

EMBERI EGYENSÚLYOZÁS GÖRDESZKÁN

Várszegi Balázs

*Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Műszaki Mechanikai Tanszék
Doktorandusz, e-mail: varszegi@mm.bme.hu*

Takács Dénes

*MTA-BME Gépek és Járművek Dinamikája Kutatócsoport
Tudományos Munkatárs, e-mail: takacs@mm.bme.hu*

Absztrakt

A gördeszka, mint közlekedési eszköz az 1900-as évek elején jelent meg, de igazán népszerűvé csak az évszázad második felében vált. Népszerűségét mi sem bizonyítja jobban, mint az, hogy a gördeszkázás dinamikájával kapcsolatban számos tudományos munka is született a 70-es évektől napjainkig.

Az általunk készített modell (lásd 1. ábra) arra hivatott, hogy összekapcsolja a gördeszkázás dinamikai vizsgálatát az emberi egyensúlyozás megértésével. Modellünk mindösszesen két darab rúdból épül fel, melyből egyik a deszkát, míg másik a deszkást modellezi. Ezen rudak csuklóval kapcsolódnak egymáshoz, olyan módon, hogy az embert reprezentáló tömeg nélküli rúd a deszkát modellező rúd hosszanti tengelye körül fordulhat el. Ezt az elfordulást egy belső nyomaték gátolja, mely az emberi boka hatását modellezi egy PD szabályozó segítségével. Az ily módon implementált szabályozó kör, a gördeszka egyenes vonalú haladásának megvalósulásáért felelős.

A deszka felfüggesztési mechanizmusának hatását egy torziós rugón túl két kinematikai kényszerrel modellezhetjük egyszerűen, hiszen ha a deszkát megbillentjük, akkor a kerekek tengelye elfordul. Emellé a két kinematikai kényszer mellé bevezethetünk egy harmadikat is, mely a gördeszka hosszanti irányú állandó sebességéért lesz felelős. Ezzel a harmadik kinematikai kényszerrel a lineáris stabilitáson nem változtatunk, de az egyenletek jelentősen leegyszerűsödnek.

Az így kapott anholonom mechanikai modell mozgásegyenleteit több módszerrel származtathatjuk, melyek közül mi a legkompaktabb formát biztosító Gibbs – Appell - módszert használtuk. A modell és egyenletei segítségével az egyenes vonalú egyenletes mozgás lineáris stabilitását vizsgálhatjuk. Munkánk során elemeztük az emberi szabályozás paramétereinek (PD) és a gördeszka sebességének hatását is.

Kulcsszavak: anholonom, mechanika, gördeszka, egyensúlyozás, PD szabályozó

1. Bevezetés

A gördeszkázást az előző század húszas éveinek elején találták fel amerikai fiatalok, hogy megkönnyítse az útjukat a szörfözésre alkalmas tengerpart felé. Így az első deszkák alapjául a szörfdeszkák szolgáltak, fa deszkára szerelték fém kerekeket. Az 50-es években elkezdődő nagyipari gyártás mellett a 70-es évek jelent még fordulópontot a gördeszkák fejlődésében, hiszen ilyenkor kezdték használni először a poliuretán kerekeket, melyek nagyobb sebességet tesznek lehetővé. Ebben az időszakban jelentek meg az első tudományos publikációk is (lásd [1] és [2]).

Hubbard ezen korai publikációi jól magyarázzák a gördeszkázás nehézségeit alacsony sebességnél, ahogy azt a biciklizésnél is tapasztalhatják akár a laikusok akár a kutatók is [3]. Hubbard modelljéhez hasonlóan használ Ispolov és Smolnikov is [4], de itt a mozgásegyenletek

származtatásához a Gibbs Appell - egyenleteket használták. Ehhez hasonló modellel tanulmányozható nem csak a lineáris stabilitás, hanem a nemlineáris viselkedés is felderíthető lásd [5] vagy [6]. Ezen egyszerű modellek segítségével vizsgálható a lejtőn történő haladást is [7], ami egyébként életszerű magasabb sebességek esetén.

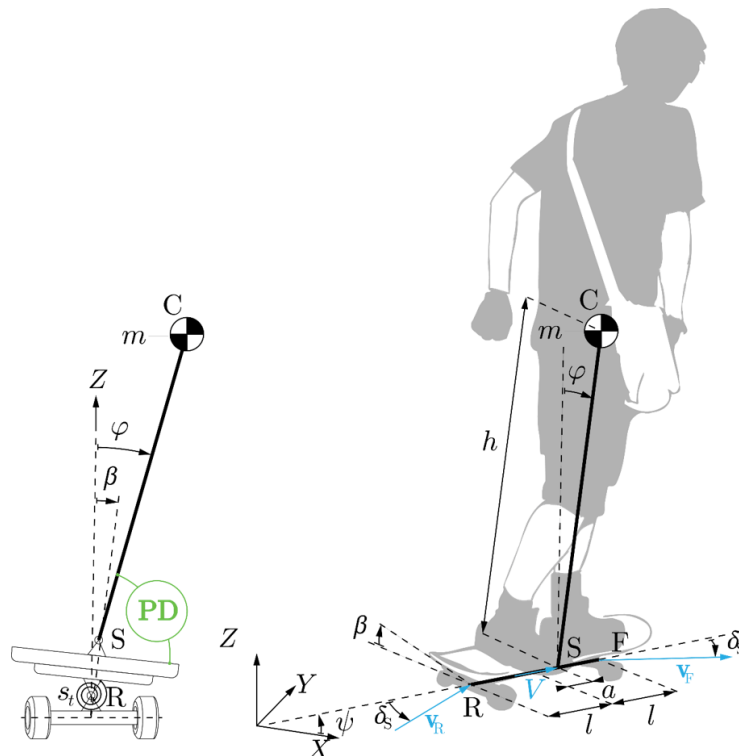
Ezen modellek együtt kezelik az embert és a deszkát, mintha azok egy merev testet alkotnának, mely egy érthető egyszerűsítés, de magyarázó képességei korlátozottak. Ezen tanulmány célja egy olyan modell bemutatása, ahol a deszka és a deszkás külön tud mozogni és az emberi egyensúlyozást egy PD szabályozóval vesszük figyelembe, ami bevett emberi egyensúlyozás esetén (lásd [8], [9] vagy [10]).

