
Példa: Tartó lehajlásfüggvényének meghatározása a Rayleigh–Ritz-féle módszer segítségével

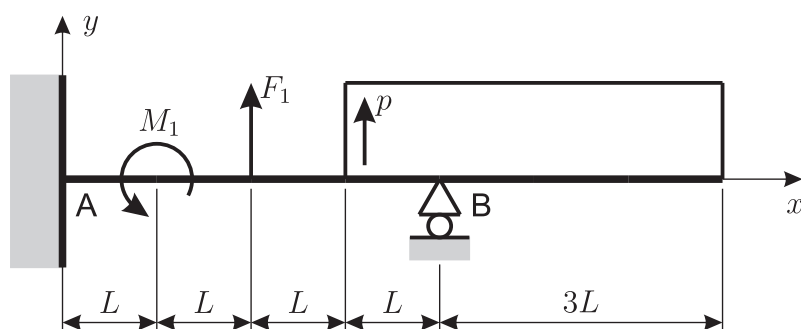
Készítette: Dr. Kossa Attila (kossa@mm.bme.hu)

BME, Műszaki Mechanikai Tanszék

2013. szeptember 23.

Javítva: 2013.10.07.

Határozzuk meg az alábbi tartó súlypontvonalának eltolódását leíró $v(x)$ függvényt (vagyis a "lehajlásfüggvényt") a Rayleigh–Ritz-féle módszer alkalmazásával. A tartó állandó keresztmetszetű, a keresztmetszet profilja d átmérőjű kör. Elsőként az elsőrendű közelítéssel határozzuk meg a lehajlásfüggvényt, majd vizsgáljuk meg, hogy a közelítés fokszámának növelésével hogyan változik az eredmény.



Adatok:

$$L = 0.5 \text{ m}$$

$$d = 30 \text{ mm}$$

$$E = 210 \text{ GPa}$$

$$\nu = 0,3$$

$$F_1 = -4500 \text{ N}$$

$$M_1 = 2 \text{ kNm}$$

$$p = -300 \text{ N/m}$$

1. ábra. A tartó geometriája és terhelése

ELMÉLETI ÖSSZEFOGLALÓ

A közelítőfüggvény egy lehetséges - és egyben kényelmes és praktikus - megadási formája, ha az alábbi polinom alakban írjuk fel:

$$v(x) = a_0 \cdot \omega(x) + a_1 \cdot \omega(x) \cdot x + \dots = \omega(x) \sum_{k=0}^n a_k x^k, \quad (1)$$

ahol n jelenti a közelítés fokszámát. A $\omega(x)$ egy olyan bázisfüggvény ami kielégíti az adott feladat kinematikai peremfeltételeit. Az ilyen alakú felírás esetén lehetőségünk van mátrixos alakban megadni a $v(x)$ -t:

$$v(x) = \mathbf{B}^T \mathbf{A} = \mathbf{A}^T \mathbf{B}, \quad (2)$$

ahol az $(n+1) \times 1$ -es \mathbf{A} és \mathbf{B} mátrixok alakja:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \omega(x) \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Az alakváltozási energia felírása során szükség lesz a $v(x)$ második deriváltjára, ami a

$$v''(x) = \mathbf{B}''^T \mathbf{A} = \mathbf{A}^T \mathbf{B}'' \quad (4)$$

összefüggéssel számítható.

Hajlító és nyíró igénybevételek által terhelt egyenes tartókban felhalmozódó alakváltozási energia két részből tevődik össze: az egyik a hajlító igénybevételből adódó tag; míg a másik a nyíró igénybevételből adódó rész. Rendszerint a nyírásból adódó részt elhanyagolhatjuk és csak a hajlító igénybevételből származó taggal számolunk:

$$U \approx U_{M_h}, \quad (5)$$

ahol az U_{M_h} felírása:

$$U_{M_h} = \frac{1}{2} \int_{(L)} \frac{M_h^2}{I_z E} dx. \quad (6)$$

Az $M_h(x)$ függvény és a $v(x)$ függvény között a rugalmas szál differenciálegyenlete teremt kapcsolatot:

$$v''(x) = -\frac{M_h(x)}{I_z E}. \quad (7)$$

Behelyettesítve a (6) kifejezésbe azt kapjuk, hogy

$$U = \frac{1}{2} \int_{(L)} I_z E (v'')^2 dx, \quad (8)$$

ami a mátrixos formalizmussal az alábbi alakban írható fel:

$$U = \frac{1}{2} \int_{(L)} I_z E (\mathbf{A}^T \mathbf{B}'') (\mathbf{B}''^T \mathbf{A}) dx = \frac{1}{2} \mathbf{A}^T \left(\int_{(L)} I_z E \mathbf{B}'' \mathbf{B}''^T dx \right) \mathbf{A}. \quad (9)$$

Bevezetve az

$$\mathbf{S} = \int_{(L)} I_z E \mathbf{B}'' \mathbf{B}''^T dx \quad (10)$$

mennyiséget, az U kifejezése az

$$U = \frac{1}{2} \mathbf{A}^T \mathbf{S} \mathbf{A} \quad (11)$$

alakra hozható.

