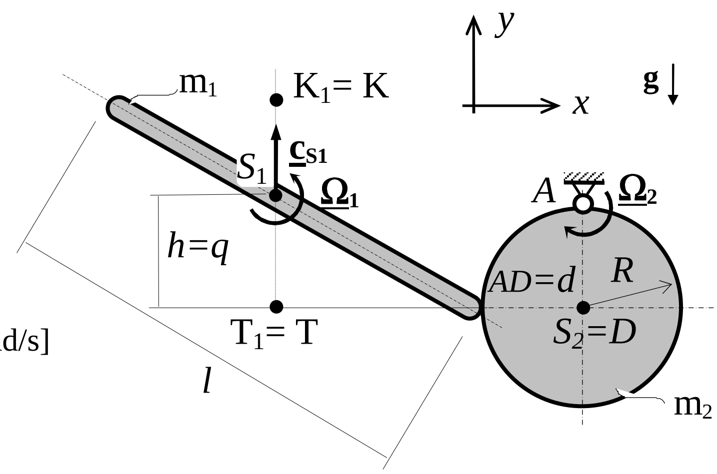
ÜTKÖZÉS 4. példa:

Két test az ábrán vázolt módon ütközik. A rajz vízszintes síkja **függőleges**. Az m_1 tömegű test egy homogén tömegeloszlású, l hosszúságú prizmatikus rúddal, az m_2 tömegű egy homogén tömegeloszlású, R sugarú koronggal modellezhető. Ismert mindkét test ütközés előtti sebességállapota. Az ütközési tényező k.



Adatok: $l = 1{,}2$ [m] $\quad m_1 = 3$ [kg]

$h = 0{,}4$ [m] $\quad m_2 = 2$ [kg]

$R = 0{,}4$ [m] $\quad k = \frac{2}{3}$

Ütközés előtt:

$$\underline{\mathbf{c}}_{S1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} [\mathrm{m/s}] \qquad \underline{\mathbf{\Omega}}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix} [\mathrm{rad/s}] \qquad \underline{\mathbf{\Omega}}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -20 \end{bmatrix} [\mathrm{rad/s}]$$

Feladat :

1) Adja meg – excentrikus ütközés esetén – az ütközési talppont és az ütközési (lökési) középpont értelmezését!
2) Oldja meg az ütközési feladatot szerkesztéssel!
3) Határozza meg az egyes testek ütközés utáni sebességállapotát!
4) a.) Ismertesse a munka-tételt merev testre!
   b.) Számítsa ki, hogy az ütközés hatására mekkora szöggel fordul el a korong az A csukló körül (β = ?)!

Megoldás:

1.) Adja meg – excentrikus ütközés esetén – az ütközési talppont és az ütközési (lökési) középpont értelmezését!

- **Ütközési talppont**: az excentrikusan ütköző test súlypontjából az ütközési normálisra állított merőleges egyenes és az ütközési normális metszéspontja. **Jele**: T ; $\overline{\mathrm{ST}} = q$
- **Ütközési (lökési) középpont**: az excentrikusan ütköző test azon pontja, melynek az ütközés során nem változik meg a sebessége. Az S és T pontokat összekötő egyenesen helyezkedik el, a súlyponthoz képest a T-vel ellentétes oldalon. **Jele**: K ; $\overline{\mathrm{SK}} = p$; $p = \dfrac{\Theta_s}{mq}$

2.) Az excentrikusan ütköző test ütközési talppontba redukált tömege:

$$m_\mathrm{T} = m_1 \frac{\Theta_s}{\Theta_t} = m_1 \frac{\frac{1}{12} m_1 l^2}{\frac{1}{12} m_1 l^2 + m_1 h^2} = 7 \cdot \frac{3}{7} = 3[\mathrm{kg}] \qquad \boxed{m_\mathrm{T} = 3[\mathrm{kg}]}$$

Az ütközési talppont sebessége:

$$\underline{\mathbf{c}}_\mathrm{T} = \underline{\mathbf{c}}_{S1} + \underline{\mathbf{\Omega}}_1 \times \underline{\mathbf{r}}_{S1T} = \begin{bmatrix} \Omega_1 h \\ c_{S1} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right] \qquad \boxed{\underline{\mathbf{c}}_\mathrm{T} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right]}$$

Az álló tengely körül elforduló test D pontba redukált tömege:

