MINIMUMKÉRDÉSEK ÉS VÁLASZOK TERMÉKTERVEZŐKNEK
ÖSSZEVONT SZIGORLATRA
VALAMINT
MECHANIKA I. ÉS **MECHANIKA II.** TÁRGYAKRA
(2016. május 24)

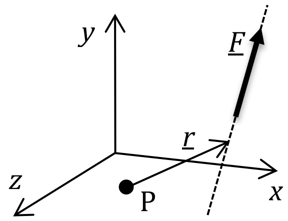
MECHANIKA I

STATIKA

1. Hogyan számoljuk ki egy erő vektor adott P pontra számított nyomatékát?

$$\underline{M}_{\mathrm{P}} = \underline{r} \times \underline{F}$$

ahol $\underline{r}$ a P pontból az $\underline{F}$ erő hatásvonalának tetszőleges pontjába mutató vektor, a $\times$ jel pedig a vektoriális szorzatot jelöli. Az eredmény vektormennyiség lesz! Mértékegysége: Nm.



2. Számítsa ki az $\underline{M}_{\mathrm{P}} = \underline{r} \times \underline{F}$ vektort, ha $\underline{r} = [r_x \quad r_y \quad r_z]^T$ és $\underline{F} = [F_x \quad F_y \quad F_z]^T$!

$$\underline{M}_{\mathrm{P}} = \underline{r} \times \underline{F} = \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_yF_z - r_zF_y \\ -(r_xF_z - r_zF_x) \\ r_xF_y - r_yF_x \end{bmatrix}$$

3. Hogyan számoljuk ki egy erő vektor adott P ponton átmenő tengelyre számított nyomatékát?

$$M_e = \underline{e} \cdot \underline{M}_{\mathrm{P}} = \underline{e} \cdot \left(\underline{r} \times \underline{F}\right)$$

ahol $\underline{e}$ a tengely irányába eső egységvektor, $\underline{M}_{\mathrm{P}}$ az $\underline{F}$ erő P pontra számított nyomatéka, a $\cdot$ jel pedig a skaláris szorzatot jelöli. Az eredmény skalár lesz!

4. Mi az erőpár? Mi a koncentrált erőpár?

Az erőpárt két egyenlő nagyságú, párhuzamos hatásvonalú és ellenétes értelmű erő alkotja, értéke $M = k\,F$, ahol F az erővektorok nagysága, k az erővektorok hatásvonalának a távolsága. Koncentrált erőpár esetén $k \rightarrow 0$ és $F \rightarrow \infty$ úgy, hogy a szorzatuk véges marad azaz $k\,F = M$.

5. Hogyan redukálunk egy n erőből és m erőpárból álló erőrendszert egy tetszőleges A pontba?

A redukált vektorkettős $\left[\underline{F}\,, \underline{M}_{\mathrm{A}}\right]_{\mathrm{A}}$, ahol

$$\underline{F} = \sum_{i=1}^{n} \underline{F}_i \;, \quad \underline{M}_{\mathrm{A}} = \sum_{j=1}^{m} \underline{M}_j + \sum_{i=1}^{n} \underline{r}_i \times \underline{F}_i$$

Itt $\underline{r}_i$ a P pontból az $\underline{F}_i$ erő hatásvonalának tetszőleges pontjába mutató vektor.

6. Mikor van egy erőrendszer egyensúlyban?

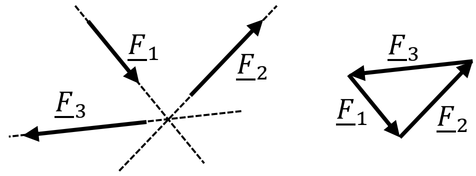
Ha bármely P pontba redukált vektorkettőse $\left[\underline{F}\,, \underline{M}_{\mathrm{P}}\right]_{\mathrm{P}} = \left[\underline{0}\,, \underline{0}\,\right]$, azaz

$$\underline{F} = \sum_{i=1}^{n} \underline{F}_i = \underline{0} \;, \quad \underline{M}_{\mathrm{P}} = \sum_{j=1}^{m} \underline{M}_j + \sum_{i=1}^{n} \underline{r}_i \times \underline{F}_i = \underline{0}$$

7. Mikor van két erő egyensúlyban?

   Ha hatásvonaluk közös, nagyságuk azonos és értelmük ellentétes.

8. Mikor van három erő egyensúlyban?

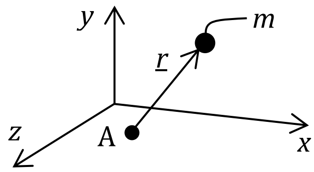


   Ha hatásvonaluk egy pontban metszi egymást.
   Ha egy síkban vannak.
   Ha az erővektorokat egymás után rakva záródó vektorháromszöget alkotnak.

9. Hogyan definiáljuk egy anyagi pont statikai nyomatékát egy adott A pontra?

$$\underline{S}_{\mathrm{A}} = m\,\underline{r}$$

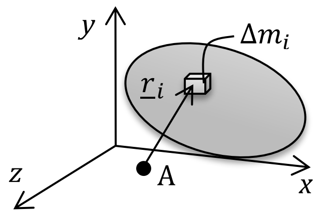
   ahol m az anyagi pont tömege és $\underline{r}$ az A pontból az anyagi pontba mutató vektor. Az eredmény vektormennyiség lesz! Mértékegysége: kg m.



10. Hogyan definiáljuk egy merev test statikai nyomatékát egy adott A pontra?

   A merev testet felbontjuk n db Δm_i tömegű elemi térfogategységekre, és ezek statikai nyomatékait összegezzük:

$$\underline{S}_{\mathrm{A}} = \sum_{i=1}^{n} \underline{r}_i\,\Delta m_i\ , \qquad \text{ha } n \to \infty \text{ akkor} \quad \underline{S}_{\mathrm{A}} = \int_{(m)} \underline{r}\,\mathrm{d}m$$



11. Hogyan definiáljuk egy merev test súlypontját?

   A súlypontra számított statikai nyomaték $\underline{0}$: $\underline{S}_{\mathrm{S}} = \underline{0}$