A külső erők munkája három rész összegéből adódik: n_F számú helyen működő koncentrált erők munkájából; n_M számú helyen ható koncentrált erőpárok (nyomatékok) munkájából; x_a és x_b tartományok között¹ lévő $p(x)$ intenzitású megoszló erőrendszer munkájából. Ezen mennyiségeket az alábbiak szerint számítjuk:

$$W_F = \sum_{i=1}^{n_F} F_i v(x_i) = \mathbf{A}^T \sum_{i=1}^{n_F} F_i \mathbf{B}(x_i), \quad (12)$$

$$W_M = \sum_{j=1}^{n_M} M_j v'(x_j) = \mathbf{A}^T \sum_{j=1}^{n_M} M_j \mathbf{B}'(x_j), \quad (13)$$

$$W_p = \int_{x_a}^{x_b} p(x) v(x) dx = \mathbf{A}^T \int_{x_a}^{x_b} p(x) \mathbf{B}(x) dx. \quad (14)$$

Tehát

$$W = W_F + W_M + W_p \quad (15)$$

$$W = \mathbf{A}^T \sum_{i=1}^{n_F} F_i \mathbf{B}(x_i) + \mathbf{A}^T \sum_{j=1}^{n_M} M_j \mathbf{B}'(x_j) + \mathbf{A}^T \int_{x_a}^{x_b} p(x) \mathbf{B}(x) dx. \quad (16)$$

Bevezetve a

$$\mathbf{Q} = \sum_{i=1}^{n_F} F_i \mathbf{B}(x_i) + \sum_{j=1}^{n_M} M_j \mathbf{B}'(x_j) + \int_{x_a}^{x_b} p(x) \mathbf{B}(x) dx \quad (17)$$

mennyiséget, a W kifejezése az alábbi egyszerű alakban írható fel:

$$W = \mathbf{A}^T \mathbf{Q}. \quad (18)$$

¹Természetesen itt is lehet több különböző tartományt megadni. Lehetséges, hogy több helyen működik különböző intenzitású megoszló erőrendszer.

Mindezek után megadható a teljes potenciális energia:

$$\pi = U - W, \tag{19}$$

$$\pi = \frac{1}{2} \mathbf{A}^T \mathbf{S} \mathbf{A} - \mathbf{A}^T \mathbf{Q}. \tag{20}$$

A megoldásnál a π -nek az a_i paraméterek szerinti első variációja zérus:

$$\delta\pi = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{S} \mathbf{A} - \mathbf{Q} = \mathbf{0}, \tag{21}$$

amiből pedig a keresett \mathbf{A} kifejezhető:

$$\mathbf{A} = \mathbf{S}^{-1} \mathbf{Q}. \tag{22}$$

ehát a keresett elmozdulásfüggvény megadható az alábbi formában:

$$v(x) = \mathbf{B}^T \mathbf{S}^{-1} \mathbf{Q}. \tag{23}$$

MEGOLDÁS

A tartó kinematikai peremfeltételei:

$$v(0) = 0, \quad v'(0) = 0, \quad v(4L) = 0. \quad (24)$$

A keresett függvénynek olyannak kell lennie, hogy a fenti peremfeltételeket kielégítse. A leg-egyszerűbb polinom alakú függvényválasztás ami ezt teljesíti:

$$\omega(x) = x^2(x - 4L). \quad (25)$$

Elsőrendű ($n = 1$) közelítés esetén:

$$v(x) = a_0 \cdot \omega(x) + a_1 \cdot \omega(x) \cdot x = \omega(x)(a_0 + a_1 \cdot x), \quad (26)$$

ami felírható mátrixos alakban az alábbi formában:

$$v(x) = \mathbf{B}^T \mathbf{A} = \mathbf{A}^T \mathbf{B}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \omega(x) \begin{bmatrix} 1 \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^2(x - 4L) \\ x^3(x - 4L) \end{bmatrix}. \quad (27)$$

A \mathbf{B} vektor x -szerinti első és második deriváltjai:

$$\mathbf{B}' = \begin{bmatrix} x(3x - 8L) \\ 4x^2(x - 3L) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}'' = \begin{bmatrix} 6x - 8L \\ 12x(x - 2L) \end{bmatrix}. \quad (28)$$

A \mathbf{B}'' vektorból képzett $\mathbf{B}'' \mathbf{B}''^T$ diadikus szorzat az alábbi mátrixot szolgáltatja:

$$\mathbf{B}'' \mathbf{B}''^T = \begin{bmatrix} (6x - 8L)^2 & 12x(6x - 8L)(x - 2L) \\ 12x(6x - 8L)(x - 2L) & 144x^2(x - 2L)^2 \end{bmatrix}. \quad (29)$$

Az \mathbf{S} mátrix alakja jelen esetben:

$$\mathbf{S} = I_z E \int_0^{7L} \begin{bmatrix} (6x - 8L)^2 & 12x(6x - 8L)(x - 2L) \\ 12x(6x - 8L)(x - 2L) & 144x^2(x - 2L)^2 \end{bmatrix} dx, \quad (30)$$

$$\mathbf{S} = I_z E \begin{bmatrix} 2 \cdot 212 \cdot L^3 & 20 \cdot 482 \cdot L^4 \\ 20 \cdot 482 \cdot L^4 & \frac{1 \cdot 020 \cdot 768}{5} \cdot L^5 \end{bmatrix}, \quad (31)$$

melynek inverze:

$$\mathbf{S}^{-1} = \frac{1}{I_z E} \begin{bmatrix} 744/(116 \ 893 \ L^3) & -1 \ 045/(1 \ 636 \ 502 \ L^4) \\ -1 \ 045/(1 \ 636 \ 502 \ L^4) & 395/(5 \ 727 \ 757 \ L^5) \end{bmatrix}. \quad (32)$$

A külső erők munkája három részből tevődik össze: Az $x = L$ helyen működő M_1 nyomaték munkájából; az $x = 2L$ helyen lévő F_1 erő munkájából; a $3L \leq x \leq 7L$ tartományon ható állandó p intenzitású megoszló erőrendszerből.

$$W_M = M_1 \cdot v'(L) = M_1 \mathbf{A}^T \mathbf{B}'(L) = \mathbf{A}^T M_1 \mathbf{B}'(L), \quad (33)$$

$$W_F = F_1 \cdot v(2L) = F_1 \mathbf{A}^T \mathbf{B}(2L) = \mathbf{A}^T F_1 \mathbf{B}(2L), \quad (34)$$

$$W_p = \int_{3L}^{7L} p_0 v dx = \int_{3L}^{7L} p(x) \mathbf{A}^T \mathbf{B}(x) dx = \mathbf{A}^T \int_{3L}^{7L} p \mathbf{B}(x) dx. \quad (35)$$

