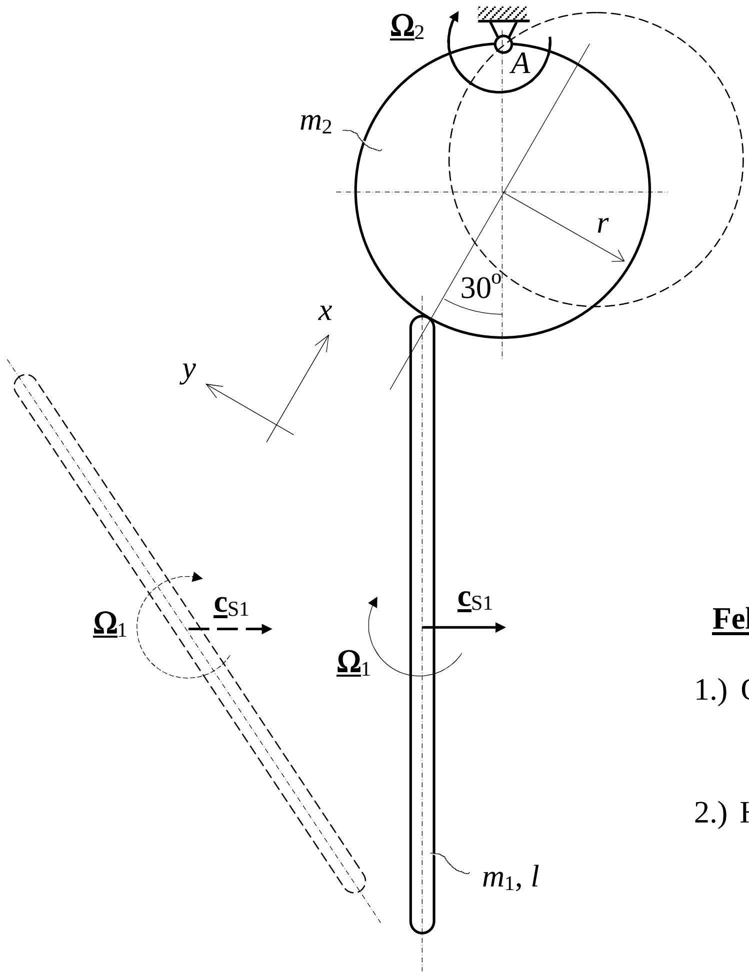
ÜTKÖZÉS 5. példa

Két homogén tömegeloszlású test a **vízszintes síkban** mozog. Az egyik m_1 tömegű, l hosszúságú prizmatikus rúddal, a másik m_2 tömegű, r sugarú koronggal modellezhető. A testek az ábrán vázolt módon ütköznek egymással. Ismert a testek ütközés előtti sebességállapota.



Adatok: $m_1 = 0{,}7$ [kg] $\quad l = 1{,}2$ [m]
$m_2 = 0{,}2$ [kg] $\quad r = 0{,}4$ [m]
$c_{S1} = 2{,}4$ [m/s] $\quad k = 2/3$

Ütközés előtt:

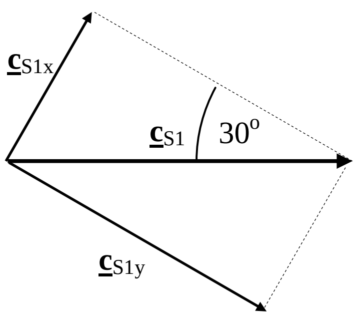
$$\underline{c}_{S1} = \begin{bmatrix} 1{,}2 \\ -1{,}2\sqrt{3} \\ 0 \end{bmatrix} [\text{m/s}] \quad \underline{\Omega}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -16 \end{bmatrix} [\text{rad/s}]$$

$$\underline{c}_A = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \underline{\Omega}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -18 \end{bmatrix} [\text{rad/s}]$$

Feladat:

1.) Oldjuk meg az ütközési feladatot
  a.) szerkesztéssel, és
  b.) számítással!

2.) Határozzuk meg az egyes testek ütközés utáni szögsebességeit ($\underline{\omega}_1$ = ? ; $\underline{\omega}_2$ = ?) !