2. A használt mechanikai modell

Az általunk használt mechanikai modell erősen épít a szakirodalomban fellelhetőkre, különösen a [11] és [12] irodalmakban megtalálhatóra, ahol a deszkát és az embert külön modellezik. Azonban mind a két irodalomban található mechanikai modell összetettebb, ezeket leegyszerűsítjük annak érdekében, hogy zárt formában kaphassunk eredményeket, nevezetesen a deszkának elhanyagoljuk a tehetetlenségi nyomatékát és tömegét, valamint igyekszünk az emberi szabályozást is a lehető legegyszerűbben kezelni.

2.1 A modell bemutatása

A modell, lásd 1. ábra, mindössze két darab tömegnélküli rudat tartalmaz; az FR rúd modellezi a deszkát, míg az SC rúd a deszkást, aminek a végén egy m tömegű tömegpont található. A deszka hossza $2l$, míg az ember magassága $2h$. A deszkás pozícióját a deszkán a paraméter segítségével vesszük figyelembe, melynek nulla értéke a deszka középpontjához tartozik, tehát ha $a > 0$ akkor a deszkás elöl, míg ha $a < 0$ akkor hátul áll.



1. ábra: Mechanikai modell [12]

Ennek a két testnek a térben összesen 12 szabadsági foka lenne, de ebből csak 5 marad mivel a 2 rudat (ember és deszka) egy tökéletes síkcukló kapcsolja egymáshoz S pontban, illetve a

deszka középvonala (FR egyenes) mindig egy a földdel párhuzamos síkban mozog. Az így megmaradó 5 szabadsági fok leírható 5 általános koordináta segítségével, melyek rendre a következők; x és y az S pont helyzetét írják le a vízszintes síkon; ψ a deszka haladási irányát határozza meg a szintén ezen a síkon, míg β és φ a deszka és deszkás eldőlését a függőlegeshez képest.

Az emberi egyensúlyozást a bokát modellező PD szabályozóval vesszük figyelembe, amely egy belső nyomatékot fejt ki:

$$M_{PD} = P\varphi + D\dot{\varphi} , \quad (1)$$

ahol P az úgynevezett arányos tag, D pedig a differenciáló. Ez az egyensúlyozó modell egy jó közelítése a vesztibuláris (füli egyensúlyozó szerv) és vizuális egyensúlyozásnak. Amennyiben a proprioceptívet (talpi egyensúlyozó szerv) is modellezni kívánnánk akkor a szabályozó nyomatékot az (1) összefüggéshez hasonlóan írhatnánk fel. Ilyenkor nem csak a deszkás dőlésszögét csatolnánk vissza, hanem a deszka és a deszkás szögének különbségét is.

2.2 Kinematikai kényszerek

A deszka mozgását nem csak geometriai kényszerek, például a deszka középvonalának párhuzamossága a talajjal, gátolják hanem a speciális felfüggesztésen keresztül úgynevezett kinematikai kényszerek is, melyeket a sebességekre lehet előírni.

Ezen modell esetén az F (első) és R (hátsó) pontok sebességének az irányát ismerjük a deszka dőlésszögének függvényében:

$$\sin \beta \tan \kappa = \tan \delta_s \quad (2)$$

ahol δ_s a kormányzási szög és κ a kiegészítő szöge a deszka és az úgynevezett királycsap által bezárt szögnek (lásd [5] irodalomban λ_r és λ_f). Ezek alapján az általános koordinátasebességekre a következő kettő kinematikai kényszeregyenlet vezethető be:

$$\begin{aligned} (\cos \psi \sin \beta \cot \kappa - \sin \psi) \dot{x} + (\sin \psi \sin \beta \cot \kappa + \cos \psi) \dot{y} + (l - a) \dot{\psi} &= 0, \\ (\cos \psi \sin \beta \cot \kappa + \sin \psi) \dot{x} + (\sin \psi \sin \beta \cot \kappa - \cos \psi) \dot{y} + (l + a) \dot{\psi} &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Emellett egy további kinematikai kényszert is alkalmazunk, azt feltételezzük, hogy a deszka hosszirányú sebessége mindig konstans V :

$$\dot{x} \cos \psi + \dot{y} \sin \psi = V . \quad (4)$$

Belátható, hogy ez a sebességkényszer nem változtatja meg a dolgozat fókuszában álló lineáris stabilitást, csak a formulákon egyszerűsít, teszi azokat publikálhatóvá.