Ebből következik, hogy a \mathbf{Q} vektor alakja:

$$\mathbf{Q} = M_1 \mathbf{B}'(L) + F_1 \mathbf{B}(2L) + \int_{3L}^{7L} p \mathbf{B}(x) dx. \quad (36)$$

$$\mathbf{Q} = M_1 \begin{bmatrix} L(3L-8L) \\ 4L^2(L-3L) \end{bmatrix} + F_1 \begin{bmatrix} (2L)^2(2L-4L) \\ (2L)^3(2L-4L) \end{bmatrix} + p_0 \int_{3L}^{7L} \begin{bmatrix} x^2(x-4L) \\ x^3(x-4L) \end{bmatrix} dx, \quad (37)$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -5M_1L^2 \\ -8M_1L^3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -8F_1L^3 \\ -16F_1L^4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{476pL^4}{3} \\ \frac{4964pL^5}{5} \end{bmatrix}. \quad (38)$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -5M_1L^2 - 8F_1L^3 + \frac{476pL^4}{3} \\ -8M_1L^3 - 16F_1L^4 + \frac{4964pL^5}{5} \end{bmatrix}. \quad (39)$$

Tehát a keresett paraméterek:

$$\mathbf{A} = \mathbf{S}^{-1} \mathbf{Q} = \frac{1}{I_z E} \begin{bmatrix} -33 \ 304 \ F_1L+21 \ 860 \ M_1-307 \ 598 \ L^2p \\ \frac{818 \ 251 \ L}{34 \ 366 \ 542 \ L^2} \\ 137 \ 640 \ F_1L+90 \ 765 \ M_1+-1 \ 129 \ 004 \ L^2p \end{bmatrix}. \quad (40)$$

Ennek ismeretében a $v(x)$ függvény már felírható paraméteresen:

$$v(x) = \mathbf{B}^T \mathbf{S}^{-1} \mathbf{Q},$$

$$v(x) = [x^2(x-4L), x^3(x-4L)] \cdot \frac{1}{I_z E} \begin{bmatrix} -33 \ 304 \ F_1L+21 \ 860 \ M_1-307 \ 598 \ L^2p \\ \frac{818 \ 251 \ L}{34 \ 366 \ 542 \ L^2} \\ 137 \ 640 \ F_1L+90 \ 765 \ M_1+-1 \ 129 \ 004 \ L^2p \end{bmatrix}, \quad (41)$$

$$v(x) = -x^2(x-4L) \frac{33 \ 304 \ F_1L + 21 \ 860 \ M_1 - 307 \ 598 \ L^2p}{818 \ 251 \ L} + x^3(x-4L) \frac{137 \ 640 \ F_1L + 90 \ 765 \ M_1 + -1 \ 129 \ 004 \ L^2p}{34 \ 366 \ 542 \ L^2}. \quad (42)$$

A keresztmetszet z -tengelyre (hajlítás tengelyére) számított másodrendű nyomatéka:

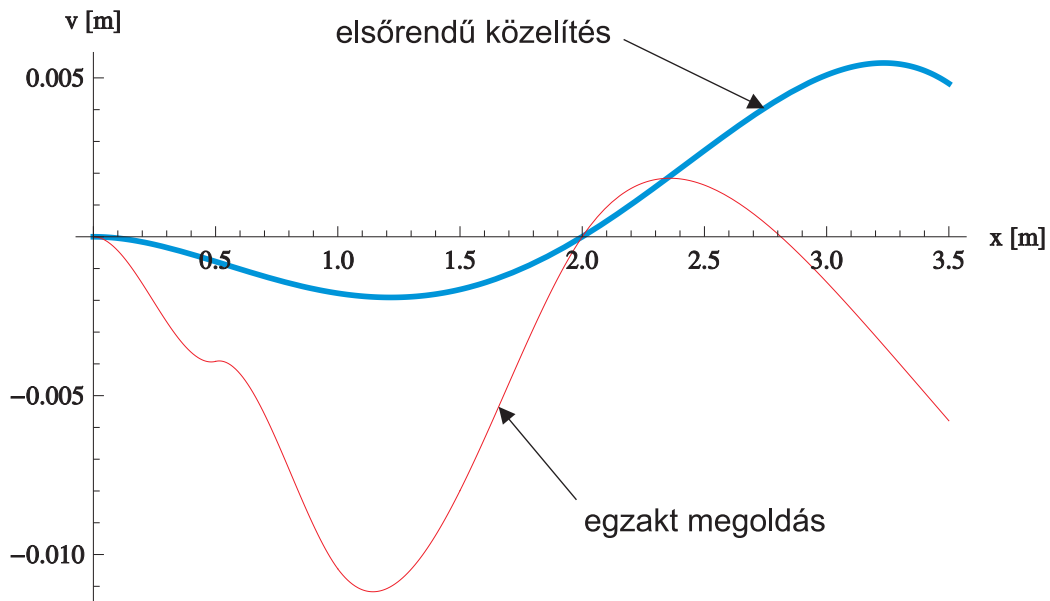
$$I_z = \frac{d^4 \pi}{64} = \frac{(0.03)^4 \pi}{64} = 3,97608 \times 10^{-8} \text{ m}^4. \quad (43)$$

A megadatok adatok behelyettesítése után v -re az alábbi alakot kapjuk:

$$v(x) = -0,0047681 x^2 + 0,00359637 x^3 - 0,000606159 x^4. \quad (44)$$

A fenti függvénybe x -t m -ben behelyettesítve a v -t is m -ben kapjuk.

Az elsőrendű közelítéssel kapott megoldás a 2. ábrán látható, ahol a pontos megoldás is szerepel. A pontos megoldás előállítható a rugalmas szál differenciálegyenletének megoldásával, amit a dokumentum végén található fejezet tartalmaz.

