

# Szimuláció alapú stabilitásvizsgálat állapotfüggő időkésésű modellekben

## Simulation based stability analysis in state-dependent delay

MARTINOVICH Kristóf<sup>1</sup>, Dr. BACHRATHY Dániel<sup>2</sup>

<sup>1</sup>PhD hallgató, BME Gépészmérnöki Kar Műszaki Mechanikai Tanszék (BME GPK MM),  
H-1111 Budapest, Műegyetem rkp. 3., [www.mm.bme.hu](http://www.mm.bme.hu), martinovich@mm.bme.hu

<sup>2</sup>Egyetemi docens, BME GPK MM, bachrathy@mm.bme.hu

### Abstract

*A well-known technique to calculate stability diagrams of delayed differential equations is the semi-discretisation method. It approximates the monodromy operator and its eigenvalues through linear mapping. Although it is a powerful technique it may be computationally expensive, and the implementation of the linear mapping makes it somewhat cumbersome. The implicit subspace iteration is based on the aforementioned principle, but instead of a linear mapping, it relies only on numerical simulation. Integrating the history function up to the dominant time period and then via pseudo inverse calculation arbitrary many of the dominant eigenvalues can be calculated iteratively. Its advantage is that any numerical solver can be used, and it is applicable to many difficult problems such neutral, or stiff systems, if we can numerically simulate them. In this work, we present the improved implicit subspace iteration method to be able to handle state-dependent delayed systems. We compare the results of iteration to the analytical solution in a case study of turning operation.*

**Keywords:** semi-discretisation, implicit subspace iteration, state-dependent delay, turning

### Kivonat

*A szemi-diszkrétizáció egy közismert módszer időkésleltetett rendszerek stabilitási diagramjainak számítására. A módszer a monodrómia mátrixot és annak sajátértékeit közelíti egy lineáris leképezés által. A hátrányai a számításigénye és a leképezés implementálásának összetettsége. Az implicit altér iterációs módszer a fenti elven alapul, de a lineáris leképezés helyett numerikus szimulációt alkalmaz. Ennek segítségével a kezdeti függvényt integráljuk az időben a fő időperiódusig, majd az úgynevezett pszeudo-inverz számítással iteratív módon tetszőleges számú domináns sajátértéket számíthatunk. Előnye, hogy bármely numerikus megoldó használható és olyan összetett problémákra is alkalmazható, mint a neutrális vagy merev rendszerek, elég, ha megfelelő numerikus megoldó a rendelkezésünkre áll. Jelen munkában, bemutatjuk az implicit altér iteráció továbbfejlesztett változatát, amely az állapotfüggő időkésésű rendszerekre stabilitásának meghatározására is alkalmazható. A numerikus módszert és az analitikus megoldást egy esettanulmány során egy esztergálási modellben hasonlítjuk össze.*

**Kulcsszavak:** szemi-diszkrétizáció, implicit altér iteráció, állapotfüggő időkésés, esztergálás

## 1. BEVEZETÉS

A mérnöki gyakorlatban rendkívül fontos, hogy meg tudjuk határozni egy rendszer stabilitási tulajdonságait, lehetőleg még a tervezési fázisban, adott esetben már üzemeltetés közben valamilyen anomália megértésének érdekében. A stabilitási határokat számítva a paraméterek terében, az adott folyamatra jellemzően megválaszthatóak az optimális üzemeltetési paraméterek, hogy garantálni tudjuk annak megfelelő működését. A rendszerről így kapott átfogó kép nagy előnyt jelent ahhoz képest, mintha csak véletlenszerűen próbálnánk beállítani az üzemeltetési paramétereket. Azonban az elméleti számítások mérésekkel való összevetése elengedhetetlen a modellezési pontatlanságok, nem modellezett jelenségek és zavarások miatt. Jelen dolgozatban, az elméleti stabilitás számítási módszerekre koncentrálunk. A legtöbb valós mérnöki rendszer rendelkezik valamilyen nemlineáris tulajdonsággal, amit sokszor közelítünk linearizált modellekkel