2.3 Mozgásegyenlet

A mozgásegyenletek származtatását a Gibbs Appell - egyenletek segítségével végezzük, melyek a következő egyszerű alakban írhatók fel:

$$\frac{\partial A}{\partial \dot{\sigma}_i} = \Gamma_i , \quad (5)$$

ahol A az úgynevezett gyorsulási energia, Γ a kvázi erő, illetve σ jelöli az úgynevezett kvázi sebességeket [13]. Ezzel a módszerrel a mozgásegyenletek könnyen, kompakt elsőrendű differenciálegyenlet alakban adódnak, ami előnyt jelent numerikus szimuláció és stabilitásvizsgálatok végzésekor.

Érdeemes először a kvázi sebességeket bevezetni, ezek választása ugyan intuitív, de úgy kell őket megválasztani, hogy ezekkel a rendszer sebességállapota egyértelműen meghatározható legyen. Mivel ebben az esetben 5 általános koordináta és 3 kinematikai kényszer van így 2 darab kvázi sebesség választása szükséges. Esetünkben megfelelő a deszka és az deszkás relatív szögsebessége:

$$\sigma_1 := \dot{\varphi} \text{ és } \sigma_2 := \dot{\beta}. \quad (6)$$

A kvázi sebességekre vonatkozó definíciós egyenletek (6) és a kinematikai kényszerekre vonatkozó egyenletekből (3) és (4) az általános koordinátasebességek kifejezhetők az általános koordináták és a kvázi sebességek segítségével:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\psi} \\ \dot{\varphi} \\ \dot{\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V \left(\cos \psi + \frac{a}{l} \tan \kappa \sin \beta \sin \psi \right) \\ V \left(\sin \psi - \frac{a}{l} \tan \kappa \sin \beta \cos \psi \right) \\ -\frac{V}{l} \tan \kappa \sin \beta \\ \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{bmatrix}. \quad (7)$$

A gyorsulási energia egy tömegpont esetén a következőképpen számítható:

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} m \mathbf{a}_C \cdot \mathbf{a}_C, \quad (8)$$

ahol \mathbf{a}_C jelöli a tömegpont gyorsulását:

$$\mathbf{a}_C = \begin{bmatrix} \ddot{x} + h \sin \psi \left(\ddot{\varphi} \cos \varphi - (\dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2) \sin \varphi \right) + h \cos \psi \left(2\dot{\varphi}\dot{\psi} \cos \varphi + \ddot{\psi} \sin \varphi \right) \\ \ddot{y} + h \sin \varphi \left(\ddot{\psi} \sin \psi + (\dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2) \cos \psi \right) + h \cos \varphi \left(2\dot{\varphi}\dot{\psi} \sin \psi + \ddot{\psi} \cos \psi \right) \\ -h \left(\dot{\varphi}^2 \cos \varphi + \ddot{\varphi} \sin \varphi \right) \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Ezzel a gyorsulási energiára a következő összefüggést kaphatjuk:

$$\mathcal{A} = \frac{hV}{l^2} m \tan \kappa \cos \varphi \left(a l \sigma_2 \cos \beta + V \sin \beta (l - h \tan \kappa \sin \beta \sin \varphi) \right) \dot{\sigma}_1 + \frac{1}{2} m h^2 \dot{\sigma}_1^2 + \dots, \quad (10)$$

ahol a három pont jelöli azokat a tagokat, melyek nem tartalmazznak kvázi gyorsulásokat ($\dot{\sigma}_i$), hiszen az (5) összefüggés értelmében azokra nincs szükség.

A kvázi erőt az aktív erők virtuális teljesítményének segítségével lehet meghatározni hasonlóan a másodfajú Lagrange - egyenlet esetén felmerülő általános erőhöz. Esetünkben a gravitáción kívül a szabályozó nyomatékának és a felfüggesztés rugójának van virtuális teljesítménye:

$$\delta P = \mathbf{G} \cdot \delta \mathbf{v}_C + \mathbf{M}_{PD} \cdot \delta \boldsymbol{\omega}_s + (-\mathbf{M}_{PD}) \cdot \delta \boldsymbol{\omega}_b + \mathbf{M}_{s_t} \cdot \delta \boldsymbol{\omega}_b, \quad (11)$$

ahol δ jelöli a virtuális mennyiségeket illetve az erők, nyomatékok és szögsebességek a következőkre adódnak:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}_{PD} = -(P\varphi + D\dot{\varphi}) \begin{bmatrix} \cos \psi \\ \sin \psi \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}_{s_t} = -s_t \begin{bmatrix} \cos \psi \\ \sin \psi \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (12)$$

$$\boldsymbol{\omega}_s = \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \cos \psi \\ \dot{\varphi} \sin \psi \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\omega}_b = \begin{bmatrix} \dot{\beta} \cos \psi \\ \dot{\beta} \sin \psi \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}.$$

A (11) és (12) összefüggések felhasználása során a virtuális kvázi sebességek együtthatóinak összehasonlításából kaphatjuk a hozzájuk tartozó kvázi erőket:

$$\Gamma_1 = mgh \sin \varphi - (P\varphi + D\dot{\varphi}) \text{ és } \Gamma_2 = (P\varphi + D\dot{\varphi}) - s_t \beta. \quad (13)$$

Innen a Gibbs Appell - egyenletek származtathatók, de itt meg kell jegyezzük, hogy a gyorsulási energia nem függ a második kvázi gyorsulástól ($\dot{\sigma}_2$), így az erre vonatkozó

derivált zérust fog adni. Ez nem meglepő, hiszen ez az egyenlet vonatkozik a gördeszkára és annak mind a tömegét, mind a tehetetlenségi nyomatékát elhanyagoltuk, tehát ebben az esetben egy egyszerű nyomatéki (statikai) egyensúlyt kapunk:

$$P\varphi + D\dot{\varphi} = s_t\beta \quad (14)$$

ami azt mondja ki, hogy a szabályozó nyomatékával ellent tart a felfüggesztésben található rugó nyomatéka. Ebből a deszka dőlésszöge egyértelműen kifejezhető a szabályozási nyomaték függvényében:

$$\beta = \frac{P}{s_t}\varphi + \frac{D}{s_t}\sigma_1. \quad (15)$$

Ennek értelmében a deszka dőlési szöge (β) nem egy független koordináta, hanem csak egy belső állapotváltozó, tehát kiküszöbölhető az egyenletekből.

