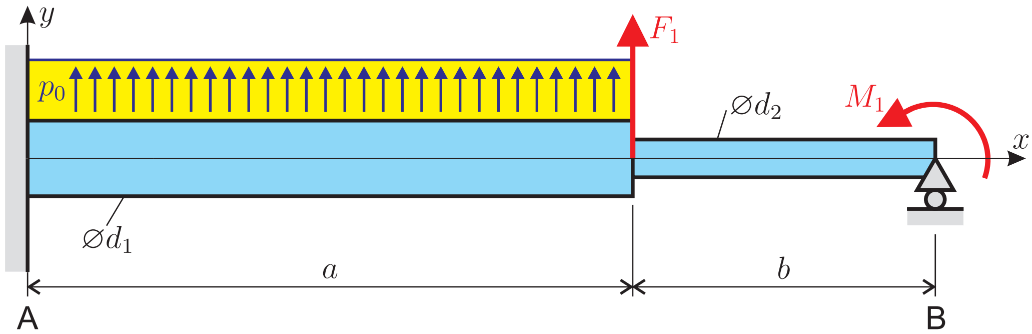
Példa: Tartó lehajlásfüggvényének meghatározása végeselemes módszer segítségével

Készítette: Dr. Kossa Attila (`kossa@mm.bme.hu`)
BME, Műszaki Mechanikai Tanszék
2013. október 8.
Javítva: 2013.10.13.

Határozzuk meg az alábbi ábrán látható tartó súlypontvonalának eltolódását leíró $v(x)$ függvényt végeselemes módszer használatával, síkbeli egyenes gerendalemek alkalmazásával. Vizsgáljuk meg a végeselemes megoldással kapott hajlítónyomatéki igénybevétel hibáját az egyes szakaszokon. Határozzuk meg az $x = a/2$ keresztmetszetben a hajlítónyomatéki igénybevétel nagyságát 2, illetve 3 síkbeli egyenes gerendaelem alkalmazásával.

A tartók két különböző átmérőjű ($d_1 = 2d$, illetve $d_2 = d$) kör keresztmetszetű tartókból vannak összeépítve. A tartók anyaga lineárisan rugalmas, homogén, izotrop. A d_1 átmérőjű rész rugalmassági modulusza E, míg a d_2 átmérővel rendelkező részé $4E$.



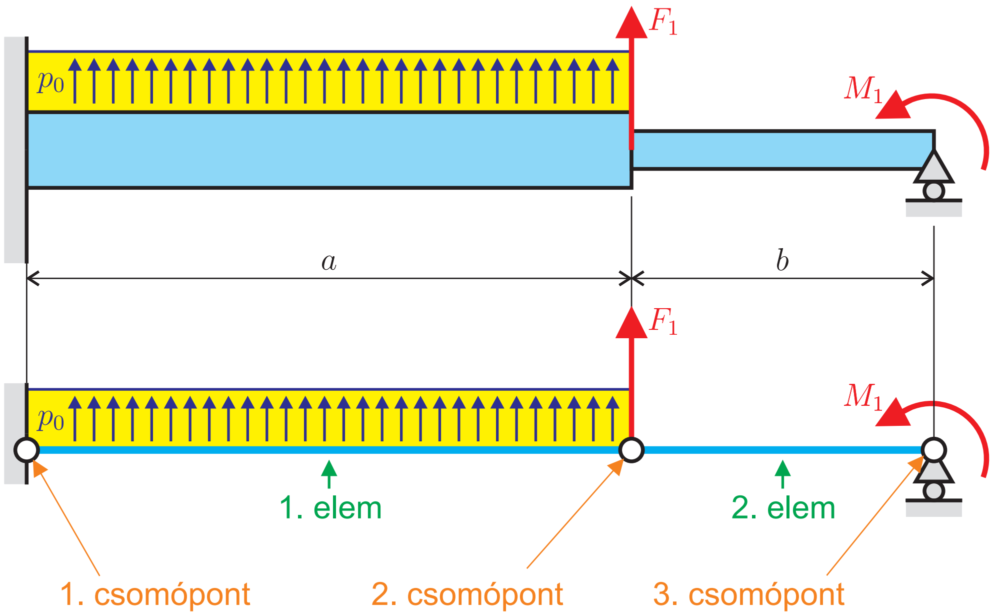
Adatok:

$$
\begin{aligned}
a &= 800 \text{ mm}\\
b &= 400 \text{ mm}\\
d &= 20 \text{ mm}\\
E &= 50 \text{ GPa}\\
\nu &= 0,3\\
F_1 &= 2500 \text{ N}\\
M_1 &= -500 \text{ Nm}\\
p_0 &= -5000 \text{ N/m}
\end{aligned}
$$

1. ábra. A tartó geometriája és terhelése

Megoldás két elem használatával

Két gerendaelem használata esetén a végeselemes modellt az alábbi ábra szemlélteti.