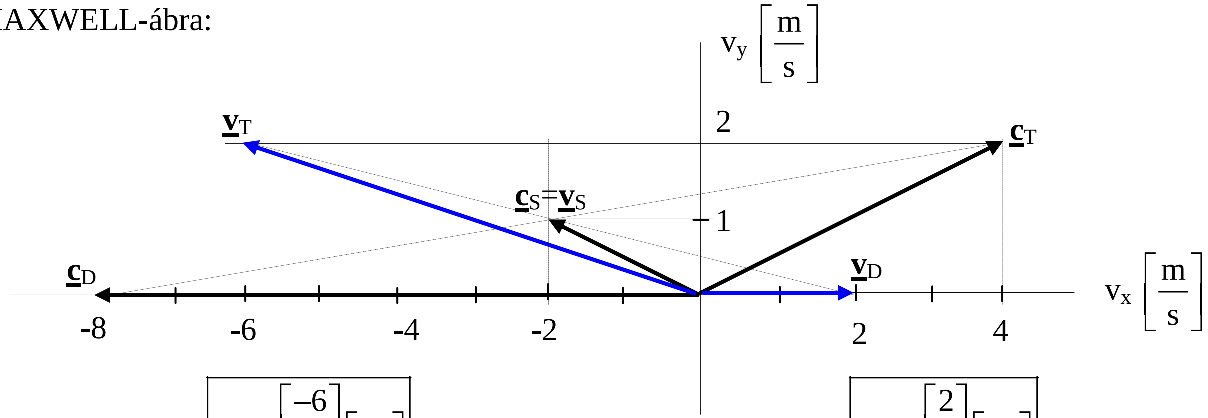
$$m_\mathrm{D} = \frac{\Theta_\mathrm{a}}{d^2} = \frac{\frac{3}{2} m_2 R^2}{R^2} = \frac{3}{2} \cdot 2 = 3[\mathrm{kg}] \qquad \boxed{m_\mathrm{D} = 3[\mathrm{kg}]}$$

Az álló tengely körül elforduló test D pontjának sebessége:

$$\underline{\mathbf{c}}_D = \underline{\mathbf{c}}_A + \underline{\mathbf{\Omega}}_2 \times \underline{\mathbf{r}}_{AD} = \begin{bmatrix} -\Omega_2 R \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right] \qquad \boxed{\underline{\mathbf{c}}_D = \begin{bmatrix} -8 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right]}$$

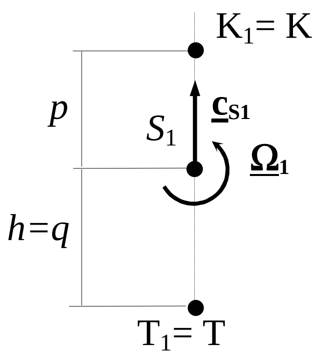
A közös súlypont sebessége: $\underline{\mathbf{c}}_S = \dfrac{m_T \underline{\mathbf{c}}_T + m_D \underline{\mathbf{c}}_D}{m_T + m_D} = \dfrac{1}{6} \begin{bmatrix} 3\cdot 4 - 3\cdot 8 \\ 3\cdot 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \dfrac{1}{6} \begin{bmatrix} -12 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} = \left[\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right] \qquad \boxed{\underline{\mathbf{c}}_S = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \left[\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right]}$

MAXWELL-ábra:



$$\boxed{\underline{\mathbf{v}}_T = \begin{bmatrix} -6 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right]} \qquad \boxed{\underline{\mathbf{v}}_D = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right]}$$

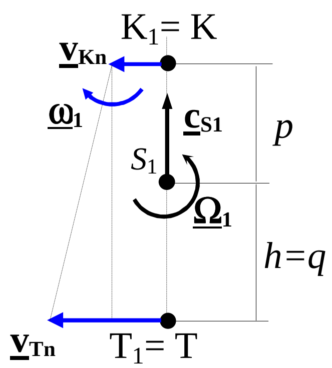
3.) Határozza meg az egyes testek ütközés utáni sebességállapotát!



$$p = \frac{\Theta_s}{m_1 q} = \frac{\frac{1}{12} m_1 l^2}{m_1 h} = \frac{l}{4} = 0{,}3[\mathrm{m}] \qquad \boxed{p = 0{,}3[\mathrm{m}]}$$

$$\underline{\mathbf{c}}_K = \underline{\mathbf{v}}_K = \underline{\mathbf{c}}_{S_1} + \underline{\mathbf{\Omega}}_1 \times \underline{\mathbf{r}}_{S_1 K} = \begin{bmatrix} -\Omega_1 p \\ c_{S_1} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right] \qquad \boxed{\underline{\mathbf{v}}_K = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right]}$$

$$\omega_1 = \frac{v_{Tn} - v_{Kn}}{p+q} = -\frac{3}{0{,}7} \cong -4{,}29 \left[\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}\right] \qquad \boxed{\underline{\boldsymbol{\omega}}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -4{,}29 \end{bmatrix} \left[\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}\right]}$$



$$\omega_2 = \frac{v_D}{R} = \frac{2}{0{,}4} \cong 5 \left[\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}\right] \qquad \boxed{\underline{\boldsymbol{\omega}}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} \left[\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}\right]}$$

4.) a.) Ismertesse a munka-tételt merev testre! **Munkatétel**: A merev test kinetikai energiájának $[t_1, t_2]$ időintervallu $\boxed{E_{kin}(t_2) - E_{kin}(t_1) = W_{12}}$ enlő a testre ható erőknek a $[t_1, t_2]$ időintervallum alatt végzett munkájával.

b.) $\dfrac{1}{2}\Theta_a \omega_2^2 = m_2 g R (1 - \cos\beta) \quad \Rightarrow \quad \beta = \operatorname{acos} \dfrac{m_2 g R - 1/2\, \Theta_a \omega_2^2}{m_2 g R} = \operatorname{acos}\left(1 - \dfrac{3/4 R\omega_2^2}{g}\right) \cong 14{,}2^\circ$