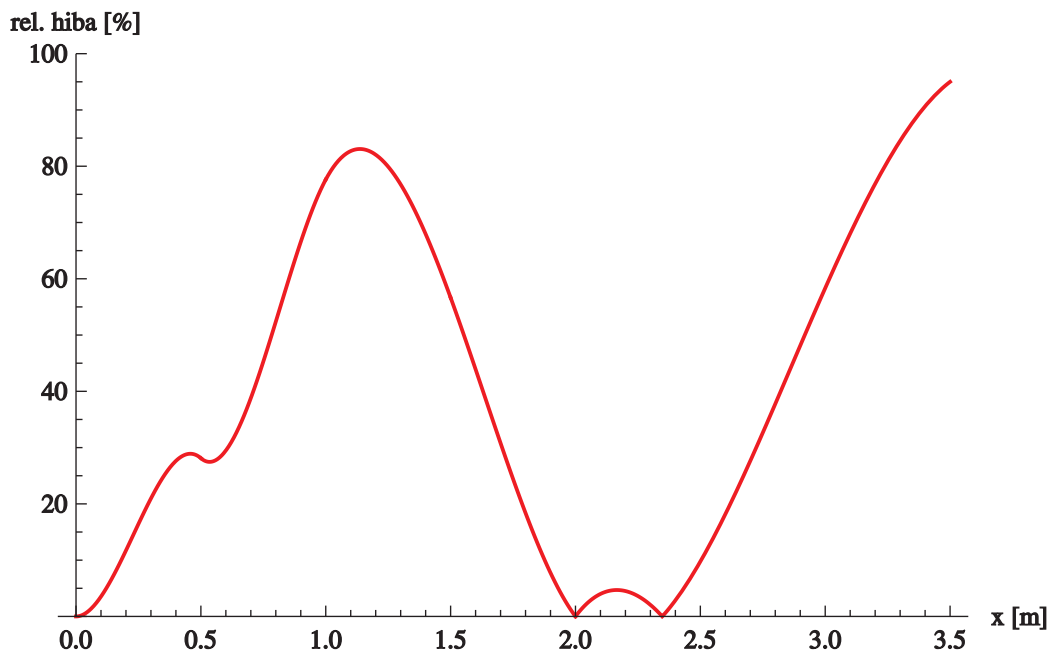


2. ábra. Az elsőrendű közelítéssel kapott megoldás

A tartó maximális lehajlása az egzakt megoldás esetén $v_{\max} = -0,0111712$ m. Ennek felhasználásával képezhetünk egy (relatív) hiba mérőszámot, amit úgy kapunk, hogy a közelítéssel kapott eredmény és a pontos megoldás különbségét elosztjuk a v_{\max} -szal és vesszük az abszolút értékét. %-ban kifejezve:

$$\text{rel. hiba} = \left| \frac{v_{\text{kozelítés}}(x) - v_{\text{egzakt}}(x)}{v_{\max}} \right| \times 100 \text{ [\%]}. \quad (45)$$

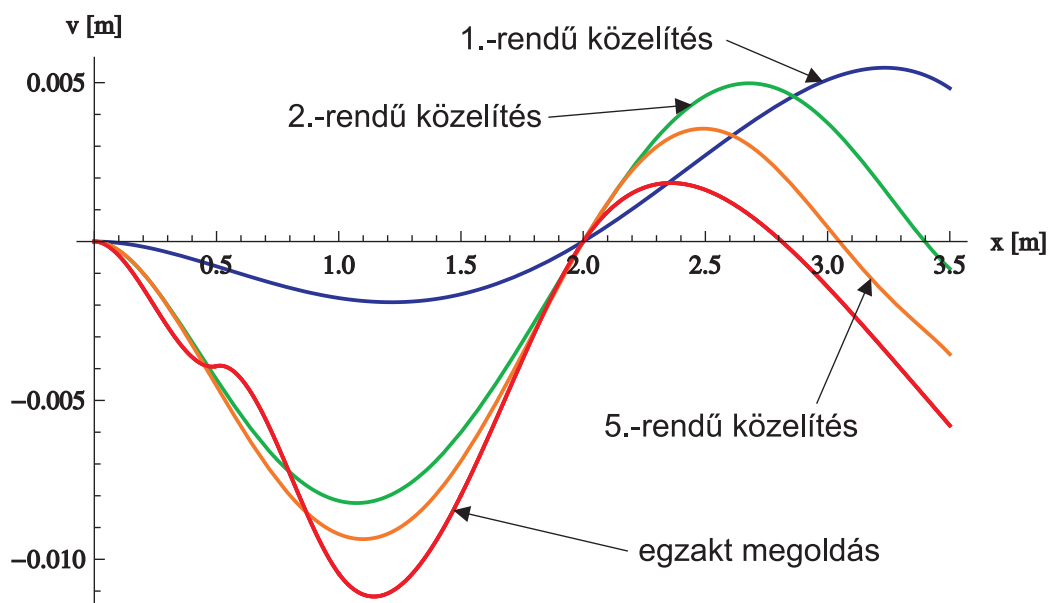
Az elsőrendű közelítés esetén a hiba változását a tartó mentén a 3. ábra szemlélteti.