2. ábra. Végeselemes modell 2 elem használata esetén

Mivel ez esetben három csomópont van a végeselemes modellben, emiatt $3 \cdot 2 = 6$ szabadsági foka van a rendszernek. A rendszer csomóponti elmozdulásvektora emiatt 6 elemű:

$$\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{bmatrix}. \tag{1}$$

Az egyes elemekhez tartozó elem elmozdulásvektorok:

$$\boldsymbol{U}^1 = \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{U}^2 = \begin{bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{bmatrix}. \tag{2}$$

A későbbi számítások előtt célszerű táblázatosan összefoglalni az egyes elemekhez tartozó adatokat:

	d	I_z	E	L^e	x_1	x_2
1. elem	$2d$	$(2d)^4\,\pi/64$	E	a	0	a
2. elem	d	$d^4\pi/64$	$4E$	b	a	$a+b$

1. táblázat. Elemekhez tartozó adatok

Továbbá célszerű táblázatosan összefoglalni, hogy melyik elemhez melyik csomópontok tartoznak:

Elemek	Csomópontok	
1. elem	1	2
2. elem	2	3

2. táblázat. Elem-Csomópont összerendelések

A síkbeli egyenes gerendaelem merevségi mátrixa:

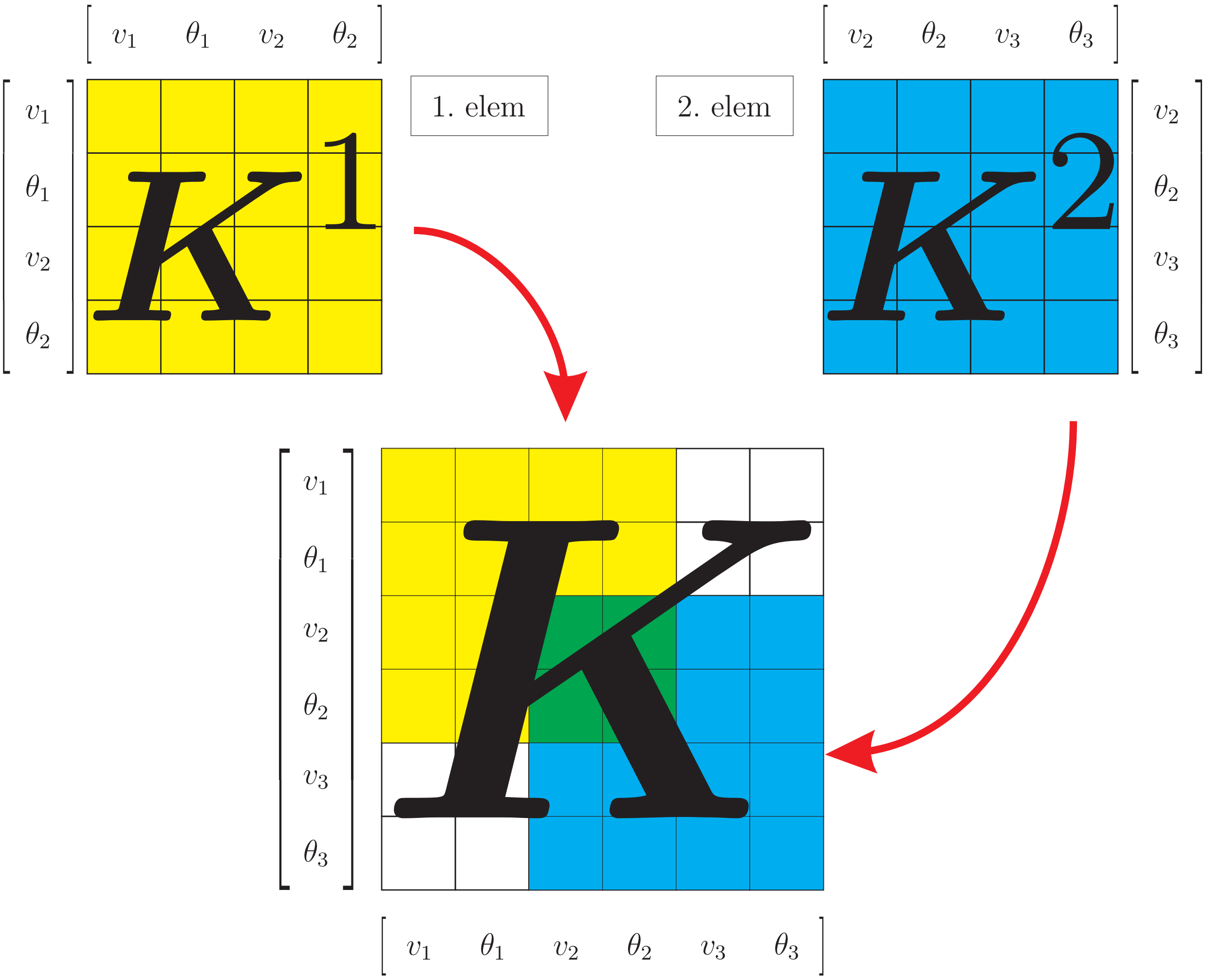
$$\boldsymbol{K}^{\mathrm{e}} = \frac{I_z^e E^e}{\left(L^{\mathrm{e}}\right)^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L^{\mathrm{e}} & -12 & 6L^{\mathrm{e}} \\ 6L^{\mathrm{e}} & 4\left(L^{\mathrm{e}}\right)^2 & -6L^{\mathrm{e}} & 2\left(L^{\mathrm{e}}\right)^2 \\ -12 & -6L^{\mathrm{e}} & 12 & -6L^{\mathrm{e}} \\ 6L^{\mathrm{e}} & 2\left(L^{\mathrm{e}}\right)^2 & -6L^{\mathrm{e}} & 4\left(L^{\mathrm{e}}\right)^2 \end{bmatrix}. \tag{3}$$

