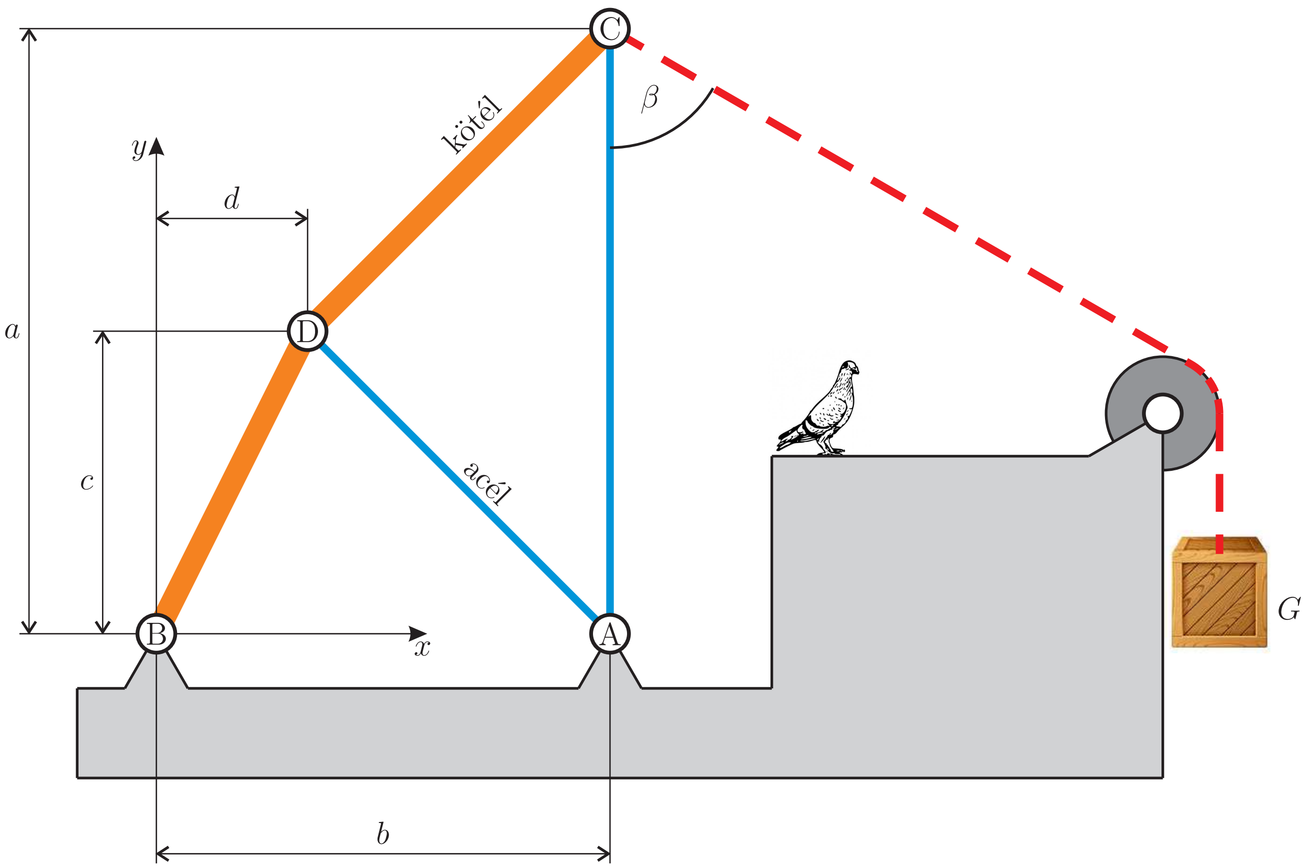
Példa: Rácsos szerkezet deformációjának számítása végeselemes módszerrel

Készítette: Dr. Kossa Attila (`kossa@mm.bme.hu`)
BME, Műszaki Mechanikai Tanszék
2013. október 11.