A mozgásegyenletek összeállíthatók az első kvázi sebességre vonatkozó Gibbs Appell - egyenlet (5) és az általános koordinátasebességre vonatkozó egyenletek (7) segítségével:

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_1 &= \frac{C(\varphi, \sigma_1)}{B(\varphi, \sigma_1)}, \\ \dot{\varphi} &= \sigma_1, \\ \dot{x} &= V \left(\cos \psi + \frac{a}{l} \tan \kappa \sin \psi \sin \left(\frac{P}{s_t}\varphi + \frac{D}{s_t}\sigma_1 \right) \right), \\ \dot{y} &= V \left(\sin \psi - \frac{a}{l} \tan \kappa \cos \psi \sin \left(\frac{P}{s_t}\varphi + \frac{D}{s_t}\sigma_1 \right) \right), \\ \dot{\psi} &= -\frac{V}{l} \tan \kappa \sin \left(\frac{P}{s_t}\varphi + \frac{D}{s_t}\sigma_1 \right), \end{aligned} \quad (16)$$

ahol

$$\begin{aligned} B(\varphi, \sigma_1) &= hl^2 + \frac{D}{s_t} aVl \tan \kappa \cos \varphi \cos \left(\frac{P}{s_t}\varphi + \frac{D}{s_t}\sigma_1 \right), \\ C(\varphi, \sigma_1) &= \frac{l}{mh} \left(\sigma_1 \left(ahmPV \tan \kappa \cos \varphi \cos \left(\frac{P}{s_t}\varphi + \frac{D}{s_t}\sigma_1 \right) + Dl \right) + lP\varphi \right) + \\ &+ \sin \varphi \left(hV^2 \tan^2 \kappa \cos \varphi \sin^2 \left(\frac{P}{s_t}\varphi + \frac{D}{s_t}\sigma_1 \right) + gl^2 \right) + \\ &- lV^2 \tan \kappa \cos \varphi \sin \left(\frac{P}{s_t}\varphi + \frac{D}{s_t}\sigma_1 \right). \end{aligned} \quad (17)$$

Itt meg kell jegyezzük, hogy x , y és ψ úgynevezett ciklikus koordináták, a (16) differenciálegyenlet első két egyenlete írja le az úgynevezett főmozgást, amik önmagukban integrálhatók, hiszen csak a deszkás szögétől (φ) és relatív szögsebességétől függenek (σ_1). Ebből következően stabilitás szempontjából csak ezek a koordináták a mérvadók, így a továbbiakban csak ezekkel fogunk foglalkozni.

3. Lineáris stabilitásvizsgálat

Az általunk vizsgálni kívánt egyensúlyi mozgás az egyenes vonalú egyenletes mozgás, tehát amikor a deszkás függőlegesen áll a deszkán. Az ehhez tartozó kvázi sebességek és általános koordináták a következők:

$$\sigma_1 \equiv 0, \quad \sigma_2 \equiv 0, \quad \varphi \equiv 0, \quad \beta \equiv 0, \quad x = Vt, \quad y \equiv 0 \quad \text{és} \quad \psi \equiv 0. \quad (18)$$

A vizsgált lineáris differenciálegyenletet (már csak a főmozgásra vonatkozóan):

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{J}\mathbf{X} \quad (19)$$

alakban írhatjuk fel, ahol

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\frac{v a}{h l} \tan \kappa \frac{P}{s_t} + \left(\frac{s_t}{mh^2} + \frac{v^2 h}{h^2 l} \tan \kappa \right) \frac{D}{s_t}}{1 + \frac{D v a}{s_t h l} \tan \kappa} & \frac{g - \left(\frac{s_t}{mh^2} + \frac{v^2 h}{h^2 l} \tan \kappa \right) \frac{P}{s_t}}{h} \\ \frac{1}{1 + \frac{D v a}{s_t h l} \tan \kappa} & 0 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} \sigma \\ \varphi \end{bmatrix} \quad (20)$$

Egy lineáris differenciálegyenlet stabilitásának eldöntéséhez szükségünk van a karakterisztikus egyenletre, melyet az exponenciális megoldás visszahelyettesítésével a (19) lineáris mozgásegyenletbe származtathatunk:

$$\left(1 + \frac{D v a}{s_t h l} \tan \kappa \right) \lambda^2 + \left(\frac{v a}{h l} \tan \kappa \frac{P}{s_t} + \left(\frac{s_t}{mh^2} + \frac{v^2 h}{h^2 l} \tan \kappa \right) \frac{D}{s_t} \right) \lambda + \left(\left(\frac{s_t}{mh^2} + \frac{v^2 h}{h^2 l} \tan \kappa \right) \frac{P}{s_t} - \frac{g}{h} \right) = 0, \quad (21)$$

ahol λ a karakterisztikus exponens. Mivel a (21) karakterisztikus egyenlet csak másodfokú, így zárt alakban is meghatározhatók a karakterisztikus exponensek. Ezek valós részének előjele dönti el, hogy a lineáris rendszer az stabil-e vagy sem, amennyiben minden karakterisztikus exponens valósrésze negatív akkor és csak akkor az egyensúlyi mozgás aszimptotikusan stabilis. Mivel ezek kifejezése sok diszkussziót igényel, ezért használjuk a Routh - Hurwitz kritériumot (lásd [13]).