Az egyes elemekhez tartozó merevségi mátrixok a numerikus adatok behelyettesítése után:

$$\boldsymbol{K}^1 = \begin{bmatrix} 147262. & 58904.9 & -147262. & 58904.9 \\ 58904.9 & 31415.9 & -58904.9 & 15708. \\ -147262. & -58904.9 & 147262. & -58904.9 \\ 58904.9 & 15708. & -58904.9 & 31415.9 \end{bmatrix}, \tag{4}$$

$$\boldsymbol{K}^2 = \begin{bmatrix} 294524. & 58904.9 & -294524. & 58904.9 \\ 58904.9 & 15708. & -58904.9 & 7853.98 \\ -294524. & -58904.9 & 294524. & -58904.9 \\ 58904.9 & 7853.98 & -58904.9 & 15708. \end{bmatrix}. \tag{5}$$

Az elemtopológia szerint a 2-es csompópont közös, emiatt a globális merevségi mátrixot úgy kell összeállítani, hogy az ehhez a csomóponthoz tartozó sorok és oszlopok helyén mindkét merevségi mátrixból adódó tagot be kell írnunk. Ezt a folyamatot szemlélteti a 3. ábra.



3. ábra. A globális merevségi mátrix összeállítása

Az összeállítás után a globális merevségi mátrixra az alábbi megoldást kapjuk:

$$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} 147262. & 58904.9 & -147262. & 58904.9 & 0 & 0 \\ 58904.9 & 31415.9 & -58904.9 & 15708. & 0 & 0 \\ -147262. & -58904.9 & 441786. & 0. & -294524. & 58904.9 \\ 58904.9 & 15708. & 0. & 47123.9 & -58904.9 & 7853.98 \\ 0 & 0 & -294524. & -58904.9 & 294524. & -58904.9 \\ 0 & 0 & 58904.9 & 7853.98 & -58904.9 & 15708. \end{bmatrix}.$$

A globális tehervektor felírásánál a csomópontokban működő koncentrált erőket és koncentrált erőpárokat közvetlenül be tudjuk írni, viszont ehhez még hozzá kell venni az adott csomópontba befutó elemeken lévő megoszló terhelésből adódó erő és erőpár jellegű terheléseket is. A p_0 állandó intenzitású megoszló terhelés esetén a csomópontokban keletkező járulékos terhelés az alábbi formában adható meg egy elemhez:

$$\boldsymbol{F}_p^{\mathrm{e}} = \frac{p_0 L^{\mathrm{e}}}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ L^{\mathrm{e}}/6 \\ 1 \\ -L^{\mathrm{e}}/6 \end{bmatrix}. \tag{6}$$

Következésképpen a feladat esetén a globális tehervektor alakja:

$$\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} F_A \\ M_A \\ F_1 \\ 0 \\ F_B \\ M_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{p_0 L^1}{2} \\ \frac{p_0 \left(L^1\right)^2}{12} \\ \frac{p_0 L^1}{2} \\ -\frac{p_0 \left(L^1\right)^2}{12} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_A - 2000 \\ M_A - 266.667 \\ 500 \\ 266.667 \\ F_B \\ -500 \end{bmatrix}. \tag{7}$$

A globális tehervektor elemei közé beírtuk a még ismertelen reakciókat is, hiszen az elemre nézve azok is külső terhelésként jelentkeznek. Ezen értékek a tényleges reakciók ebben a csomópontban. A megoszló terhelésből csak az 1-es és 2-es csomópontban keletkezik terhelés. Nagyon fontos az előjelszabályok betartása!