12. Hogyan határozhatjuk meg egy n db elemi testből álló test súlypontjának helyét?

$$\underline{r}_{\mathrm{S}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \underline{r}_i\,\Delta m_i}{\sum_{i=1}^{n}\,\Delta m_i},$$

   ahol $\underline{r}_i$ az elemi testek súlypontjának a helyvektora Δm_i pedig az elemi testek tömege. Határátmenetben ha $n \to \infty$ akkor

$$\underline{r}_{\mathrm{S}} = \frac{\int_{(m)} \underline{r}\,\mathrm{d}m}{m}$$

13. Hogyan határozhatjuk meg egy n db elemi síkidomból álló homogén síkidom súlypontjának helyét?

$$x_{\mathrm{S}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i\,\mathrm{A}_i}{\sum_{i=1}^{n}\,\mathrm{A}_i}\,, \qquad y_{\mathrm{S}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i\,\mathrm{A}_i}{\sum_{i=1}^{n}\,\mathrm{A}_i}\,,$$

   ahol x_i és y_i az elemi síkidomok súlypontjának a koordinátái, A_i pedig az elemi síkidomok területe. Határátmenetben ha $n \to \infty$ akkor

$$x_{\mathrm{S}} = \frac{\int_{(A)} x\,\mathrm{d}A}{A}\,, \qquad y_{\mathrm{S}} = \frac{\int_{(A)} y\,\mathrm{d}A}{A}\,.$$

14. Mit nevezünk egy test vagy egy szerkezet szabadsági fokának?

    A test vagy szerkezet pillanatnyi helyzetét meghatározó független skalárkoordináták száma.

15. Mit nevezünk kényszereknek? Soroljon fel néhány példát!

    Kényszereknek nevezzük azokat a kapcsolatokat, amelyek a test mozgását korlátozzák, így csökkentik a szabadsági fokok számát. Pl. görgős megtámasztás, csuklós megfogás, befogás.

16. Mik a rácsos szerkezetek jellemzői?

    Merev rudakból állnak. A rudak a végeiken csuklókkal kapcsolódnak egymáshoz. A terhelés koncentrált erőkből áll, amelyek a csuklókban hatnak. A szerkezet statikailag határozott.

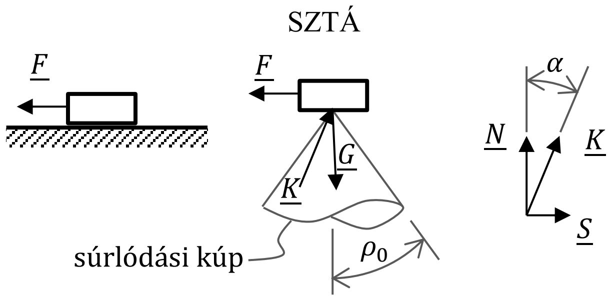
17. Mik a síkbeli csuklós szerkezetek jellemzői?

    Merev testekből állnak. A testek a csuklókkal kapcsolódnak egymáshoz. A terhelés nem feltétlenül koncentrált erőkből áll, és nem feltétlenül a csuklókban hatnak.

18. Mi a szabad test ábra (SZTÁ)?

    A vizsgált szerkezetet alkotó testeket külön-külön lerajzoljuk és ezeken adjuk meg a testekre ható erőket és erőpárokat. A kényszereket nem tüntetjük fel, csak a kényszererőket.

19. Mi a súrlódás Coulomb-törvénye?

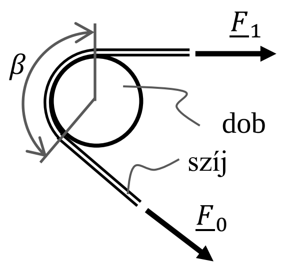
    Ha egy érdes síkra helyezett test nyugalomban van, akkor a testre működő $\underline{K}$ kényszererő a súrlódási kúpon belül helyezkedik el:

    $$\frac{S}{N} = \tan(\alpha) \leq \mu_0 = \tan(\rho_0)$$

    és az S súrlódó erő olyan irányú, hogy megakadályozza a felületek relatív elmozdulását.

    $\underline{K}$: kényszererő, $\underline{S}$: súrlódó erő, $\underline{N}$: normál erő
    ρ_0: súrlódási félkúpszög, μ_0: tapadási súrlódási együttható

20. Mi a kötélsúrlódás Coulomb-törvénye?

    Ha a szíj nem csúszik meg a dobon, akkor

    $$F_0 e^{-\mu_0 \beta} \leq F_1 \leq F_0 e^{\mu_0 \beta}$$

    ahol μ_0 a kötélsúrlódási együttható

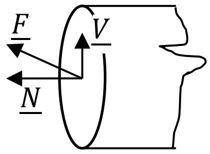
SZILÁRDSÁGTAN

21. Hogy definiáljuk rudak keresztmetszetének az igénybevételét?

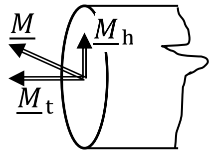
Az igénybevétel a rúd keresztmetszetének a felületén ébredő belső megoszló erőrendszernek a keresztmetszet súlypontjába vett redukáltja. Ez megegyezik a keresztmetszet egyik oldalán levő terhelő erőrendszernek a keresztmetszet súlypontjába vett redukáltjával.

22. Milyen igénybevételeket különböztetünk meg ,és mi alapján különböztetjük meg őket?

A súlypontra vett redukált vektorkettőst felbontjuk a rúd keresztmetszetével párhuzamos és arra merőleges komponensre:



$\underline{N}$ - normál erő (merőleges a KM-re)
$\underline{V}$ - nyíró erő (párhuzamos a KM-tel)



$\underline{M}_{\mathrm{t}}$ - csavarás (merőleges a KM-re)
$\underline{M}_{\mathrm{h}}$ - hajlítás (párhuzamos a KM-tel)

23. Mi az igénybevételi függvény és mi az igénybevételi ábra?

Igénybevételi függvény: a vizsgált keresztmetszet rúd elejétől mért távolságát paraméterként kezeljük, x-szel jelöljük, és ennek függvényében határozzuk meg az igénybevételeket.
Igénybevételi ábra: ábrázoljuk az igénybevételi függvényt.

24. Mi a kapcsolat a nyíró és a hajlító igénybevételi függvények között?

$$M_{\mathrm{h}}(x) = M_{\mathrm{h}}(0) - \int_0^x V(s)\,\mathrm{d}s\,,$$

azaz az $M_{\mathrm{h}}(x)$ hajlító igénybevételi függvény a $V(x)$ nyíró igénybevételi függvény integráljának mínusz egyszerese.

25. Milyen összefüggések vannak a nyíró és a hajlító igénybevételi függvények és a terhelések között?

Koncentrált erő esetén szakadás a $V(x)$ nyíró igénybevételi függvényben és töréspont van az $M_{\mathrm{h}}(x)$ hajlító igénybevételi függvényben.
Koncentrált erőpár esetén szakadás a $M_{\mathrm{h}}(x)$ hajlító igénybevételi függvényben (a $V(x)$ nyíró igénybevételi függvényben nincs változás).
Állandó intenzitású megoszló terhelés esetén a $V(x)$ nyíró igénybevételi függvény lineáris, az $M_{\mathrm{h}}(x)$ hajlító igénybevételi függvény pedig másodfokú.

