



XII. MAGYAR MECHANIKAI KONFERENCIA

MaMeK, 2015

Miskolc, 2015. augusztus 25-27.

DIGITÁLIS SZABÁLYOZÁS OKOZTA KAOTIKUS REZGÉS AMPLITÚDÓJÁNAK BECSLÉSE

Gyebrószki Gergely¹, Dr. Csernák Gábor²

¹Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Műszaki Mechanikai Tanszék

1111 Budapest, Műegyetem rkp. 5.

gyebro@mm.bme.hu

²MTA-BME Gépek és Járűvek Dinamikája Kutatócsoport

1111 Budapest, Műegyetem rkp. 3.

csernak@mm.bme.hu

Absztrakt: A mintavételezéssel és időkésséssel ellentétben a kerekítés hatását gyakran elhanyagolják szabályozási problémákban. Korábbi munkáinkban [1, 2010], [2, 2011], [3, 2013] megmutattuk, hogy a kerekítés kis amplitúdójú kaotikus rezgésekhez – az úgynevezett mikro-káoszhoz – vezet, mely számos különálló kaotikus attraktor megjelenésével jár. Bár a kaotikus oszcilláció amplitúdója általában kicsi, az attraktorok a kívánt pozíciótól távol helyezkedhetnek el, így jelentős szabályozási hibát okozhat a jelenség.

Kulcsszavak: mikro-káosz, digitális szabályozás, mintavételezés, kvantálás

1. BEVEZETÉS

A digitális hatások (mintavételezés, kerekítés és késés) együttes figyelembevételével egyszerű dinamikai rendszerekben is megfigyelhető komplex, nem szabályos, olykor kaotikus viselkedés. A cikkben megmutatjuk, hogy az egy szabadságfokú, instabil triviális egyensúlyi helyzetű lengőrendszer mozgásegyenlete kimeneten kvantált, nulldarendű tartóként működő PD szabályozóval olyan ún. *mikro-káosz* leképezéshez vezet, mely sokszínű kaotikus viselkedést mutat.

Negatív merevség esetén a fázistérben több, egymástól elkülönülő kaotikus attraktor, vagy repellor jelenik meg. Utóbbi esetben a repellorok közösen alkothatnak egy vagy több attraktort. Negatív csillapítás esetén pedig periodikus pályára ráakadó kaotikus rezgés alakít ki kaotikus attraktort.

Az egyes esetekben kitérünk a fázistér szerkezetére, illetve az egyes attraktorok méretének, illetve a szabályozás maximális hibájának becslésére.

A 2. szakaszban a *mikro-káosz* leképezéseket vezetjük le, negatív merevségű és negatív csillapítású esetre. A 3. szakaszban az egyes esetekre jellemző kaotikus viselkedést mutatjuk be, kitérve a fázistér szerkezetére. A 4. szakaszban pedig a kaotikus attraktorok méretére és origótól való távolságára vonatkozó becsléseket ismertetjük.

2. A MIKRO-KÁOSZ LEKÉPEZÉS

Az egy szabadságfokú, mintavételezett, kvantált digitális szabályozású lengőrendszer differenciálegyenlete:

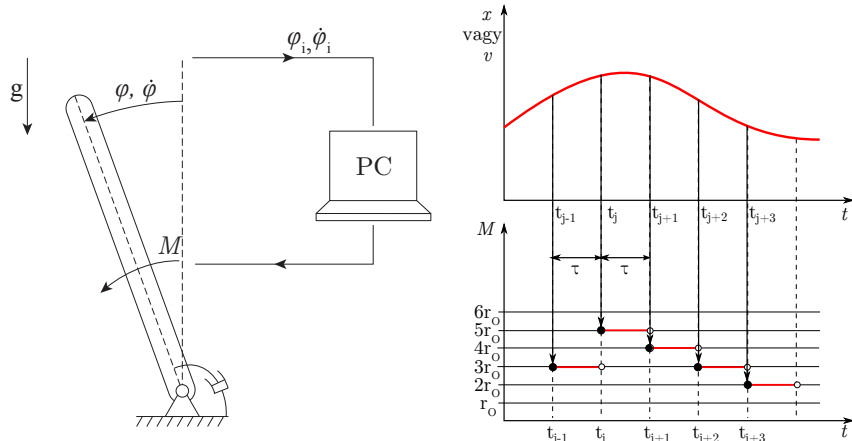
$$\ddot{\varphi}(t) + 2\alpha\delta\dot{\varphi}(t) + \alpha^2\varphi(t) = -r_O \text{Int} \left(\frac{P\varphi(t)}{r_O} + \frac{D\dot{\varphi}(t)}{r_O} \right), \quad (1)$$