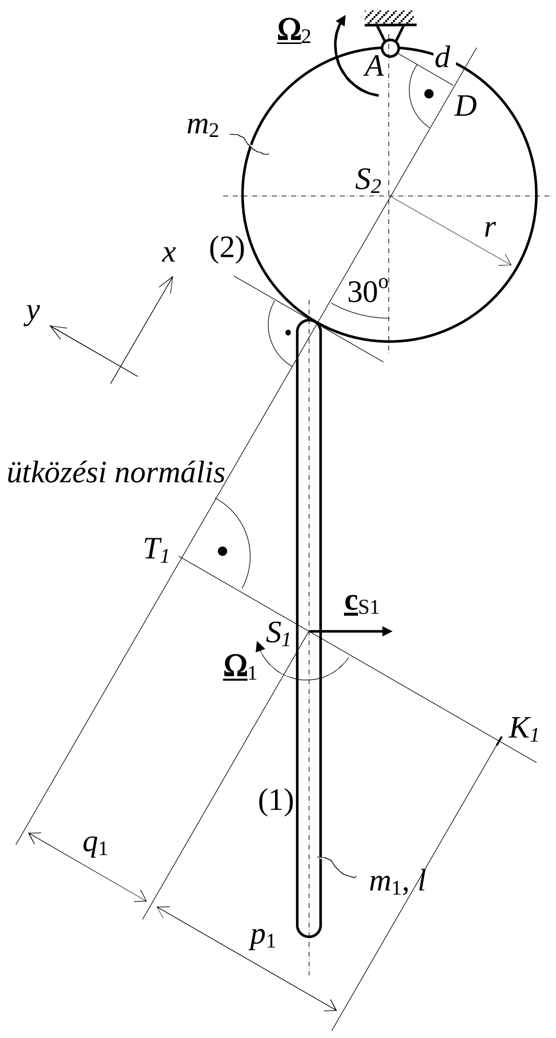


Megoldás:

1.) Az ütközés az (1) jelű test szempontjából excentrikus, ugyanis az ütközési normális nem megy át az (1) jelű test S_1 súlypontján. Ahhoz, hogy használni tudjuk a centrikus ütközésnél tanult összefüggéseket, ki kell számítanunk a T_1 ütközési talppontba redukált $m_{1red} = m_{T1}$ tömegét.

A (2) jelű test S_2 súlypontján ugyan átmegy az ütközési normális, de ennél a testnél is redukálnunk kell a tömeget ($m_{2\ red} = m_D$) az *„álló tengely körül elforduló testek ütközése”* címszó alatt tanult összefüggés szerint.

Tehát az ütközési feladat megoldásához mindkét testnek meg kell határoznunk a redukált tömegét (m_{T1}, illetve m_D), valamint ki kell számítanunk (1) jelű test T_1 pontjának és a (2) jelű test D pontjának sebességét, amelyek segítségével visszavezethető a feladat a centrikus ütközésnél tanultakra.



$$m_{1red} = m_{T1} = m_1 \frac{\Theta_{s_1}}{\Theta_{t_1}} = \frac{\Theta_{s_1}}{\Theta_{s_1} + m_1 q_1^2}$$

$$q_1 = \frac{l}{2}\sin 30^\circ = \frac{l}{4}$$

$$m_{1red} = m_1 \frac{\frac{1}{12} m_1 l^2}{\frac{1}{12} m_1 l^2 + m_1 \frac{l^2}{16}} = \frac{4}{7} m_1 = 0{,}4 \text{ [kg]}$$

$$m_{2\ red} = m_D = \frac{\Theta_a}{d^2} = \frac{\Theta_a}{\left(r \sin 30^\circ\right)^2} = \frac{\frac{3}{2} m_2 r^2}{\frac{1}{4} r^2} = 6 m_2 = 1{,}2 \text{ [kg]}$$

$$\underline{\mathbf{c}}_{T1} = \underline{\mathbf{c}}_{S1} + \underline{\mathbf{\Omega}}_1 \times \underline{\mathbf{r}}_{S1T1} = \begin{bmatrix} c_{S1x} \\ c_{S1y} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q_1 \Omega_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\mathbf{c}}_{T1} = \underline{\mathbf{c}}_{S1} + \underline{\mathbf{\Omega}}_1 \times \underline{\mathbf{r}}_{S1T1} = \begin{bmatrix} 1{,}2 \\ -1{,}2\sqrt{3} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4{,}8 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -1{,}2\sqrt{3} \\ 0 \end{bmatrix} \left[\frac{\text{m}}{\text{s}}\right]$$