26. Mi a mechanikai feszültség? Mi a mértékegysége?

A test valamely pontjában felületegységre eső belső fajlagos erő.
Mértékegysége: $1\ \mathrm{MPa} = 10^6\ \mathrm{Pa} = 10^6\ \mathrm{N/m^2}$

27. Mi a normálfeszültség és mi a csúsztatófeszültség?

Normálfeszültség: a test vizsgált pontjában ébredő, adott síkra (pl. a keresztmetszetre) merőleges fajlagos belső erő.
Csúsztatófeszültség: a test vizsgált pontjában ébredő, adott síkkal (pl. a keresztmetszettel) párhuzamos fajlagos belső erő.

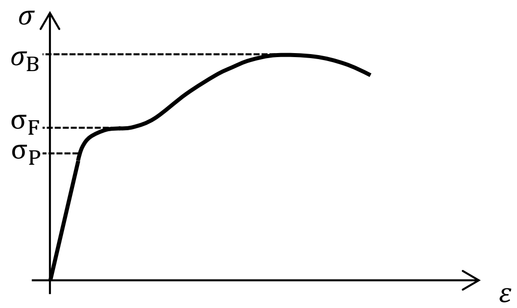
28. Hogyan definiáljuk a fajlagos nyúlást egy állandó keresztmetszetű, homogén, két végén húzóerővel terhelt rúd esetén?

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$$

ε : fajlagos nyúlás (dimenzió nélküli mennyiség), Δl : megnyúlás, l : rúd hossza

29. Vázolja fel a szakítódiagramot! Jelölje be és nevezze meg a jellemző értékeket!

σ: normálfeszültség
ε: fajlagos nyúlás
σ_{P}: arányossági (propocionális) határ
σ_{F}: folyáshatár
σ_{B}: szakító szilárdság



30. Írja fel az egyszerű Hooke-törvényt Értelmezze a megfelelő mennyiségeket!

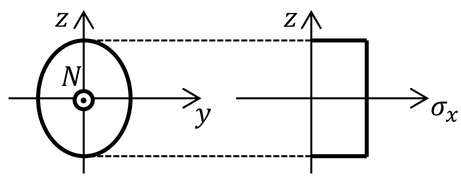
$$\sigma = E\varepsilon$$

σ: normálfeszültség, E: rugalmassági modulus (Young-modulus), ε: fajlagos nyúlás

31. Adja meg egy húzott rúd keresztmetszetében a feszültségeloszlást!

$$\sigma_x = \frac{N}{A}$$

σ_x: normálfeszültség (az *x* normálisú síkon)
N: normálerő igénybevétel
A: a keresztmetszet területe



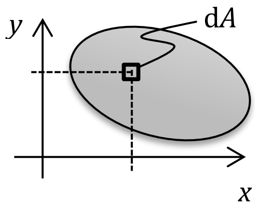
32. Hogyan definiáljuk egy síkidom tengelyre illetve tengelypárra számított másodrendű nyomatékait és a poláris másodrendű nyomatékot?

Az *x* tengelyre számított másodrendű nyomaték: $I_x = \int_{(A)} y^2 \,\mathrm{d}A$

Az *y* tengelyre számított másodrendű nyomaték: $I_y = \int_{(A)} x^2 \,\mathrm{d}A$

Az *xy* tengelypárra számított másodrendű nyomaték: $I_{xy} = \int_{(A)} xy \,\mathrm{d}A$

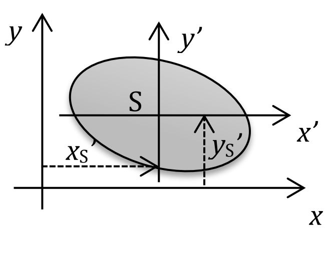
Poláris másodrendű nyomaték $I_{\mathrm{p}} = \int_{(A)} (x^2 + y^2) \,\mathrm{d}A$



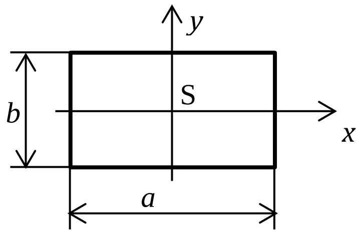
33. Mi a párhuzamos tengelyek tétele?

$$I_x = I_{x'} + y_{\mathrm{S}}{}^2 A$$
$$I_y = I_{y'} + x_{\mathrm{S}}{}^2 A$$
$$I_{xy} = I_{x'y'} + x_{\mathrm{S}} y_{\mathrm{S}} A$$

ahol (x',y') súlyponti koordinátarendszer, (x,y) az vele párhuzamos tengelyű koordinátarendszer és A a síkidom területe.

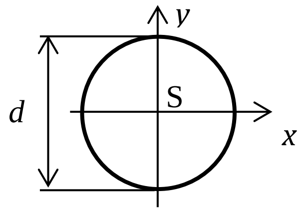


34. Adja meg az alábbi téglalap másodrendű nyomatékait az x és az y tengelyre!



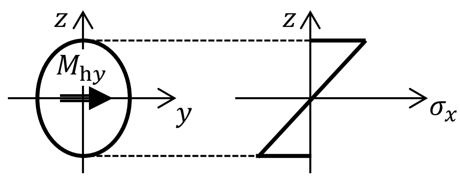
$$I_x = \frac{ab^3}{12}$$
$$I_y = \frac{a^3 b}{12}$$

35. Adja meg az alábbi kör másodrendű nyomatékait az x és az y tengelyre és a poláris másodrendű nyomatékot!



$$I_x = I_y = \frac{d^4 \pi}{64}$$
$$I_\mathrm{p} = \frac{d^4 \pi}{32}$$

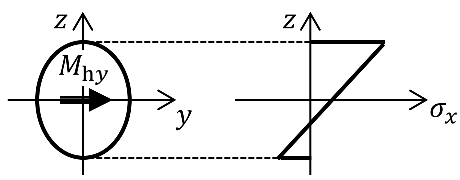
36. Adja meg egy hajlított rúd keresztmetszetében a feszültségeloszlást!



$$\sigma_x = \frac{M_{\mathrm{h}y}}{I_y} z$$

σ_x: normálfeszültség (az x normálisú síkon)
$M_{\mathrm{h}y}$: hajlító nyomatéki igénybevétel az y tengely körül
I_y: a keresztmetszet másodrendű nyomatéka az y tengelyre
z: az y tengelytől való távolság (ahol az y tengely a súlyponton megy át)