ahol α a sajátkörfrekvencia, δ a relatív csillapítás, P és D szabályozási paraméterek, r_O pedig a szabályozó általánosított erő felbontása. Ahhoz, hogy dimenziótlan alakra hozzuk az egyenletet, először vezessük be a következő dimenziótlan időt: $T = t/\tau$, ahol τ a mintavételezési idő, $\square' = \frac{d}{dT}\square$, és $\hat{\alpha} = \alpha\tau$ paramétert. Ekkor:

$$\varphi''(T) + 2\hat{\alpha}\delta\varphi'(T) + \hat{\alpha}^2\varphi(T) = -\tau^2 r_O \text{Int} \left(\frac{P\varphi(T)}{r_O} + \frac{D\tau\varphi'(T)}{r_O} \right). \quad (2)$$

Vezessük be a dimenziótlan elmozdulást: $x(T) = \varphi(T)/(r_O\tau^2)$, valamint $\hat{P} = P\tau^2$ és $\hat{D} = D\tau$ paramétereket. Ezzel:

$$x''(T) + 2\hat{\alpha}\delta x'(T) + \hat{\alpha}^2 x(T) = -\text{Int} \left(\hat{P}x(T) + \hat{D}x'(T) \right) \quad (3)$$



1. ábra. Inverz inga: példa negatív merevségű, egy szabadságfokú szabályozott rendszerre. A jobb oldali ábra szemlélteti a mintavételezést és a szabályozás kvantáltságát.

A (3) egyenlet a mintavételezés nélküli, folytonos szabályozást reprezentálja. Amennyiben a szabályozó nulladrendű tartóként működik, az alábbi írható:

$$x''(T) + 2\hat{\alpha}\delta x'(T) + \hat{\alpha}^2 x(T) = -\text{Int}(\hat{P}x_0 + \hat{D}v_0), \quad T \in [0, 1), \quad (4)$$

ahol $x_0 = x(0)$ és $v_0 = x'(0)$.

Természetesen a szabályozónak akkor van értelme, ha a rendszer rendelkezik instabil egyensúlyi helyzettel. A következő alszakaszokban a lengőrendszert instabillá tesszük, és levezetjük a kapcsolódó *mikro-káosz* leképezéseket.

2.1. Negatív merevségű rendszer esetében

Ha a rendszer merevsége negatív (pl. digitálisan szabályozott inverz inga, lásd 1. ábra), (4) az alábbi módon írható:

$$x''(T) + 2\hat{\alpha}\delta x'(T) - \hat{\alpha}^2 x(T) = -F_0, \quad T \in [0, 1), \quad (5)$$

ahol $F_0 = \text{Int}(\hat{D}v_0 + \hat{P}x_0)$ a kvantált szabályozó erő értéke. A másodrendű differenciálegyenlet elsőrendű differenciálegyenlet-rendszerre átírása után a megoldás az alábbi alakban írható:

$$\mathbf{y}(T) = \mathbf{U}(T)\mathbf{y}(0) + \mathbf{b}(T)F_0, \quad T \in [0, 1), \quad (6)$$

ahol:

$$\mathbf{U}(T) = \frac{e^{-\hat{\alpha}\delta T}}{\Gamma} \begin{bmatrix} \Gamma \cosh(\hat{\alpha}\Gamma T) + \delta \sinh(\hat{\alpha}\Gamma T) & \sinh(\hat{\alpha}\Gamma T)/\hat{\alpha} \\ \hat{\alpha} \sinh(\hat{\alpha}\Gamma T) & \Gamma \cosh(\hat{\alpha}\Gamma T) - \delta \sinh(\hat{\alpha}\Gamma T) \end{bmatrix}, \quad (7)$$