A globális merevségi mátrix és a globális tehervektor ismeretében következhet a megoldás az $\boldsymbol{U}$-ra. A rendszer merevségi egyenlete:

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{U} = \boldsymbol{F}. \tag{8}$$

A megoldás előállításához figyelembe kell vennük a feladat peremfeltételeit, anélkül a $\boldsymbol{K}$ szerkezet szinguláris. A feladat peremfeltételei az A befogás és a B alátámasztás miatt a következőek:

$$v_1 = 0, \qquad \theta_1 = 0, \qquad v_3 = 0. \tag{9}$$

A megoldás során a következő lépés, hogy töröljük az ezekhez a szabdságfokokhoz tartozó sorokat és oszlopokat a merevségi egyenletből, ezzel az alábbi redukált egyenletethez jutunk:

$$\begin{bmatrix} 441786. & 0. & 58904.9 \\ 0. & 47123.9 & 7853.98 \\ 58904.9 & 7853.98 & 15708. \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 500 \\ 266.667 \\ -500 \end{bmatrix}. \tag{10}$$

Az így kapott egyenletrendszer már megoldható. Megoldásra az alábbi értékeket kapjuk:

$$\begin{bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0135812 \\ 0.0212207 \\ -0.0933709 \end{bmatrix}. \tag{11}$$

Tehát a csomóponti elmozdulásokra kapott megoldás:

$$\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.0135812 \\ 0.0212207 \\ 0 \\ -0.0933709 \end{bmatrix}. \tag{12}$$

Az elemekre vonatkozó csomóponti elmozdulások vektora:

$$\boldsymbol{U}^1 = \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.0135812 \\ 0.0212207 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{U}^2 = \begin{bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0135812 \\ 0.0212207 \\ 0 \\ -0.0933709 \end{bmatrix}. \tag{13}$$

Most már ismerjük az összes csomóponthoz tartozó elmozdulás és szögelfordulás értéket, melyek segítségével már az elemen belüli interpoláció számítható, és minden további mennyiség származtatható.

A végeselemes modell globális tehervektorát megkapjuk, ha a $\boldsymbol{K}$-val rászorzunk a már ismert $\boldsymbol{U}$-ra. Az alábbi megoldáshoz jutunk:

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{K}\boldsymbol{U}, \tag{14}$$

$$\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} -750. \\ -466.667 \\ 500. \\ 266.667 \\ 250. \\ -500. \end{bmatrix}. \tag{15}$$

Ha ábrázolni szeretnénk az elemeken belüli lehajlásfüggvényt akkor alkalmaznunk kell az elemen belüli interpolációt a formafüggvények segítségével.

Az elem lokális ξ koordinátarendszerében a formafüggvények alakja:

$$N_1(\xi) = \frac{1}{4}(1-\xi)^2(2+\xi), \tag{16}$$

$$N_2(\xi) = \frac{L^{\mathrm{e}}}{8}(1-\xi)^2(1+\xi), \tag{17}$$

$$N_3(\xi) = \frac{1}{4}(1+\xi)^2(2-\xi), \tag{18}$$

$$N_4(\xi) = -\frac{L^{\mathrm{e}}}{8}(1+\xi)^2(1-\xi). \tag{19}$$

Az 1. elemen belüli lehajlásfüggvény interpolációja:

$$v^1(\xi) = \boldsymbol{N}\boldsymbol{U}^1 = [N_1, N_2, N_3, N_4]\begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = N_1 v_1 + N_2\theta_1 + N_3 v_2 + N_4\theta_2. \tag{20}$$

Az $\boldsymbol{U}^1$ behelyettesítése után az alábbi alakot kapjuk:

$$v^1(\xi) = -0.00127324 \cdot \xi^3 + 0.00212207 \cdot \xi^2 + 0.00806385 \cdot \xi + 0.00466854. \tag{21}$$

A lokális koordinátából átválthatunk a globális x koordinátára. Az 1-es elem esetén a két koordináta közötti összefüggés:

$$\xi = \frac{2(x-x_1)}{L^1} - 1 = \frac{2x}{a} - 1.$$

Behelyettesítés után az alábbi alakot kapjuk:

$$\boxed{v^1(x) = 0.0371362 \cdot x^2 - 0.0198944 \cdot x^3.} \tag{22}$$

A 2-es elem esetén pedig az alábbi eredmények adódnak:

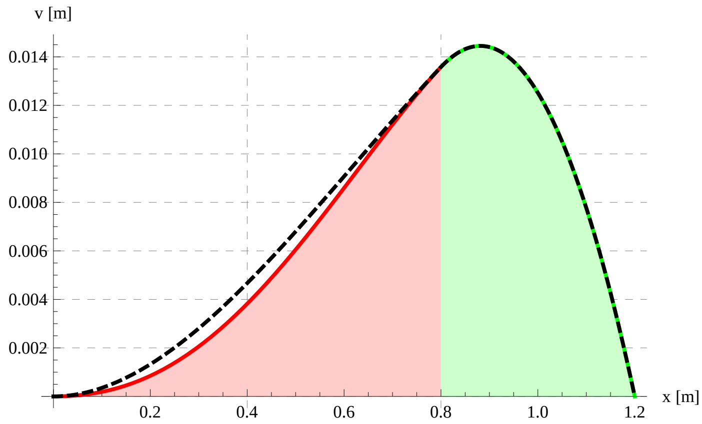
$$v^2(\xi) = \boldsymbol{N}\boldsymbol{U}^2 = [N_1, N_2, N_3, N_4]\begin{bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{bmatrix} = N_1 v_2 + N_2\theta_2 + N_3 v_3 + N_4\theta_3. \tag{23}$$

$$v^2(\xi) = -0.000212207 \cdot \xi^3 - 0.00572958 \cdot \xi^2 - 0.0065784 \cdot \xi + 0.0125202. \tag{24}$$

$$\xi = \frac{2(x - x_2)}{L^2} - 1 = \frac{2(x-a)}{b} - 1. \tag{25}$$

$$\boxed{v^2(x) = -0.0713014 + 0.174009 \cdot x - 0.063662 \cdot x^2 - 0.0265258 \cdot x^3.} \tag{26}$$

$v^1(x)$ és $v^2(x)$ függvények a végeselemes megoldással kapott lehajlásfüggvények, melyeket a 4. ábra mutatja, ahol a végeselemes módszerrel kapott megoldásokat fekete szaggatott vonal jelöli, míg a rugalmas szál differenciálegyenletének megoldásával kapott egzakt megoldásokat a piros és zöld folytonos vonalak mutatják.



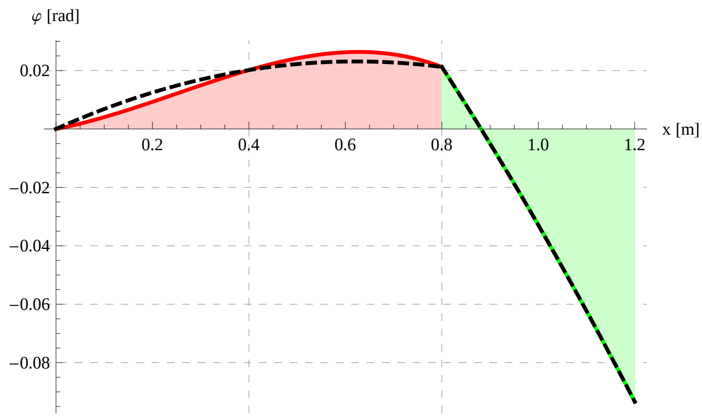
4. ábra. Végeselemes módszerrel kapott lehajlásfüggvények alakja, feltüntetve az egzakt megoldást is.

A szögelfordulás függvényeket megkapjuk a lehajlásfüggvények deriváltjaival:

$$\varphi^1(x) = \left(v^1\right)' = 0.0742723 \cdot x - 0.0596831 \cdot x^2, \tag{27}$$

$$\varphi^2(x) = \left(v^2\right)' = 0.174009 - 0.127324 \cdot x - 0.0795775 \cdot x^2. \tag{28}$$

A szögelfordulás függvényeket a 5. ábra illusztrálja, ahol a végeselemes módszerrel kapott megoldásokat fekete szaggatott vonal jelöli, míg a rugalmas szál differenciálegyenletének megoldásával kapott egzakt megoldásokat a piros és zöld folytonos vonalak mutatják.



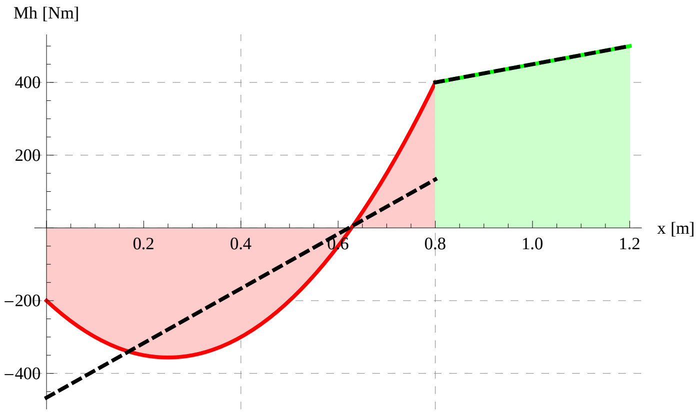
5. ábra. Végeselemes módszerrel kapott szögelfordulás függvények alakja, feltüntetve az egzakt megoldást is.