$$\underline{\mathbf{c}}_D = \underline{\mathbf{c}}_A + \underline{\mathbf{\Omega}}_2 \times \underline{\mathbf{r}}_{AD} = \begin{bmatrix} -\Omega_2 \sin 30^\circ \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3{,}6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \left[\frac{\text{m}}{\text{s}}\right]$$

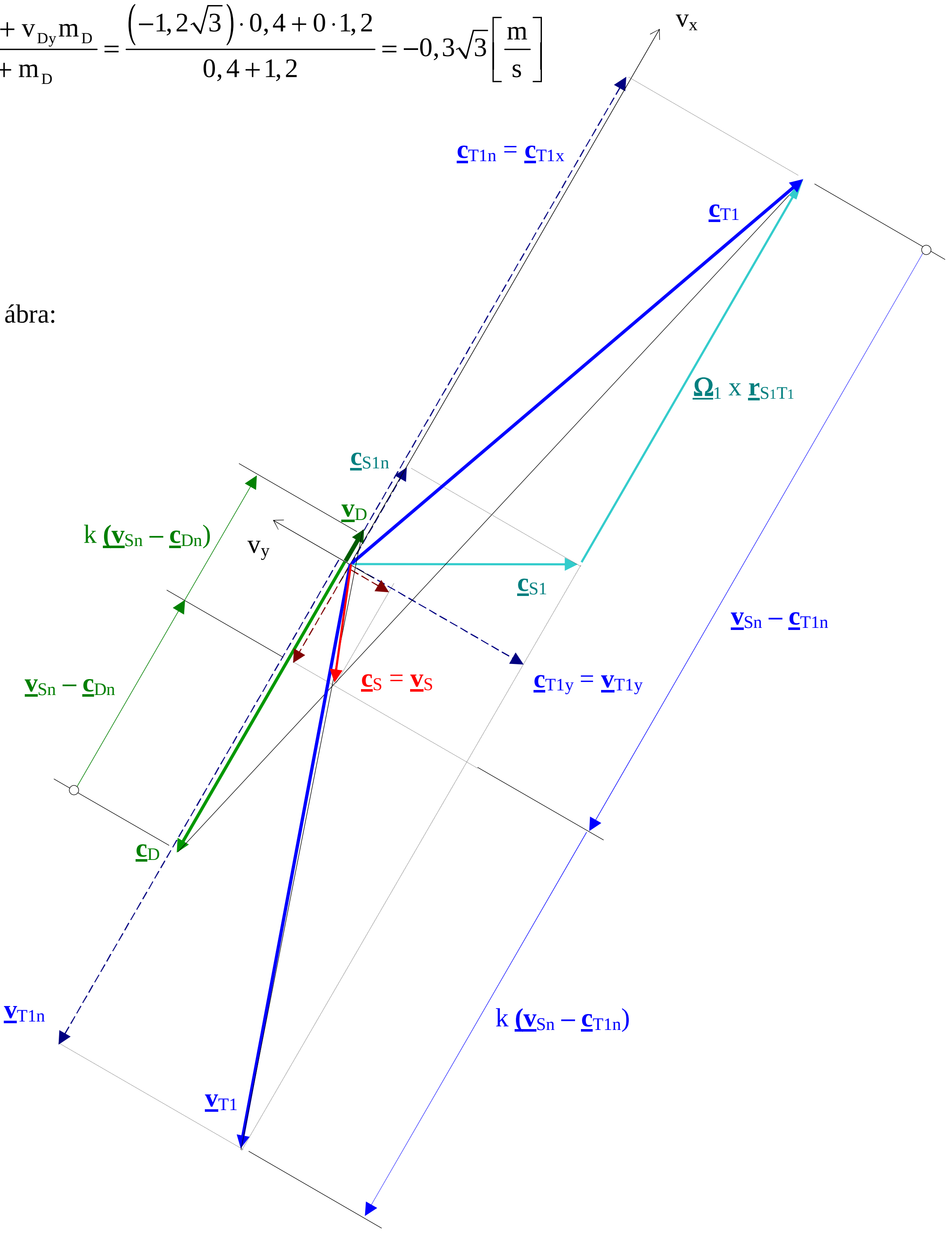
1.) a.) A Maxwell-féle ábra megrajzolása előtt még számítsuk ki a két testből álló rendszer közös *S* súlypontjának sebességét, amely az ütközés folyamán nem változik meg:

$$\underline{\mathbf{c}}_S = \underline{\mathbf{v}}_S = \begin{bmatrix} v_{Sx} \\ v_{Sy} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{Sn} \\ v_{St} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$v_{Sn} = v_{Sx} = \frac{v_{T1x} m_{T1} + v_{Dx} m_D}{m_{T1} + m_D} = \frac{6 \cdot 0{,}4 + (-3{,}6) \cdot 1{,}2}{0{,}4 + 1{,}2} = -1{,}2 \left[\frac{m}{s}\right]$$

$$v_{Sy} = \frac{v_{T1y} m_{T1} + v_{Dy} m_D}{m_{T1} + m_D} = \frac{\left(-1{,}2\sqrt{3}\right) \cdot 0{,}4 + 0 \cdot 1{,}2}{0{,}4 + 1{,}2} = -0{,}3\sqrt{3} \left[\frac{m}{s}\right]$$

Maxwell-féle ábra:



1.) b.)

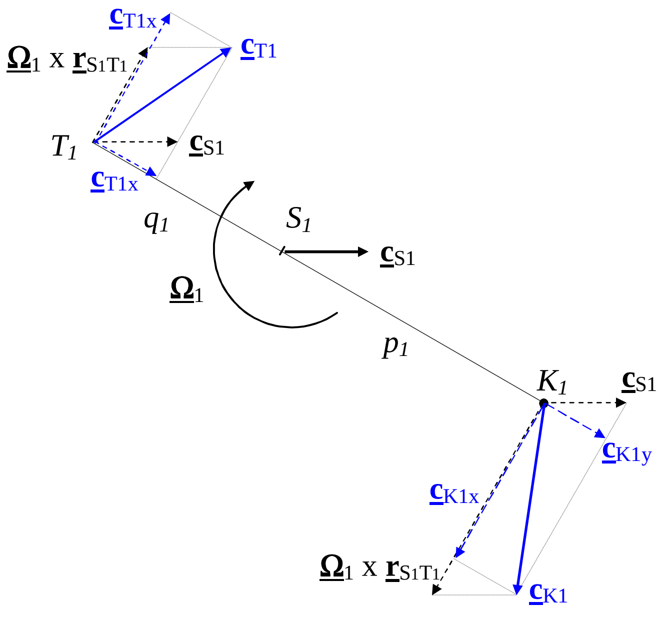
$$v_{T1n} = v_{Sn} + k(v_{Sn} - c_{T1n})$$
$$v_{T1x} = v_{Sx} + k(v_{Sx} - c_{T1x}) = -1{,}2 + \frac{2}{3}(-1{,}2 - 6) = -6 \text{ [m/s]}$$

$$v_{Dn} = v_{Sn} + k(v_{Sn} - c_{Dn})$$
$$v_{Dx} = v_{Sx} + k(v_{Sx} - c_{Dx}) = -1{,}2 + \frac{2}{3}(-1{,}2 + 3{,}6) = 0{,}4 \text{ [m/s]}$$

$$\underline{\mathbf{v}}_{T1} = \begin{bmatrix} -6 \\ -1{,}2\sqrt{3} \\ 0 \end{bmatrix} \left[\frac{\text{m}}{\text{s}}\right]$$
$$\underline{\mathbf{v}}_{D} = \begin{bmatrix} 0{,}4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \left[\frac{\text{m}}{\text{s}}\right]$$