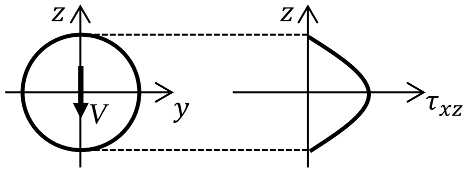
37. Adja meg egy húzott és hajlított rúd keresztmetszetében a feszültségeloszlást!



$$\sigma_x = \frac{N}{A} + \frac{M_{\mathrm{h}y}}{I_y} z$$

σ_x: normálfeszültség (az x normálisú síkon),
N: normálerő igénybevétel
A: a keresztmetszet területe
$M_{\mathrm{h}y}$: hajlító nyomatéki igénybevétel az y tengely körül
I_y: a keresztmetszet másodrendű nyomatéka az y tengelyre
z: az y tengelytől való távolság (ahol az y tengely a súlyponton megy át)

38. Jelleghelyesen rajzolja fel egy kör keresztmetszetű nyírt rúd keresztmetszetében a feszültségeloszlást és adja meg a maximális nyírófeszültséget!

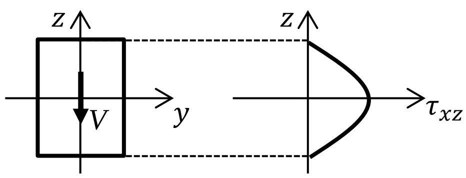


$$\tau_{xz,\max} = \frac{4}{3}\frac{V}{A}$$

τ_{xz}: csúsztatófeszültség (az x normálisú síkon z irányban),
V: nyíróerő igénybevétel
A: a keresztmetszet területe

39. Jelleghelyesen rajzolja fel egy téglalap keresztmetszetű nyírt rúd keresztmetszetében a feszültségeloszlást és adja meg a maximális nyírófeszültséget!

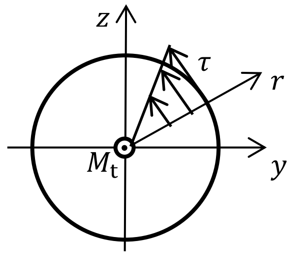
$$\tau_{xz,\max} = \frac{3}{2}\frac{V}{A}$$



τ_{xz}: csúsztatófeszültség (az x normálisú síkon z irányban),
V: nyíróerő igénybevétel
A: a keresztmetszet területe

40. Adja meg egy kör keresztmetszetű csavart rúd keresztmetszetében a feszültségeloszlást!

$$\tau = \frac{M_\mathrm{t}}{I_\mathrm{p}} r$$



τ: csúsztatófeszültség
M_t: csavaró igénybevétel
I_p: poláris másodrendű nyomaték
r: a súlyponttól vett távolság

41. Adja meg a Mohr-féle egyenértékű feszültséget csavart és hajlított (húzott) rúd esetén!

$$\sigma_\mathrm{egy}^\mathrm{Mohr} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$

σ: hajlításból (és húzásból) származó normálfeszültség
τ: csavarásból származó csúsztatófeszültség

42. Adja meg a Huber-Mises-Henckey-féle (HMH) egyenértékű feszültséget csavart és hajlított (húzott) rúd esetén!

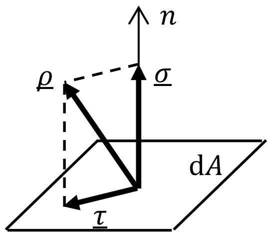
$$\sigma_\mathrm{egy}^\mathrm{HMH} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}$$

σ: hajlításból (és húzásból)származó normálfeszültség
τ: csavarásból származó csúsztatófeszültség

MECHANIKA II

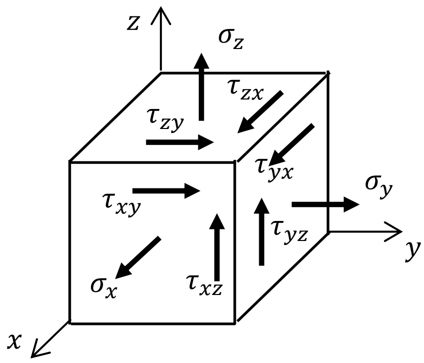
SZILÁRDSÁGTAN

43. Mi a feszültség vektor?



A feszültség vektor a test egy pontjában adott normálisú irányra merőleges síkon ébredő belső erőrendszert írja le. A feszültség vektor síkra merőleges komponense a normálfeszültség, a síkkal párhuzamos komponense a csúsztatófeszültség.

44. Adjon meg egy általános feszültségi állapotot kiskocka segítségével!



45. Adjon meg egy általános feszültségi állapotot a feszültség tenzor segítségével!

$$\underline{\underline{\sigma}}_{(x,y,z)} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

σ: normálfeszültség, τ: csúsztatófeszültség

46. Adjon meg egy általános alakváltozási állapotot az alakváltozási tenzor segítségével!

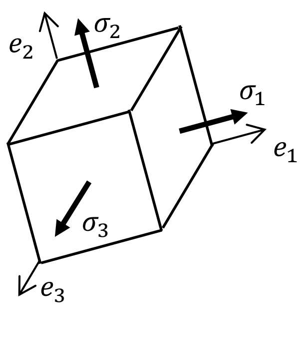
$$\underline{\underline{\varepsilon}}_{(x,y,z)} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \frac{1}{2}\gamma_{zx} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{zy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

ε: fajlagos nyúlás
γ: fajlagos szögváltozás

47. Mik a feszültségi főirányok és a főfeszültségek?

A feszültségi főirányok ($\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$) a feszültség tenzor sajátvektorai, a főfeszültségek ($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$) pedig a feszültség tenzor sajátértékei.
A feszültségi főirányok koordinátarendszerében a feszültség tenzor mátrixa diagonális, a kiskocka oldalain csak normálfeszültségek ébrednek.

$$\underline{\underline{\sigma}}_{(e_1,e_2,e_3)} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$



48. Mi az általános Hooke-törvény? Segítség: $\underline{\underline{\sigma}} = \frac{E}{1+\nu}\left(\underline{\underline{\varepsilon}} + \frac{\nu}{1-2\nu}\varepsilon_{\mathrm{I}}\,\underline{\underline{I}}\right)$
Nevezze meg az egyes mennyiségeket!