Az elemeken belüli hajlítónyomatéki függvényre kapott végeselemes megoldásokat megkapjuk a rugalmas szál differenciálegyenletének felhasználásával:

$$M_h^1(x) = -I_z^1 E^1 \cdot \left(v^1\right)'' = -466.667 + 750 \cdot x, \tag{29}$$

$$M_h^2(x) = -I_z^2 E^2 \cdot \left(v^2\right)'' = 200 + 250 \cdot x. \tag{30}$$

A hajlítónyomatéki függvények közelítésére kapott megoldásokat a 6. ábra ábrázolja, ahol a végeselemes módszerrel kapott megoldásokat fekete szaggatott vonal jelöli, míg a rugalmas szál differenciálegyenletének megoldásával kapott egzakt megoldásokat a piros és zöld folytonos vonalak mutatják.



6. ábra. Végeselemes módszerrel kapott hajlítónyomatéki függvények alakja, feltüntetve az egzakt megoldást is.

Az egyenes gerendaelem tulajdonsága, hogy az elemeken belül a hajlítónyomatéki függvényt lineárisan közelíti, ez jól látszik a megoldáson. Az a hosszúságú elemen működő megoszló terhelés miatt itt az egzakt lehajlásfüggvény negyedrendű polinom alakú, amit az egyenes gerendaelem harmadfokú polinommal közelít. Érdemes megfigyelni, hogy amíg a lehajlásfüggvényre viszonylag jó közelítést kapunk, addig az M_h-ra (ami a lehajlásfüggvény második deriváltjával arányos) a megoldás elég pontatlan. A pontosabb eredmény elérése érdekében ezen a részen több elem használata szükséges ha pontosabb M_h megoldást akarunk a végeseleems módszerrel.

Az $x = a/2$ keresztmetszetben a hajlítónyomatékra kapott megoldás:

$$M_h^1(a/2) = -166.667 \text{ Nm}. \tag{31}$$

Ennek az értéknek a relatív hibája:

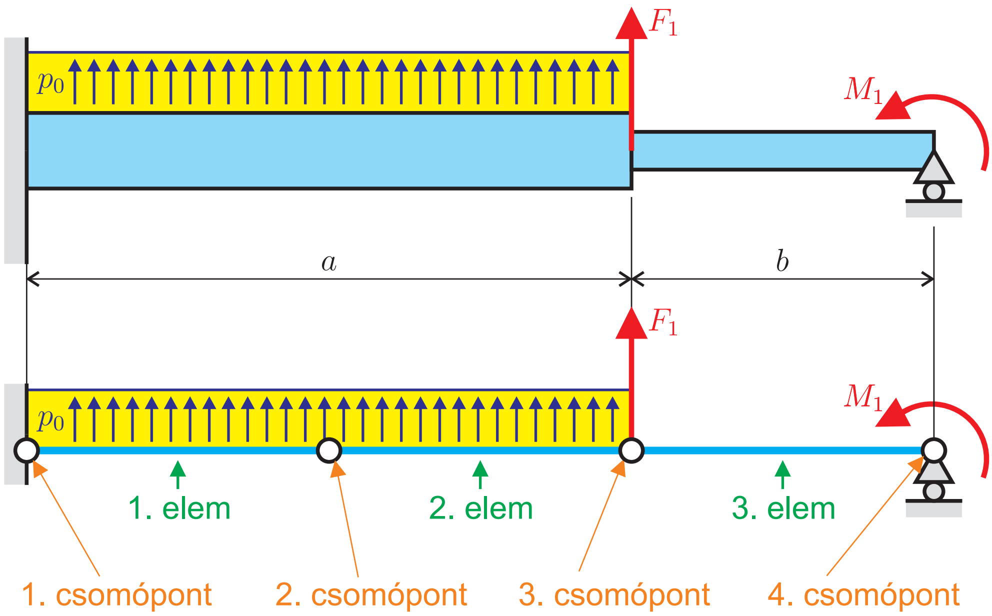
$$\text{relatív hiba} = \left| \frac{M_h^1(a/2) - M_h^{\text{egzakt}}(a/2)}{M_h^{\text{egzakt}}(a/2)} \right| \times 100 \tag{32}$$

$$= \left| \frac{-166.667 - (-300)}{-300} \right| \times 100 = 44.444 \text{ \%}. \tag{33}$$

Megoldás három elem használatával

Annak érdekében, hogy a megoszló terheléssel terhelt szakaszon pontosabb eredményeket kapjunk, több elem használata szükséges. A következő számítás azt mutatja be, hogy miképpen változik az eredmény, ha az a hosszúságú szakaszon két azonos hosszúságú elemet használunk. A számítási algoritmus azonos a kételemes számítás esetével, emiatt ennél a résznél csak az eredmények tálalása következik minimális magyarázó szöveggel.