$$\mathbf{b}(T) = \frac{1}{\hat{\alpha}^2 \Gamma} \begin{bmatrix} \Gamma - e^{-\hat{\alpha}\delta T} (\Gamma \cosh(\hat{\alpha}\Gamma T) + \delta \sinh(\hat{\alpha}\Gamma T)) \\ -\hat{\alpha} e^{-\hat{\alpha}\delta T} \sinh(\hat{\alpha}\Gamma T) \end{bmatrix} \quad (8)$$

ahol $\Gamma = \sqrt{1 + \delta^2}$, valamint $\mathbf{y} = [x(T) \quad x'(T)]^T$.

$T = 1$ helyettesítéssel a mintavételezési pillanatokban érvényes, ún. *mikro-káosz* leképezés írható fel:

$$\mathbf{y}_{i+1} = \mathbf{U}(1)\mathbf{y}_i + \mathbf{b}(1)F_i, \quad (9)$$

ahol $F_i = \text{Int}(\hat{P}x_i + \hat{D}x'_i)$.

2.2. Negatív csillapítású rendszer esetében

Ha a rendszer relatív csillapítása negatív (lásd 2. ábra), (4) az alábbi módon írható:

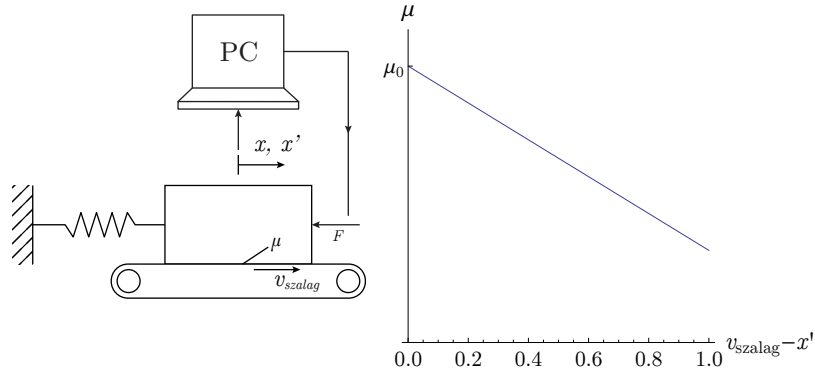
$$x''(T) - 2\hat{\alpha}\delta x'(T) + \hat{\alpha}^2 x(T) = -F, \quad T \in [0, 1), \quad (10)$$

megoldása pedig az előző esethez hasonlóan:

$$\mathbf{y}(T) = \mathbf{U}(T)\mathbf{y}(0) + \mathbf{b}(T)F \quad (11)$$

ahol:

$$\mathbf{U}(T) = \frac{e^{\hat{\alpha}\delta T}}{\Gamma} \begin{bmatrix} \Gamma \cos(\hat{\alpha}\Gamma T) - \delta \sin(\hat{\alpha}\Gamma T) & \sin(\hat{\alpha}\Gamma T)/\hat{\alpha} \\ -\hat{\alpha} \sin(\hat{\alpha}\Gamma T) & \Gamma \cos(\hat{\alpha}\Gamma T) + \delta \sin(\hat{\alpha}\Gamma T) \end{bmatrix}, \quad (12)$$



2. ábra. Egyszerű fékmodell: példa negatív csillapítású, egy szabadságfokú szabályozott rendszerre.

$$\mathbf{b}(T) = \frac{1}{\hat{\alpha}^2 \Gamma} \begin{bmatrix} -\Gamma + e^{\hat{\alpha} \delta T} (\Gamma \cos(\hat{\alpha} \Gamma T) - \delta \sin(\hat{\alpha} \Gamma T)) \\ -\hat{\alpha} e^{\hat{\alpha} \delta T} \sin(\hat{\alpha} \Gamma T) \end{bmatrix}, \quad (13)$$

$\Gamma = \sqrt{1 - \delta^2}$, valamint $\mathbf{y} = [x(T) \quad x'(T)]^T$.