Lineárisan rugalmas testek anyagmodellje, a feszültség tenzor és az alakváltozási tenzor közötti kapcsolatot adja meg.

$$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{E}{1+\nu}\left(\underline{\underline{\varepsilon}} + \frac{\nu}{1-2\nu}\varepsilon_{\mathrm{I}}\,\underline{\underline{I}}\right)$$

$\underline{\underline{\sigma}}$: feszültség tenzor mátrixa
$\underline{\underline{\varepsilon}}$: alakváltozási tenzor mátrixa
$\underline{\underline{I}}$: egység mátrix
E: rugalmassági modulus
ν: Poisson-tényező
ε_{I} : alakváltozási tenzor első skalárinvariánsa, $\varepsilon_{\mathrm{I}} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$

49. Mikor beszélünk egytengelyű feszültségállapotról?

Ha létezik olyan koordináta rendszer, ahol a feszültség tenzor mátrixában csak egy normálfeszültség elem van, azaz, pl.

$$\underline{\underline{\sigma}}_{(x,y,z)} = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

50. Adja meg a Mohr-féle egyenértékű feszültséget általános terhelés esetén!

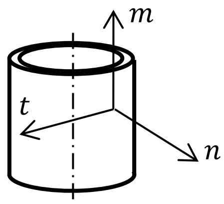
$$\sigma_{\mathrm{egy}}^{\mathrm{Mohr}} = \sigma_1 - \sigma_3$$

Azaz legnagyobb Mohr-kör átmérője, ahol $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ a főfeszültségek.

51. Hogy nevezzük a főirányokat belső nyomással terhelt vékonyfalú forgásszimmetrikus tartályok esetén? Adja meg a megfelelő feszültségi mátrixot.

Tangenciális irány (t), meridián irány (m), normális irány (n).

$$\underline{\underline{\sigma}}_{(t,m,n)} = \begin{bmatrix} \sigma_t & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_n \end{bmatrix}$$



52. Milyen összefüggésekkel határozhatjuk meg a feszültségállapotot belső nyomással terhelt vékonyfalú hengeres tartályok esetén?

$$\sigma_m = \frac{p_b R}{2v}, \quad \sigma_t = \frac{p_b R}{v}, \quad \sigma_n = -p_{\mathrm{b}}$$

σ_m: meridian feszültség
σ_t: tangenciális feszültség
σ_n: normális irányú feszültség
R: henger sugara
p_b: belső nyomás
v: falvastagság, vékonyfalú: $v < R/5$

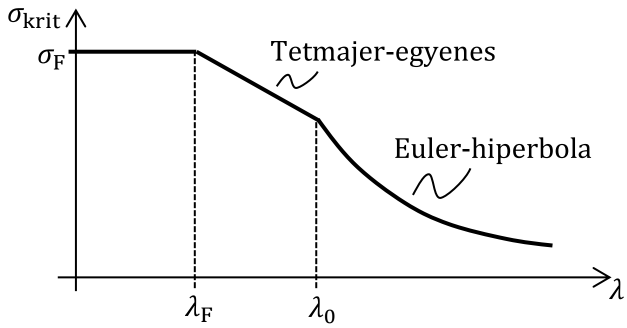
53. Hogyan lehet meghatározni a kritikus feszültséget kihajlásra?

Ha $\lambda < \lambda_\mathrm{F}$ akkor $\sigma_\mathrm{krit} = \sigma_\mathrm{F}$ (folyáshatár)

Ha $\lambda_\mathrm{F} < \lambda < \lambda_0$ akkor $\sigma_\mathrm{krit} = a_0 - a_1\lambda$
(Tetmajer-egyenes, Tetmajer Lajos után)

Ha $\lambda > \lambda_0$ akkor $\sigma_\mathrm{krit} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$ (Euler-hiperbola)

λ: karcsúsági tényező
E: rugalmassági modulus



54. Hogyan lehet kiszámolni az alakváltozási energiát húzott és hajlított rudak esetén?

$$U = \int_{(l)} \frac{N^2(x)}{2AE}\mathrm{d}x + \int_{(l)} \frac{{M_{\mathrm{h}y}}^2(x)}{2I_y E}\mathrm{d}x$$

U: alakváltozási energia
$N(x)$: normálerő igénybevételi függvény
A: a keresztmetszet területe
E: rugalmassági modulus
$M_{\mathrm{h}y}(x)$: hajlító igénybevételi függvény az y tengely körül
I_y: a keresztmetszet másodrendű nyomatéka az y tengelyre

55. Hogyan lehet kiszámolni egy rúd adott keresztmetszetének az elmozdulását a Castigliano-tétel segítségével?

Az alakváltozási energia parciális deriváltja a keresztmetszetben ható koncentrált erő szerint:

$$f_\mathrm{A} = \frac{\partial U}{\partial F_\mathrm{A}} = \frac{1}{I_y E}\int_{(l)} M_{\mathrm{h}y}(x)\frac{\partial M_{\mathrm{h}y}(x)}{\partial F_\mathrm{A}}\mathrm{d}x$$

f_A: az A keresztmetszet elmozdulása
F_A: az A keresztmetszetben ható koncentrált erő
E: rugalmassági modulus
$M_{\mathrm{h}y}(x)$: hajlító igénybevételi függvény az y tengely körül
I_y: a keresztmetszet másodrendű nyomatéka az y tengelyre

56. Hogyan lehet kiszámolni egy rúd adott keresztmetszetének a szögelfordulását a Castigliano-tétel segítségével?

Az alakváltozási energia parciális deriváltja a keresztmetszetben ható koncentrált erőpár szerint:

$$\varphi_\mathrm{A} = \frac{\partial U}{\partial M_\mathrm{A}} = \frac{1}{I_y E}\int_{(l)} M_{\mathrm{h}y}(x)\frac{\partial M_{\mathrm{h}y}(x)}{\partial M_\mathrm{A}}\mathrm{d}x$$

φ_A: az A keresztmetszet szögelfordulása
M_A: az A keresztmetszetben ható koncentrált erőpár
E: rugalmassági modulus
$M_{\mathrm{h}y}(x)$: hajlító igénybevételi függvény az y tengely körül
I_y: a keresztmetszet másodrendű nyomatéka az y tengelyre

57. Mi a rugalmas szál differenciálegyenlete?

$$w''(x) = -\frac{1}{I_y E} M_{\mathrm{hy}}(x)$$

$w(x)$: lehajlás függvény (a rúd x koordinátával jellemzett keresztmetszetének elmozdulása)
$w''(x)$: a lehajlás függvény x szerinti második deriváltja
E: rugalmassági modulus
I_y: a keresztmetszet másodrendű nyomatéka az y tengelyre
$M_{\mathrm{hy}}(x)$: hajlító igénybevételi függvény az y tengely körül

KINEMATIKA

58. Hogyan definiáljuk anyagi pont mozgástörvényét?

A mozgástörvény egyértelműen megadja az anyagi pont pillanatnyi helyzetét adott t időpillanatban. Jelölése térbeli mozgás esetén: $\underline{r}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}$, ahol $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ skalár függvények.