Az alábbi ábrán látható rácsos szerkezet terhelése a G súlyból adódó erő, ami egy súrlódásmentesnek tekinthető csigán keresztül adódik át a szerkezetre. A szerkezet AC és AD rúdjai acélból készültek, keresztmetszetük v oldalhosszúságú négyzet. BD és CD kenderkötelek keresztmetszete d_k átmérőjű kör. Az A, B, C és D kapcsolatok ideális csuklós kialakításnak tekinthetőek.

Határozzuk meg a szerkezetnek a terhelés hatására fellépő deformációját végeselemes módszerrel, síkbeli rúdelemeket használva. Állapítsuk meg a kötelekben és az acél rudakban keletkező alakváltozásokat és feszültségeket.



1. ábra. A vizsgált rácsos szerkezet geometriája és terhelése

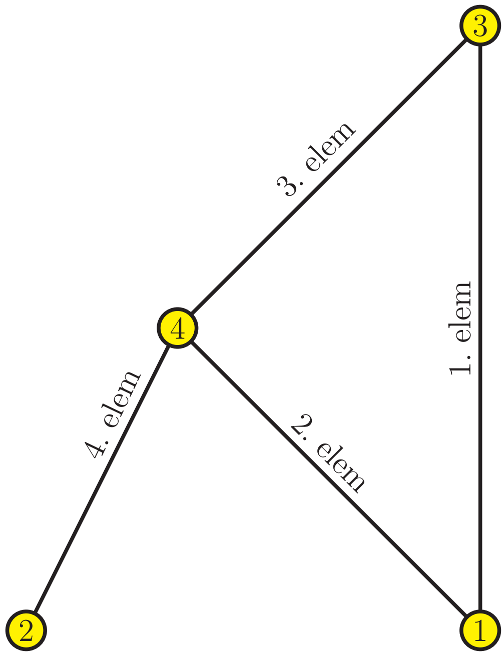
Adatok:

$a = 4$ m, $b = 3$ m, $c = 2$ m, $d = 1$ m, $\beta = 60°$,
$v = 10$ mm, $d_\mathrm{k} = 70$ mm, $E_\text{acél} = 210$ GPa, $E_\text{kötél} = 1$ GPa, $G = 6000$ N.

A globális végeselemes modell egy lehetséges elemösszeállítását és számozását (topológiáját) a 2. ábra szemlélteti. A globális csomóponti elmozdulásvektor és a globális csomóponti terhelésvektor komponensei:

$$\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ U_2 \\ V_2 \\ U_3 \\ V_3 \\ U_4 \\ V_4 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ F_{2x} \\ F_{2y} \\ F_{3x} \\ F_{3y} \\ F_{4x} \\ F_{4y} \end{bmatrix}. \tag{1}$$

Vagyis a rendszer szabadsági foka 8.



2. ábra. A végeselemes modell

A csomópontok koordinátáit a 1. táblázat tartalmazza.

csomópont	x [m]	y [m]
1	3	0
2	0	0
3	3	4
4	1	2

1. táblázat. A csomópontok koordinátái

Az egyes elemekhez tartozó csomópontokat a 2. táblázat foglalja össze.

elem sorszám	csomópontok	
1	1	3
2	1	4
3	3	4
4	2	4

2. táblázat. Az elemekhez tartozó csomópontok

Az egyes elemekhez tartozó adatok:

$$A_{\text{kötél}} = \frac{0.07^2\pi}{4} = 0.00384845 \text{ m}^2, \qquad A_{\text{acél}} = 0.01^2 = 0.0001 \text{ m}^2. \tag{2}$$

elem sorszám	A [m^2]	E [Pa]	L [m]	α [°]	cosα [$-$]	sinα [$-$]
1	0.0001	$210 \cdot 10^9$	4	90	0	1
2	0.0001	$210 \cdot 10^9$	$2\sqrt{2}$	135	$-1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$
3	0.00384845	$1 \cdot 10^9$	$2\sqrt{2}$	225	$-1/\sqrt{2}$	$-1/\sqrt{2}$
4	0.00384845	$1 \cdot 10^9$	$\sqrt{5}$	63.4349	$1/\sqrt{5}$	$2/\sqrt{5}$