$T = 1$ helyettesítéssel az előző esettel megegyező alakú, mintavételezési pillanatokban érvényes, mikro-káosz leképezés írható fel:

$$\mathbf{y}_{i+1} = \mathbf{U}(1)\mathbf{y}_i + \mathbf{b}(1) F_i. \quad (14)$$

3. A KAOTIKUS VISELKEDÉS JELLEGE

Ebben a szakaszban (9) és (14) leképezések globális viselkedését, fázisterület, valamint az abban megjelenő kaotikus struktúrákat és azok vonzási tartományait mutatjuk be.

Általánosan elmondható, hogy a szabályozó erő kvantálása miatt a fázistérben végtelen számú egyenes kapcsolóvonal jelenik meg (melyek kielégítik az $\hat{P}x + \hat{D}v = F$, $F \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ egyenletet). $\hat{P} = 0$ esetében a kapcsolóvonalak az (x, v) fázistérben vízszintesek, $\hat{D} = 0$ esetén függőlegesek, egyéb esetben általános helyzetű párhuzamos egyenesek. Az egyes kapcsolóvonalak között olyan sávok találhatóak, melyekben a szabályozó erő konstans.

3.1. Negatív merevségű rendszer esetében

Negatív merevségű rendszer esetében a triviális egyensúlyi helyzet instabil nyeregpont, illetve a szabályozási sávokban ugyancsak megjelenhetnek instabil nyeregpontok. Reálisan megválasztott rendszerparaméterek esetében a kapcsolóvonalak és az instabil nyeregpontok váltakozva követik egymást az x -tengelyen. Lásd 3. ábra.

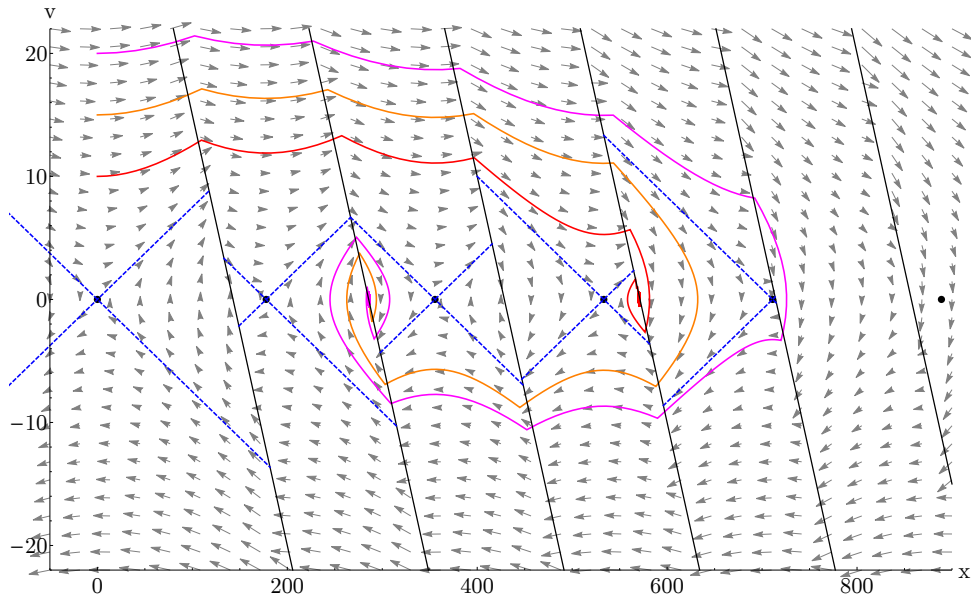
A kapcsolóvonalak és fixpontok mintázata előbb-utóbb egy virtuális fixpont megjelenésével megszakad, az N -edik kerekítési sávhoz tartozó fixpont már nem a kerekítési sávban helyezkedik el. Mivel az instabil nyeregpontok helye $x_{nyereg}(n) = n/\hat{\alpha}^2$, a kapcsolóvonalak és az x -tengely metszéspontjai $x_{kapcs}(m) = m/\hat{P}$, az utolsó valódi fixpont indexe $N = \text{Int}(\hat{P}/(\hat{P} - \hat{\alpha}^2))$.