59. Hogyan definiáljuk anyagi pont sebességét?

Anyagi pont sebessége egyenlő az anyagi pont $\underline{r}(t)$ mozgástörvényének idő szerinti deriváltjával:

$$\underline{v}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\underline{r}(t) = \begin{bmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \\ v_z(t) \end{bmatrix}$$

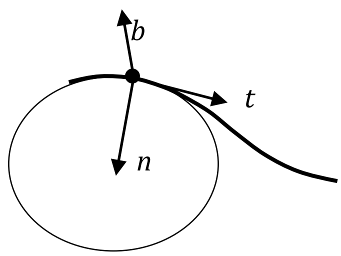
60. Hogyan definiáljuk anyagi pont gyorsulását?

Anyagi pont gyorsulása egyenlő az anyagi pont sebességvektorának idő szerinti deriváltjával:

$$\underline{a}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\underline{v}(t) = \begin{bmatrix} a_x(t) \\ a_y(t) \\ a_z(t) \end{bmatrix}$$

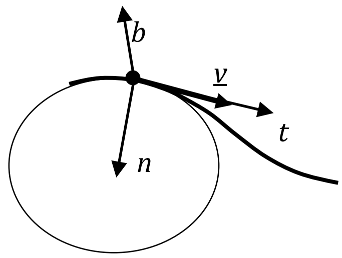
61. Adja meg a kísérő triéder irányait egy adott pályagörbén mozgó anyagi pont esetén!

t: tangenciális irány, a pályagörbe érintője
n: normális irány, a pályagörbe simulókörének közepe felé mutat
b: binormális irány, merőleges a t és az n irányokra



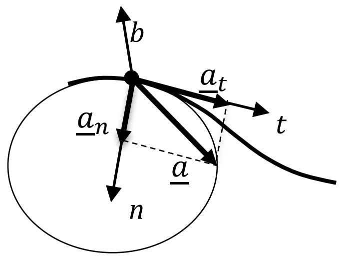
62. Milyen komponensei vannak anyagi pont sebességvektorának a kísérő triéderrel definiált koordinátarendszerben?

Anyagi pont sebességvektorának csak tangenciális (a pályagörbét érintő) irányú komponense van.



63. Milyen komponensei vannak anyagi pont gyorsulásvektorának a kísérő triéderrel definiált koordinátarendszerben?

Anyagi pont gyorsulásvektorának tangenciális (a pályagörbét érintő) és normális (pályagörbe simulókörének közepe felé mutató) irányú komponense van.



64. Adja meg egy anyagi pont gyorsulásvektorának a komponenseit!

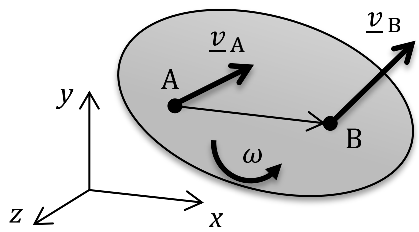
tangenciális gyorsulás: $a_t(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\underline{v}|(t)$ (a sebesség abszolút értékének idő szerinti deriváltja)

normális gyorsulás: $a_n(t) = \frac{v^2(t)}{\rho}$ ahol ρ a pálya görbületi sugara

65. Mi a kapcsolat egy merev test két pontjának a sebessége között?

$$\underline{v}_B = \underline{v}_A + \underline{\omega} \times \underline{r}_{AB}$$

$\underline{v}_A$: az A pont sebesség vektora
$\underline{v}_B$: a B pont sebesség vektora
$\underline{\omega}$: a merev test szögsebesség vektora
$\underline{r}_{AB}$: az A pontból a B pontba mutató vektor



66. Mi a kapcsolat egy merev test két pontjának a gyorsulása között síkmozgás esetén?

$$\underline{a}_B = \underline{a}_A + \underline{\varepsilon} \times \underline{r}_{AB} - \omega^2 \underline{r}_{AB}$$

$\underline{a}_A$: az A pont gyorsulás vektora
$\underline{a}_B$: a B pont gyorsulás vektora
$\underline{\varepsilon}$: a merev test szöggyorsulás vektora
$\underline{\omega}$: a merev test szögsebesség vektora
$\underline{r}_{AB}$: az A pontból a B pontba mutató vektor

67. Mi a sebességpólus?

Az a merev testtel együtt mozgó pont, amelynek a pillanatnyi sebessége 0.

DINAMIKA

68. Hogyan definiáljuk anyagi pont impulzusát?

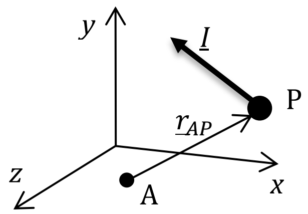
$$\underline{I} = m\,\underline{v}$$

m: anyagi pont tömege
$\underline{v}$: az anyagi pont sebessége

69. Ismertesse Newton axiómáit!

1. Axióma: Egy anyagi pont nyugalomban van vagy egyenes vonalú egyenletes mozgást végez ha rá erő nem hat. Azt a rendszert, ahol az 1. Axióma teljesül *inerciarendszernek* nevezzük.
2. Axióma: $\underline{\dot{I}} = \underline{F}$, ahol $\underline{\dot{I}}$ az anyagi pont impulzusának idő szerinti deriváltja, $\underline{F}$ pedig az anyagi pontra ható erő. Ha az anyagi pont tömege állandó, akkor $\underline{\dot{I}} = m\,\underline{a}$.
3. Axióma: Két anyagi pont kölcsönhatása (erő-ellenerő) egymással egyenlő nagyságú, közös hatásvonalú és ellentétes értelmű.