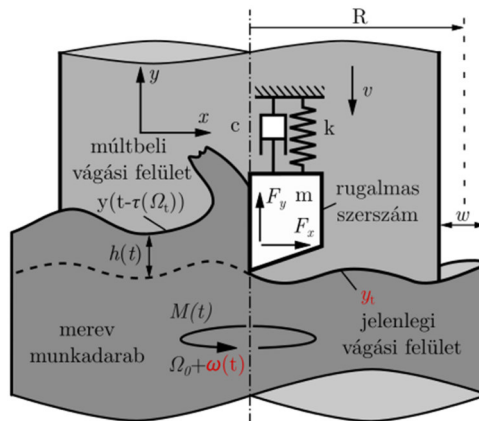
az egyensúlyi hely közelében. Továbbá a különböző gyártási és megmunkálási folyamatokat gyakran időképletetett differenciálegyenletekre (DDE) vezetnek. Ezek stabilitásának vizsgálatára jól bevált módszer a szemi-diszkrétizáció [1], amely lineáris leképezéssel közelíti a monodrómia operátort. Bár hatásos módszer, de rendkívül számításgényes lehet, amennyiben megfelelő felbontást szeretnénk elérni, ezen kívül további matematikai átalakításokat igényel az eredeti DDE rendszer. Egy alternatív módszer, az implicit altér-iteráció (ISSI) [2,3], amely ugyanezen elvre épül, de a monodrómia mátrixon alapuló lineáris leképezés helyett csak numerikus szimulációra támaszkodik. Időbeli integrálással a kezdeti állapotból kiindulva a jellemző időállandóig szimuláljuk a rendszert, majd pszeudo-inverz számítást végezve iteratív módon kiszámíthatóak a domináns multiplikátorok, amelyek megadják a rendszer stabilitását. E megközelítés előnye a rugalmasság: tetszőleges numerikus megoldó használható az időbeli szimulációra. Ezenkívül összetett esetekben is alkalmazható, mint neutrális, nemlineáris, nem sima vagy merev rendszerek, amennyiben lehetséges a mozgásegyenlet időbeli szimulációja, és nem igényel további átalakítást, sem linearizálást az eredeti mozgásegyenlet. Mindkét stabilitás számítási megoldás hatékonysága tovább növelhető a többdimenziós felező módszer (MDBM) alkalmazásával [4]. Jelenlegi munkánkban bemutatjuk a továbbfejlesztett ISSI módszert, amely alkalmas állapotfüggő időképesű rendszerek (SDD) kezelésére is. Ezt egy esettanulmányban szemléltetjük is. Először a 2. fejezetben bemutatjuk a példának használt állapotfüggő időképesét tartalmazó összetett esztergálási modellt, annak nemlineáris és linearizált mozgásegyenletét, amely támaszkodik a [5]-ben bemutatott megoldásokra. Majd, a 3. fejezetben röviden ismertetjük a szemi-diszkrétizációt, az arra épülő általános ISSI módszert, majd az általunk megvalósított továbbfejlesztését. Végül a 4. fejezetben összehasonlítjuk az ISSI eredményeit a linearizált rendszer D-szeparáción alapuló megoldásaival validálva az általunk bemutatott módszer hatékonyságát.

## 2. MECHANIKAI MODELL

Az esztergálási folyamat [5] egyszerűsített modellje egy tökéletesen merev munkadarabból és egy rugalmas szerszámból áll, amelyet egy  $m$  tömeggel, egy  $k$  rugóállandóval és egy  $c$  csillapítással modellezünk, ahogyan az 1. ábrán látható. Ez a modell már magában foglalja a regeneratív hatást a lineáris  $F_x$ ,  $F_y$  erőkarakterisztikán keresztül, amelyek a  $h(t)$  aktuális forgácsvastagságtól függenek. A forgácsvastagság pedig felírható egy fordulattal korábbi szerszámpozíció  $y(t-\tau)$  és az aktuális szerszámpozíció  $y(t)$  közötti különbséget véve, amely egy másodrendű DDE modellt eredményez. A késleltetésre felírt egyenlet a szögsebesség integrálásával egy teljes körülfordulási szögéből számítható, ami matematikailag a következő implicit integrálegyenlettel fejezhető ki

$$\int_{t-\tau(t)}^t \Omega(t) dt = 2\pi, \quad (1)$$

amely állandó időképesét eredményez, ha az orsó fordulatszáma állandó  $\Omega(t) = \Omega_0$ . Ezt a modellt kiterjesztettük a motor jellemzőit figyelembe véve egy PD-szabályozóval, amelynek célja az eszterga névlegesen beállított  $\Omega_0$  orsófordulatszámának tartása.