Azon kerekítési sávok között, melyekben valódi fixpont van, a kapcsolóvonalon kaotikus attraktor jelenik meg, ugyanis a kétoldali dinamika rendre a szomszédos sávba vezeti a rendszert. Fontos megjegyezni, hogy a mintavételezés miatt a kapcsolások nem a kapcsolóvonal átlépésekor történnek meg, hanem csak később, a következő mintavételezési időpillanatban.

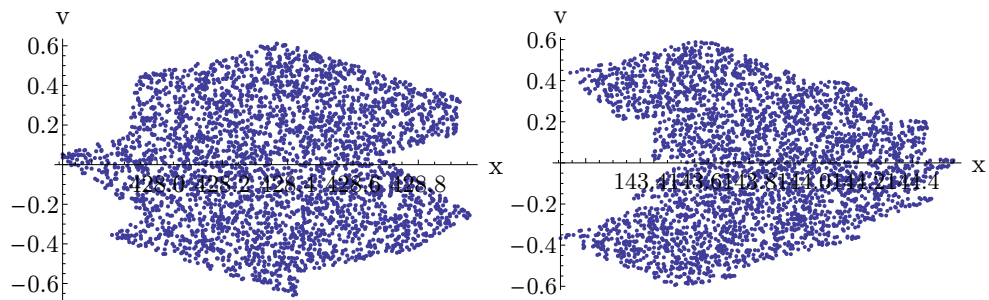
Két attraktort szemléltet a 4. ábra, az egyes attraktorok vonzási tartományait pedig a 5. ábra, melyet egyszerű cella-leképezéses módszerrel [4] generáltunk.

3.2. Negatív csillapítású rendszer esetében

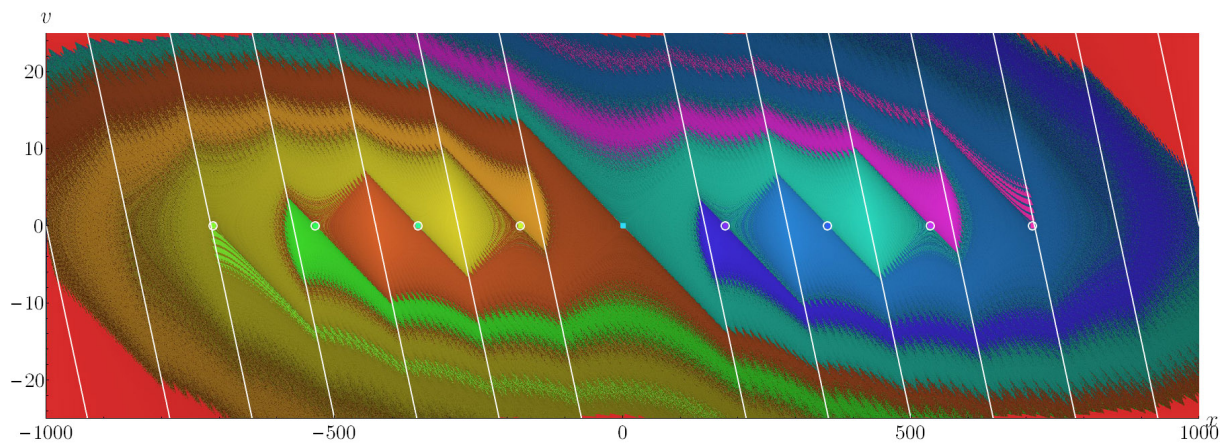
Negatív csillapítás esetében a rendszer triviális egyensúlyi helyzete instabil fókusz. Az ezt körülvevő szabályozási sávokban pedig a rendszer egyensúlyi helyzete virtuális stabil fókusszá válik, így a szabályozási sávokba lépő trajektóriák visszatérnek az $F = 0$ szabályozásmentes sávba. A rendszerparaméterektől függően a kapcsolóvonalakon *sliding-mode* jellegű viselkedés is kialakulhat. Így általános esetben a fázistérben az instabil fókusz körül kétszer három szakaszból álló periodikus pálya jelenik meg; instabil, origótól távolodó dinamika a két kapcsolóvonal között, stabil jellegű dinamika az első kapcsolási sávban és sliding az első kapcsolóvonalon. Természetesen a periodikus pályára a mintavételezés miatt szabálytalan oszcilláció rakódik rá. Ezt szemlélteti a 6. ábra.



