t_1 = \dfrac{c_{10y}}{g}$

$$\text{x:}\quad b = c_{10\,x}\, t_1 = c_{10x}\frac{c_{10y}}{g} = 12\frac{9}{9{,}81} \approx \underline{\underline{11{,}01[\mathrm{m}]}}$$

$$\text{y:}\quad h = c_{10\,y}\, t_1 - \frac{1}{2}g\, t_1^2 = c_{10y}\frac{c_{10y}}{g} - \frac{1}{2}g\frac{c_{10y}^2}{g^2} = \frac{1}{2}\frac{c_{10y}^2}{g} = \frac{1}{2}\cdot\frac{81}{9{,}81} \approx \underline{\underline{4{,}13[\mathrm{m}]}}$$

$$\text{1.) b.)}\quad \rho_B = \frac{v_B^2}{a_{Bn}} = \frac{c_{10}^2}{g_n} = \frac{c_{10x}^2 + c_{10y}^2}{g_n} \approx \frac{225}{7{,}848} \approx \underline{\underline{28{,}67[\mathrm{m}]}}$$

$$a_{Bt} = \underline{\mathbf{a}}_B \cdot \underline{\mathbf{e}}_t = \underline{\mathbf{g}} \cdot \frac{\underline{\mathbf{c}}_{10}}{|\underline{\mathbf{c}}_{10}|} = \begin{bmatrix} 0 \\ -9{,}81 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0{,}8 \\ 0{,}6 \\ 0 \end{bmatrix} \approx -5{,}886\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right] \quad\Rightarrow\quad a_{Bn} = \sqrt{a_B^2 - a_{Bt}^2} \approx \sqrt{9{,}81^2 - 5{,}886^2} = 7{,}848\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right]$$

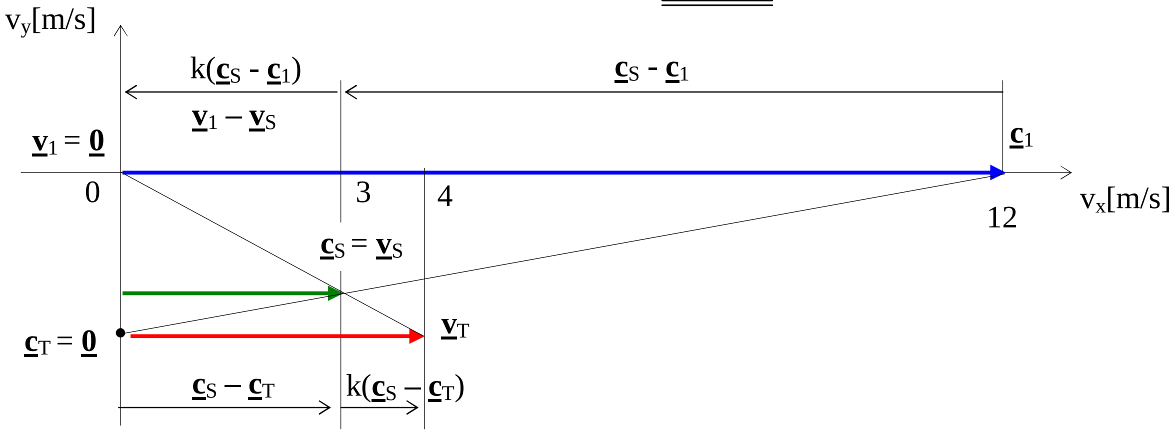
2.) Akkor fog az anyagi pont a C jelű furatba pottyanni (C függőlegesen a beütközés helye alatt helyezkedik el), ha ütközés után az x irányú sebessége zérus lesz:

$$q=\frac{l}{2}-\frac{l}{6}=\frac{3-1}{6}l=\frac{l}{3}$$ ez az ütközési talppont (T) és a súlypont (S) távolsága