1. ábra. Állapotfüggő időképesű változó fordulatszámú esztergálási modell

Ez a konfiguráció lehetővé teszi a valódi fordulatszám kis mértékű eltérését a névlegesen beállított értéktől  $\Omega(t) = \Omega_0 + \omega(t)$ . Tehát így felírva az (1) egyenletben szereplő időkézés függ az egyik állapotváltozótól  $\tau(\Omega_t)$ , amely 2 szabadságfokú állapotfüggő időkézésű esztergálási modellhez vezet az 1. ábrán bemutatott módon, ahol az állapotváltozók a pozíció  $y(t)$  és az orsó szöghelyzete  $\varphi(t)$ . Cauchy-átírással első rendű alakra áttérve általánosan a következő alakban kapjuk a rendszert

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t - \tau), \tau(\mathbf{x}_t)), \quad (2)$$

ahol  $\mathbf{x}(t) = [y, \varphi, \dot{y}, \omega]^\top$  az állapotváltozó,  $\mathbf{x}(t - \tau)$  az időkéseletett változók vektora, és  $\mathbf{x}_t(\theta) = \mathbf{x}(t + \theta)$ ,  $\theta \in [-\tau, 0]$ . A (2) egyenletet felírva a modellre a következő differenciálegyenlet rendszert kapjuk

$$\begin{bmatrix} \dot{y} \\ \dot{\varphi} \\ \ddot{y} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{y}(t) \\ \omega(t) \\ -2\zeta\omega_n\dot{y}(t) - \omega_n^2 y(t) + \frac{wK_y}{m}(v\tau(\Omega_t) + y(t - \tau(\Omega_t)) - y(t)) \\ \frac{M - wK_x R(v\tau(\Omega_t) + y(t - \tau(\Omega_t)) - y(t))}{\theta} \end{bmatrix}, \quad (3)$$

ahol a további technológiai paraméterek  $\zeta$  relatív csillapítási tényező,  $\omega_n$  csillapítatlan sajátkörfrekvencia,  $w$  forgácsszélesség,  $K_x$  és  $K_y$  lineáris erő karakterisztikát jellemző állandók,  $v$  eltolás sebessége, a PD nyomaték szabályozás  $M = -p\varphi(t) - d\omega(t)$  a megfelelő erősítési tényezőkkel,  $R$  a munkadarab sugara és  $\theta$  a munkadarab tehetetlenségi nyomatéka. Az ilyen állapotfüggő időkézésű rendszerek linearizálása nehézkes, mivel a rendszer nem differenciálható az állapotváltozók tekintetében, ezért "valódi" linearizálás nem is lehetséges. Az [5]-ben átfogó magyarázatot és levezetést adtak egy hasonló esztergálási modell esetén a linearizált rendszer megalkotásához, amely a (2) egyenlet linearizálásából és felbontásából a következő formára vezet

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{L}\mathbf{x}(t) + \mathbf{R}\mathbf{x}(t - \tau), \quad (4)$$

a következő együttható mátrixokkal, ahol  $\mathbf{L}$  a Jacobi-mátrix

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{wK_y}{m} - \omega_n^2 & -\frac{wK_y v}{m\Omega_0} & -2\zeta\omega_n & 0 \\ \frac{wK_x R}{\theta} & -\frac{p}{\theta} + \frac{wK_x R v}{\theta\Omega_0} & 0 & -\frac{d}{\theta} \end{bmatrix}, \quad (5)$$

valamint

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{wK_y}{m} & \frac{wK_y v}{m\Omega_0} & 0 & 0 \\ -\frac{wK_x R}{\theta} & -\frac{wK_x R v}{\theta\Omega_0} & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Az  $\mathbf{R}$  mátrix tartalmazza a késleletett változók szerinti deriváltak együtthatóit kiegészítve a Frechét-deriváltból származó további mennyiségekkel. A (4) egyenletben szereplő linearizált rendszernek már számítható a lineáris stabilitása. Az exponenciális próbafüggvényt behelyettesítve kapjuk a karakterisztikus egyenletet, majd elvégezve a D-szeparációt a karakterisztikus egyenletet valós és képzetes részre bontva és behelyettesítve a stabilitásváltáshoz tartozó, úgynevezett kritikus frekvenciát. Az így eredményezett nemlineáris egyenletrendszer analitikus megoldása általában nem lehetséges, így egy alkalmas numerikus