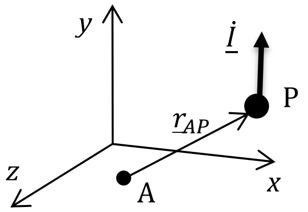
70. Hogyan definiáljuk anyagi pont adott A pontra számított perdületét?



$$\underline{\Pi}_A = \underline{r}_{AP} \times \underline{I}$$

$\underline{r}_{AP}$: az A pontból az anyagi pontba (P pontba) mutató vektor
$\underline{I}$: az anyagi pont impulzusa

71. Hogyan definiáljuk anyagi pont adott A pontra számított kinetikai nyomatékát?



$$\underline{D}_A = \underline{r}_{AP} \times \underline{\dot{I}}$$

$\underline{r}_{AP}$: az A pontból az anyagi pontba (P pontba) mutató vektor
$\underline{\dot{I}}$: az anyagi pont impulzusának idő szerinti deriváltja

72. Ismertesse a dinamika alaptételét anyagi pontra!

$$\left[\underline{\dot{I}}\,,\underline{D}_{\mathrm{A}}\right]_{\mathrm{A}} = \left[\underline{F}\,,\underline{M}_{\mathrm{A}}\right]_{\mathrm{A}}$$

$\underline{\dot{I}}$: az anyagi pont impulzusának idő szerinti deriváltja
$\underline{D}_{\mathrm{A}}$: az anyagi pont adott A pontra számított kinetikai nyomatéka
$\underline{F}$: az anyagi pontra ható erők eredője
$\underline{M}_{\mathrm{A}}$: az anyagi pontra ható erők eredőjének a nyomatéka az A pontra

73. Hogyan definiáljuk egy $\underline{F}$ erő teljesítményét?

$$P = \underline{F} \cdot \underline{v}$$

$\underline{v}$: az erő támadáspontjában levő anyagi pont sebessége

74. Hogyan definiáljuk egy $\underline{F}$ erő t_0 és t_1 időpontok között végzett munkáját?

Az erő teljesítményének idő szerinti integrálja t_0 és t_1 időpontok között: $W_{01} = \int_{t_0}^{t_1} P\,\mathrm{d}t$

75. Adja meg anyagi pont kinetikus energiáját!

$$T = \frac{1}{2} m\, v^2$$

m: az anyagi pont tömege
v: az anyagi pont sebességvektorának abszolút értéke

76. Ismertesse a teljesítmény tételt anyagi pontra!

$$\dot{T} = P$$

$\dot{T}$: az anyagi pont kinetikus energiájának idő szerinti deriváltja
P: az anyagi pontra ható erők teljesítménye

77. Ismertesse a munka tételt anyagi pontra!

$$T_1 - T_0 = W_{01}$$

T_0, T_1: az anyagi pont kinetikus energiája t_0 és t_1 időpillanatokban
W_{01}: az anyagi pontra ható erők által végzett munka a t_0 és t_1 időpontok között

78. Mit nevezünk anyagi pont kényszermozgásának?

Kényszermozgásról akkor beszélünk, amikor egy általunk nem ismert, a kialakuló mozgástól függő kényszererő hatására az anyagi pont egy előírt (kényszer)pályán vagy felületen mozog. A kényszerfeltételek teljesülését a kényszererők biztosítják. Az anyagi pontra ható többi (általában ismert) erőt aktív erőknek nevezzük.

79. Hogyan definiáljuk merev test impulzusát?

$$\underline{I} = m\, \underline{v}_S$$

m: a merev test tömege
$\underline{v}_S$: a merev test súlypontjának sebesség vektora

80. Ismertesse a dinamika alaptételét merev testre!

$$\left[\underline{\dot{I}}\,, \underline{D}_A\right]_A = \left[\underline{F}\,, \underline{M}_A\right]_A$$

$\underline{\dot{I}}$: a merev test impulzusának idő szerinti deriváltja
$\underline{D}_A$: a merev test adott A pontra számított kinetikai nyomatéka
$\underline{F}$: a merev testre ható erők eredője
$\underline{M}_A$: a merev testre ható erőrendszer nyomatéka az A pontra

81. Adja meg merev test kinetikus energiáját síkmozgás esetén!

$$T = \frac{1}{2} m\, v_S^2 + \frac{1}{2} \Theta_s\, \omega^2$$

m: a merev test tömege
v_S: a merev test súlypontjának a sebesség vektorának az abszolút értéke
Θ_s: a merev test súlypontján átmenő, a mozgás síkjára merőleges tengelyre számított tehetetlenségi nyomaték
ω: a merev test szögsebessége

82. Ismertesse a teljesítmény tételt merev testre!

$$\dot{T} = P$$

$\dot{T}$: a merev test kinetikus energiájának idő szerinti deriváltja
P: a merev testre ható erőrendszer teljesítménye

83. Ismertesse a munka tételt merev testre!

$$T_1 - T_0 = W_{01}$$

T_0, T_1: a merev test kinetikus energiája t_0 és t_1 időpillanatokban
W_{01}: a merev testre ható erőrendszer által végzett munka a t_0 és t_1 időpontok között

84. Adja meg egy R sugarú és m tömegű homogén korong tehetetlenségi nyomatékát a súlyponton átmenő forgástengelyére!

$$\Theta_s = \frac{1}{2} m R^2$$

85. Mi a gördülés kinematikai és dinamikai feltétele?

Kinematikai feltétel: a talajjal érintkező pont sebessége 0 (azaz a talajjal érintkező pont sebességpólus).

Dinamikai feltétel: $S \leq \mu_0 \, N$, ahol
S: a talajjal érintkező pontban ébredő súrlódó erő
N: a talajjal érintkező pontban ébredő normál erő (az érintő síkra merőleges irányú erő)
μ_0: tapadási súrlódási együttható

86. Mikor beszélünk centrikus ütközésről?

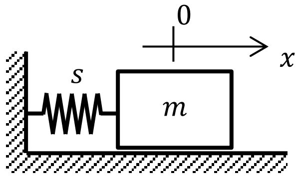
Ha az ütköző test súlypontja rajta van az ütközési normálison.

87. Hogyan változnak meg ütközéskor az ütköző testek sebességkomponensei?

Az ütközési normális irányú sebességkomponensek az ütközési tényezőnek megfelelően változnak (A Maxwell-ábra szerint), a tangenciális irányú sebességkomponensek nem változnak.

REZGÉSTAN

88. Adja meg egy egy szabadsági fokú lineáris <u>csillapítatlan</u> <u>szabad</u> rezgőrendszer mechanikai modelljét, a mozgásegyenletét és sajátkörfrekvenciáját!



mozgásegyenlet: $m\ddot{x} + sx = 0$
sajátkörfrekvencia: $\alpha = \sqrt{\frac{s}{m}}$, mértékegysége $\frac{\text{rad}}{\text{s}}$
s : rugómerevség
m : tömeg
x : elmozdulás

89. Adja meg egy egy szabadsági fokú lineáris <u>csillapítatlan</u> <u>szabad</u> rezgőrendszer mozgásegyenletének referencia alakját!

$$\ddot{x} + \alpha^2 x = 0$$

α : sajátkörfrekvencia, mértékegysége $\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$