A végeselemes modellt az alábbi ábra szemlélteti.



7. ábra. A végeselemes modell 3 elem használata esetén

Mivel jelen esetben négy csomópont van a végeselemes modellben, emiatt $4{\cdot}2 = 8$ szabadsági foka van a rendszernek. A globális rendszer csomóponti elmozdulásvektora emiatt 8 elemű:

$$\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \\ v_4 \\ \theta_4 \end{bmatrix}. \qquad (34)$$

Az elemekhez tartozó adatok:

	d	I_z	E	L^{e}	x_1	x_2
1. elem	$2d$	$(2d)^4\,\pi/64$	E	$a/2$	0	$a/2$
2. elem	$2d$	$(2d)^4\,\pi/64$	E	$a/2$	$a/2$	a
3. elem	d	$d^4\pi/64$	$4E$	b	a	$a+b$

3. táblázat. Elemekhez tartozó adatok

Elemekhez tartozó csomópontok:

Elemek	Csomópontok	
1. elem	1	2
2. elem	2	3
3. elem	3	4

4. táblázat. Elem-Csomópont összerendelések

Az elemek merevségi mátrixai:

$$\boldsymbol{K}^1 = \begin{bmatrix} 1.1781\times 10^6 & 235619. & -1.1781\times 10^6 & 235619. \\ 235619. & 62831.9 & -235619. & 31415.9 \\ -1.1781\times 10^6 & -235619. & 1.1781\times 10^6 & -235619. \\ 235619. & 31415.9 & -235619. & 62831.9 \end{bmatrix}, \tag{35}$$

$$\boldsymbol{K}^2 = \begin{bmatrix} 1.1781\times 10^6 & 235619. & -1.1781\times 10^6 & 235619. \\ 235619. & 62831.9 & -235619. & 31415.9 \\ -1.1781\times 10^6 & -235619. & 1.1781\times 10^6 & -235619. \\ 235619. & 31415.9 & -235619. & 62831.9 \end{bmatrix}, \tag{36}$$

$$\boldsymbol{K}^3 = \begin{bmatrix} 294524. & 58904.9 & -294524. & 58904.9 \\ 58904.9 & 15708. & -58904.9 & 7853.98 \\ -294524. & -58904.9 & 294524. & -58904.9 \\ 58904.9 & 7853.98 & -58904.9 & 15708. \end{bmatrix}. \tag{37}$$

A globális merevségi mátrix:

$$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} 1.1781\times 10^6 & 235619. & -1.1781\times 10^6 & 235619. & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 235619. & 62831.9 & -235619. & 31415.9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1.1781\times 10^6 & -235619. & 2.35619\times 10^6 & 0. & -1.1781\times 10^6 & 235619. & 0 & 0 \\ 235619. & 31415.9 & 0. & 125664. & -235619. & 31415.9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1.1781\times 10^6 & -235619. & 1.47262\times 10^6 & -176715. & -294524. & 58904.9 \\ 0 & 0 & 235619. & 31415.9 & -176715. & 78539.8 & -58904.9 & 7853.98 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -294524. & -58904.9 & 294524. & -58904.9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 58904.9 & 7853.98 & -58904.9 & 15708. \end{bmatrix}. \tag{38}$$

A globális tehervektor:

$$\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} F_A \\ M_A \\ 0 \\ 0 \\ F_1 \\ 0 \\ F_B \\ M_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{p_0 L^1}{2} \\ \frac{p_0 \left(L^1\right)^2}{12} \\ \frac{p_0 L^1}{2} + \frac{p_0 L^2}{2} \\ -\frac{p_0 \left(L^1\right)^2}{12} + \frac{p_0 \left(L^2\right)^2}{12} \\ \frac{p_0 L^2}{2} \\ -\frac{p_0 \left(L^2\right)^2}{12} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_A - 1000. \\ M_A - 66.6667 \\ -2000. \\ 0. \\ 1500. \\ 66.6667 \\ F_B \\ -500 \end{bmatrix}. \tag{39}$$

A csomóponti elmozdulásokra kapott megoldás:

$$\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \\ v_4 \\ \theta_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0. \\ 0. \\ 0.00381972 \\ 0.0201596 \\ 0.0135812 \\ 0.0212207 \\ 0. \\ -0.0933709 \end{bmatrix}. \tag{40}$$