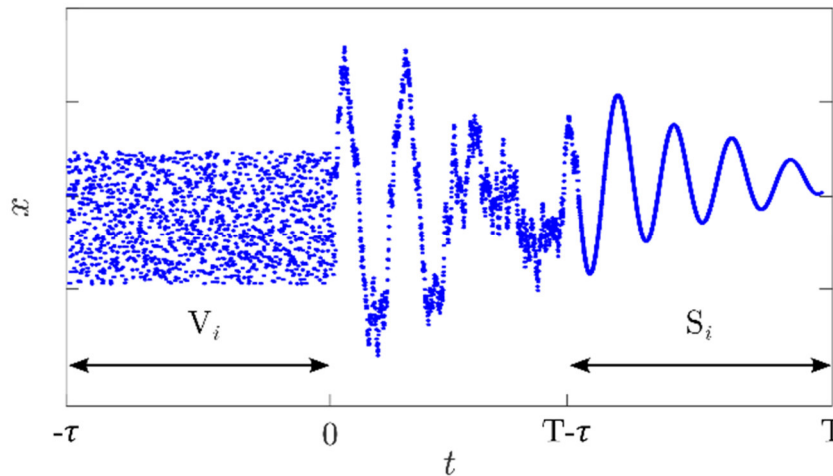
megoldóval számíthatjuk a stabilitási határokat. Erre egy hatékony numerikus gyökkereső eljárást, a többdimenziós felező módszert (MDBM) használtuk [4], amely tetszőleges dimenziót figyelembe véve iterációs lépések során kellő pontossággal és rendkívüli gyorsasággal képes számolni a stabilitási határokat a kiválasztott paramétertartományon, különösen is a gyakran alkalmazott „brute-force” módszerekhez képest.

### 3. STABILITÁSVIZSGÁLAT, IMPLICIT ALTÉR ITERÁCIÓ

A gyakorlatban a termelékenység növelése érdekében növelhetjük, többek között a  $w$  forgácsszélességet vagy az  $\Omega_0$  fordulatszámot, ez azonban nemkívánatos rezgések kialakulásához, hibás munkadarabokhoz és akár rövidebb szerszámélethez vezethet. A stabil munkaponton való üzemelés megfelelő minőségű megmunkálást tesz lehetővé. Az instabil pontok nemkívánatos nagy amplitúdójú öngerjesztett rezgésekhez (angolul „chatter”) tartoznak, ami a munkadarabon rossz megmunkálási felületet eredményez. A szakirodalomban az időképletetett rendszerek stabilitásvizsgálatának közismert módszere a szemi-diszkrétizáció [1]. A késleltetett rendszereket természetüknél fogva végtelen dimenziós fázistérben kell vizsgálni, ahol a monodrómia operátor a rendszer múltbeli (kezdő) állapotát egy periódussal későbbi állapotába való átmenetét írja le, mely sematikus ábrája a 2. ábrán látható. A kezdeti, múltat leíró függvény diszkrétizálásával, azt alkalmasan megválasztott egyenlő időlépésenként felbontva, a DDE így közönséges differenciálegyenlet rendszerrel közelíthető. Ez egy diszkrét lineáris leképezésre vezet, ahol a végtelen dimenziós monodrómia operátort a Floquet-mátrix közelíti, melyet az egyes időlépésekhez tartozó átviteli mátrixok szorzataként számíthatunk, amely a következő alakra vezet

$$\mathbf{S}_i = \Phi \mathbf{V}_i, \quad (7)$$

ahol  $\mathbf{S}_i$  a diszkrétizált kezdeti függvény,  $\mathbf{V}_i$  az egy periódussal későbbi állapot és  $\Phi$  az átviteli (monodrómia) mátrix. A rendszer stabilitásának feltétele, hogy a  $\Phi$  átviteli mátrix minden sajátértéke, a karakterisztikus multiplikátorok, modulusza kisebb legyen egynél. Ez a módszer rendkívül számításgényes lehet a sok (az időléptékkal fordítottan arányos számú) mátrixszorzás miatt a teljes paraméter tartományon számítva, különösen is kellően nagy felbontás esetén.