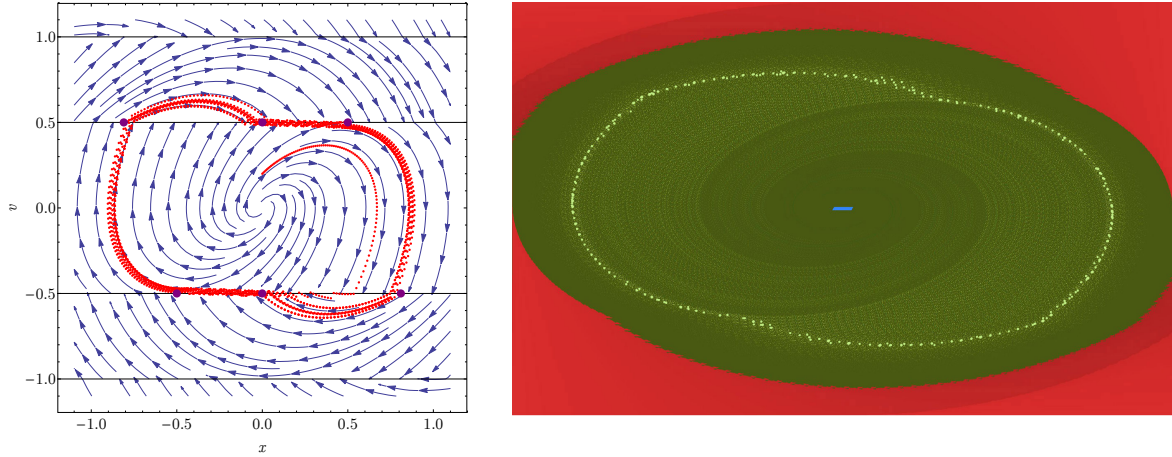
3. ábra. A digitálisan szabályozott inverz inga fázistere, $\hat{\alpha} = 0.075$, $\delta = 0.03$, $\hat{P} = 0.007$ valamint $\hat{D} = 0.02$ esetén. Fekete pontokkal az instabil nyeregpontok, szaggatott vonallal azok sokaságai, szürke színnel pedig a kapcsolóvonalak vannak jelölve. A színes görbék különböző kezdeti feltételhez tartozó trajektóriák.



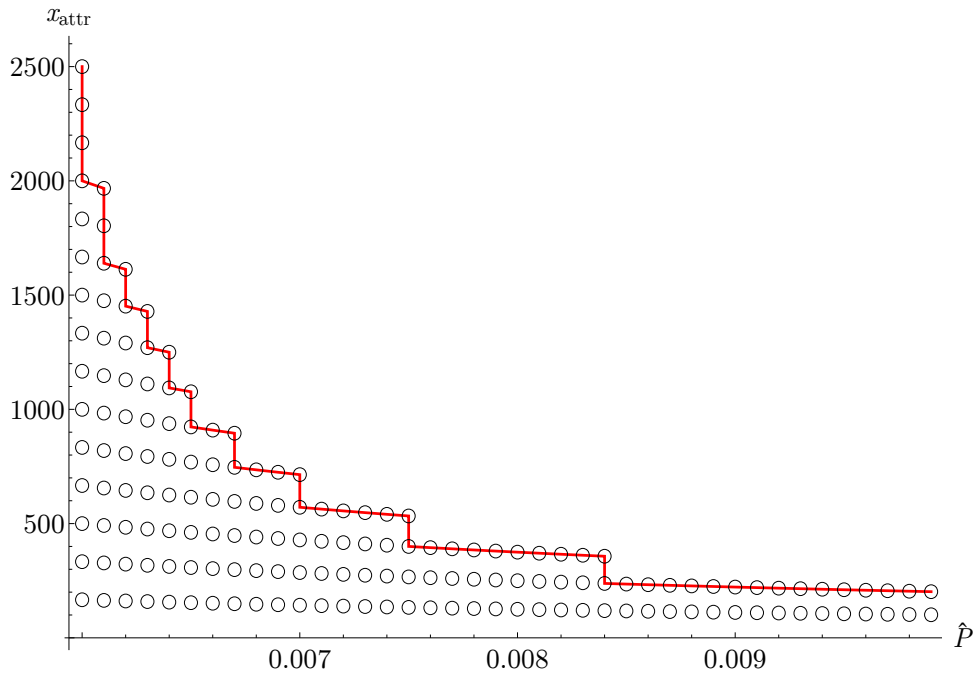
4. ábra. A digitálisan szabályozott inverz inga két különböző kezdeti feltételhez tartozó attraktora, $\hat{\alpha} = 0.075$, $\delta = 0.03$, $\hat{P} = 0.007$ valamint $\hat{D} = 0.02$ esetén.