2.) Az (1) jelű test ütközés utáni szögsebességének meghatározásához ismernünk kell a T_1 pont $\underline{\mathbf{v}}_{T1}$ sebességén kívül egy másik pontjának sebességét is. Tudjuk, hogy a lökési középpont (K_1) sebessége az ütközés alatt nem változik meg, azaz $\underline{\mathbf{v}}_{K1} = \underline{\mathbf{c}}_{K1}$. A K_1 pont $\underline{\mathbf{c}}_{K1}$ ütközés előtti sebességének kiszámításához ismernünk kell a K_1 pont helyét megadó p_1 távolságot:

$$m_1 p_1 q_1 = \Theta_{s1}; \qquad \text{ebből:} \qquad p_1 = \frac{\Theta_{s1}}{m_1 q_1} = \frac{\frac{1}{12} m_1 l^2}{m_1 \frac{l}{4}} = \frac{1}{3} l = 0{,}4 [\text{m}]$$



$$\underline{\mathbf{c}}_{K1} = \underline{\mathbf{c}}_{S1} + \underline{\mathbf{\Omega}}_1 \times \underline{\mathbf{r}}_{S1K1} = \begin{bmatrix} c_{S1x} \\ c_{S1y} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -p_1\Omega_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

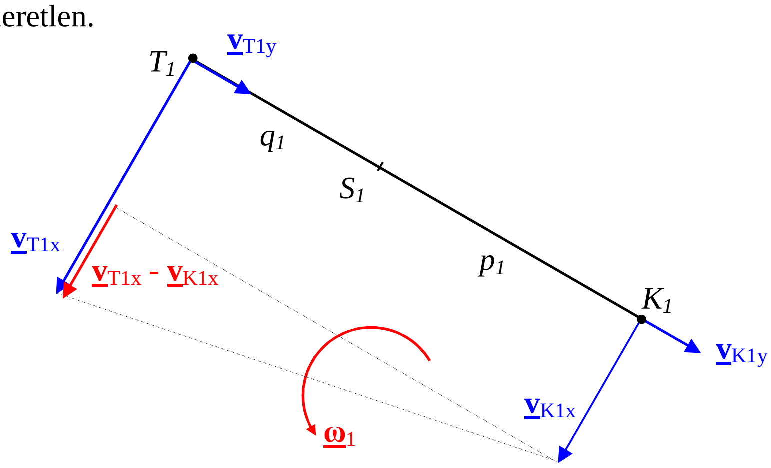
$$\underline{\mathbf{c}}_{K1} = \begin{bmatrix} 1{,}2 \\ -1{,}2\sqrt{3} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6{,}4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5{,}2 \\ -1{,}2\sqrt{3} \\ 0 \end{bmatrix} \left[\frac{\text{m}}{\text{s}}\right]$$

$$\underline{\mathbf{c}}_{K1} = \underline{\mathbf{v}}_{K1}$$

Így most már az (1) jelű test T_1 és K_1 pontjának is tudjuk az ütközés utáni sebességét. Írjuk fel a merev test két pontjának sebessége között érvényes kinematikai egyenletet:

$$\underline{\mathbf{v}}_{T1} = \underline{\mathbf{v}}_{K1} + \underline{\boldsymbol{\omega}}_1 \times \underline{\mathbf{r}}_{K_1T_1}$$

Ebben csak a kérdéses $\underline{\boldsymbol{\omega}}_1$ szögsebesség ismeretlen.



Legyen : $\underline{\boldsymbol{\omega}}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_1 \end{bmatrix}$

Ezzel:

$$\begin{bmatrix} v_{T1x} \\ v_{T1y} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{K1x} \\ v_{K1y} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (p_1 + q_1)\omega_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$v_{T1x} = v_{K1x} + (p_1 + q_1)\,\omega_1$

$v_{T1y} = v_{K1y}$

$$\omega_1 = \frac{v_{T1x} - v_{K1x}}{p_1 + q_1} = \frac{6 - 5{,}2}{0{,}7} = 1{,}14\left[\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right] \qquad \underline{\boldsymbol{\omega}}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1{,}14 \end{bmatrix}\left[\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right]$$

A (2) jelű test ütközés utáni szögsebességének meghatározása:

$$\omega_2 = \frac{v_D}{d} = \frac{v_D}{r \sin 30^\circ} = \frac{0{,}4}{0{,}2} = 2\left[\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right]$$

$$\underline{\boldsymbol{\omega}}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}\left[\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right]$$