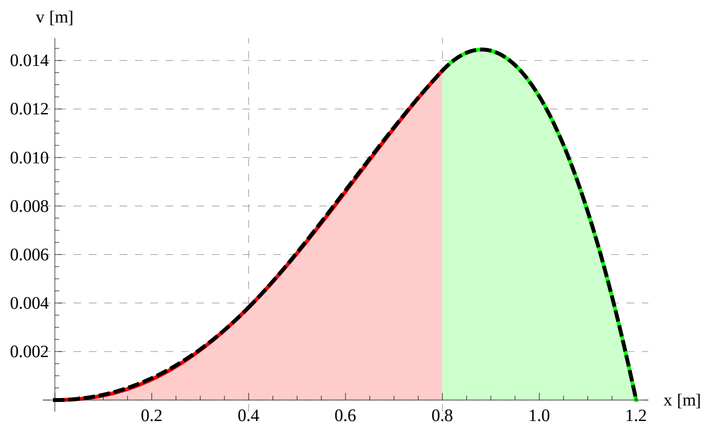
A globális tehervektor a KU kifejezéssel már felírható úgy, hogy szerepelnek benne az ismeretlenek is.:

$$\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} 250. \\ -266.667 \\ -2000. \\ 0 \\ 1500. \\ 66.6667 \\ 250. \\ -500. \end{bmatrix}. \tag{41}$$

A lehajlásfüggvényekre kapott megoldások:

$$\begin{aligned} v^1(\xi) &= 0.0000530516 \cdot \xi^3 + 0.00100798 \cdot \xi^2 + 0.00185681 \cdot \xi + 0.000901878, & (42) \\ v^2(\xi) &= -0.000371362 \cdot \xi^3 + 0.0000530516 \cdot \xi^2 + 0.00525211 \cdot \xi + 0.00864742, & (43) \\ v^3(\xi) &= -0.000212207 \cdot \xi^3 - 0.00572958 \cdot \xi^2 - 0.0065784 \cdot \xi + 0.0125202, & (44) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v^1(x) &= 0.0212207 \cdot x^2 + 0.00663146 \cdot x^3, & (45) \\ v^2(x) &= 0.00339531 - 0.0254648 \cdot x + 0.0848826 \cdot x^2 - 0.0464202 \cdot x^3, & (46) \\ v^3(x) &= -0.0713014 + 0.174009 \cdot x - 0.063662 \cdot x^2 - 0.0265258 \cdot x^3. & (47) \end{aligned}$$



8. ábra. Végeselemes módszerrel kapott lehajlásfüggvények ábrázolása

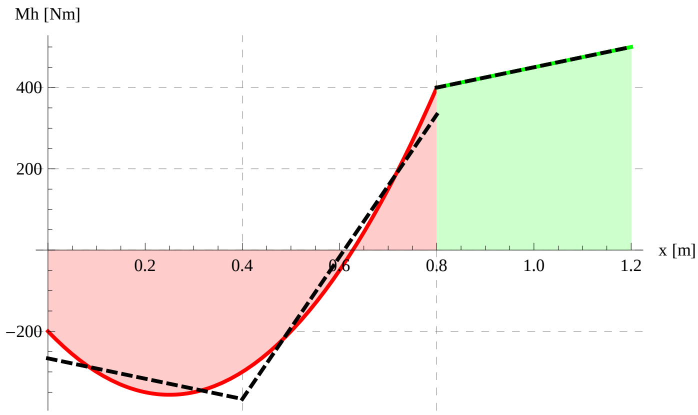
A szögelfordulás függvények:

$$\begin{aligned} \varphi^1(x) &= 0.0424413 \cdot x + 0.0198944 \cdot x^2, & (48) \\ \varphi^2(x) &= -0.0254648 + 0.169765 \cdot x - 0.139261 \cdot x^2, & (49) \\ \varphi^3(x) &= 0.174009 - 0.127324 \cdot x - 0.0795775 \cdot x^2. & (50) \end{aligned}$$

9. ábra. Végeselemes módszerrel kapott szögelfordulás függvények ábrázolása

A hajlítónyomatéki függvények:

$$
\begin{aligned}
M_h^1(x) &= -I_z^1 E^1 \cdot \left(v^1\right)'' = -266.667 - 250 \cdot x, \\
M_h^2(x) &= -I_z^2 E^2 \cdot \left(v^2\right)'' = -1066.67 + 1750 \cdot x, \\
M_h^3(x) &= -I_z^3 E^3 \cdot \left(v^3\right)'' = 200 + 250 \cdot x.
\end{aligned}
$$



10. ábra. Végeselemes módszerrel kapott hajlítónyomatéki függvények ábrázolása

Az $x = a/2$ keresztmetszetben a hajlítónyomatékra kapott megoldás:

$$M_h^1(a/2) = M_h^2(a/2) = -366.667 \text{ Nm}. \tag{51}$$

Ennek az értéknek a relatív hibája:

$$\text{relatív hiba} = \left| \frac{M_h^1(a/2) - M_h^{\text{egzakt}}(a/2)}{M_h^{\text{egzakt}}(a/2)} \right| \times 100 \tag{52}$$

$$= \left| \frac{-366.667 - (-300)}{-300} \right| \times 100 = 22.222 \ \%. \tag{53}$$