3. táblázat. Elemekhez tartozó mennyiségek

Ezen adatok ismeretében az elemek merevségi mátrixai előállíthatóak. Az elem merevségi mátrix általános alakja:

$$\boldsymbol{K}^{\mathrm{e}} = \frac{A^{\mathrm{e}}E^{\mathrm{e}}}{L^{\mathrm{e}}}\begin{bmatrix} \cos^2\alpha^{\mathrm{e}} & \cos\alpha^{\mathrm{e}}\cdot\sin\alpha^{\mathrm{e}} & -\cos^2\alpha^{\mathrm{e}} & -\cos\alpha^{\mathrm{e}}\cdot\sin\alpha^{\mathrm{e}} \\ \cos\alpha^{\mathrm{e}}\cdot\sin\alpha^{\mathrm{e}} & \sin^2\alpha^{\mathrm{e}} & -\cos\alpha^{\mathrm{e}}\cdot\sin\alpha^{\mathrm{e}} & -\sin^2\alpha^{\mathrm{e}} \\ -\cos^2\alpha^{\mathrm{e}} & -\cos\alpha^{\mathrm{e}}\cdot\sin\alpha^{\mathrm{e}} & \cos^2\alpha^{\mathrm{e}} & \cos\alpha^{\mathrm{e}}\cdot\sin\alpha^{\mathrm{e}} \\ -\cos\alpha^{\mathrm{e}}\cdot\sin\alpha^{\mathrm{e}} & -\sin^2\alpha^{\mathrm{e}} & \cos\alpha^{\mathrm{e}}\cdot\sin\alpha^{\mathrm{e}} & \sin^2\alpha^{\mathrm{e}} \end{bmatrix}.$$

Az egyes elemek merevségi mátrixait megkapjuk a behelyettesítések után:

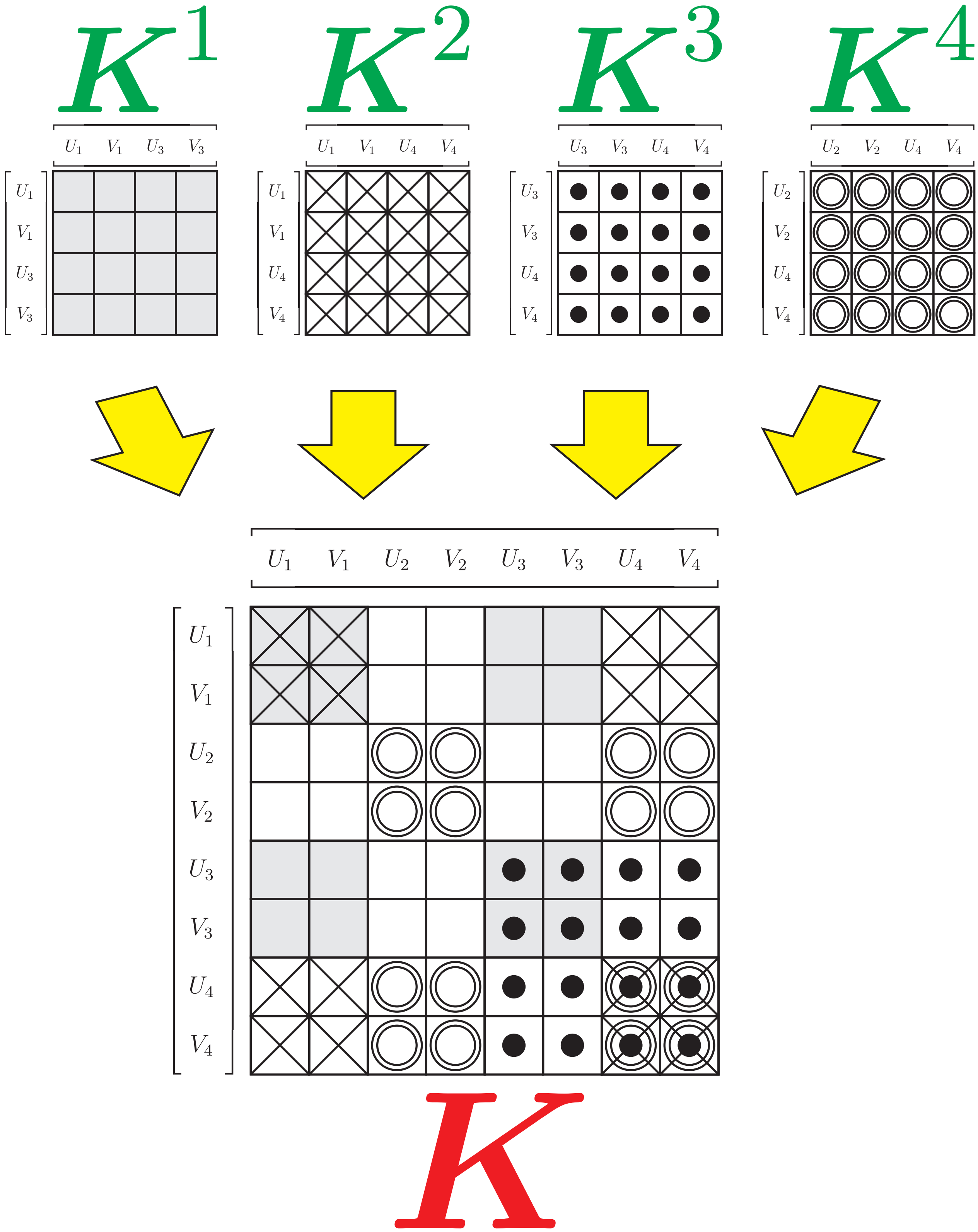
$$\boldsymbol{K}^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5.25 & 0. & -5.25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5.25 & 0 & 5.25 \end{bmatrix} \times 10^6\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}, \tag{3}$$

$$\boldsymbol{K}^2 = \begin{bmatrix} 3.71231 & -3.71231 & -3.71231 & 3.71231 \\ -3.71231 & 3.71231 & 3.71231 & -3.71231 \\ -3.71231 & 3.71231 & 3.71231 & -3.71231 \\ 3.71231 & -3.71231 & -3.71231 & 3.71231 \end{bmatrix} \times 10^6\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}, \tag{4}$$

$$\boldsymbol{K}^3 = \begin{bmatrix} 0.680316 & 0.680316 & -0.680316 & -0.680316 \\ 0.680316 & 0.680316 & -0.680316 & -0.680316 \\ -0.680316 & -0.680316 & 0.680316 & 0.680316 \\ -0.680316 & -0.680316 & 0.680316 & 0.680316 \end{bmatrix} \times 10^6\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}, \tag{5}$$

$$\boldsymbol{K}^4 = \begin{bmatrix} 0.344216 & 0.688432 & -0.344216 & -0.688432 \\ 0.688432 & 1.37686 & -0.688432 & -1.37686 \\ -0.344216 & -0.688432 & 0.344216 & 0.688432 \\ -0.688432 & -1.37686 & 0.688432 & 1.37686 \end{bmatrix} \times 10^6\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}. \tag{6}$$

A globális merevségi mátrix összeállításánál úgy kell eljárnunk, hogy egy adott elem merevségi mátrixának elemei a hozzá tartozó szabadsági fokoknak megfelelő helyekre kerüljenek. A globális merevségi mátrix összeállítását a 3. ábra szemlélteti.