Ezen módszer során képezni kell az úgynevezett Hurwitz mátrixot:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ a_2 & a_0 \end{bmatrix}, \quad (22)$$

ahol a_i λ^i együtthatója a karakterisztikus egyenletben (21). A vonatkozó lineáris differenciálegyenletrendszer pedig aszimptotikusan stabilis akkor és csak akkor, ha a Hurwitz mátrix összes fő minorjának determinánsa pozitív, tehát

$$\frac{\frac{v a}{h l} \tan \kappa \frac{P}{s_t} + \left(\frac{s_t}{mh^2} + \frac{v^2 h}{h^2 l} \tan \kappa \right) \frac{D}{s_t}}{1 + \frac{D v a}{s_t h l} \tan \kappa} > 0, \quad (23)$$

$$\frac{\left(\frac{v a}{h l} \tan \kappa \frac{P}{s_t} + \left(\frac{s_t}{mh^2} + \frac{v^2 h}{h^2 l} \tan \kappa \right) \frac{D}{s_t} \right) \left(g - \left(\frac{s_t}{mh^2} + \frac{v^2 h}{h^2 l} \tan \kappa \right) \frac{P}{s_t} \right)}{\left(1 + \frac{D v a}{s_t h l} \tan \kappa \right)^2} > 0.$$

Az könnyen belátható, hogy a (23) állítás átfogalmazható úgy, hogy a következő három paraméter előjele megegyezik:

$$\begin{aligned} f_1 &= aPmhv \tan \kappa + D(mhv^2 \tan \kappa + ls_t), \\ f_2 &= aDv \tan \kappa + hls_t, \\ f_3 &= ls_t(P - mgh) + hmPv^2 \tan \kappa, \end{aligned} \quad (24)$$

amennyiben élünk azon racionális feltételezésekkel, hogy a tömeg m és a gördeszkás magassága $2h$ pozitív. Tehát megkülönböztethetünk két különböző esetet: az egyik amikor az összes kifejezés negatív, illetve a másik amikor pozitív.

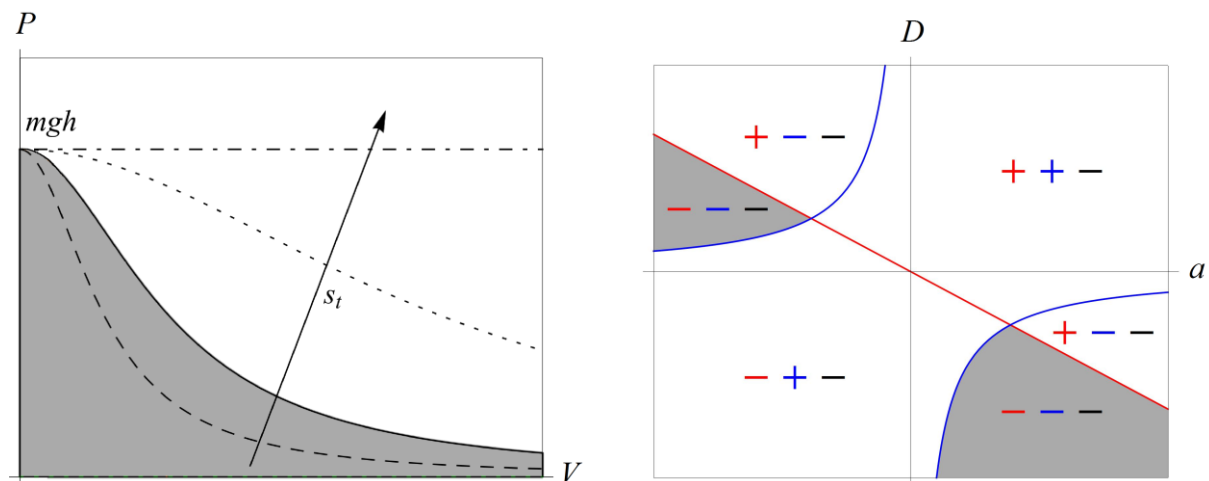
Az f_3 paraméter felhasználásával meghatározhatunk egy kritikus arányos tag:

$$f_3 = 0 \Rightarrow P_c = \frac{mgh}{1 + \frac{h}{l} \frac{mv^2}{s_t} \tan \kappa}. \quad (25)$$

Az eredményeket stabilitási térképeken szemléltetjük, előbb kvalitatív ábrák, térképpárok segítségével mutatjuk be a stabilitási tartományok strukturáját (lásd 2. és 3. ábrák), majd reális paraméterek mellett vizsgáljuk meg azokat (lásd 4. ábra). A térképeken a szürkített rész jelöli azon paramétereket melyekkel az egyenes vonalú egyenletes mozgás stabilis.

A két térképpár közül az egyik azt mutatja be, amikor minden f_i paraméter negatív a másik pedig azt amikor mindegyik pozitív. Mindkét térkép párban látható egy térkép amely a választható arányos tagot mutatja a sebesség függvényében, illetve egy amely a differenciáló tag (D) és a deszkás pozíciójának (a) kapcsolatára mutat rá. Tekintettel arra, hogy f_3 nem függ sem D -től sem a -tól, ennek előjele eldönthető nélkülünk. Amennyiben megválasztottuk f_3 előjelét, akkor a D - a sík is konstruálható, hiszen tudjuk, hogy ugyanolyannak kell lennie az előjelének minden f_i -nek.