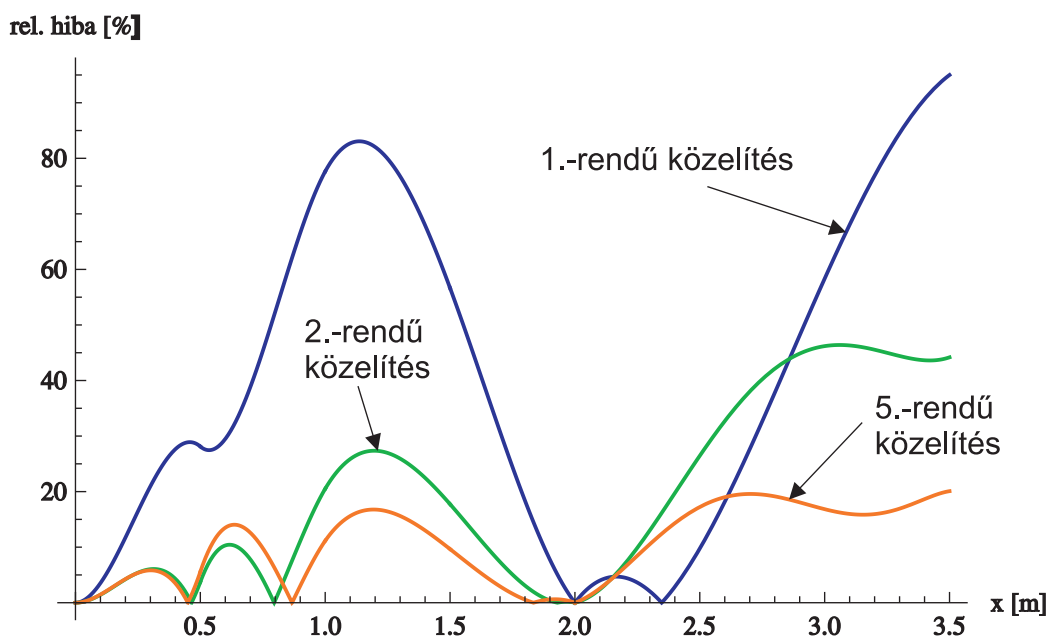
3. ábra. Az elsőrendű közelítés hibája

A fenti gondolatmenetet követve előállítható a magasabbrendű közelítések esetén is a megoldás. Szemléltetés végett, a másodrendű és ötödrendű közelítéssel kapott megoldásokat és azok

hibáit szemléltetik a 4. és 5. ábrák.



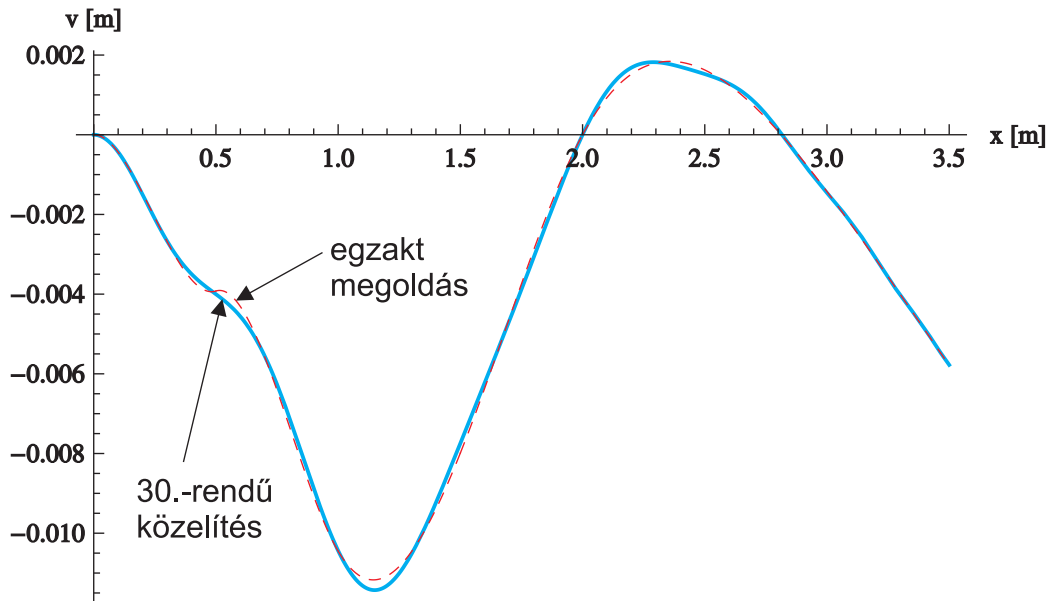
4. ábra. Magasabbrendű közelítéssel kapott megoldások



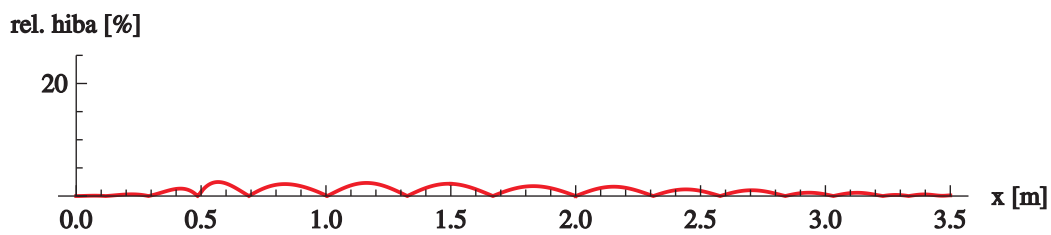
5. ábra. Magasabbrendű közelítéssel kapott megoldások hibája

Az eredményekből arra a megállapításra juthatunk, hogy a vizsgált példánál az elsőrendű közelítés még viszonylag nagy hibákat okoz, de a közelítés fokszámának növelésével egyre pontosabb eredményt kapunk. A 6. ábra szemlélteti a 30.-rendű közelítéssel kapott megoldást, a 7. ábra pedig ennek hibáját.

A rugalmas szál differenciálegyenletének megoldásával kapott egzakt megoldás szakaszonként különböző függvényekből tevődik össze, melyeket a jelen példánál nem tudunk egy folytonos függvénnyel leírni a teljes tartományon.