5. ábra. Az inverz inga fázisterének cella-leképezéses módszerrel előállított képe, $\hat{\alpha} = 0.075$, $\delta = 0.03$, $\hat{P} = 0.007$ valamint $\hat{D} = 0.02$ esetén. Látható, hogy az origó közeléből induló trajektóriák a harmadik (világoskék vagy barna) attraktorba érkezők.



6. ábra. Bal oldalon: az egyszerű fékmodell $x_0 = 0, v_0 = 0.2$ kezdeti feltételhez tartozó attraktora, $\hat{\alpha} = 1, \delta = 0.5, \hat{P} = 0$ és $\hat{D} = 2$ esetén. A lila pontok a mintavételezés nélküli, folytonos esetben kialakuló periodikus pálya pontjai. Jobb oldalon: egy hasonló attraktor cella-leképezéssel előállított képe.



7. ábra. Az inverz inga fázisterében elhelyezkedő attraktorok helye \hat{P} függvényében, $\hat{\alpha} = 0.075$ esetén. \hat{P} növelésével *border-collision* bifurkációk következtében csökken az attraktor-sorozat mérete. (Az attraktorok helye független δ és \hat{D} paraméterektől.)

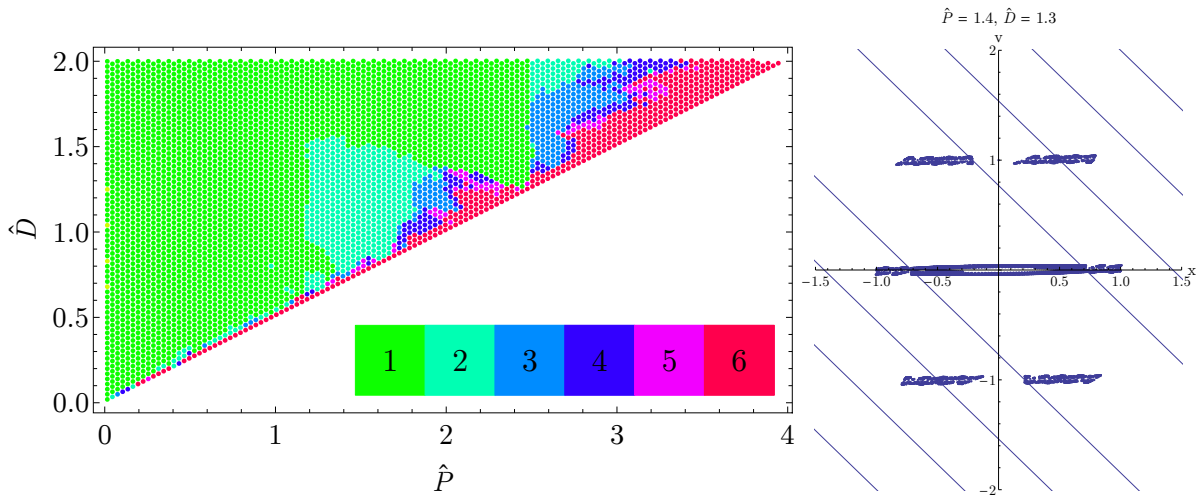
4. MÉRET BECSLÉSEK

4.1. Negatív merevségű rendszer esetében

Negatív merevség esetén az x -tengelyen megjelenő attraktor-sorozat utolsó tagjának helye használható a szabályozás maximális hibájának becslésére.