A 2. és 3. ábrákon rendre piros vonallal jelöljük azt amikor f_1 éppen nulla és piros „+” illetve „-” jelekkel azokat a tartományokat ahol annak értéke pozitív illetve negatív. Míg f_2 esetén ezt kézzel, illetve f_3 esetén ezeket feketével jelöltük.

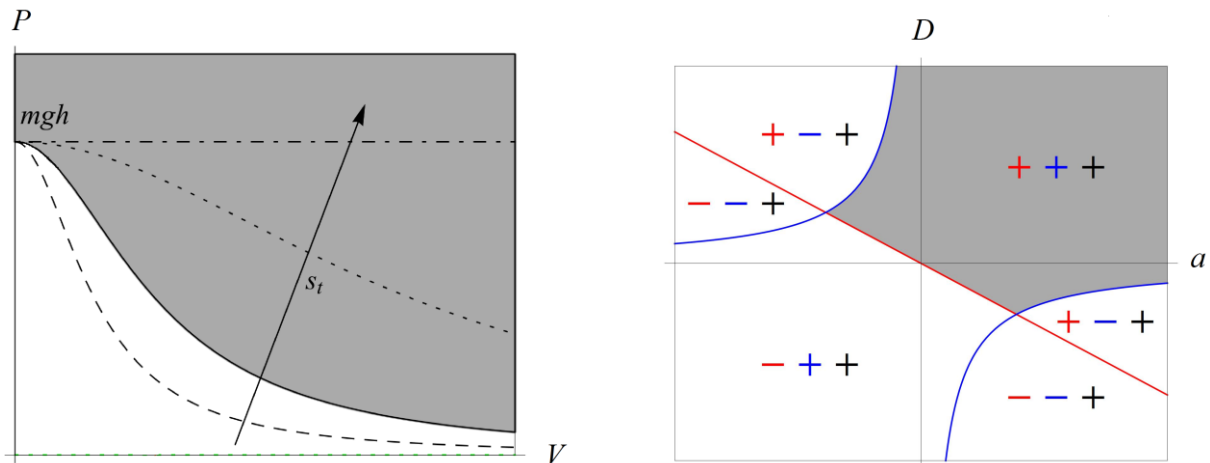


2. ábra Stabilitási térképek jellege, ha a kritikus proporcionális együtthatónál kisebbet választunk

Tekintsük először azt az esetet, amikor minden f_i negatív (lásd 2. ábra). Ebben az esetben a arányos tagnak egy maximuma határozható meg, amely egyre kisebb a sebesség növelésével. Látható a 2. ábrán az is, hogy miként függ ez a arányos tag a gördeszka felfüggesztésének merevségétől (ezek láthatóak fekete szaggatott, pont illetve pontvonallal). Megállapítható, hogy minél nagyobb a merevség annál nagyobb a kritikus érték is, ami jelen konfigurációban előnyös, végtelen nagy merevség esetén a kritikus görbe egy vízszintes egyenesnek adódik.

Az ábra jobboldali részén láthatóak azok a tartományok a D - a síkon ahol az egyenes vonalú egyenletes mozgás stabilis. Fontos megjegyezni, hogy a térkép pontos alakja függ attól, hogy mennyi P és V értéke, de az elmondható, hogy strukturálisan ez mindig így néz ki. Az elhelyezkedése ezen stabilis tartományoknak az érdekes, hiszen látható, hogy ha a deszkás elöl áll ($a > 0$) akkor csak negatív differenciáló taggal tarthatjuk meg a stabilitást. Ez nagy kihívást jelent egy ember számára, hiszen ez azt jelenti, hogy ha egy bizonyos szögsebességgel dőlünk akkor ugyanabba az irányba döntjük magunkat tovább, mely nehezen kivitelezhető. Hátról állás ($a < 0$) esetén is találunk stabil zónát, ami az egyszerűbb modellekkel nem volt kimutatható (lásd [1] vagy [7]). Ezen zónák viszont reális paraméterek mellett kicsik és csak viszonylag nagy hátról állás során megvalósíthatók.

A 3. ábrán látható térképek ahhoz a matematikai esethez tartoznak, hogy minden f_i pozitív. Ilyenkor az arányos tagnak minimuma van, melyet fizikailag jobban vártunk. Ebben az esetben viszont a felfüggesztés merevségének növelése nem célravezető, hiszen annál nagyobb arányos tag engedhető csak meg. Ebben az esetben elől állás mellett is használhatunk pozitív differenciáló tagot, ami a sokkal természetesebb választás.