3. ábra. A globális merevségi mátrix összeállítása

A globális merevségi mátrix alakja:

$$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} 3.71231 & -3.71231 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3.71231 & 3.71231 \\ -3.71231 & 8.96231 & 0 & 0 & 0 & -5.25 & 3.71231 & -3.71231 \\ 0 & 0 & 0.344216 & 0.688432 & 0 & 0 & -0.344216 & -0.688432 \\ 0 & 0 & 0.688432 & 1.37686 & 0 & 0 & -0.688432 & -1.37686 \\ 0 & 0. & 0 & 0 & 0.680316 & 0.680316 & -0.680316 & -0.680316 \\ 0 & -5.25 & 0 & 0 & 0.680316 & 5.93032 & -0.680316 & -0.680316 \\ -3.71231 & 3.71231 & -0.344216 & -0.688432 & -0.680316 & -0.680316 & 4.73684 & -2.34356 \\ 3.71231 & -3.71231 & -0.688432 & -1.37686 & -0.680316 & -0.680316 & -2.34356 & 5.76949 \end{bmatrix} \times 10^6 \ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}. \tag{7}$$

A globális tehervektor elemeinél azt tudjuk, hogy a 4-es csomópont terheletlen, valamint a 3-as csomópontban adódik át a G erő adott szögben. Vagyis $\boldsymbol{F}$-ben az alábbi komponenseket ismerjük:

$$F_{4x} = 0, \tag{8}$$

$$F_{4y} = 0, \tag{9}$$

$$F_{3x} = G \cdot \sin\beta = 6000 \cdot \sin 60^\circ = 3000\sqrt{3} = 5196.15 \text{ N}, \tag{10}$$

$$F_{3y} = -G \cdot \cos\beta = -6000 \cdot \cos 60^\circ = -3000 \text{ N}. \tag{11}$$

Tehát a globális tehervektor alakja:

$$\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ F_{2x} \\ F_{2y} \\ F_{3x} \\ F_{3y} \\ F_{4x} \\ F_{4y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ F_{2x} \\ F_{2y} \\ 5196.15 \\ -3000 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{12}$$

ahol F_{1x}, F_{1y}, F_{2x} és F_{2y} komponensek a még ismeretlen reakcióerők.

A szerkezet megtámasztásából adódik, hogy az 1-es és 2-es csuklók elmozdulása zérus. Ebből következik, hogy a végeselemes modell peremfeltételei:

$$U_1 = V_1 = U_2 = V_2 = 0. \tag{13}$$

A globális merevségi egyenletből az ezekhez a szabadsági fokokhoz tartozó sorokat és oszlopokat kell törölnünk ahhoz, hogy megkapjuk a kondenzált merevségi egyenletet, melynek alakja:

$$10^6 \times \begin{bmatrix} 0.680316 & 0.680316 & -0.680316 & -0.680316 \\ 0.680316 & 5.93032 & -0.680316 & -0.680316 \\ -0.680316 & -0.680316 & 4.73684 & -2.34356 \\ -0.680316 & -0.680316 & -2.34356 & 5.76949 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_3 \\ V_3 \\ U_4 \\ V_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5196.15 \\ -3000 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{14}$$

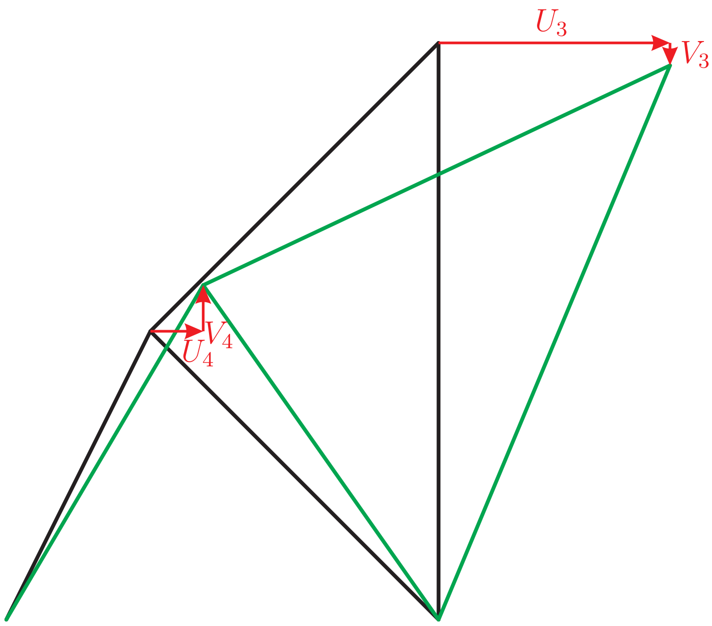
A kondenzált merevségi egyenlet megoldása:

$$\begin{bmatrix} U_3 \\ V_3 \\ U_4 \\ V_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0160637 \\ -0.00156117 \\ 0.00366563 \\ 0.00319906 \end{bmatrix}. \tag{15}$$

Tehát a globális csomóponti elmozdulásvektor:

$$\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.0160637 \\ -0.00156117 \\ 0.00366563 \\ 0.00319906 \end{bmatrix}. \tag{16}$$

$\boldsymbol{U}$ ismeretében ábrázolható a csomópontok új koordinátája. A 4. ábra a csomóponti elmozdulások 100×-os nagyításával szemlélteti a tartószerkezet deformált alakját.



4. ábra. A deformált alak szemléltetése 100×-os nagyításban

$\boldsymbol{U}$ ismeretében már számíthatóak az $\boldsymbol{F}$ ismeretlen komponensei, a reakcióerők:

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{K}\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} -1732.05 \\ 9928.2 \\ -3464.1 \\ -6928.2 \\ 5196.15 \\ -3000. \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{17}$$

Tehát a reakcióerők értékei:

$$F_{1x} = -1732.05 \text{ N}, \tag{18}$$
$$F_{1y} = 9928.2 \text{ N}, \tag{19}$$
$$F_{2x} = -3464.1 \text{ N}, \tag{20}$$
$$F_{2y} = -6928.2 \text{ N}. \tag{21}$$

Az egyes rúdelemek hosszirányú alakváltozása számítható a csomóponti elmozdulásaikból:

$$\varepsilon^1 = \frac{(U_3 - U_1)\cdot \cos\alpha^1 + (V_3 - V_1)\cdot \sin\alpha^1}{L^1} = -0.000390293, \tag{22}$$

$$\varepsilon^2 = \frac{(U_4 - U_1)\cdot \cos\alpha^2 + (V_4 - V_1)\cdot \sin\alpha^2}{L^2} = -0.000116642, \tag{23}$$

$$\varepsilon^3 = \frac{(U_4 - U_3)\cdot \cos\alpha^3 + (V_4 - V_3)\cdot \sin\alpha^3}{L^3} = 0.00190946, \tag{24}$$

$$\varepsilon^4 = \frac{(U_4 - U_2)\cdot \cos\alpha^4 + (V_4 - V_2)\cdot \sin\alpha^4}{L^4} = 0.00201275. \tag{25}$$

Az alakváltozások ismeretében a rudakban keletkező normálfeszültségek is számíthatóak:

$$\sigma^1 = E^1 \cdot \varepsilon^1 = 210 \cdot 10^9 \cdot (-0.00156117) = -81.9615 \text{ MPa}, \tag{26}$$

$$\sigma^2 = E^2 \cdot \varepsilon^2 = 210 \cdot 10^9 \cdot (-0.000329914) = -24.4949 \text{ MPa}, \tag{27}$$

$$\sigma^3 = E^3 \cdot \varepsilon^3 = 1 \cdot 10^9 \cdot (0.00540077) = 1.90946 \text{ MPa}, \tag{28}$$

$$\sigma^4 = E^4 \cdot \varepsilon^4 = 1 \cdot 10^9 \cdot (0.00450064) = 2.01275 \text{ MPa}. \tag{29}$$