2. ábra. Időbeli szimuláció és a lineáris leképezés bemutatása

Az implicit altér-iterációs módszer a Floquet elméleten alapul és szemi-diszkrétizációból kiindulva lett általánosítva [2]. A változók  $\mathbf{V}_i$  kezdeti állapotát az egy periódussal későbbi  $\mathbf{S}_i$  állapotukkal összekötő lineáris leképezés helyett azonban csak a mozgásegyenlet numerikus szimulációjára támaszkodik. Az átviteli mátrixot  $\Phi \sim \mathbf{H}$  iteratív számolás során egy lineáris altérrel közelítjük tetszőlegesen megválasztott számú domináns sajátérték és sajátvektor figyelembevételével. A rendszer kezdeti állapotát a fixpontja körül véletlenszerűen perturbáljuk, ahogyan a 2. ábrán látható. Ezt követően [3]-ben leírtak szerint időben szimuláljuk a rendszert, majd a kezdeti, valamint az egy periódussal későbbi állapottal számítjuk a  $\mathbf{H}$  közelítő mátrix sajátértékeit pszeudo-inverz számítással keresztül. Azonban a rendszer fixpontját előzetesen ismerni kell és figyelembe kell venni a számítás során. Megjegyzendő, hogy a közelítés pontossága az iterációk számától és a kiszámított sajátértékek számától függ, amelyek kellő hangolást igényelnek érzékenységük miatt. Továbbá a perturbáció

normájának mértékét is körültekintően kell megválasztani, mivel nemlineáris rendszerek esetében túl nagy perturbáció esetén a lineáris közelítés már nem megfelelő, a túl kicsi perturbáció pedig aritmetikai hibákhoz vezethet. Fontos megjegyezni, hogy az SDD rendszerek természetüknél fogva nemlineárisak, így az SDD rendszerek esetén erre mindig ügyelni kell.

Általánosságban, az iteráció során számított sajátvektorok lehetnek komplexek is, amit általában kezelni tudnak a numerikus szimulációs sémák, azonban az SDD rendszerek esetében ez nem lehetséges. Az (1) egyenletet tekintve egy komplex változó komplex időkétséget eredményezne, ami fizikailag értelmezhetetlen. Ezért az ISSI-módszert továbbfejlesztettük és kiegészítettük, a közelítő átviteli mátrix Schur-dekompozíciójának számításával. A Schur-dekompozíció és egy jobb kvázi-felső háromszögmátrixra  $T_i$  vezet, amelyek elemei és a hozzátartozó bázisvektorok  $U_i$  valósak. A számítás során a sajátértékek  $\mu_i$  is automatikusan kiadódnak. Ez az átalakítás lehetővé teszi az ISSI használatát SDD-rendszerek esetében is. Az iterációs eljárás lépései a (8)-(11) egyenletben szerepelnek, melyet a kívánt pontosság elérésének érdekében megfelelő számban megismétlünk.

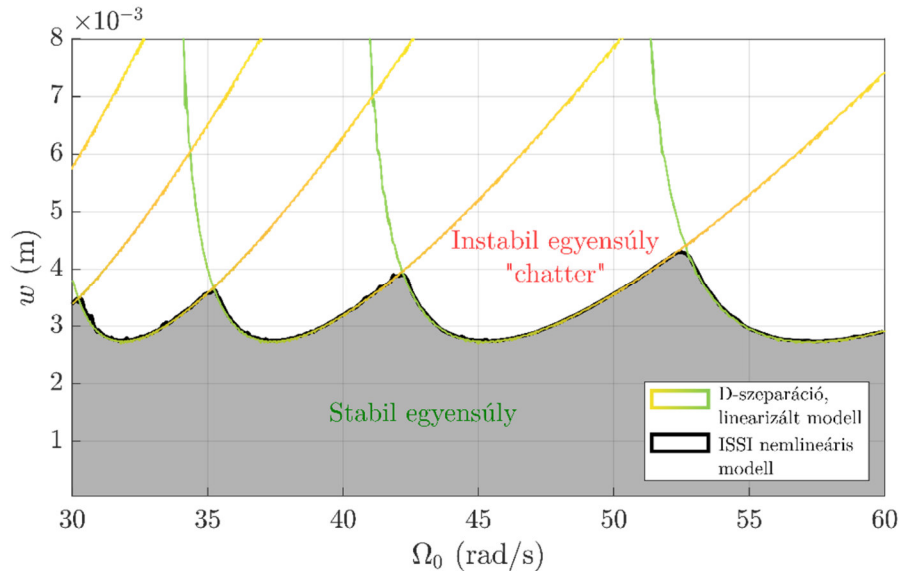
$$S \xrightarrow{\text{időbeli szimuláció}} V_i, \quad (8)$$