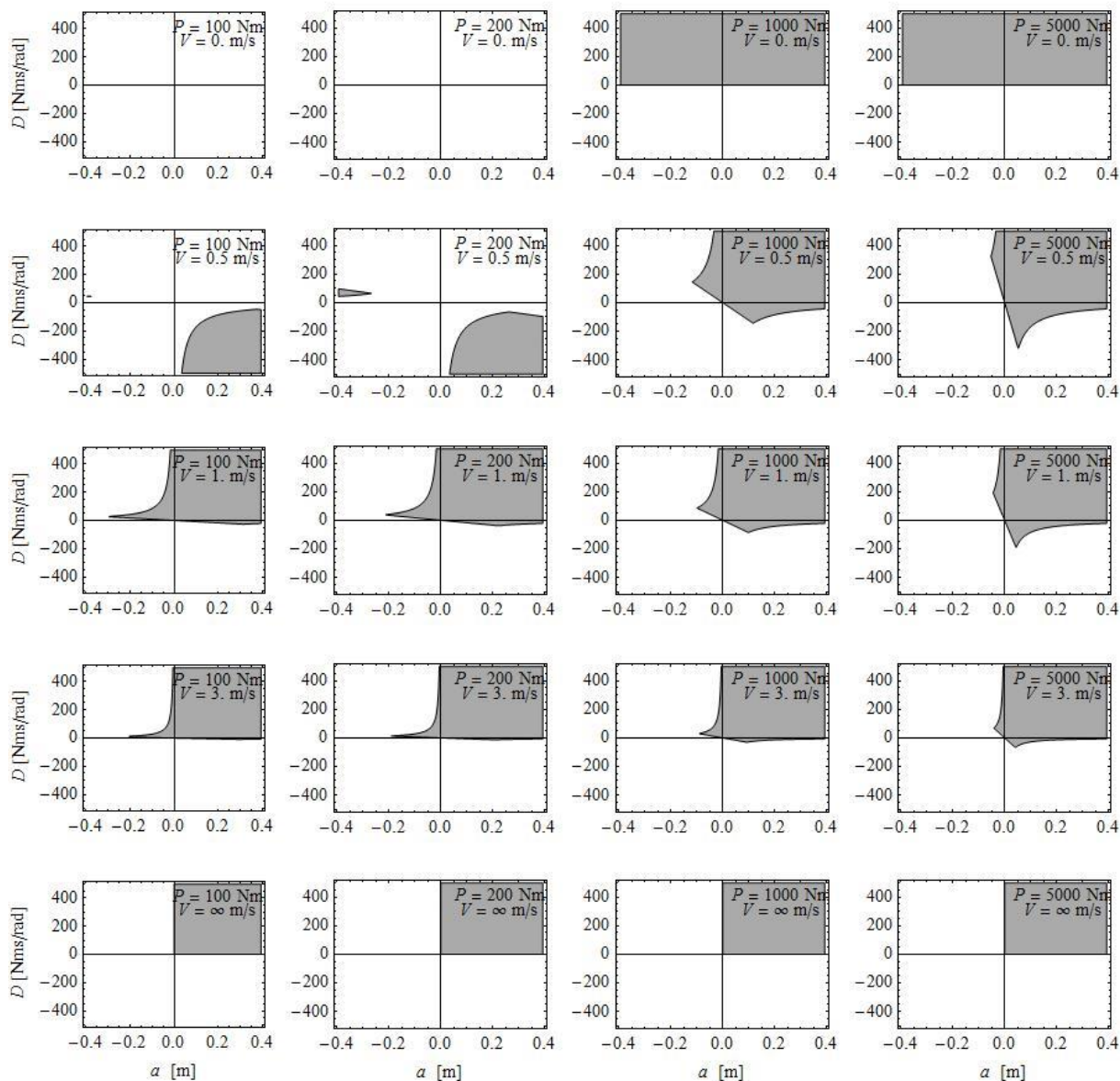
3. ábra Stabilitási térképek jellege, ha a kritikus proporcionális együtthatónál nagyobbat választunk

A 4. ábrán stabilitási térképek egy csoportja látható a következő reális paraméterek felhasználásával: a deszkás magassága $2h = 1.7$ m, tömege $m = 75$ kg, a deszka hossza $2l = 0.7874$ m, $\kappa = 63^\circ$. Fentről lefelé a sebesség növekszik, míg ballról jobbra az arányos tag. Természetesen csak annak van értelme, ha a deszkás pozíciója a deszkán van rajta, arról nem lóghat le sem előre sem hátra tehát a paraméter csak $-l$ és l között változhat, ami jelen esetben közel 0.4 m.

Látható, hogy álló helyzetben alacsony arányos tag mellett nem lehet megállni a gördeszkán függetlenül attól hogy hol állunk és, hogy mekkora a differenciáló tag értéke. P növelése mellett láthatjuk, hogy egy bizonyos érték felett már létezik stabilis tartomány, mégpedig függetlenül a deszkás helyzetétől. Ez érthető, hiszen álló helyzetben a modellünk egy inverz ingává egyszerűsödik, amely kellően nagy torziós rugóval megtartható a függőleges egyensúlyi helyzetében.

Amint elkezdjük a sebességet növelni alacsony arányos tag mellett, akkor a 2. ábrához hasonló stabilitási tartományokat kapunk de ez átvált a 3. ábrán láthatóra egy bizonyos sebesség felett. Tehát ez a modell is magyarázza azt, hogy miért nehéz alacsony sebesség mellett gördeszkázni. Amit elérjük azt a sebességet, ahol a stabilitási térképek struktúráját váltanak, akkor a deszkázás könnyebbé válik. Látható az is, hogy bizonyos mértékű hátul állás is megengedhető, ami egy fontos pozitívum, hiszen ezzel nagyobb szabadságot kap a deszkás. Nagyobb tere van arra, hogy más célokat is elérhessen például a légellenállás szempontjából megfelelő pozíciót vegyen fel a stabilitás megtartása mellett. A sebesség további növelésével azonban a stabilis tartomány mérete egyre kisebb lesz. Megfigyelhető, hogy végtelen nagy sebesség esetén csak a jobb felső síknegyedből választott D , a paraméterek lesznek megfelelőek. Tehát a hátul állás egyáltalán nem engedhető meg. Az arányos tagnak is hasonló hatása van, mint a sebességnek, mégpedig a növelésével egyre kevésbé engedhető meg a hátra állás.