$$x_{\max} = \frac{m_{\max}}{\hat{P}} = \frac{\text{Int}(\hat{P}/(\hat{P} - \hat{\alpha}^2))}{\hat{P}} \quad (15)$$

\hat{P} vagy $\hat{\alpha}$ paraméter variálása során az instabil fixpontok átlélik a kapcsolóvonalakat, így ún. *border-collision* bifurkáció következtében virtuális fixpontok jönnek létre és kaotikus attraktorok tűnnek el. Ezt szemlélteti a 7. ábra.



8. ábra. Bal oldalon: az egyszerű fékmodell szabályozási paramétereirekhez tartozó legkülső szabályozási sáv indexe. A zöld tartományban a periodikus pálya megfelel a 6. ábrán láthatónak, a második sávba átnyúló attraktorra a jobb oldali ábra mutat példát.

4.2. Negatív csillapítású rendszer esetében

Negatív csillapítás esetében a mintavételezés nélküli esethez tartozó periodikus pálya (lásd 6. ábrán lila jelölés) méretének megbecslésével lehet következtetni a maximális szabályozási hibára. Az instabil dinamika maximum egy mintavételezési időtartamig aktív maradhat a kapcsolóvonal átlépése után is, emiatt a periodikus pálya szélső pontjaira (14) leképezést alkalmazva megkapható az a legtávolabbi pont, ahová az instabil dinamika eljuttathatja a rendszert. Hasonlóképpen a szabályozási sávból visszatérő trajektóriák is képesek más kerekítési sávokba átlökni a rendszert. Adott szabályozási paraméterekkel numerikusan kiszámítható, hogy melyik lesz a legtávolabbi szabályozási sáv, melyet érint az attraktor. Ezt ábrázolja a 8. ábra.

5. ÖSSZEFOGLALÁS

A kerekítés és mintavételezés kombinációja az egyszerű digitálisan szabályozott rendszerekben is változatos szabálytalan, kaotikus viselkedést eredményez. Jelen cikkben megmutattuk, hogy a szabályozó erő kvantáltsága statikus és dinamikus instabilitás esetén is attraktort / attraktorokat hoz létre a fázis térben. Negatív merevség esetén attraktor-repellor-sorozat alakul ki, míg negatív csillapítás esetén a mintavételezés nélküli esethez tartozó periodikus pályára ráakadó kaotikus oszcilláció.

A teljesség igénye nélkül ismertettünk egy-egy lehetséges metódust a szabályozás maximális hibájának durva becslésére. A kaotikus attraktorok méretének pontosabb becslésére, vagy numerikus kiszámítására vonatkozó kutatómunka jelenleg is folyamatban van.

KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

Ezt a kutatást az OTKA K 83890 számú projektje támogatta.

HIVATKOZÁSOK

- [1] G. CSERNÁK, G. STÉPÁN. Digital Control as Source of Chaotic Behavior, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 20(5): pp. 1365-1378, 2010.
- [2] G. CSERNÁK, G. STÉPÁN. Sampling and Round-off, as Sources of Chaos in PD-controlled Systems, *Proceedings of the 19th Mediterranean Conference on Control and Automation*, 2011.
- [3] G. GYEBRÓSZKI, G. CSERNÁK. Methods for the Quick Analysis of Micro-chaos, *Applied Non-Linear Dynamical Systems in Springer Proceedings in Mathematics & Statics Vol 93.*, ISBN 978-3-319-08266-0, pp. 155-167, 2013.
- [4] C. S. HSU Cell-to-Cell Mapping, A Method of Global Analysis for Nonlinear Systems, *Applied Mathematical Sciences Vol 64.* ISBN 978-0-387-96520-8, Springer, 1987.