$$H_i = (S_i^T S_i)^{-1} S_i^T V_i \quad (9)$$

$$\text{Schur}(H_i) \rightarrow U_i, T_i, \mu_i \quad (10)$$

$$S_{i+1} = V_i U_i \quad (11)$$

A kiterjesztett ISSI-módszer validálására összehasonlítottuk a (4) egyenletben szereplő linearizált rendszert a (3) egyenletben szereplő eredeti nemlineáris SDD esztergálási modellel. A numerikus szimulációt 4. rendű Runge-Kutta-módszerrel végeztük MATLAB-ban implementálva. Az eredeti nemlineáris rendszert szimulálva minden egyes időlépésnél számítani kell az időkétséget az (1) egyenletben szereplő implicit egyenlet megoldásával. Ezért az integrált diszkrét alakban szummázással közelítettük a múltbeli állapotváltozók ismeretével, végül az időkétséget interpolálással határoztuk meg. A kiválasztott paramétertartományon pedig az MDBM módszert [4] használva számítottuk ki a stabilitási határokat.



3. ábra. Stabilitási diagram, az ISSI és a D-szeparációval kapott eredmények összehasonlítása

## 4. ÖSSZEFOGLALÁS

Az egyszerűbb elméleti modellek sokszor pontatlanok és eltérést mutatnak a valós mérésekhez képest. A pontosabb eredmények eléréséhez összetettebb modellekre van szükség, amelyek kevésbé elterjedtek mivel bonyolult matematikai vizsgálatokat igényelnek. Az itt bemutatott ISSI módszer lehetővé teszi, hogy a jövőben komplex modellek esetén is egyszerűbben elvégezhető legyen a stabilitásvizsgálat, ezáltal pontosabb modelleket tudunk vizsgálni és így feltérképezni a paraméterek hatását a megmunkálási folyamatok stabilitására. A ISSI szimuláció alapú stabilitás számítási módszert és a pontosnak tekintett Frechét-deriválton alapuló kapcsolódó linearizált rendszer stabilitáshatárait összehasonlítva vonalszélességen belüli eredményeket kapunk, amint az a 3. ábrán látható. A módszerrel meghatározhatóak az esztergálási modelleknél jól ismert, úgynevezett „lobe” struktúrájú stabilitási határok. A módszer további előnye a D-szeparációhoz képest, hogy a stabil (szürke kitöltéssel jelölve) és instabil tartományok (fehér tartomány) közvetlenül meghatározhatóak, míg az utóbbi esetében az összes „lobe”-t (bifurkációs vonalat) kiszámítjuk, amelyek csak azt mutatják meg, hogy a határt átlépve újabb gyökpár veszti el a stabilitását, de ebből nem következik, hogy az egyik oldal biztosan stabil. A kiterjesztett ISSI hatékony módszernek bizonyul az állapotfüggő időkésésű rendszerek lineáris stabilitási tulajdonságainak meghatározására anélkül, hogy a bonyolult linearizálást el kellene végezni. A módszer előnye, hogy összetett rendszerek, például a bemutatott SDD, neutrális, nem sima és merev rendszerek esetén is alkalmazható, ehhez elegendő a differenciálegyenlet rendszer felírása, amennyiben annak megfelelő időbeli szimulációja lehetséges.

## KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

A jelen kutatás a Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Hivatal (NKFI FK-138500 és NKFI KKP-133846) támogatásával valósult meg.

## IRODALMI HIVATKOZÁSOK

- [1] Insperger, T., Stépán, G., *Semi-discretization for time-delay systems: stability and engineering applications*, Vol. 178, Springer Science & Business Media, 2011.
- [2] Zatarain, M., Alvarez, J., Bediaga, I., Munoa, J., Dombovari, Z., *Implicit subspace iteration as an efficient method to compute milling stability lobe diagrams*, The International Journal of Advanced Manufacturing Technology 77, 2015, 597–607.
- [3] Toth, M., Bachrathy, D., Stepan, G., *Effect of wavy tool path on the stability properties of milling by the implicit subspace iteration method*, The International Journal of Advanced Manufacturing Technology 91, 2017, 1781–1789
- [4] Bachrathy, D., Stépán, G. *Bisection method in higher dimensions and the efficiency number*. Periodica Polytechnica Mechanical Engineering, 56(2), 2012, 81-86
- [5] Insperger, T., Stépán, G., Turi, J., *State-dependent delay in regenerative turning processes*, Nonlinear Dynamics 47, 2007, 275–283.