6. ábra. A 30.-rendű közelítéssel kapott megoldás



7. ábra. A 30.-rendű közelítéssel kapott megoldás hibája

Fontos kihangsúlyozni azt is, hogy a közelítő megoldással kapott esetekben a hajlítónyomatéki függvénynek is van hibája ami pedig azt eredményezi, hogy nem mindenhol teljesül a statikai egyensúly. Ennek illusztrálására vizsgáljuk meg, hogy mekkora értéket ad a hajlítónyomaték értékére az elsőrendű közelítés. A (44) megoldásból következik, hogy a hajlítónyomatéki függvény az elsőrendű közelítés esetén

$$M_h(x) = -I_z E v''(x) = I_z E (0,00953619 - 0,0215782 x + 0,00727391 x^2), \quad (46)$$

$$M_h(x) = 79,625 - 180,173 x + 6,7354 x^2, \quad (47)$$

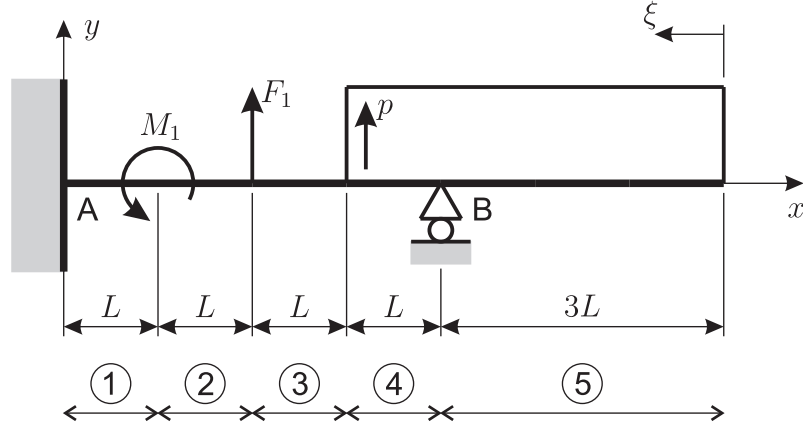
melynek értéke az $x = 7L$ helyen:

$$M_h(7L) = 193,029 \text{ Nm}. \quad (48)$$

A szabad végen viszont a hajlítónyomaték értéke zérus kellene, hogy legyen!

EGZAKT MEGOLDÁS

Ez a rész röviden összefoglalja az egzakt lehajlásfüggvény előállításának lépéseit. A számításhoz a Wolfram Mathematica szoftvert használtuk fel.



8. ábra. A tartó felosztása

A tartó hajlítónyomatéki igénybevételi függvényeinek felírásához a tartót 5 részre kell bontanunk, amit a 8. ábra szemléltet. Célszerű a ξ koordináta függvényében felírni a hajlítónyomatéki függvényeket:

$$M_{h5}(\xi) = -\frac{p}{2}\xi^2, \quad (49)$$

$$M_{h4}(\xi) = M_{h5}(\xi) - F_B(\xi - 3L), \quad (50)$$

$$M_{h3}(\xi) = -4Lp(\xi - 2L) - F_B(\xi - 3L), \quad (51)$$

$$M_{h2}(\xi) = M_{h3}(\xi) - F_1(\xi - 4L), \quad (52)$$

$$M_{h1}(\xi) = M_{h2}(\xi) - M_1. \quad (53)$$

Az öt részre felírt rugalmas szál differenciálegyenlete:

$$v_1''(\xi) = -\frac{M_{h1}(\xi)}{I_z E}, \quad (54)$$

$$v_2''(\xi) = -\frac{M_{h2}(\xi)}{I_z E}, \quad (55)$$

$$v_3''(\xi) = -\frac{M_{h3}(\xi)}{I_z E}, \quad (56)$$

$$v_4''(\xi) = -\frac{M_{h4}(\xi)}{I_z E}, \quad (57)$$

$$v_5''(\xi) = -\frac{M_{h5}(\xi)}{I_z E}, \quad (58)$$

ahol a $v_1(\xi) \dots v_5(\xi)$ függvények jelentik az egyes szakaszokra érvényes lehajlásfüggvényeket. Amennyiben a még ismeretlen F_B reakcióerőt külső aktív terhelésnek tekintjük, és egyelőre eltekintünk attól, hogy a B támasz helyén tudjuk, hogy a lehajlás zérus, akkor az alábbi két peremfeltétel tartozik a feladathoz:

$$v_1(7L) = 0, \quad (59)$$

$$v_1'(7L) = 0. \quad (60)$$

Ehhez tartoznak még az illesztési feltételek, amik abból adódnak, hogy a szakaszok találkozásánál a lehajlásfüggvénynek és annak deriváltjának (a szögelfordulásnak) azonosnak kell lennie a folytonosság miatt. Az illesztési feltételek jelen példánál:

$$v_1(6L) = v_2(6L), \quad v_1'(6L) = v_2'(6L), \quad (61)$$

$$v_2(5L) = v_3(5L), \quad v_2'(5L) = v_3'(5L), \quad (62)$$

$$v_3(4L) = v_4(4L), \quad v_3'(4L) = v_4'(4L), \quad (63)$$

$$v_4(3L) = v_5(3L), \quad v_4'(3L) = v_5'(3L). \quad (64)$$

A szakaszokra felírt differenciálegyenletek és a fenti perem- és illesztési feltételek egy differenciálegyenlet-rendszert alkotnak, melynek lehetséges megadását a 9. ábra mutatja.

```

ln[1]= Mh5 = -p * xi^2 / 2;
      Mh4 = Mh5 - FB * (xi - 3 L);
      Mh3 = -p (4 L) (xi - 2 L) - FB (xi - 3 L);
      Mh2 = Mh3 - F1 (xi - 5 L);
      Mh1 = Mh2 - M1;

ln[6]= e1 = D[v1[xi], {xi, 2}] == -Mh1 / IE;
      e2 = D[v2[xi], {xi, 2}] == -Mh2 / IE;
      e3 = D[v3[xi], {xi, 2}] == -Mh3 / IE;
      e4 = D[v4[xi], {xi, 2}] == -Mh4 / IE;
      e5 = D[v5[xi], {xi, 2}] == -Mh5 / IE;

ln[11]= bc1 = v1[7 L] == 0;
      bc2 = v1'[7 L] == 0;
      bc3 = v1[6 L] == v2[6 L];
      bc4 = v1'[6 L] == v2'[6 L];
      bc5 = v2[5 L] == v3[5 L];
      bc6 = v2'[5 L] == v3'[5 L];
      bc7 = v3[4 L] == v4[4 L];
      bc8 = v3'[4 L] == v4'[4 L];
      bc9 = v4[3 L] == v5[3 L];
      bc10 = v4'[3 L] == v5'[3 L];