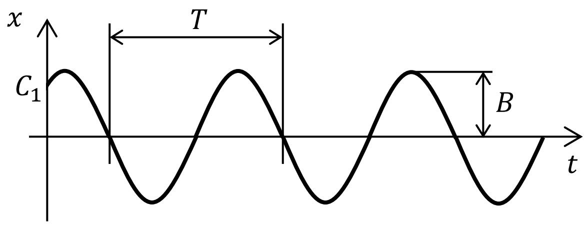
90. Adja meg egy egy szabadsági fokú lineáris <u>csillapítatlan</u> <u>szabad</u> rezgőrendszer mozgástörvényét (azaz a mozgásegyenletének a megoldását)!

$$x(t) = C_1 \cos(\alpha t) + C_2 \sin(\alpha t) \qquad \text{vagy} \qquad x(t) = B \sin(\alpha t + \vartheta)$$

α : sajátkörfrekvencia, mértékegysége $\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$

C_1, C_2 : kezdeti feltételektől függő állandók

B, ϑ : amplitúdó és fázisszög (kezdeti feltételektől függő állandók)



91. Mi a kapcsolat a sajátkörfrekvencia, a sajátfrekvencia és a lengésidő között egy egy szabadsági fokú lineáris <u>csillapítatlan szabad</u> rezgőrendszer esetén?

sajátkörfrekvencia: α , mértékegysége $\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$

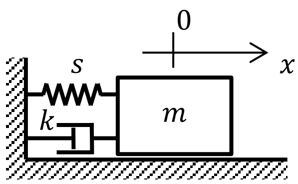
sajátfrekvencia: $f = \frac{\alpha}{2\pi}$, mértékegysége Hz

lengésidő: $T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\alpha}$, mértékegysége s

92. Adja meg egy egy szabadsági fokú lineáris <u>csillapítatlan</u> <u>szabad</u> rezgőrendszer sebességének és gyorsulásának időbeli változását, ha a mozgástörvény $x(t) = B \sin(\alpha t + \vartheta)$ alakban adott.

$$v(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x(t) = B\alpha \cos(\alpha t + \vartheta)$$
$$a(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} v(t) = -B\alpha^2 \sin(\alpha t + \vartheta)$$

93. Adja meg egy egy szabadsági fokú lineáris <u>csillapított szabad</u> rezgőrendszer mechanikai modelljét és mozgásegyenletét. Adja meg a sajátkörfrekvenciát és a relatív csillapítást!



mozgásegyenlet: $m\ddot{x} + k\dot{x} + sx = 0$

sajátkörfrekvencia: $\alpha = \sqrt{\frac{s}{m}}$, mértékegysége $\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$

relatív csillapítás: $D = \frac{k}{2m\alpha}$, dimenziótlan mennyiség

s : rugómerevség

k : csillapítási tényező

m : tömeg

x : elmozdulás

94. Adja meg egy egy szabadsági fokú lineáris csillapított szabad rezgőrendszer mozgásegyenletének referencia alakját!

$$\ddot{x} + 2D\alpha\,\dot{x} + \alpha^2 x = 0$$

α : sajátkörfrekvencia, mértékegysége $\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$

D : relatív csillapítás, dimenziótlan mennyiség

95. Adja meg a sajátkörfrekvenciát, a sajátfrekvenciát és a lengésidőt egy egy szabadsági fokú lineáris csillapított szabad rezgőrendszer esetén!

csillapított sajátkörfrekvencia: $\gamma = \alpha\sqrt{1 - D^2}$, mértékegysége $\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$

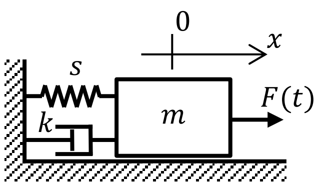
α : csillapítatlan sajátkörfrekvencia, ahol s a rugómerevség és m a tömeg, mértékegysége $\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$

D : relatív csillapítás, dimenziótlan mennyiség

sajátfrekvencia: $f = \frac{\gamma}{2\pi}$, mértékegysége Hz

lengésidő: $T = \frac{1}{f}$, mértékegysége s

96. Adja meg egy egy szabadsági fokú lineáris csillapított gerjesztett rezgőrendszer mechanikai modelljét és a mozgásegyenletét! Adja meg a statikus deformációt!



mozgásegyenlet: $m\ddot{x} + k\dot{x} + sx = F(t)$

s : rugómerevség

k : csillapítási tényező

m : tömeg

x : elmozdulás

$F(t)$: gerjesztő erő

statikus deformáció: $f_0 = \frac{F_0}{s}$

97. Adja meg egy szabadsági fokú lineáris csillapított gerjesztett rezgőrendszer mozgásegyenletének referencia alakját $F(t) = F_0\cos(\omega t)$ gerjesztés esetén!

$$\ddot{x} + 2D\alpha\dot{x} + \alpha^2 x = f_0\alpha^2\cos(\omega t)$$

α : sajátkörfrekvencia, mértékegysége $\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$

D : relatív csillapítás, dimenziótlan mennyiség

f_0 : statikus deformáció

ω : gerjesztés körfrekvenciája, mértékegysége $\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$

98. Adja meg egy egy szabadsági fokú lineáris csillapított gerjesztett rezgőrendszer mozgástörvényét állandósult esetben.

$$x(t) = A\cos(\omega t - \vartheta)$$

A : rezgési amplitúdó, $A = N\, f_0$, ahol N a nagyítás, f_0 pedig a statikus deformáció

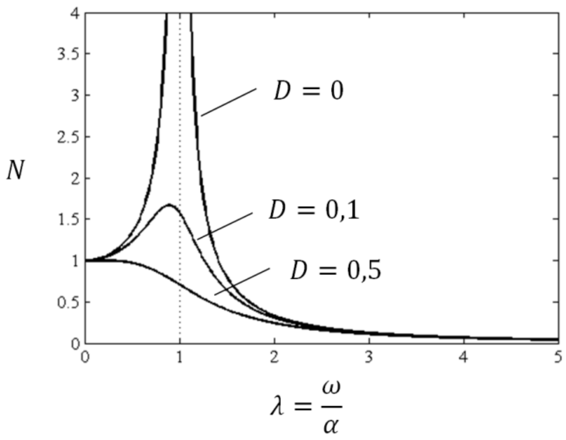
ω : gerjesztés körfrekvenciája, mértékegysége $\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$

ϑ : fáziskésés

99. Rajzolja fel a nagyítási görbét különböző relatív csillapítás értékek esetén.
Segítség:

$$N = \frac{1}{\sqrt{(1-\lambda^2)^2 + 4D^2\lambda^2}}$$

Nevezze meg az egyes mennyiségeket!



N : nagyítás
$\lambda = \frac{\omega}{\alpha}$: frekvencia hányados,
α : sajátkörfrekvencia
ω : gerjesztés körfrekvenciája
D relatív csillapítás.