Ezeket a hatásokat könnyű alátámasztani fizikai magyarázatokkal is. Nagyobb sebesség mellett gyorsabban történnek az események, így nehezebb dolga van a deszkásnak, ha jól akar szabályozni. Nagyobb arányos tag pedig azt jelenti, hogy kisebb kitérés esetén is nagyobb választ fog adni a rendszer, ezzel egy esetleges hibát felnagyítva.



4. ábra Stabilitási térkép alakjának változása a differenciáló tag (D) és a deszkás pozíciójának (a) síkján a proporcionális tag (P) és a sebesség (V) függvényében; föntről lefelé a sebesség nő, míg ballról jobbra a proporcionális tag

4. Összefoglalás

A gördeszkázás egy mechanikai modellje került bemutatásra a dolgozatban, ahol a deszka és a deszkás külön tud dőlni és a deszkás egyensúlyozási mechanizmusát egy ideális PD szabályozó végzi. Ennek az anholonom mechanikai rendszernek a mozgásegyenleteit a Gibbs – Appell - módszer segítségével vezetjük el. Az egyenes vonalú egyenletes mozgás stabilitásának vizsgálatát stabilitási térképek segítségével elemeztük.

A stabilitásban fontos szerepet játszik a sebesség, a szabályozó paraméterei, valamint a deszkás helyzete a deszkán. Kiderült az, hogy arányos tag kritikus értéke függetlenül vizsgálható a differenciáló tagétól és a deszkás pozíciójától, de a sebességnek nagy hatása van rá. A sebesség növekedésével kisebb arányos tag is elegendő, tehát, ha az nem volt elégséges alacsony sebességnél attól elégséges lehet magasabbnál. Ezzel viszont nem lehet magyarázni a nagy sebességnél előforduló stabilitásvesztést.

Azonban, stabilitási térképek átfogóbb vizsgálatából kiderül, hogy mind a sebesség, mind pedig a proporcionális tag túlzott növelése ront a stabilitási feltételeken, minden határon túlmenő növelése pedig már nem teszi lehetővé a hátra állást, amire egyébként volt lehetőség.

Köszönetnyilvánítás

A szerzők köszönetüket fejezik ki az OTKA PD105442 projekt keretében kapott támogatásért. A kutatás részben a Bolyai János Kutatási Ösztöndíj támogatásával készült.

Irodalomjegyzék

- [1] Hubbard, M., Lateral dynamics and stability of the skateboard. *Journal of Applied Mechanics*, 46, 1979, pp 931-936, DOI: 10.1115/1.3424680
- [2] Hubbard, M., Human control of the skateboard. *Journal of Biomechanics* 13, 1980., pp. 745-754. DOI: 10.1016/0021-9290(80)90236-5
- [3] Kooijman, J. D. G., Meijaard, J. P., Papadopoulos, J. M., Ruina, A., & Schwab, A. L., A Bicycle Can Be Self-Stable Without Gyroscopic or Caster Effects. *Science*, 332(5), 2011, 339–342. DOI: 10.1126/science.1201959
- [4] Ispolov, Y., Smolnikov, B. A., Skateboard dynamics. *Computer methods in applied mechanics and engineering* 95, 1996, pp. 327-333., DOI: 10.1016/0045-7825(95)00932-9
- [5] Kremnev, A. V., Kuleshov, A. S., Dynamics and simulation of the simplest model of skateboard. *Proceedings of Sixth EUROMECH Nonlinear Dynamics Conference*. Saint Petersburg 2008
- [6] Varszegi, B., Takacs, D., Hogan, S. J., A gördeszkázás dinamikája *Proceedings of XII. Magyar Mechanikai Konferencia*. Miskolc, 2015.
- [7] Varszegi, B., Takacs, D., Downhill Motion of the Skater-Skateboard System. *Periodica Polytechnica. Engineering. Mechanical Engineering* 60.1 2016: 58.
- [8] Insperger, T., and Milton, J., Sensory uncertainty and stick balancing at the fingertip. *Biological Cybernetics*, 108, 2014., pp. 85–101.
- [9] Stepan, G., Delay effects in the human sensory system during balancing. *Philosophical Transactions of The Royal Society*, 367, 2009., pp. 1195–1212.
- [10] Chagdes, J. R., Haddad, J. M., Rietdyk, S., Zelaznik, H. N., & Raman, A., Understanding the Role of Time-Delay on Maintaining Upright Stance on Rotational Balance Boards. *In Proceedings of ASME 11th International Conference on Multibody Systems, Nonlinear Dynamics, and Control*, Boston 2015.
- [11] Rosatello, M., Dion, J., Renaud, F., Garibaldi, L., The skateboard speed wobble. *In Proceedings of ASME 11th International Conference on Multibody Systems, Nonlinear Dynamics, and Control*, Boston 2015.
- [12] Varszegi, B., Takacs, D., & Stepan, G., Skateboard: a Human Controlled Non-Holonomic System. *In Proceedings of ASME 11th International Conference on Multibody Systems, Nonlinear Dynamics, and Control*, Boston 2015.
- [13] Gantmacher, F. *Lectures in Analytical Mechanics*. MIR Publisher, Moscow, Russia. 1975. ISBN-13: 978-0846405511

Lektorálta: Zelei Ambrus, Tudományos Munkatárs, MTA-BME Gépek és Járűvek Dinamikája Kutatócsoport