```

9. ábra. A differenciálegyenlet-rendszer megadása

A differenciálegyenlet megoldást a 10. ábra tartalmazza. A megoldásban még szerepel az ismeretlen F_B reakcióerő. Ennek értékét megkapjuk, ha például a $v_5(3L) = 0$ egyenletet megoldjuk, amit a 11. ábra szemléltet. Az F_B -re kapott kifejezést visszahelyettesítve az eredeti megoldásba, megkapjuk a keresett lehajlásfüggvényeket paraméteresen a ξ koordináta függvényében, melyek a 12. ábrán láthatóak.

```

In[21]= solution =
FullSimplify[
DSolve[{e1, e2, e3, e4, e5, bc1, bc2, bc3, bc4, bc5, bc6, bc7, bc8, bc9, bc10},
{v1, v2, v3, v4, v5},  $\xi$ ]][[1]]
Out[21]= {v1  $\rightarrow$  Function[{ $\xi$ },  $\frac{1}{6 IE} (-49 F1 L^3 + 245 FB L^3 + 147 L^2 M1 + 1568 L^4 p + 63 F1 L^2 \xi - 21 FB L^2 \xi -$ 
42 LM1  $\xi - 252 L^3 p \xi - 15 F1 L \xi^2 - 9 FB L \xi^2 + 3 M1 \xi^2 - 24 L^2 p \xi^2 + F1 \xi^3 + FB \xi^3 + 4 L p \xi^3)$ ],
v2  $\rightarrow$  Function[{ $\xi$ },  $\frac{1}{6 IE} (-49 F1 L^3 + 245 FB L^3 + 39 L^2 M1 + 1568 L^4 p + 63 F1 L^2 \xi -$ 
21 FB L^2  $\xi - 6 LM1 \xi - 252 L^3 p \xi - 15 F1 L \xi^2 - 9 FB L \xi^2 - 24 L^2 p \xi^2 + F1 \xi^3 + FB \xi^3 + 4 L p \xi^3)$ ],
v3  $\rightarrow$  Function[{ $\xi$ },  $\frac{1}{6 IE} (76 F1 L^3 + 245 FB L^3 + 39 L^2 M1 + 1568 L^4 p - 12 F1 L^2 \xi -$ 
21 FB L^2  $\xi - 6 LM1 \xi - 252 L^3 p \xi - 9 FB L \xi^2 - 24 L^2 p \xi^2 + FB \xi^3 + 4 L p \xi^3)$ ],
v4  $\rightarrow$  Function[{ $\xi$ },  $\frac{1}{24 IE} (304 F1 L^3 + 980 FB L^3 + 156 L^2 M1 + 6528 L^4 p - 48 F1 L^2 \xi -$ 
84 FB L^2  $\xi - 24 LM1 \xi - 1264 L^3 p \xi - 36 FB L \xi^2 + 4 FB \xi^3 + p \xi^4)$ ],
v5  $\rightarrow$  Function[{ $\xi$ },  $\frac{1}{24 IE} (304 F1 L^3 + 1088 FB L^3 + 156 L^2 M1 + 6528 L^4 p -$ 
48 F1 L^2  $\xi - 192 FB L^2 \xi - 24 LM1 \xi - 1264 L^3 p \xi + p \xi^4)$ ]}]

```

10. ábra. A differenciálegyenlet-rendszer megoldása

```

In[22]= fb = FullSimplify[Solve[{v5[3 L] /. solution} == 0, FB]][[1]]
Out[22]= {FB  $\rightarrow \frac{1}{512} (-160 F1 - \frac{84 M1}{L} - 2817 L p)$ }

```

11. ábra. Az F_B értékének számítása

```
In[23]:= sol = FullSimplify[solution /. fb];
```

```
In[24]:= FullSimplify[v1[ξ] /. sol]
FullSimplify[v2[ξ] /. sol]
FullSimplify[v3[ξ] /. sol]
FullSimplify[v4[ξ] /. sol]
FullSimplify[v5[ξ] /. sol]
```

$$\text{Out[24]} = \frac{(-7L + \xi)^2 (1116 LM1 + 2299 L^3 p - 84 M1 \xi - 769 L^2 p \xi + 32 F1 L (-41 L + 11 \xi))}{3072 IE L}$$

$$\text{Out[25]} = \frac{1}{3072 IE L} (112651 L^5 p - 69867 L^4 p \xi + 756 LM1 \xi^2 - 84 M1 \xi^3 - 32 F1 L (41 L - 11 \xi) (-7 L + \xi)^2 + L^3 (-612 M1 + 13065 p \xi^2) - L^2 (1308 M1 \xi + 769 p \xi^3))$$

$$\text{Out[26]} = -\frac{1}{3072 IE L} (36 L^3 (8 F1 L + 17 M1) - 112651 L^5 p + 3 L^2 (928 F1 L + 436 M1 + 23289 L^2 p) \xi - 3 L (252 M1 + 5 L (96 F1 + 871 L p)) \xi^2 + (160 F1 L + 84 M1 + 769 L^2 p) \xi^3)$$

$$\text{Out[27]} = \frac{1}{3072 IE L} (3 L - \xi) (L^2 (-96 F1 L - 204 M1 + 48473 L^2 p) - 6 L (160 F1 L + 84 M1 + 3009 L^2 p) \xi + (160 F1 L + 84 M1 + 2433 L^2 p) \xi^2 - 128 L p \xi^3)$$

$$\text{Out[28]} = -\frac{(3 L - \xi) (96 F1 L^2 + 60 LM1 - 1445 L^3 p + 72 L^2 p \xi + 24 L p \xi^2 + 8 p \xi^3)}{192 IE}$$