$$m_{\mathrm{red}}=m_{\mathrm{T}}=m_2\frac{\Theta_{\mathrm{s}}}{\Theta_{\mathrm{t}}}=m_2\frac{\frac{1}{12}m_2l^2}{\frac{1}{12}m_2l^2+m_2\left(\frac{l}{3}\right)^2}=m_2\frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{12}+\frac{1}{9}}=\frac{3}{7}m_2=\underline{\underline{3[\mathrm{kg}]}}$$ vagy

$$m_{\mathrm{red}}=m_{\mathrm{D}}=\frac{\Theta_{\mathrm{a}}}{\left(\frac{l}{4}+\frac{l}{3}\right)^2}=\frac{\frac{1}{12}m_2l^2+m_2\frac{l^2}{16}}{\left(\frac{7}{12}\right)^2l^2}=\frac{\frac{7}{48}l^2}{\frac{49}{144}l^2}m_2=\frac{3}{7}m_2=\underline{\underline{3[\mathrm{kg}]}}$$

$$\underline{\mathbf{c}}_{\mathrm{S}}=\underline{\mathbf{v}}_{\mathrm{S}}=\frac{m_1\underline{\mathbf{c}}_1+m_{\mathrm{T}}\underline{\mathbf{c}}_{\mathrm{T}}}{m_1+m_{\mathrm{T}}}=\frac{m_1}{m_1+m_{\mathrm{T}}}\underline{\mathbf{c}}_1=\frac{1}{4}\underline{\mathbf{c}}_1=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}12\\0\\0\end{bmatrix}=\underline{\underline{\begin{bmatrix}3\\0\\0\end{bmatrix}\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right]}}$$



$$\mathrm{k}=\frac{\mathrm{v}_1-\mathrm{v}_{\mathrm{S}}}{\mathrm{c}_{\mathrm{S}}-\mathrm{c}_1}=\frac{0-3}{3-12}=\frac{3}{9}=\underline{\underline{\frac{1}{3}}}\quad\Rightarrow\quad\underline{\mathbf{v}}_{\mathrm{T}}=(1+\mathrm{k})(\underline{\mathbf{c}}_{\mathrm{S}}-\underline{\mathbf{c}}_{\mathrm{T}})=(1+\mathrm{k})\underline{\mathbf{c}}_{\mathrm{S}}=\frac{4}{3}\begin{bmatrix}3\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\0\\0\end{bmatrix}\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right]$$

$$\omega_2=\frac{\mathrm{v}_{\mathrm{T}}}{\frac{l}{4}+q}=\frac{\mathrm{v}_{\mathrm{T}}}{\frac{l}{4}+\frac{l}{3}}=\frac{\mathrm{v}_{\mathrm{T}}}{\frac{3+4}{12}l}=\frac{4\cdot 12}{7}\approx\underline{\underline{6{,}86\left[\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}\right]}}$$

3.) $$p=\frac{\Theta_{\mathrm{s}}}{mq}=\frac{\frac{1}{12}ml^2}{m\frac{l}{3}}=\frac{l}{4}$$ ez a lökési középpont (K) és a súlypont (S) távolsága, tehát A ≡ K

$\underline{\mathbf{c}}_{\mathrm{K}}=\underline{\mathbf{v}}_{\mathrm{K}}=\underline{\mathbf{0}}$ Az A jelű csuklónál az ütközésből nem származik reakcióerő .

4.) $W_{\mathrm{I-II}}=E_{\mathrm{kin\,II}}-E_{\mathrm{kin\,I}}$ $\Rightarrow$ $$-m_2\mathrm{g}\frac{l}{4}(1-\cos\beta)=-\frac{1}{2}\Theta_{\mathrm{a}}\omega_2^2\quad\Rightarrow\quad\frac{\mathrm{g}}{4}(1-\cos\beta)=\frac{1}{2}\cdot\frac{7}{48}l\omega_2^2$$

$$1-\cos\beta=\frac{7}{24}\frac{\omega_2^2}{\mathrm{g}}=\frac{7}{24}\cdot\frac{6{,}86^2}{9{,}81}=1{,}399\quad\Rightarrow\quad\underline{\underline{\beta\approx 113{,}5^{\mathrm{o}}}}$$