12. ábra. A lehajlásfüggvények paraméteresen a ξ koordinátával megadva

Ha x függvényében szeretnénk felírni a megoldásokat, akkor ki kell cserélnünk a ξ változót a $\xi = 7L - x$ összefüggésnek megfelelően (13. ábra). A keresett lehajlásfüggvényeket a 14. ábra tartalmazza.

```
In[29]:= vx1 = FullSimplify[(v1[ξ] /. sol) /. {ξ → (7 L - x)}];
vx2 = FullSimplify[(v2[ξ] /. sol) /. {ξ → (7 L - x)}];
vx3 = FullSimplify[(v3[ξ] /. sol) /. {ξ → (7 L - x)}];
vx4 = FullSimplify[(v4[ξ] /. sol) /. {ξ → (7 L - x)}];
vx5 = FullSimplify[(v5[ξ] /. sol) /. {ξ → (7 L - x)}];
```

13. ábra. A ξ koordináta kicserélése x -re

In[34]= **vx1**

$$\text{Out[34]} = \frac{x^2 (528 LM1 - 3084 L^3 p + 32 F1 L (36 L - 11 x) + 84 M1 x + 769 L^2 p x)}{3072 IE L}$$

In[35]= **vx2**

$$\text{Out[35]} = \frac{-1536 L^3 M1 + 3072 L^2 M1 x - 12 L (-96 F1 L + 84 M1 + 257 L^2 p) x^2 + (-352 F1 L + 84 M1 + 769 L^2 p) x^3}{3072 IE L}$$

In[36]= **vx3**

$$\text{Out[36]} = \frac{1}{3072 IE L} (-512 L^3 (8 F1 L + 3 M1) + 3072 L^2 (2 F1 L + M1) x - 12 L (160 F1 L + 84 M1 + 257 L^2 p) x^2 + (160 F1 L + 84 M1 + 769 L^2 p) x^3)$$

In[37]= **vx4**

$$\text{Out[37]} = \frac{1}{3072 IE L} (4 L - x) (32 L^2 (-32 F1 L - 12 M1 + 81 L^2 p) + 8 L (160 F1 L + 84 M1 - 351 L^2 p) x + (-84 M1 + 5 L (-32 F1 + 51 L p)) x^2 - 128 L p x^3)$$

In[38]= **vx5**

$$\text{Out[38]} = \frac{(4 L - x) (96 F1 L^2 + 60 LM1 + 2979 L^3 p - 1584 L^2 p x + 192 L p x^2 - 8 p x^3)}{192 IE}$$

14. ábra. A lehajlásfüggvények paraméteresen az x koordinátával megadva

A numerikus értékek megadása után már kirajzoltatható a keresett lehajlásfüggvény alakja a teljes tartományon (15. ábra). A maximális lehajlás a harmadik szakaszon jelentkezik, értékét és helyét a Minimize paranccsal megkaphatjuk (16. ábra). A függvények numerikusan felírt alakjait a 17. ábra mutatja.

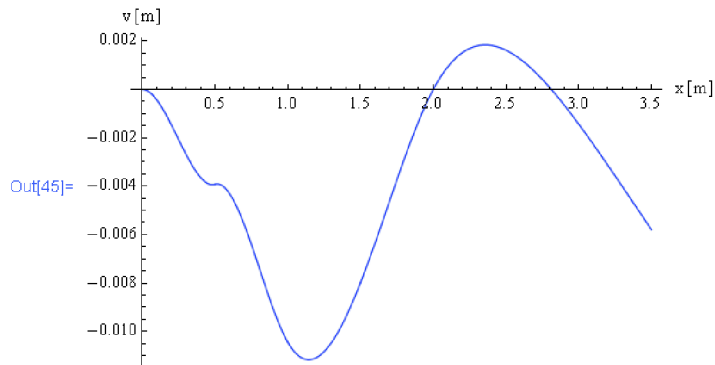
```

In[39]= L = 0.5; F1 = -4500; M1 = 2000; p = -300; IE =  $\frac{(0.03)^4 \pi}{64} * 210 * 10^9$ ;

In[40]= p1 = Plot[vx1, {x, 0, L}];
p2 = Plot[vx2, {x, L, 2 L}];
p3 = Plot[vx3, {x, 2 L, 3 L}];
p4 = Plot[vx4, {x, 3 L, 4 L}];
p5 = Plot[vx5, {x, 4 L, 7 L}];

In[45]= Show[{p1, p2, p3, p4, p5}, PlotRange -> All, AxesOrigin -> {0, 0},
  AxesLabel -> {"x [m]", "v [m]"}]

```



15. ábra. A lehajlásfüggvény alakja

```

In[46]= Minimize[vx3, x]
Out[46]= {-0.0111712, {x -> 1.14387}}

```

16. ábra. A minimum keresése a harmadik szakaszon

```

In[47]= Expand[vx1]
Expand[vx2]
Expand[vx3]
Expand[vx4]
Expand[vx5]

Out[47]=  $-0.0508646 x^2 + 0.0703554 x^3$ 

Out[48]=  $-0.029941 + 0.119764 x - 0.170628 x^2 + 0.0703554 x^3$ 

Out[49]=  $0.0598819 - 0.149705 x + 0.0988403 x^2 - 0.0194675 x^3$ 

Out[50]=  $0.0523031 - 0.129495 x + 0.0786301 x^2 - 0.0104852 x^3 - 0.00149705 x^4$ 

Out[51]=  $-0.199248 + 0.247832 x - 0.110033 x^2 + 0.0209587 x^3 - 0.00149705 x^4$ 

```

17. ábra. A lehajlásfüggvények alakja numerikusan felírva